J. Dieudonné

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

1700 – 1900

Jean Dieudonné

Geschichte der Mathematik 1700-1900

Ein Abriß

Unter Mitarbeit von
Pierre Dugac, William J. und Fern Ellison, Jean Guérindon,
Marcel Guillaume, Guy Hirsch, Christian Houzel,
Paulette Libermann, Michel Loève, Jean-Luc Verley



Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

Jean Dieudonné
Abrégé d'histoire des mathématiques 1700—1900
Tome I et II

Avec la collaboration de P. Dugac, W. J. et F. Ellison, J. Guérindon, M. Guillaume, G. Hirsch, Chr. Houzel, P. Libermann, M. Loève, J.-L. Verley

Hermann, Paris 1978

Aus dem Französischen übersetzt von einem Kollektiv unter Leitung von Ludwig Boll: Horst Antelmann (Kap. 8), Ludwig Boll (Kap. 0, 13), Sonja Brentjes (Kap. 6, 12), Hubert Graßmann (Kap. 9), Brigitte Mai (Kap. 7, Biogr. Anh.), Olaf Neumann (Kap .5), Karl-Heinz Schlote (Kap. 1, 2, 3, 4, 10, 11)



Satz und Druck: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", Bad Langensalza
Printed in the German Democratic Republic
ISBN 3-528-08443-X

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Warum sollte man sich für die Geschichte der Mathematik des achtzehnten und besonders des neunzehnten Jahrhunderts interessieren, das Thema dieses von Jean Dieudonné herausgegebenen Werkes? Es ist sicherlich nicht möglich, auf diese Frage eine allgemeingültige Antwort zu finden, doch es läßt sich leicht eine Reihe von Gründen angeben, die eine Beschäftigung mit gerade dieser Materie reizvoll und gewinnbringend erscheinen lassen: Man möchte die Entstehungsgeschichte unserer heutigen Mathematik kennenlernen und sowohl erfahren, zu welcher Zeit und auf welche Weise die oder gewisse mathematische Teildisziplinen entstanden sind, als auch darüber informiert werden, durch wen, wann, in welchem Zusammenhang bestimmte mathematische Sätze geprägt bzw. bewiesen wurden. Man möchte nicht nur die chronologische Geschichte mathematischer Sachverhalte abgehandelt sehen, sondern wünscht sich auch eine Erörterung der Ursprünge, der Entfaltung und Antriebsmomente mathematischer Probleme, durch welche neue Erkenntnisse gewonnen wurden. Man möchte also die Geschichte nicht nur sach-, sondern — im Idealfall — auch problemgeschichtlich dargestellt sehen. Des weiteren möchte man etwas über Leben und Wirken unserer mathematischen Vorgänger in Erfahrung bringen, z. B. über ihre Probleme, wie sie sich gegenseitig beeinflußt und in welcher Zeit sie gearbeitet haben. Anzumerken bliebe noch, daß die Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik keinesfalls reiner Selbstzweck ist, denn häufig erlangt man das innere Verständnis eines einzelnen Satzes oder eines ganzen Faches am besten dadurch, daß man den historischen Werdegang studiert. Last not least dürfte gerade die Mathematikgeschichte dazu geeignet sein, die — immer stärker zu zerfallen drohende — Einheit der Mathematik aufzuzeigen. (Zudem hat eine eigene dreißigjährige Lehrerfahrung ergeben, daß jede Vorlesung von den Hörern besser aufgenommen wird, wenn man sie gelegentlich geschichtlich auflockert.)

Eine sämtliche Teilgebiete umfassende Geschichte der Mathematik der Zeitspanne von 1700 bis 1900 ist äußerst schwierig darzustellen. Das ist u. a. darauf zurückzuführen, daß sich die Mathematik insbesondere seit Beginn des neunzehnten Jahrhunderts in mehrere selbständige Teilgebiete aufgliedert, die kaum jemand

alle beherrschen kann. Zudem erhebt sich die Frage, wer sie schreiben soll: ein professioneller Historiker oder ein Berufsmathematiker. Der Mathematikhistoriker fühlt sich bestenfalls für die Geschichte der Mathematik von den Ursprüngen bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts zuständig, es sei denn, er ist ein Spezialist für gewisse Teilgebiete der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts. Der professionelle Mathematiker befaßt sich leider im allgemeinen nur allzu wenig mit der Geschichte der Mathematik als Ganzes, sondern allenfalls mit Spezialgebieten oder mit der neueren Geschichte des eigenen Faches, obwohl in dieser Beziehung erfreulicherweise eine Wende eingetreten ist. Inhaltlich gesehen interessiert sich der Historiker mehr für die Geschichte spezieller Entdeckungen mit exakten Quellenangaben, der Mathematiker hingegen mehr für die inneren und globalen Zusammenhänge der mathematischen Sätze und Theorien aus historischer Sicht.

Nun ist besonders in den letzten Jahren eine Reihe von Büchern erschienen, die sich mit ausgewählten Teilgebieten der Mathematik des achtzehnten und des neunzehnten Jahrhunderts beschäftigen, z. B. mit der Geschichte der Funktionalanalysis (A. F. Monna sowie J. Dieudonné), der Modernen Algebra (L. Nový sowie H. Wußing), der Zahlentheorie (A. Weil), der Algebraischen Topologie (J. C. Pont), des Lebesgueschen Integrals (T. Hawkins sowie I. N. Pesin) und der Numerischen Mathematik (H. H. Goldstine). S. D. Chatterjis Bericht (Jahrbuch Überblicke Mathematik 1982, S. 211—218) enthält eine Liste derartiger Werke mit kurzen Besprechungen. Über die Geschichte der Mathematik im Altertum bzw. Mittelalter liegen seit langem ausgezeichnete Werke vor. Gefehlt haben jedoch (was aus den oben genannten Gründen durchaus erklärlich ist) auf die neuere Zeit konzentrierte Gesamtdarstellungen. Genau diese Lücke wird durch das vorliegende Werk geschlossen. Die einzigen vergleichbaren Bücher sind: M. Cantors vierbändige *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, die allerdings nur den Zeitraum bis 1800 umfassen, F. Kleins *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, die *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* — diese wurden jedoch vom Standpunkt des Mathematikers der Jahrhundertwende und nicht aus heutiger Sicht geschrieben — sowie M. Klines *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (1972) — von dessen 1240 Seitenumfang 800 Seiten der Mathematik nach 1700 gewidmet sind.

J. Dieudonné hat in Zusammenarbeit mit P. Dugac (Paris VI), W. J. und F. Ellison (CNRS, Bordeaux), J. Guérindon (Rennes I), M. Guillaume (Clermont), G. Hirsch (Brüssel), C. Houzel (Paris XII), P. Libermann (Paris VII), M. Loève† (Berkeley), J. L. Verley (Paris VII), die außer dem bekannten Mathematikhistoriker Dugac alle historisch stark engagierte, angesehene Fachmathematiker sind, ein Werk vorgelegt, das nicht allein für die Geschichte der Mathematik, sondern für die Mathematik selbst ein besonderes Ereignis darstellt. Im Vordergrund des Werkes steht eine sachgeschichtliche mathematische Beschreibung des Gesamtgebietes par excellence, die streckenweise auch problemgeschichtlich orientiert ist. Daß durch diese Darstellungsform die Mathematiker selbst in den Hintergrund treten, ist verständlich, doch wird dem personengeschichtlich interessierten Leserkreis durch einen Index mit den Lebensdaten von fast 250 Mathematikern Rechnung getragen. Außerdem gibt es gute Bücher, in denen Beschreibungen des Lebens der

Mathematiker im Zusammenhang mit ihren Werken, Schicksalen und ihrer Zeit zu finden sind. Eines der besten neueren Werke, das in diesem Zusammenhang zu nennen wäre, ist das von L. C. Young, *Mathematicians and their Times*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1981.

Inhaltlich ist der von den elf genannten Autoren verarbeitete Stoff in dreizehn Kapitel gegliedert. Im einzelnen sind dies: 1. Die Analysis im achtzehnten Jahrhundert, 2. Algebra und Geometrie bis zum Jahre 1840, 3. Die Algebra seit 1840, 4. Die analytischen Funktionen, 5. Zahlentheorie, 6. Grundlagen der Analysis, 7. Elliptische Funktionen und Abelsche Integrale, 8. Funktionalanalysis, 9. Differentialgeometrie, 10. Topologie, 11. Integrations- und Maßtheorie, 12. Wahrscheinlichkeitsrechnung, 13. Axiomatik und Logik.

In dieser Aufzählung wird der aufmerksame Leser mehrere Gebiete vermissen, z. B. die Algebraische und die Riemannsche Geometrie, die Theorie der komplexen analytischen Räume, die Spektraltheorie von Operatoren, die Distributionentheorie, die Harmonische Analysis. Der Herausgeber hat auf diese Gebiete von vornherein verzichtet, weil sonst der Anspruch des Werkes, für Studierende der Mathematik ungefähr ab dem fünften Semester verständlich zu sein, nicht zu erfüllen gewesen wäre. Des weiteren hat man — entsprechend der französischen Hochschulausbildung der meisten der elf Autoren — den „reineren" Gebieten der Mathematik den Vorzug gegenüber den „angewandteren" (wie z. B. der Fourieranalysis und der Variationsrechnung) gegeben. Außerdem wären der vorgegebene Rahmen und der Umfang erheblich erweitert worden.

Nicht nur Studenten der höheren Semester, sondern auch Berufsmathematiker dürften vom Inhalt dieses Werkes profitieren, und es ist zu erwarten, daß es manchen von ihnen zu weitergehender Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik anregen wird. Vielleicht werden Studierende durch diese Lektüre dazu bewogen, reguläre Vorlesungen über Geschichte der Mathematik zu wünschen, und Dozenten ermutigt, dementsprechende Vorlesungen anzubieten. Die Zahl der Lehrstühle für Geschichte der Mathematik bzw. für verwandte Gebiete im gesamten deutschsprachigen Raum läßt sich fast an den Fingern einer Hand abzählen. Möge dieses Werk einen Aufschwung des Studiums der Geschichte der Mathematik in diesem Raum einleiten!

Die vorliegende Übersetzung wurde unter der Redaktion von Dr. Ludwig Boll durch Dr. Karl-Heinz Schlote (Kap. 1, 2, 3, 4, 10, 11). Dr. Olaf Neumann (Kap. 5), Dr. Sonja Brentjes (Kap. 6, 12), Dipl.-Math. Brigitte Mai (Kap. 7), Dr. Horst Antelmann (Kap. 8), Dr. Hubert Graßmann (Kap. 9) und Dr. Ludwig Boll (Kap. 13) mit aller Sorgfalt ausgeführt, woran sich die schwierige Schlußredaktion anschloß. Die Übersetzer waren darauf bedacht, sich so eng wie möglich an das französische Original zu halten. Bedurften ihrer Meinung nach allerdings Formulierungen im französischen Text der Präzisierung, so wurden Anmerkungen angefügt. So wurden erfreulicherweise z. B. Kapitel 5 und 13 mit zahlreichen Anmerkungen und zusätzlichen Literaturhinweisen versehen. Letztere sind ausdrücklich als solche oder durch einen Stern vor der Nummer, vorliegende deutsche Übersetzungen fremdsprachiger Werke, denen Zitate entnommen sind, durch eine hochgestellte Ziffer hinter der eckigen Klammer gekennzeichnet, genau so auch leicht zugängliche Einzelarbeiten

deutschsprachiger Arbeiten (z. B. in Ostwald's Klassikern). Terminologie und Bezeichnungen stimmen weitgehend mit den in Dieudonnés *Grundzügen der modernen Analysis* benutzten überein. Da dieses Werk in deutscher Übersetzung vorliegt, konnte auf eine Liste der Symbole verzichtet werden.

Nicht nur den Übersetzern, sondern auch den anderen Fachkollegen, die Manuskriptteile gelesen und wichtige Hinweise entweder im Text oder in zusätzlichen Fußnoten gegeben haben, sei gedankt. Diese Kollegen sind Dr. W. Purkert (Kap. 1, 2, 3, 6), Dr. H. Renelt (Kap. 4), Dr. H. Pieper (Kap. 5), Prof. Dr. H. Kurke (Kap. 7), Dr. M. Wollenberg (Kap. 8), Dr. Th. Friedrich (Kap. 9), Dr. H. G. Bothe (Kap. 10), Prof. Dr. H. Michel (Kap. 11), Prof. Dr. U. Küchler (Kap. 12). Besonderer Dank sei Prof. Dr. G. Asser für seine Unterstützung bei der Übersetzung des komplizierten Kapitels 13 ausgesprochen. Schließlich hat der Philologe Dr. E. Steinfeld die deutschen Übersetzungen der Mottos von S. Mallarmé und P. Valéry in Kapitel 12 ermittelt, wofür ihm herzlich gedankt sei. Auch die sorgfältige Arbeit der Druckerei darf nicht unerwähnt bleiben.

Aachen, Herbst 1984 *P. L. Butzer*

Vorwort zur französischen Ausgabe

Gegen die heutige Mathematikerausbildung wird oft kritisch eingewandt, es werde zu zeitig abstrahiert: Es bestehe die Tendenz, die Grundbegriffe von vornherein unter ihrem allgemeinen Aspekt einzuführen, der mit den Objekten der traditionellen Mathematik kaum Berührungspunkte habe. Wenn auch diese Art des Vorgehens häufig in dem Erfordernis seine Rechtfertigung findet, schnell zu Sätzen zu gelangen, die hinreichend allgemein sind, um in verschiedenen Zusammenhängen anwendbar zu sein, bleibt doch zu bedenken, daß diese allgemeinen Begriffe besser verstanden werden können, wenn man sich ihres Ursprungs und der Art und Weise bewußt ist, in der sie sich aus spezielleren, aber der Anschauung näherliegenden Vorstellungen entwickelt haben.

Das vorliegende Werk möchte dieses Verständnis erleichtern, indem es die elementarsten Begriffe der modernen Mathematik in ihren historischen Zusammenhang einordnet, soweit es sich darum handelt, ihre innere Entwicklung und ihre Beziehungen zu den von den Anwendungen der Mathematik auf die Naturwissenschaften aufgeworfenen Problemen zu beschreiben. Dabei wird der Herausbildung der grundlegenden Begriffe und Ergebnisse in den verschiedenen Zweigen der Mathematik während der Zeitspanne nachgegangen, die etwa von 1700 bis 1900 reicht.

Daß wir gerade diese Epoche ausgewählt haben, erklärt sich in erster Linie dadurch, daß erst gegen Ende des siebzehnten Jahrhunderts die grundlegenden Hilfsmittel bereitgestellt waren, die seither in allen mathematischen Verfahren ausschlaggebend sind: die Infinitesimalrechnung und die Methode der kartesischen Koordinaten; sie enthalten im Keim bereits die Verschmelzung von Algebra, Geometrie und Analysis, die für die Mathematik unserer Epoche charakteristisch werden sollte.

Im achtzehnten Jahrhundert war es die Analysis, welche die beherrschende Stellung einnahm; sie faßte die spektakulären Ergebnisse zusammen, die sie in ihren Anwendungen auf Geometrie, Mechanik, Astronomie und Wahrscheinlichkeitsrechnung erzielt hatte. Nach einer Art Pause, die etwa von 1780 bis 1810 dauerte, nahm sie auf allen Gebieten ihren Siegeszug wieder auf, mit der wunder-

baren Entwicklung der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen sowie mit der Entdeckung und der Untersuchung der elliptischen Funktionen, der Abelschen Funktionen, der Modulfunktionen und der automorphen Funktionen, sicherlich dem erstaunlichsten Kapitel ihrer Geschichte; man kann ohne Übertreibung sagen, diese Theorie bilde geradezu das Kernstück der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts. Durch ihre mannigfachen Verzweigungen hängt die Theorie der elliptischen Funktionen und der Modulfunktionen tatsächlich sowohl mit dem damaligen Wiederaufleben der Algebra, insbesondere der Entwicklung der Gruppentheorie nach allen Richtungen, als auch mit dem großartigen Aufblühen der Theorie der algebraischen Zahlen, das mit Gauß beginnt, zusammen, von der sie sich nicht mehr trennen läßt und der sie die tiefliegendsten Probleme lieferte. Demgegenüber sind es die Probleme der Abelschen Funktionen, die, mit Riemann, zur Entstehung der modernen algebraischen Geometrie und der zeitgenössischen Topologie führten.

Gerade im Laufe dieser Entwicklung sahen sich die Mathematiker dieser Epoche veranlaßt, unmerklich und ohne daß es in ihrer Absicht gelegen hätte, eine Vielzahl neuer „abstrakter" Gebilde zu ersinnen: Räume beliebiger Dimension, verschiedenartigste algebraische und topologische Strukturen usw., die nur noch schwache Beziehungen zu den klassischen Begriffen „Zahl" und „Figur" haben, ohne die aber die neuen Ergebnisse ihre volle Tragweite nicht erlangen können.

Ein dritter Aspekt der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts schließlich bestand in dem Bemühen, über die Natur der Grundbegriffe und der zulässigen Schlußweisen nachzudenken; dies begann um 1800 und sollte — auf der Grundlage einer gemeinsamen Basis, der Mengenlehre — zu der Weierstraßschen „Strenge" in der Analysis und der axiomatischen Darlegung aller mathematischen Theorien (und nicht länger mehr nur der Geometrie) führen.

In dieser Weise haben sich gegen Ende des Jahrhunderts alle Themenkreise der modernen Mathematik herausgebildet. Die Leser dieses Werkes werden, ohne daß sie über mehr Kenntnisse zu verfügen brauchen, als ihnen in den ersten zwei bis drei Jahren an der Universität vermittelt werden, erkennen können, daß die den mathematischen Begriffen gegebene abstrakte Formulierung weder zufällig noch willkürlich ist. Zweifellos werden sie dann in der Lage sein zu verstehen, daß diese Formulierung den mathematischen Begriffen eine wesentlich größere Spannweite verliehen hat, und zu begreifen, daß es gerade dadurch den Mathematikern des zwanzigsten Jahrhunderts möglich wurde, schwierige Probleme zu lösen, die den klassischen Methoden widerstanden hatten: Diese Probleme wurden in einen allgemeineren Zusammenhang eingeordnet, der sie den leistungsfähigen neuen Hilfsmitteln zugänglich machte.

Inhalt

0. Einführung

von Jean Dieudonné

Das Ziel dieses Werkes besteht darin, die Entwicklung einiger wichtiger mathematischer Theorien etwa seit dem Jahre 1700 kurz zu beschreiben. Für die Geschichte der Mathematik in den früheren Epochen möge der Leser auf eines der im Literaturverzeichnis zu dieser Einführung angegebenen Bücher zurückgreifen. Die Geschichte der Anwendungen der Mathematik auf andere Wissenschaften konnte nicht behandelt werden, da dies sehr umfangreiche Darlegungen erfordert hätte; hierüber möge sich der Leser an Hand der im Literaturverzeichnis genannten Werke informieren. Immerhin werden in jedem Kapitel die Hauptprobleme aufgeführt, die von den Experimentalwissenschaften aufgeworfen wurden, soweit sie mit den in dem Kapitel behandelten mathematischen Fragen eng zusammenhängen.

Beim Leser werden mathematische Kenntnisse mindestens in dem Umfang vorausgesetzt, wie sie in den ersten beiden Jahren an der Universität vermittelt werden. Wenn im Laufe der Darlegungen von neueren Theorien die Rede ist oder von solchen, die im allgemeinen nicht in den Studienplänen enthalten sind, geben wir entweder eine kurze Definition der unentbehrlichen Begriffe oder wir verweisen den Leser auf ein leicht zugängliches Werk, in dem diese Definitionen gebracht werden und das im Literaturverzeichnis des betreffenden Kapitels aufgeführt ist.[1])

Dies ist jedoch offenbar nur in einem bestimmten Maße möglich; auch haben wir es nicht für sinnvoll gehalten, auf die Geschichte solcher modernen Theorien einzugehen, in denen sich so viele neue Begriffe häufen, daß sie für den damit nicht vertrauten Leser unverständlich zu werden droht. Als Beispiele nennen wir die algebraische Geometrie, die Riemannsche Geometrie, die moderne Theorie der komplexen analytischen Räume, die Spektraltheorie der Operatoren, die Ergodentheorie, die Theorie der Distributionen und ihrer Anwendungen auf die partiellen

---

[1]) Als einführendes Werk für Leser, die sich durch Sprache und Geist der modernen Mathematik irritiert fühlen könnten, empfehlen wir das Buch: H. Griffiths and P. Hilton, *A comprehensive text book of classical mathematics: A contemporary interpretation*, van Nostrand-Reinhold, London 1970 (Nachdruck: Springer-Verlag, New York 1978; deutsche Übers.: *Klassische Mathematik in zeitgenössischer Darstellung*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1976–1978, in 3 Bänden). Es wird in allen Kapiteln mit [G–H] zitiert.

Differentialgleichungen, die Theorie der Lieschen Gruppen und die harmonische Analysis sowie schließlich einen großen Teil der algebraischen Topologie und der Differentialtopologie.[1]) Einige Hinweise auf Literatur über diese schwierigeren Theorien finden sich in den verschiedenen Kapiteln, gedacht für solche Leser, die den Wunsch und die Energie haben, sich tiefer einzuarbeiten, um die Geschichte dieser Theorien kennenzulernen.

Selbstverständlich konnte im Rahmen dieses Werkes nicht versucht werden, jede Frage erschöpfend zu behandeln; die Verfasser (in den meisten Fällen keine *Mathematikerhistoriker*) sind auf zahlreiche Entwicklungen bewußt nicht eingegangen, die sie für weniger wichtig hielten, sei es vom historischen Standpunkt aus, sei es, daß diese Entwicklungen in der heutigen Mathematik keine wesentliche Rolle mehr spielen.

Ebenso wenig wie die anderen Wissenschaften (und trotz ihres Rufes, besonders abstrakt zu sein) ist die Mathematik eine vom Menschen losgelöste Wissenschaft, und es wäre absurd, eine Geschichte der Ideen völlig von der Geschichte der Menschen, die sie hervorgebracht haben, zu trennen. Ein Anhang am Schluß des Werkes gibt einige biographische Notizen zu den meisten der im Text genannten Mathematiker und weist gegebenenfalls auf einige vollständigere biographische Darstellungen hin. Außerdem dürfte es nicht überflüssig sein, in dieser Einführung einige allgemeine Bemerkungen über die Art und Weise anzufügen, in der die hauptberuflichen Mathematiker in den vergangenen drei Jahrhunderten gelebt und gearbeitet haben.

0.1. Der Mathematiker

Die Mathematiker, von denen in dieser Geschichte die Rede ist, sind diejenigen, die sich durch Veröffentlichungen ausgewiesen haben, in denen sie ihre Entdeckungen beschreiben. Die Fähigkeit zum mathematisch Schöpferischen ist eine *Begabung gewisser menschlicher* Wesen, von der man mit gutem Grund annehmen kann, sie sei unabhängig von der Rasse und, aber nur bis zu einem gewissen Punkt, von der Natur der umgebenden Gesellschaft. Es gibt tatsächlich selbst unter den größten Genies kein Beispiel für einen Mathematiker, der aus dem Nichts, sozusagen ab ovo, das mathematische Wissen seiner Zeit neu entdeckt hätte; was in dieser Hinsicht über Pascal erzählt wird, ist nur eine Legende. Das gesellschaftliche Milieu muß daher so beschaffen sein, daß der zukünftige Mathematiker wenigstens einen elementaren Unterricht erhalten haben kann, der ihn mit echten Beweisen bekannt gemacht, seine Neugier geweckt und ihm dann ermöglicht hat, sich in die Mathematik seiner Zeit einzuarbeiten, vorausgesetzt, er hat Zugang zu den

[1]) Aus diesem Grunde haben wir die Geschichte der Entwicklung von Ideen, die in diese Theorien münden, manchmal schon vor 1900 abbrechen müssen. Dagegen haben wir bei allen Problemen, zu deren Verständnis es nicht notwendig ist, eine Vielzahl abstrakter und subtiler Begriffe einzuführen, die Geschichte der Ideen häufig bis zur heutigen Epoche fortgeführt.

Werken, in denen sie dargelegt ist. Bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts gibt es keine höhere Ausbildung — im eigentlichen Sinne — in Mathematik, und von Descartes und Fermat bis zu Gauß und Dirichlet haben sich die großen Mathematiker fast alle ohne Lehrer selbst gebildet, einfach durch das Studium der Werke ihrer Vorgänger. Wahrscheinlich kommen auch heute zahlreiche mathematische Talente niemals zur Entfaltung, weil die günstige gesellschaftliche Atmosphäre fehlt, so daß es nicht erstaunlich ist, daß man keine Mathematiker aus den wenig entwickelten Ländern kennt. Selbst in den höchst entwickelten Ländern braucht jedoch die Art des Elementarunterrichts dem Aufblühen mathematischer Begabungen nicht förderlich zu sein, wenn dieser religiösen oder politischen Einschränkungen unterworfen ist oder ausschließlich durch utilitaristische (praktizistische) Voreingenommenheit geprägt wird, wie das bis zu Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts in den Vereinigten Staaten der Fall war.

In Gesellschaftssystemen, in denen der Unterricht relativ breiten Bevölkerungsschichten zuteil wird (gegebenenfalls mittels Studienbeihilfen), entstammen die Mathematiker unterschiedlichsten sozialen Gruppen. Sie können aus dem Adel kommen wie Fagnano, Riccati oder d'Alembert, aus der Großbourgeoisie hervorgehen wie Pascal, Kronecker, Jordan, Poincaré oder v. Neumann, aber auch aus sehr bescheidenem Milieu wie Gauß oder E. Cartan; die meisten sind in oft sehr ärmlichen Familien des Mittelstandes geboren.

Die mathematische Begabung zeigt sich meist um das sechzehnte Lebensjahr herum; dies kann aber durch einen Unterricht verzögert werden, welcher dem Beweisbegriff keinen Platz einräumt, wie dies in den Vereinigten Staaten geschah (siehe oben). Jedenfalls liegt, entgegen einer ziemlich weit verbreiteten Meinung, der Beginn der schöpferischen Phase selten vor dem 20. bis 25. Lebensjahr; Pascal, Clairaut, Gauß und Galois sind Ausnahmen. Sind die äußeren Bedingungen seiner Aktivität günstig, so kann damit gerechnet werden, daß ein schöpferischer Mathematiker noch mit 50 bis 55 Jahren wichtige Entdeckungen machen wird. Gelegentlich werden einige Beispiele schöner Sätze genannt, die von Sechzigjährigen entdeckt und bewiesen wurden, doch sind kaum solche bekannt, deren Autor die Siebzig überschritten hat.

Wie bei vielen anderen Wissenschaftlern wird das Leben des Mathematikers von einer unbändigen Neugierde beherrscht, einem Verlangen, die untersuchten Probleme zu lösen, das zur Leidenschaft wird und dahin führt, daß er sich fast völlig der umgebenden Wirklichkeit entfremdet. Gerade dies ist die Ursache der sprichwörtlichen Zerstreutheit und Verschrobenheit der berühmten Mathematiker. Die Entdeckung eines Beweises ergibt sich im allgemeinen erst nach Perioden intensiver und dauernder Konzentration, die sich manchmal während vieler Monate oder Jahre wiederholen können, bis das Ergebnis schließlich erreicht ist. Gauß hat bekannt, nach dem Vorzeichen eines algebraischen Ausdrucks mehrere Jahre lang gesucht zu haben, und ebenso lang haben Kummer und Dedekind gebraucht, um die Grundlagen der Theorie der algebraischen Zahlen auszuarbeiten.

Was ein Mathematiker vor allem sucht, ist die Möglichkeit, über hinreichend Zeit zu verfügen, um sich seinen Arbeiten widmen zu können; aus diesem Grunde sind es — seit dem neunzehnten Jahrhundert — die Tätigkeiten in der Lehre an

Universitäten oder technischen Hochschulen, an denen die Anzahl der Vorlesungsstunden relativ niedrig und die Ferienzeit lang ist, die der Mathematiker bevorzugt.[1]) Die Bezahlung ist meist von sekundärer Bedeutung, und man hat kürzlich, unter anderem in den Vereinigten Staaten, erlebt, daß Mathematiker lukrative Stellungen in der Industrie aufgegeben haben, um an die Universität zurückzukehren, selbst wenn sie dabei erhebliche Geldeinbußen in Kauf nehmen mußten.

Übrigens hat erst in jüngster Zeit die Anzahl der Lehrkräfte an den Universitäten einigermaßen zugenommen; vor 1940 war sie sehr beschränkt, sogar in den großen Ländern, uns bis zum Jahre 1920 haben sich Mathematiker vom Range eines Kummer, Weierstraß, Graßmann, Killing und Montel während eines Teiles ihrer Laufbahn damit zufrieden geben müssen, an einer höheren Schule (als „Gymnasialprofessor") zu unterrichten. Diese Situation bestand in den kleineren Ländern mit wenig Universitäten noch sehr lange.

Vor dem neunzehnten Jahrhundert waren die Arbeitsmöglichkeiten eines Mathematikers noch geringer, und wenn jemand weder persönliches Vermögen besaß noch einen Mäzen oder eine Akademie hinter sich hatte, die ihm ein ausreichendes Einkommen sicherten, blieb ihm nur der Ausweg, Astronom oder Geodät zu werden (Gauß mußte einen erheblichen Teil seiner Zeit solchen Tätigkeiten widmen). Zweifellos ist es gerade dieser Umstand, der die sehr geringe Zahl von begabten Mathematikern im achtzehnten Jahrhundert erklärt.

Eben diese Notwendigkeit, den Problemen, die sie zu lösen versuchen, lange Stunden des Nachdenkens zu widmen, schließt fast automatisch die Möglichkeit aus, sich Aufgaben aus anderen Gebieten, die stark in Anspruch nehmen (beispielsweise in der Verwaltung), zu stellen und dabei ernsthaft wissenschaftlich zu arbeiten. Ein vermutlich einmaliger Fall ist Fourier, der gerade zu der Zeit, als er die Theorie der Wärme ausarbeitete, Präfekt de l'Isère war. Soweit Mathematiker bekannt sind, die hohe Verwaltungs- oder Regierungsfunktionen bekleideten, liegt die Sache so, daß sie während der Dauer dieser Tätigkeiten ihre Forschungen praktisch aufgegeben haben.

Aus demselben Grunde ist es selten, daß ein Mathematiker in einer politischen Partei aktiv mitarbeiten kann, ohne dabei seine Probleme zu vernachlässigen. Übrigens haben Mathematiker bis vor ganz kurzer Zeit nur selten extreme politische Positionen eingenommen: Die Fälle eines Galois, eines streitbaren Republikaners, oder eines Cauchy, eines überzeugten Legitimisten, der lieber ins Exil ging als auf einen Herrscher, den er als Usurpator ansah, den Eid zu leisten, sind im Laufe der Geschichte Ausnahmen geblieben. Da die Mathematiker Rede- und Pressefreiheit sehr hoch schätzen, sind sie im allgemeinen Anhänger liberaler Auffassungen und finden sich mit Despotien (oder, wie man heute sagt, mit Diktaturen) schwer ab. Gewöhnlich beschränken sie sich aber darauf, als gute Staatsbürger in dem politischen Regime zu leben, in dem das Schicksal sie zur Welt kommen ließ; sie beteiligen sich viel weniger an Protestbewegungen oder gar Revolten als ihre Zeitgenossen

---

[1]) Diese so kostbare Zeit wird übrigens in unseren Tagen immer mehr durch vielfältige nebensächliche und ermüdende Aufgaben beschnitten.

in Kunst und Literatur. Und ohne daß sie sich aktiv um Ehrungen bemühen, sind die meisten von ihnen dafür nicht unempfänglich.

Mathematiker zu sein, bedeutet nicht, gegen menschliche Schwächen gefeit zu sein. Jede Sammlung von Anekdoten der Mathematik kann manches Beispiel dafür liefern, daß sich Eitelkeit, Neid, Böswilligkeit, Falschheit und Cliquenherrschaft schamlos breit machten. Die echten Kontroversen zwischen Mathematikern, ähnlich denen, die noch immer die sogenannten spekulativen Wissenschaften (als Beispiele seien Archäologie, Geologie, Kosmologie genannt) erregen, sind relativ selten und haben nur getobt, als es sich um schlecht begründete Theorien handelte (Infinitesimalrechnung im siebzehnten und achtzehnten Jahrhundert, „Grundlagenkrise“ um 1900 (vgl. Kapitel 13), italienische algebraische Geometrie etwas später); diese Kontroversen haben sich in dem Maße beruhigt, in dem die Grundbegriffe und die zulässigen Schlußweisen geklärt wurden. Im Berufsleben der Mathematiker jedoch (wo der Ruf in den wissenschaftlichen Kreisen ein wichtiges Kriterium für das Vorwärtskommen ist), war der Kampf um die besten Plätze oft sehr hart, besonders wenn es nur wenige davon gab; und Prioritätsansprüche, die manchmal mit Anschuldigungen des Plagiats einhergehen, werden seit der heroischen Epoche der italienischen Algebraiker des sechzehnten Jahrhunderts und der Begründer der Infinitesimalrechnung immer wieder erhoben.

0.2. Die „Mathematikergemeinde“

Die Arbeit in einer Gruppe, wie sie in den Experimentalwissenschaften praktiziert wird, ist in der Mathematik ziemlich selten, da die meisten Mathematiker sehr wohl empfinden, wie schwierig es ist, ernsthaft nachzudenken, wenn dies nicht in Ruhe und Abgeschiedenheit geschehen kann. Die einer Zusammenarbeit entspringenden Ergebnisse — und solche sind gar nicht so selten — kommen meist so zustande, daß jeder der Partner das, was er als einzelner erzielen konnte, zur Diskussion stellt, in der Überzeugung, daß jeder von den Ideen seiner Partner profitiert, so daß alle von neuen Grundlagen aus voranschreiten können. Bei dem bekanntesten Beispiel einer langjährigen Zusammenarbeit zwischen Mathematikern, dem der Engländer Hardy und Littlewood, wohnte der eine in Oxford, der andere in Cambridge; sie sahen einander nur selten, und ihre Zusammenarbeit vollzog sich ganz und gar brieflich.

Wenn auch die meisten Veröffentlichungen von einzelnen Forschern stammen, sind doch auch diejenigen Mathematiker selten, die — wie Graßmann, Hensel oder E. Cartan — lange Zeit und dabei fruchtbar ganz auf sich allein gestellt arbeiten können. In diesen drei Fällen beruhte dies auf der Neuartigkeit der Ideen, die von den Zeitgenossen nicht verstanden wurden. Die meisten werden entmutigt, wenn sie nicht die Möglichkeit haben, ziemlich häufig mit Kollegen in Gedankenaustausch zu treten, in der Hoffnung, von ihnen verstanden zu werden; die Abstraktheit ihrer Untersuchungen erschwert den Gedankenaustausch mit Nichtmathematikern außerordentlich.

Bis zur Mitte des siebzehnten Jahrhunderts waren die einzigen Möglichkeiten der Kommunikation der private Briefwechsel (der gelegentlich durch wohlwollende Briefschreiber wie Mersenne oder Collins vermittelt wurde), persönliche Besuche und manchmal der Druck eines Werkes auf Kosten des Verfassers (wenn nicht ein Mäzen sie zu übernehmen bereit war). Die ersten Veröffentlichungen, die regelmäßig und auf Kosten von Akademien erschienen, tauchten um das Jahr 1660 auf, aber ihre Anzahl blieb niedrig, und die wenigen wissenschaftlichen Zeitschriften, die etwa bis zum Jahre 1820 veröffentlicht wurden, widmeten sich den Wissenschaften ohne Unterschied der Disziplin. Die ersten rein mathematischen Zeitschriften, welche die Ländergrenzen überschreiten, sind das 1826 gegründete *Crellesche Journal*[1]), dem kurz danach im Jahre 1835 das *Liouvillesche Journal* folgte.

Zu dieser Zeit jedoch beginnen sich schon die Sprachbarrieren zu erheben. Im siebzehnten Jahrhundert wurden fast alle mathematischen Veröffentlichungen in lateinischer Sprache herausgegeben (die *Géometrie* von Descartes und einige Schriften von Pascal waren die einzigen bemerkenswerten Ausnahmen). Diese Tradition begann im achtzehnten Jahrhundert nachzulassen: Die französischen Mathematiker schrieben nur noch in ihrer Sprache, und außerhalb Frankreichs wurden bestimmten Lehrwerke in der Muttersprache ihrer Verfasser herausgegeben. Nach Gauß verschwand der Gebrauch des Lateinischen in den wissenschaftlichen Veröffentlichungen schnell. Dies mußte natürlich die Verbreitung neuer Ergebnisse verlangsamen, besonders in Frankreich, wo vor dem Ende des neunzehnten Jahrhunderts das Studium der lebenden Sprachen kaum gepflegt wurde. Ein geradezu blamables Beispiel ist die Tatsache, daß die Pariser Akademie der Wissenschaften für die Lösung eines zahlentheoretischen Problems einen Wettbewerb ausgeschrieben hatte, das mehr als zwanzig Jahre vorher von H. J. S. Smith erledigt worden war (vgl. 5.10.); offenbar lasen Hermite und Jordan keine englischen Arbeiten.

Während des ganzen neunzehnten Jahrhunderts nahm die Anzahl der mathematischen Zeitschriften regelmäßig weiter zu; diese Steigerung beschleunigte sich nach 1920 mit der Zunahme der Anzahl der Länder, in denen sich ein mathematisches Leben entwickelte, um seit 1950 zu einer wirklichen Explosion zu führen. Heute gibt es in der Welt mehr als vierhundert mathematische Periodika. Seit dem letzten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts machte sich das Bedürfnis nach Zeitschriften bemerkbar, die sich ausschließlich damit befassen, andere Veröffentlichungen aufzuführen und kurz zu analysieren. Das alte, 1868 gegründete *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, das nach dem Kriege 1914—1918 durch einen Rückstand von mehreren Jahren beeinträchtigt war, hat 1932 dem *Zentralblatt für Mathematik* seinen Platz abgetreten. An seine Seite traten 1940 die amerikanischen *Mathematical Reviews* und 1953 das russische *Referativnyj Žurnal Matematika*. Trotz einer riesigen Vergrößerung ihrer jährlichen Seitenzahl und ihrer Mitarbeitergremien haben diese Referatenorgane große Mühe, nicht von der stets ansteigenden Flut der Arbeiten, die sie analysieren sollen, überspült zu werden.

---

[1]) = Journal für die reine und angewandte Mathematik. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

Parallel zu dem riesigen Anwachsen der Zahl der Periodika wuchs auch die Anzahl der Lehrwerke, die häufig in (manchmal sehr spezialisierten) Reihen zusammengefaßt werden. Die ältesten dieser Reihen sind die berühmte *Collection Borel* in Frankreich (ab 1898), die englischen *Cambridge Tracts* (ab 1905), die *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* und die *Ergebnisse der Mathematik*, die in Deutschland kurz nach 1920 zu erscheinen begannen. Sie haben vielen anderen Reihen als Vorbild gedient, nicht nur in diesen Ländern selbst, sondern vor allem auch in der Sowjetunion und den Vereinigten Staaten. Heute geschieht es selten, daß es länger als zehn Jahre dauert, bis eine neue Theorie Gegenstand von Lehrwerken wird.

An den deutschen Universitäten entwickelte sich um die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts die Praxis der Seminare. Unter der Leitung eines Professors oder auch mehrerer Professoren analysieren verschiedene Mathematiker, darunter auch Teilnehmer von außerhalb, unter denen sich häufig Doktoranden und Habilitanden befinden, den Stand eines Problems oder lassen die bemerkenswertesten neuen Ergebnisse Revue passieren; dies geschieht in einer Reihe von Veranstaltungen, die sich über das ganze Studienjahr erstrecken. Nach 1920 hat sich diese Einrichtung über die ganze Welt verbreitet; Niederschriften der dort gehaltenen Vorträge werden häufig vervielfältigt und können so einen stets größeren Interessentenkreis erreichen. Das gilt ebenso für Spezialvorlesungen, die an zahlreichen Universitäten gehalten werden.

Seit langem weiß man jedoch, daß in der Wissenschaft mündliche Mitteilungen häufig fruchtbarer sind als die Lektüre von Abhandlungen. Daß Studenten die Universität wechseln, ist seit dem Mittelalter Tradition, und diese hat sich bis in unsere Tage erhalten, besonders in (der Bundesrepublik, d. Ü.) Deutschland. Überdies sind Einladungen an Professoren, an anderen als an „ihrer" Universität zu lehren und zu arbeiten, ziemlich häufig geworden.

Dieses Bedürfnis nach persönlichen Kontakten hat sich seit 1897 institutionalisiert, zuerst im Rahmen der Internationalen Mathematikerkongresse, die seit 1900 alle vier Jahre stattfinden (mit zwei Unterbrechungen durch die Weltkriege). Die stets wachsende Zahl der Teilnehmer an diesen Kongressen hat ihre Effektivität etwas verringert, und seit 1935 gibt es immer mehr Zusammenkünfte in kleinerem Maßstab: Kolloquien, Symposien, Arbeitstagungen, Sommerschulen usw., wo sich Mathematiker mehr oder weniger enger Spezialgebiete treffen, ihre neuesten Ergebnisse vorstellen und auf der Tagesordnung stehende Probleme diskutieren.

Vor 1800 hatten die wenigen und an einzelnen Orten lebenden Mathematiker kaum Schüler im eigentlichen Sinne des Wortes. Mit der Entwicklung der Universitäten im neunzehnten Jahrhundert und dem Anwachsen der Zahl der Forscher entstanden jedoch Gruppierungen von Mathematikern, die man als *Schulen* bezeichnen kann. Dabei handelt es sich nicht um Einheiten, die zeitlich und örtlich fest umrissen sind, sondern um Gruppen von Mathematikern mit einer kontinuierlichen Tradition, gemeinsamen Lehrern, Themenkreisen, bevorzugt benutzten Methoden usw.

Zeitlich die erste war die Pariser Schule um Lagrange, Laplace und Legendre, dann um Fourier, Poisson, Cauchy, Poncelet, Chasles, Hermite und Jordan. Danach

erschienen in England die Cambridger Schule (Peacock, de Morgan, Boole, dann Cayley und Sylvester), in Deutschland die Schulen in Berlin (Jacobi, Dirichlet, dann Kummer, Kronecker und Weierstraß) und Göttingen (Dirichlet, Riemann, Clebsch, Dedekind, dann Klein und Hilbert); das letzte Drittel des neunzehnten Jahrhunderts ist gekennzeichnet durch das Aufkommen der italienischen Schulen (Beltrami, Cremona, Ascoli, Arzelà) und die russischen Schulen (Čebyšev, Markov, Zolotarev), während die älteren sich zerstreuten und verzweigten.

Bis zum Weltkrieg 1914—1918 blieben die französischen und die deutschen Schulen, von ihren hervorragendsten Vertretern H. Poincaré bzw. Hilbert, beides universelle Genies von seltener Breite, beherrscht, die größten und vielseitigsten; die Vorherrschaft, die sie in der Mathematik ausübten, ist unbestritten. Daneben waren weitere Zentren der mathematischen Forschung, welche die meisten und aktivsten Teilnehmer zählten, Italien und England. Ersteres glänzte insbesondere durch seine Schulen der algebraischen Geometrie (Castelnuovo, Enriques, Severi), der Differentialgeometrie (Levi-Civita, E. E. Levi) und der Funktionalanalysis um Volterra; um 1935 kommt es zu einem Niedergang, von dem sich das Land erst in jüngster Zeit zu erholen beginnt. Indessen gruppierte sich nach Cayley und Sylvester die englische Schule nach einer Umorientierung seit etwa 1910 um Hardy und Littlewood und trat für etwa dreißig Jahre in eine fruchtbare Epoche von Entdeckungen auf dem Gebiet der klassischen Analysis und ihrer Anwendungen auf die Zahlentheorie ein, ehe sie in unseren Tagen einer hervorragenden Phalanx von Algebraikern und Topologen das Feld überläßt.

Nach 1918 zog sich Frankreich, dessen wissenschaftlicher Nachwuchs auf den Schlachtfeldern verblutet war, für etwa zehn Jahre ganz auf sich zurück, und mit Ausnahme von E. Cartan und Hadamard beschränkte sich die französische Schule auf das enge Gebiet der Theorie der Funktionen einer reellen bzw. einer komplexen Veränderlichen, deren beträchtliche Weiterentwicklung seit etwa 1900 übrigens besonders ihr Verdienst gewesen ist (mit Picard, Hadamard, E. Borel, Baire, Lebesgue, dann mit Montel, Denjoy, Julia). In Deutschland dagegen, wo man das Leben seiner jungen Wissenschaftler besser zu schützen verstanden hatte, konnten die Traditionen der Universalität bewahrt werden; außerdem blühte dort eine bemerkenswerte Schule in Algebra und Zahlentheorie auf (E. Noether, Siegel, Hecke, E. Artin, Krull, R. Brauer, H. Hasse, van der Waerden (ein Holländer)), welche die im Keim schon in den Arbeiten von Dedekind und Hilbert vorhandene Tendenz zur Axiomatisierung zur Geltung brachte. Zwischen 1920 und 1933 sicherten diese Mathematiker den deutschen Universitäten, an denen sich Studenten aus aller Herren Länder drängten (insbesondere die jungen Franzosen, die kamen, um an die bei ihnen zuhause vergessenen Traditionen anzuknüpfen), einen außergewöhnlichen Glanz und eine besondere Ausstrahlung, die durch die Hitlerzeit jäh und grausam unterbrochen wurden. Es dauerte bis in die fünfziger Jahre, ehe sich die deutsche Schule (in der Bundesrepublik Deutschland, d. Ü.) erholte, diesmal (in merkwürdiger Umkehrung der Verhältnisse) unter dem Einfluß der französischen Mathematiker „bourbakistischer" Richtung.

Das hervorstechendste Phänomen seit 1914 ist jedoch die Tatsache, daß auf der mathematischen Szene lebenskräftige nationale Schulen auf den Plan traten, wo

man bis dahin nur ganz weniger Gelehrte von internationalem Ruf gekannt hatte. Schon gegen Ende des ersten Weltkrieges hatten sich Rußland und Polen bemerkbar gemacht, und dort taucht plötzlich eine Plejade von Mathematikern erster Garnitur auf (Lusin, Souslin, dann Urysohn, P. S. Alexandroff, Kolmogoroff, Vinogradov, Pontrjagin, Petrovski, Gel'fand in der Sowjetunion, Sierpiński, Janiszewski, Kuratowski, Banach, dann Hurewicz, Eilenberg, Zygmund, Schauder in Polen); ihren Arbeiten verdanken wir insbesondere die Entwicklung der Grundzüge der modernen Topologie und der Funktionalanalysis. In der Sowjetunion hat dieser Schwung angehalten und auch weiterhin zahlreiche sehr bedeutende Mathematiker hervorgebracht. Polen, wo die Hälfte der Mathematiker von den Nazis grausam umgebracht worden war, hat erst vor kurzem die Lücken schließen und seinen Aufstieg fortsetzen können.

In den Vereinigten Staaten hat sich eine mathematische Tradition viel langsamer herausgebildet; dieser Prozeß hat sich über drei Generationen erstreckt. Um 1900 entstanden (insbesondere mit E. H. Moore, Dickson, Osgood, dann mit G. D. Birkhoff, Veblen, Alexander, Lefschetz (der russischer Herkunft ist), M. Morse), hat die amerikanische Schule nach dem ersten Weltkrieg und besonders nach 1933 durch die massenhafte Einwanderung europäischer Gelehrter, die von den totalitären Regimen vertrieben worden waren, eine unerwartete Verstärkung erhalten. Diese Wissenschaftler waren es auch, die das nach 1940 erfolgte Aufblühen der heutigen eigenständigen hervorragenden amerikanischen Schulen stark gefördert haben. Diese Schulen haben sich durch aufsehenerregende Entdeckungen unter anderem in der Gruppentheorie, der algebraischen Topologie und der Differentialtopologie einen allerersten Platz erobert.

In Japan hat das Ende des zweiten Weltkrieges eine Wiederholung des in der Sowjetunion nach 1920 zu beobachtenden explosiven Phänomens gebracht; da die sehr aktive japanische Schule damals für ein starres und finanzschwaches Universitätssystem zahlenmäßig zu stark war, hat sie zugunsten anderer Länder (insbesondere der Vereinigten Staaten) auf mehrere ihrer besten Vertreter verzichten müssen. Analog ist die Lage in denjenigen Ländern, in denen die Entwicklung einer zahlenmäßig starken mathematischen Schule aus verschiedenen Gründen auf Schwierigkeiten stößt, in Entwicklungsländern oder in Ländern mit geringer Bevölkerungszahl. Nur die amerikanischen, sowjetischen und japanischen Schulen sind heute stark genug, um alle mathematischen Disziplinen zu bearbeiten; die anderen Länder müssen sich mehr oder weniger spezialisieren (auf Gebiete, die durchaus von Zeit zu Zeit wechseln können, wie wir oben gesehen haben).

Daß aktive und zahlenmäßig starke mathematische Schulen eine große Anziehungskraft ausüben, ist leicht zu verstehen. Auf sich allein gestellt, läuft der junge Mathematiker schnell Gefahr, vor der Fülle der Literatur, in der er ohne Kompaß umherirrt, zu kapitulieren. In einem bedeutenden Zentrum, wo er Vorträge seiner Lehrer und älteren Kollegen sowie auswärtiger Besucher, die sich dort in Scharen einfinden, hören kann, wird der angehende Forscher sehr viel schneller imstande sein, zwischen den für seine Ausbildung wesentlichen und den weniger wichtigen Begriffen und Sätzen zu unterscheiden. Er wird auf grundlegende Werke hingewiesen, über die großen aktuellen Probleme und die Art, wie sie angegriffen

werden, informiert, vor unfruchtbaren Gebieten gewarnt und manchmal durch unerwartete Parallelen zwischen seinen eigenen Untersuchungen und denen seiner Kollegen inspiriert.

Dank diesen Forschungszentren und dem Netz der Kommunikation, das sie über den ganzen Erdball verbindet, ist es wenig wahrscheinlich, daß das Unverständnis, unter dem einige neuartige Ideen und ihre Schöpfer in der Vergangenheit zu leiden hatten, heute nochmals eine Rolle spielen könnte.

0.3. Entwicklung und Fortschritt der Mathematik

Niemand denkt daran, zu bestreiten, daß alle Mathematik ihren Ursprung in den Problemen des täglichen Lebens hat, im Zählen von Gegenständen und im Messen von Größen. Unter Berufung auf diese unbestreitbare Tatsache will eine ganze philosophische Schule in der Entwicklung der Mathematik nichts anderes sehen als die Antwort auf Bedürfnisse der Technik oder der Naturwissenschaften.

Sicherlich steht außer Zweifel, daß seit den Anfängen der Infinitesimalrechnung ein ganz erheblicher Teil der Analysis eng mit der Entwicklung der Mechanik, der Astronomie und der Physik verknüpft ist. Nicht nur, daß die von diesen Wissenschaften aufgeworfenen Probleme ihr eine dauernd fließende unerschöpfliche Quelle neuer Fragestellungen geliefert haben, unter anderem auf dem Gebiet der Funktionalgleichungen (gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, Differenzengleichungen, später Integral- und Integrodifferentialgleichungen usw.), sondern oft ist man gerade durch die Übersetzung von typisch physikalischen Vorstellungen (Energiebegriff, verschiedene „Extremalprobleme") ins Mathematische zu allgemeinen Methoden der Lösung dieser Gleichungen gelangt. Überdies haben sich seit etwa einem Jahrhundert neue Gebiete der Anwendungen (Statistik, Operationsforschung, Computerwissenschaft usw.) anderen Disziplinen der Mathematik erschlossen, so der Algebra oder der Logik, mit der sich daraus unvermeidlich ergebenden gegenseitigen Befruchtung.

Trotzdem bleibt die Tatsache bestehen, daß diejenigen Gebiete der Mathematik, die in dieser Weise in ständigem und fruchtbarem Kontakt mit den Anwendungen auf die Naturwissenschaften stehen, ungeachtet ihrer Bedeutung weit davon entfernt sind, den größten Teil der modernen Mathematik zu umfassen. Es genügt, auf die Geschichte der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert zurückzublicken, um sich davon zu überzeugen: Von den großen, während dieser Epoche entstandenen neuen Theorien entsprangen nur die harmonische Analysis und die Spektraltheorie der Operatoren zum Teil den Bedürfnissen der Physiker, die sie anwenden. Dies gilt aber keinesfalls für alle anderen neuen Errungenschaften dieses Jahrhunderts, wie Gruppen, Invarianten, Theorie der algebraischen Zahlen, analytische Zahlentheorie, projektive Geometrie, nichteuklidische Geometrie, algebraische Geometrie, um nur die wichtigsten zu nennen.

Die gesellschaftsbezogenen „Erklärungen", welche einige Leute für den Ursprung mathematischer Theorien geben möchten, scheinen wenig überzeugend.

Sicher ist ein bestimmtes Niveau der Zivilisation für die Herausbildung „abstrakter" Gedankengebäude notwendig; wenn man aber diese Binsenwahrheit ausgesprochen hat, was hat man damit wirklich „erklärt"? Man kann schwer einsehen, wieso das gesellschaftliche Milieu der kleinen deutschen Fürstenhöfe zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts den jungen Gauß mit Notwendigkeit dazu gebracht haben soll, die Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebzehnecks mit Zirkel und Lineal zu untersuchen.

Statt mehr oder weniger phantastische Gründe an den Haaren herbei zu ziehen, braucht man doch nur um sich zu blicken, um zu erkennen, welchen universellen Reiz seit den frühesten Zeiten Spiele auf die natürliche Neugierde des Menschen ausgeübt und wie sie seinen Scharfsinn herausgefordert haben: Rätsel, Denksportaufgaben aller Art, „Puzzles", Kreuzworträtsel usw. Auch braucht man sich nicht darüber zu wundern, daß seit den Anfängen der griechischen Mathematik eine Fülle von Problemen über natürliche Zahlen bekannt ist. Und wenn auch bestimmte Aufgaben dieser Art, wie etwa die *Bestimmung aller rechtwinkligen Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen* (ein Problem, das von den Pythagoreern des fünften Jahrhunderts v. u. Z. gelöst wurde) in der Architektur von gewissem praktischen Interesse gewesen sein können, genügt es, bei Diophantos nachzuschlagen, um dort Dutzende von offenbar völlig willkürlich ausgedachten Problemen zu finden, die sich nur als scharfsinnige und schwierige Denksportaufgaben deuten lassen.[1] Diese Tradition hat sich übrigens fortgesetzt, und die meisten der „kombinatorischen" Probleme, die sich heute wieder so großer Beliebtheit erfreuen, sind von derselben Art.[2]

Man muß auch berücksichtigen, welche Rolle die ganzen Zahlen bei den meisten Philosophien und Religionen des Altertums gespielt haben, ganz besonders bei Pythagoreern und den Denkern, die von ihnen beeinflußt wurden; sie blickten mit grenzenloser Verachtung auf diejenigen Menschen herab, welche die Freude der Betrachtung des Schönen und Wahren, die durch das Studium der Eigenschaften der Zahlen vermittelt wurde, durch schnöde Orientierung auf die Praxis vergällten. Wir erkennen, daß man bei den Griechen (und den modernen Mathematikern, die deren ästhetische Auffassungen teilen) weit von einem systematischen Utilitarismus entfernt ist, der in der Mathematik nur ein banales Werkzeug sehen möchte. Übrigens ist diese Auffassung relativ jungen Datums; sie beginnt sich erst im achtzehnten Jahrhundert zu verbreiten. Hätte sie die Oberhand gewonnen, so hätte sie zweifellos die meisten Disziplinen, die sich die Mathematik inzwischen erobert hat, im Keime erstickt, vermutlich sogar diejenigen, an die sich die meisten Utilitaristen heute klammern. Die Mathematiker sind also im Recht, wenn sie sich darüber wundern, daß einige Leute sie zu technischen Hilfskräften der Naturwissenschaft degradieren wollen, aber den Spezialisten der Kosmologie, der Ur- und Frühgeschichte oder der Archäologie, die doch alles äußerst „nutzlose" Wissenschaften sind, ihre Achtung und Wertschätzung nicht versagen.

---

[1]) Dafür ein Beispiel: Man gebe ein rechtwinkliges Dreieck mit rationalen Seitenlängen a, b, c an derart, daß $a - b$ und $a - c$ Kuben rationaler Zahlen sind.

[2]) Beispiel: Man bestimme in einer abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius 2 die maximale Anzahl von Punkten, von denen einer im Mittelpunkt des Kreises liegt, und die voneinander mindestens den Abstand 1 haben.

Man dürfte eine ziemlich richtige Auffassung von der Entwicklung der Mathematik haben, wenn man annimmt, ihre Haupttriebkraft sei inneren Ursprungs, sie entspringe dem tieferen Nachdenken über die Natur der zu lösenden Probleme, bei dem die Herkunft dieser Probleme keine große Rolle spielt. In jeder Epoche finden die Mathematiker eine Reihe von Problemen vor, die ihnen von ihren Vorgängern hinterlassen wurden oder von ihren Zeitgenossen gestellt werden. Die Lösung eines mathematischen Problems beginnt meistens mit empirischem Herumtasten; ein genialer Einfall führt (ganz oder teilweise) zum Ziel, ohne daß man versteht, wieso. Manchmal gelingt es, durch Vertiefen dieses Grundgedankens und durch Weiterentwicklung und Verfeinerung des dahinter steckenden Verfahrens (oft unter ungeheuren Komplikationen) die Tragfähigkeit des ursprünglichen Kunstgriffs beträchtlich zu vergrößern und so eine relativ allgemeine Methode auszuarbeiten, die auch auf Probleme anwendbar ist, die ganz anderer Art sind als das Ausgangsproblem; die Zahlentheorie ist reich an Beispielen dieser Art (vgl. Kapitel 5).

Manchmal jedoch kommt es vor, daß nach vielversprechenden Anfangserfolgen alle weiteren Bemühungen in derselben Richtung völlig scheitern. Der typische Fall ist das Problem der Auflösung algebraischer Gleichungen „in Radikalen" (vgl. Kapitel 2). Bei solchen Problemen kommt es dann darauf an, ihre (vielfach tief verborgene) wahre Natur zu verstehen; dies kann zur Entdeckung eines völlig neuen Zweiges der Mathematik führen. So hat das Problem der Auflösung algebraischer Gleichungen in Radikalen die Gruppentheorie und die Körpertheorie hervorgebracht (vgl. Kapitel 2). Die berühmten Hilbertschen „Endlichkeitssätze" der Invariantentheorie, welche Probleme lösten, bei denen die „kombinatorischen" Methoden des direkten Angriffs versagt hatten, waren der Ausgangspunkt der modernen kommutativen Algebra (vgl. Kapitel 3). Selbst wenn ein Problem in seiner ursprünglichen Gestalt nicht vollständig gelöst werden konnte, haben die zu seinem Verständnis entfalteten Bemühungen oft Konsequenzen gehabt, die viel interessanter waren als das Problem selbst. Im Hinblick auf die Fermatsche Vermutung über die Lösbarkeit der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ (wenigstens für bestimmte spezielle Exponenten) hat Kummer die Grundsteine der Teilbarkeitstheorie in algebraischen Zahlkörpern gelegt,[1] und das Waringsche Problem und die Goldbachsche Vermutung haben die Entwicklung der analytischen Zahlentheorie beträchtlich vorangetrieben (vgl. Kapitel 5).

Paradoxerweise kann man feststellen, daß es oft anscheinend belanglose Probleme *sind, die zu den* schönsten und leistungsfähigsten Theorien führen. Beispielsweise verfügte man seit den Anfängen der Infinitesimalrechnung über Approximationsverfahren (mit beliebig kleinem Fehler) zur numerischen Berechnung der Wurzeln von Gleichungen oder des Wertes eines bestimmten Integrals, die den Bedürfnissen der Anwendungen auf die Naturwissenschaften reichlich genügten. Das hätte also, von diesem Augenblick an, völlig ausreichen müssen, um die Mathematiker von den Problemen der Auflösung algebraischer Gleichungen in

[1]) Vgl. dazu die *Anmerkung 5* zu Kapitel 5. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

Radikalen oder der Untersuchung der Funktion, welche die Länge eines Ellipsenbogens liefert, abzubringen. Die Ergebnisse, welche diese Probleme betrafen, konnten anscheinend den Methoden der Näherungsrechnung, welche die Anwender in jeder Weise zufriedenstellten, nichts hinzufügen. Bekanntlich ist aber das genaue Gegenteil eingetreten (vgl. Kapitel 2 und 7), und gerade dieser fast kindlich anmutenden Hartnäckigkeit der Mathematiker bei der reinen Forschung im Sinne des griechischen Ideals verdanken wir die Entstehung der Gruppentheorie und der modernen algebraischen Geometrie.

In jüngster Zeit hat sich wiederholt ein Phänomen gezeigt, das Physiker und Philosophen immer wieder beschäftigt. Als die revolutionären Theorien der Physik — Relativitätstheorie und Quantenmechanik — entstanden, hat man mit Erstaunen festgestellt, daß die zu ihrer Weiterentwicklung erforderlichen mathematischen Hilfsmittel von den Mathematikern *schon* erdacht und untersucht worden waren, und zwar im Hinblick auf innermathematische Fragestellungen und ohne die geringsten Vermutungen darüber, daß sie eines Tages andere Anwendungen finden könnten.

Man darf jedoch nicht glauben, diese aufsehenerregenden Beispiele seien repräsentativ für das, was sich in den meisten Fällen abspielt. Im Gegenteil, es sind ziemliche Ausnahmen, und die ungeheure Anhäufung von Problemen, welche die Mathematiker in Angriff genommen haben (besonders von „kombinatorischen" Problemen), sind fast sämtlich völlig isoliert geblieben, und ihre Lösung (wenn überhaupt eine gefunden wurde) hat nichts dazu beigetragen, daß andere Probleme angegriffen werden konnten. Übrigens ist man bei bestimmten Problemen, die vor Jahrhunderten oder gar Jahrtausenden formuliert wurden, seither keinen Schritt weiter gekommen: der Existenz ungerader vollkommener Zahlen, der Bestimmung der Fermatschen und der Mersenneschen Primzahlen, der Irrationalität der Eulerschen Konstanten (vgl. Kapitel 5), um nur einige der bekanntesten zu nennen. Man kann also von vornherein nicht beurteilen, was sich in der Zukunft durch die Lösung eines Problems ergeben könnte.

Das tiefere Verständnis eines Phänomens, auf das man in der Mathematik stößt, ist in den meisten Fällen dem Umstand zu verdanken, daß es gelingt, das Phänomen in einen allgemeineren Rahmen einzubetten. Ein klassisches Beispiel ist die Untersuchung der analytischen Funktionen einer reellen Veränderlichen, wo sich auf den ersten Blick merkwürdig anmutende Sachverhalte (beispielsweise, daß eine Potenzreihe nicht konvergiert, ihre Summe in der Umgebung jeder reellen Zahl dennoch eine analytische Funktion ist) in natürlicher Weise erklären lassen, wenn man zu analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen übergeht (vgl. Kapitel 4).

Die Geschichte aller mathematischen Theorien beginnt in jedem Fall mit der Untersuchung spezieller Objekte, Zahlen, Figuren oder Funktionen, von denen jedes einzeln betrachtet wird. Wenn man sie zu gruppieren beginnt, so geschieht das zumeist in der Art und Weise, in der die ersten Naturkundler vorgegangen sind, welche die Tier- und Pflanzenarten klassifizierten, indem sie sich auf augenfällige äußere Analogien stützten. Wird die Untersuchung weitergetrieben, so tauchen tieferliegende verborgene Eigenschaften auf, die oft schwer genau zu

fassen sind, oder man wird veranlaßt, den Nachdruck auf Erscheinungen zu legen, die auf den ersten Blick zu „trivial" waren, um sie hervorzuheben, wie etwa die elementaren Eigenschaften der stetigen Funktionen (vgl. Kapitel 1 und 6). Dabei werden die Klassen von betrachteten Objekten zunehmend umfangreicher, und es treten Beziehungen in Erscheinung, die viel subtiler sind als die ursprünglich beobachteten zufälligen Ähnlichkeiten. In dieser Hinsicht ist man verblüfft, in wieviel Fällen die gemeinsame Natur gewisser Begriffe, die uns heute „evident" erscheint, jahrelang nicht erkannt, ja nicht einmal vermutet wurde.[1])

Selbstverständlich sind jedoch die allgemeineren Objekte, zu deren Einführung man auf diese Art und Weise veranlaßt wird, „abstrakter" als die ursprünglich betrachteten, in dem Sinne, daß sie von unserer sinnlichen Anschauung weiter entfernt sind. Nur Abstraktion und Verallgemeinerung können nämlich die einer *speziellen Situation entsprechenden* Erscheinungen zum Verschwinden bringen, die oft deren wirkliche Natur verschleiern.

In dieser Weise ist man sich allmählich dessen bewußt geworden, daß das, worauf es vor allem ankommt, die Eigenschaften der untersuchten Objekte sowie die zwischen ihnen bestehenden Relationen sind und in viel geringerem Maße die Natur dieser Objekte selbst. Diese Entwicklung führt schließlich dazu, daß in einer Klasse von Objekten ganz *systematisch* von allem abgesehen wird, was nicht aus einigen wenigen Eigenschaften bzw. Relationen folgt, die a priori in „Axiomen" festgelegt werden und ein sogenanntes „hypothetisch-deduktives System" bzw., wie man heute sagt, eine mathematische „Struktur" bilden (vgl. Kapitel 6 und 13). Nur dank dieser Methode, welche die tiefgehende Analyse einer Theorie mit der axiomatischen Synthese, die sie wieder aufbaut, vereint, lassen sich die Beziehungen zwischen anscheinend sehr verschiedenen Problemen erkennen und die innere *Einheit* der Mathematik klarlegen, über die oberflächliche und heute veraltete Einteilung in Algebra, Geometrie und Analysis hinaus.

So wird deutlich, warum sich die moderne Mathematik unvermeidlich zum Studium sehr allgemeiner abstrakter Strukturen wie Gruppen, Ringe, topologische Räume, Operatoren, Garben, Schemata usw. entwickelt hat. Man braucht sich darüber nicht zu beunruhigen, solange sich diese Entwicklung in *natürlicher* Weise, sozusagen „auf Kommando", vollzieht; die großen Erfolge, welche ihre Marksteine bedeuten, sind zu ihrer Rechtfertigung mehr als ausreichend. Eine Gefahr könnte nur von einer „mutwilligen" Abstraktion drohen, die von dem einzigen Wunsch getrieben wäre, seine Vorgänger zu übertreffen, und weniger von dem Bestreben, offene Probleme zu lösen. Diese Tendenz zur nichtmotivierten Axiomatisierung besteht seit dem Ende des neunzehnten Jahrhunderts und hat sich seither ver-

[1]) Infolgedessen fällt es einem modernen Leser häufig schwer, dem Gedankengang eines Autors des achtzehnten oder neunzehnten Jahrhunderts zu folgen und sich darüber klar zu werden, was seine Ergebnisse bedeuten, wenn keine anderen Bezeichnungen und Begriffe benutzt werden als diejenigen, deren sich dieser Autor bediente. Für einen Mathematikhistoriker ist es also völlig legitim, die Aufgabe des Lesers zu erleichtern, indem er dort, wo es notwendig ist, die Texte, über die er berichtet, in die moderne Terminologie übersetzt, selbstverständlich unter der Voraussetzung, daß er klar zum Ausdruck bringt, daß diese Interpretationen nicht den Verfassern dieser Texte zugeschrieben werden dürfen.

stärkt. Man kann immer hoffen, unter Berufung auf die oben genannten Beispiele, daß eine Theorie, die einem belanglos vorkommt, später wichtige Anwendungen finden wird. Nun ist es jedoch eine unsichere Sache, sein Verhalten nach der Hoffnung einzurichten, einmal das große Los zu gewinnen; vielmehr scheint es, als seien die „echten" mathematischen Probleme Lebewesen ähnlich, die eine „natürliche" Entwicklung haben, welche man zweckmäßigerweise respektiert. Diejenigen Axiomatisierungen, die in dem einzigen Wunsch vorgenommen werden, bekannte Phänomene in willkürlicher Weise zu verallgemeinern, führen selten zu bemerkenswerten Ergebnissen.[1] Beispielsweise haben die abstrakte Untersuchung der halbgeordneten Mengen (oder „Verbände") oder die Untersuchung der allgemeinsten nichtassoziativen Algebren die Erwartungen ihrer Urheber, was Anwendungen auf alte Probleme betrifft, kaum erfüllt.

Man hat gelegentlich gefürchtet, die Mathematik gerate auf Irrwege, indem sie sich von den „anschaulichen" Begriffen entferne. Tatsächlich besteht aber die „Anschauung" des Mathematikers viel mehr in einer langen Gewöhnung als in einer Berufung auf Begriffe, die sich unmittelbar aus unserer sinnlichen Wahrnehmung herleiten. In dieser Hinsicht läßt sich ein eigenartiges Phänomen erkennen, die *Übertragung* der sinnlichen Anschauung auf ganz abstrakte Objekte. Das frappierendste Beispiel ist die Art und Weise, in der die Sprache der Geometrie immer stärker in die davon am weitesten entfernt scheinenden mathematischen Gebiete (Funktionenräume, Geometrie der Zahlen, algebraische Geometrie über einem abstrakten Körper, „adelische" Geometrie in der Zahlentheorie usw.) eingedrungen ist. Viele Mathematiker scheinen darin einen wertvollen Wegweiser bei ihren Untersuchungen zu finden.

Die Entwicklung einer mathematischen Theorie vollzieht sich sehr häufig in der Weise, daß sich originelle Einfälle, die stark individuell geprägt sind, in einer Gemeinschaftsarbeit vereinen, bei der zahlreiche Mathematiker die durch diese Ideen eröffneten Möglichkeiten erforschen und Folgerungen in verschiedenen Richtungen daraus ziehen. Die Geschichte bietet eine ganze Skala von Beispielen, die zeigen, wie sehr von Fall zu Fall das Verhältnis von Fortschritten, die von Kollektiven, und solchen, die von Individuen erzielt wurden, variieren kann. So ist es fast unmöglich, einem bestimmten Mathematiker die erste Vorstellung der imaginären Zahlen zuzuschreiben, die von verschiedenen Seiten im sechzehnten Jahrhundert auftauchen. Im siebzehnten Jahrhundert kann der Aufbau der Infinitesimalrechnung, zu dem alle Mathematiker der damaligen Zeit in verschiedenem Maße beigetragen haben, von den Ideen des Eudoxos inspiriert erscheinen, vermittelt durch Archimedes, der sie mit viel Phantasie verwendet hatte. Es steht jedoch nicht fest, ob nicht schon Eudoxos von älteren Vorstellungen geleitet wurde. Andererseits unterscheidet sich die Richtung, in welcher die Gelehrten des siebzehnten Jahrhunderts die Ideen des Archimedes entwickelten, wesentlich von den

[1]) Vgl. dazu die berühmte Stelle in G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, Verlag Julius Springer, Berlin 1925, S. VII. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

Vorstellungen der Alten; sie kann nicht dem Einfluß eines einzelnen Mathematikers zugeschrieben werden. Auch müßte man das langsame Reifen der linearen und der multilinearen Algebra im neunzehnten Jahrhundert zitieren, von Cayley und Graßmann zu Frobenius (vgl. Kapitel 3) oder der Integrationstheorie von Cauchy bis Lebesgue (vgl. Kapitel 6).

Dagegen sind die Fälle zahlreich, in denen ganz plötzlich eine fruchtbare Idee auftauchte, die sich durch nichts vorher angekündigt hatte: Die Fermatsche Methode des unbeschränkten Abstiegs (Deszendenzmethode), die Gaußsche innere Differentialgeometrie, die Kummerschen „idealen Zahlen", die Riemannsche Fläche, die qualitativen Untersuchungen Poincarés bei Differentialgleichungen, die p-adischen Zahlen Hensels, die Brouwersche simpliziale Approximation sind frappierende Beispiele dafür.

Man darf nicht glauben, der Fortschritt der Mathematik habe sich gleichförmig und regelmäßig vollzogen. Ohne erkennbare Ursachen sind gewisse Epochen mathematisch leer, so das Dezennium von 1785 bis 1795, wo selbst ein Lagrange zu dem Schluß gekommen war, die Ära der mathematischen Entdeckungen sei beendet. Dagegen gibt es Epochen, in denen eine Fülle neuer Ideen auf allen Gebieten hervorbricht; die Jahre 1800 bis 1830, 1860 bis 1900, 1920 bis 1930 und die Zeit von 1945 bis heute liefern Beispiele dafür.

Man muß auch Schulen und Modeerscheinungen berücksichtigen. Nach dem Tode von Fermat sprach man 70 Jahre lang kaum noch von Algebra oder Zahlentheorie; jeder stürzte sich auf die große Sache jener Zeit, die Ausgestaltung der Infinitesimalrechnung. In unseren Tagen gehörte es in bestimmten Kreisen (in den russischen bzw. polnischen Schulen der Jahre 1920 bis 1940, bei den Mitarbeitern Courants in New York) zum guten Ton, sich nur mit Funktionalanalysis, Mengenlehre oder allgemeiner Topologie zu befassen und den Rest der Mathematik als uninteressant anzusehen.

Schließlich kommt es auch vor, daß Theorien aus Mangel an Kontakt zu Nachbargebieten verkümmern; der Mangel an Kontakt führt dazu, daß man sich auf immer spitzfindigere und speziellere Probleme konzentriert, deren Bedeutung aber immer geringer wird, eine Entwicklung, die manchmal von den alternden Leitern von Schulen mit Sorge zugelassen wird. Sie sehen mit Bestürzung, wie die jungen Mathematiker sich von ihrem eigenen Lieblingsgebiet abwenden, um sich der Eroberung jungfräulicher Zweige zu widmen; dabei vergessen sie, daß sie selbst ihren Lehrmeistern gegenüber nicht anders gehandelt haben. Es genügt übrigens ein origineller Gedanke, um eine Theorie, die man für ausgeschöpft gehalten hatte, wieder zu beleben; ein Beispiel ist die Invariantentheorie, die nach einem Schlummer von fast hundert Jahren zur Zeit eine Renaissance erlebt.

Häufig kommt es vor, daß die Entwicklung eines Zweiges der Mathematik dadurch aufgehalten wird, daß keine angemessenen Bezeichnungen vorhanden sind, welche es ermöglichen würden, seine wirkliche Natur zu erfassen. Das typische Beispiel ist die Algebra: Es waren dreizehn Jahrhunderte Anstrengungen erforderlich, von Diophantos bis Viète und Leibniz, um eine „allgemeine" algebraische Gleichung

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ aufzuschreiben; daher versteht man leicht, warum die Griechen niemals eine Algebra im eigentlichen Sinne gekannt haben. Wenn die Infinitesimalrechnung ein Jahrhundert gebraucht hat, um ihre definitive Gestalt zu erlangen, so zum großen Teil deshalb, weil vor Newton und Leibniz für die neuartigen Begriffe Ableitung und Integral keine bequeme Bezeichnung vorgeschlagen worden war, und aus diesem Grunde waren auch diese Begriffe selbst nur unvollkommen ausgearbeitet worden.

Außerdem geht eine gute Bezeichnungsweise gewöhnlich mit *Algorithmen* einher, deren Benutzung sie erleichtert. Darunter versteht man Rechenverfahren oder ein für allemal stereotype Schlußweisen, die man quasi mechanisch anwenden kann, ohne sie jedesmal neu ausdenken zu müssen; dies verkürzt in höchst bemerkenswerter Weise die mathematische Überlegung und ermöglicht es, die Aufmerksamkeit auf die wesentlichen Punkte des Beweises zu konzentrieren. Man kann die Bedeutung dieser Errungenschaften mühelos richtig einschätzen, wenn man sich vergegenwärtigt, daß im sechzehnten Jahrhundert das Algebrabuch von M. Stifel zur Behandlung der quadratischen Gleichung zweihundert Seiten braucht oder daß I. Barrow (der Lehrer Newtons) hundert Seiten und ebenso viele Figuren benötigt, um Tangenten- oder Flächeninhaltsaufgaben zu erledigen, die in den elementaren Lehrbüchern, deren sich heute Anfänger in der Infinitesimalrechnung bedienen, nicht einmal den zehnten Teil des Platzes beanspruchen.

In unseren Tagen hat sich die Geschichte der Infinitesimalrechnung bei der Entwicklung der Theorie der Distributionen in sehr ähnlicher Weise wiederholt. Der Begriff der Distribution, der etwa gleichzeitig von mehreren Seiten (Heaviside, Dirac, Bochner, Fantappié, Sobolev u. a.) und von verschiedenartigen Problemen ausgehend herausgearbeitet worden war, konnte erst dann zur Reife gelangen und in den Anwendungen voll wirksam werden, als L. Schwartz die entsprechenden Algorithmen kodifiziert und systematisiert hatte. Ein etwas älteres elementares Beispiel ist der Gebrauch der Zeichen und Identitäten der Booleschen Algebra, der sich seit Beginn unseres Jahrhunderts verbreitet hat. In allerjüngster Zeit verdeutlicht die intensive Verwendung von „Abbildungsdiagrammen" mit Hilfe eines Systems von Pfeilen in wunderbarer Weise Sachverhalte, bei denen zahlreiche Mengen und Abbildungen in- und aufeinander vorkommen; dies hat sich in allen Gebieten der Mathematik als sehr nützlich herausgestellt.

Abgesehen vielleicht von der Entdeckung der irrationalen Zahlen im fünften Jahrhundert v. u. Z., worüber wir nur sehr schlecht informiert sind, hat sich in der Mathematik niemals eine Revolution vollzogen, die der in der Physik des zwanzigsten Jahrhunderts vergleichbar wäre, welche zur völligen Umkrempelung eines ganzen Gedankengebäudes zwang. Was einer solchen Revolution am nächsten kommt, sind neuartige Ideen, welche die Grundlagen der Mathematik bzw. die Vorstellungen von ihren Beziehungen zur wahrnehmbaren Realität tiefgreifend verändert haben, wie die Schaffung der nichteuklidischen Geometrien, die des Transfiniten (im Sinne G. Cantors) und ganz kürzlich die Entdeckung unentscheidbarer Aussagen (vgl. Kapitel 6 und 13). In jedem dieser drei Fälle bestand jedoch die Auswirkung dieser Ideen auf die Entwicklung der eigentlichen Mathematik

insbesondere darin, neuartige Verfahren zu liefern, ohne die älteren Methoden in Frage zu stellen.

Zur Zeit scheint der Fortschritt der Mathematik keine Verlangsamung erkennen zu lassen. Die Anzahl der Forscher in der Welt ist seit zwanzig Jahren beträchtlich gestiegen, und es vergeht kaum ein Jahr, in dem nicht ein junger Mathematiker mit stark originellen Ideen hervortritt, die bei Problemen zu einer Lösung führen, an denen seine Vorgänger gescheitert waren. Man hat sich manchmal gefragt, ob dieser Ausbruch schließlich nicht die weiteren Fortschritte zu lähmen drohe: Die materielle Unmöglichkeit, ebenso zahllose wie ergebnisreiche Theorien zu erfassen, müsse zu einer überspitzten Spezialisierung führen und eine fortschreitende Isolierung dieser Theorien voneinander mit sich bringen, letzten Endes sogar zu ihrer Verkümmerung beitragen, weil es an von außen kommenden belebenden neuen Ideen mangele. Glücklicherweise gibt es stark vereinheitlichende Tendenzen, welche diese Gefahren mindern, indem sie es häufig ermöglichen, langwierige und auf veralteten Verfahren beruhende verbale Darlegungen durch eine weiter vorangetriebene Analyse der grundlegenden Vorstellungen oder die Entdeckung neuer Methoden auf wenigen Seiten zusammenzufassen. Für die Mathematiker besteht also wirklich keinerlei ernsthafte Veranlassung, am Gedeihen ihrer Wissenschaft zu zweifeln, wenigstens so lange nicht, wie die heutigen Formen der Zivilisation erhalten bleiben.

0.4. Literatur

0.4.1. Geschichte der Mathematik bis 1700

O. Becker, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Verlag Karl Alber, Freiburg-München 1954 (Nachauflage Freiburg 1964, *Zusatz bei der deutschen Ausgabe*).

N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris, nouv. éd. 1974. *Deutsch*: Nicolas Bourbaki, Elemente der Mathematikgeschichte (Übersetzung von Anneliese Oberschelp), Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen (und Zürich) 1971. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*

C. Boyer, A History of Mathematics, Wiley, New York 1968.

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 4 Bde., 2. Aufl., Teubner 1898—1924, Nachdruck Johnson Reprint Corp., New York 1965.

H. Eves, An Introduction to the History of Mathematics, 3. Aufl., Holt, Rinehart and Winston, New York 1969.

M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press 1972.

J. Montucla, Histoire des mathématiques, 4 Bde., Paris 1799—1802, Nachdruck in 3 Bänden, Blanchard, Paris 1960.

D. Smith, A Source Book in Mathematics, New York 1929. Nachdruck in 2 Bänden, Dover, New York 1959.

D. Struik, A Concise History of Mathematics, Dover, New York 1967.
Deutsch: 7., ergänzte Auflage, Mit einem Anhang über die Mathematik des 20. Jahrhunderts von I. Pogrebysski (Übersetzung von Herbert Karl bzw. Walter Purkert), mit ausführlichen Literaturverzeichnissen zu einzelnen Epochen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*

D. Struik, A Source Book in Mathematics, 1200—1800, Harvard University Press, Cambridge (Mass.) 1969.

0.4.2. *Überblick über „fortgeschrittene" Theorien*

J. Dieudonné, Panorama des mathématiques pures, Gauthier-Villars, Paris 1977.

0.4.3. *Geschichte der Anwendungen der Mathematik*

H. Burkhardt, Entwickelungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Jahresber. der DMV *10* (1908), 1—1084.

R. Dugas, Histoire de la Mécanique, Dunod, Paris 1950.

I. Todhunter and K. Pearson, A History of the Theory of Elasticity, 2 Bde., Dover, New York 1960.

G. Truesdell, in: L. Euler, Operia Omnia, Ser. secunda, Bd. XI, XII und XIII. Sehr detaillierte Kommentare zur Geschichte der Elastizitätstheorie und der Mechanik der Flüssigkeiten, O. Füssli, Zürich 1954—1960.

E. Whittaker, A History of the Theories of Aether and Electricity, 2 Bde. (2. Aufl.), T. Nelson and Sons, Edinburgh-London 1951.

Außerdem geben die nachstehend aufgeführten, von Mathematikern geschriebenen Lehrbücher ausgezeichnete Beispiele der Art und Weise, in der die Mathematik in Astronomie und Physik angewandt wird.

J. Chazy, La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste, Gauthier-Villars, Paris 1928.

H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 Bde., Gauthier-Villars Paris 1892—1899.

H. Poincaré, Théorie du potentiel newtonien, Carré-Naud, Paris 1899.

H. Poincaré, Capillarité, Carré-Naud, Paris 1900.

H. Poincaré, Théorie des tourbillons, Carré-Naud, Paris 1900.

H. Poincaré, Figures d'équilibre d'une masse fluide, Naud, Paris 1900.

H. Poincaré, Leçons de mécanique céleste, 3 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1905—1910.

H. Poincaré, Thermodynamique, 2. Aufl., Gauthier-Villars, Paris 1908.

H. Poincaré, Electricité et optique, 2. Aufl., Nachdruck, Gauthier-Villars, Paris 1954.

Über die Beziehungen zwischen Mathematik und den Experimentalwissenschaften vergleiche man auch:

G. Hirsch, Mathématisation et réalité, Dialectica, *29* (1975), 5—24.

Zusatz bei der deutschen Ausgabe: Zur Geschichte der Mathematik insgesamt vergleiche man

J. E. Hofmann, Geschichte der Mathematik, 3 Bde., Sammlung Göschen Bd. 226/226a, 875, 882, W. de Gruyter & Co, Berlin 1963, 1957.

H. Wußing, Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979.

1. Die Analysis im achtzehnten Jahrhundert

von Jean Dieudonné

1.0. Einführung

Dieses Kapitel beschreibt die Geschichte der Analysis ungefähr von 1725 (der Zeit der ersten Arbeiten Eulers und Daniel Bernoullis) bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts; nicht behandelt werden die Anfänge der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen (siehe Kapitel 4) und die elliptischen Integrale (siehe Kapitel 7).

Die erste Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts war geprägt einerseits von der Schaffung der Koordinatenmethode (der sogenannten „Analytischen Geometrie") durch Fermat und Descartes, andererseits von der fortschreitenden und nichtsystematischen Einführung der grundlegenden Ideen der Infinitesimalrechnung durch zahlreiche Mathematiker. Systematisiert sowie mit bequemen Bezeichnungen und allgemeinen Algorithmen ausgestattet wurden diese Ideen seit 1665 von Newton und vor allem von Leibniz, denen sich wenig später die Brüder Jakob und Johann Bernoulli sowie einige Mathematiker geringeren Formats wie Cotes, B. Taylor, Stirling und de Moivre anschlossen. Das Werk dieser Generation, die man als die Kindheit der Infinitesimalrechnung bezeichnen könnte, war etwa 1730 beendet; danach befaßte sich als einziger der Überlebenden Johann Bernoulli damit, allerdings fast ausschließlich mit Anwendungen auf die Mechanik.

Mit der folgenden Generation begann sich die Jugend der Analysis zu entwickeln, die besonders durch eine tiefergehende Verschmelzung von Algebra und Differential- und Integralrechnung gekennzeichnet ist. Seit Euler sind die Bezeichnungen in der Analysis fast mit jenen identisch, die wir heute benutzen, und auch der Sprachgebrauch ist dem unsrigen sehr ähnlich.

Obwohl sehr viele neue Resultate aus dieser Periode stammen, war die Zahl der produktiven Mathematiker recht klein. Der Löwenanteil geht auf Euler und Lagrange, die beiden Giganten dieses Jahrhunderts, zurück; in einigem Abstand sind dann Clairaut, Daniel Bernoulli, d'Alembert, Maclaurin, Laplace, Legendre und Monge zu nennen, die sämtlich wichtige Beiträge lieferten; aber außer den

Arbeiten dieser Mathematiker kann man in der Analysis nur eine Handvoll zweitrangiger Ergebnisse anführen.

1.1. Die Probleme

Die Probleme, die sich die Analytiker des achtzehnten Jahrhunderts stellten, stammen aus verschiedenen Bereichen. Sie können aus der Analysis selbst herrühren: Untersuchung gewisser Typen von Funktionen, Summation von Reihen, Berechnung von Integralen usw.; weitere Probleme ergeben sich durch die Entwicklung anderer Gebiete der Mathematik, wie der Geometrie, der Zahlentheorie oder der Wahrscheinlichkeitsrechnung (siehe Kapitel 9, 5 bzw. 12). Vor allem aber beginnen die Naturwissenschaften, viel mehr als im vorangegangen Jahrhundert, den Analytikern zahlreiche interessante Probleme zu unterbreiten. Das achtzehnte Jahrhundert ist im wahrsten Sinne des Wortes das Jahrhundert der Mechanik und der Astronomie: Es geht darum, die Konsequenzen aus Newtons *Principia* in diesen beiden Gebieten zu ziehen, und darum wetteifern fast alle Mathematiker, von Euler und D. Bernoulli bis Lagrange und Laplace; ein gewaltiges Werk, das durch die zahlreichen Lehrbücher Eulers ([2], (2), Bde. XI, XII, XIII) und, zum Ende des Jahrhunderts, durch die beiden großartigen klassischen Abhandlungen, die *Mécanique analytique* von Lagrange ([4], Bde. XI und XII) und die *Mécanique céleste* von Laplace ([5], Bde. I bis V) gekrönt wurde.

In der folgenden Liste sind die wichtigsten Fragen der Mechanik und der Astronomie aufgezählt, die wir bei jedem Problem der Analysis, das aufgegriffen wurde, wiederfinden:

Mechanik der Massenpunkte: Bewegung eines Punktes unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes, n-Körperproblem, Störungstheorie.

Allgemeine Mechanik: kleine Bewegungen, Prinzip der kleinsten Wirkung.

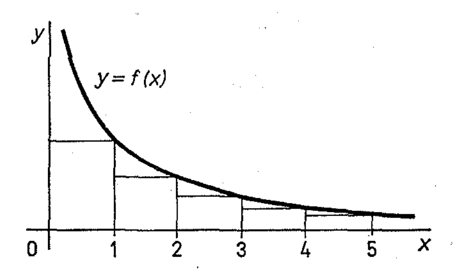
Mechanik starrer Körper: Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt, Theorie der schwimmenden Körper, Anziehung von Sphäroiden.

Mechanik deformierbarer Körper (der Kontinua): Bewegung von Fäden, Gleichgewicht einer Membran, Hydrodynamik, Theorie der Wellen, Gezeitentheorie, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Elastizität, Schwingungen von Saiten, Membranen und Platten, Ausbreitung des Schalls (siehe das Literaturverzeichnis zur Einführung).

1.2. Strenge und Formalismus

Entgegen einer sehr verbreiteten Meinung darf man nicht glauben, die Analytiker des achtzehnten Jahrhunderts hätten den Problemen der Approximation und der Konvergenz gleichgültig gegenüber gestanden; sie waren fast alle an numerischen Berechnungen (siehe 1.9.) interessiert, und ihre Abhandlungen enthielten zahl-

reiche Beispiele dafür, daß sie nicht davor zurückschreckten, die von ihnen definierten Zahlen bis auf mehr als 20 Dezimalstellen zu bestimmen. Einige Beispiele genügen, um zu zeigen, daß sie eine sehr genaue, intuitive Vorstellung vom Begriff des Grenzwertes und der größeren oder kleineren Geschwindigkeit hatten, mit der eine Folge gegen einen Grenzwert strebt. Schon 1736 ([2], (1), Bd. XIV, S. 102) führte Euler den klassischen Vergleich zwischen dem Integral $\int_1^n f(t)\,dt$ und der Summe $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ für monoton fallendes und positives f ein, mit der wohlbekannten Abbildung



(die man schon bei Maclaurin findet). Dabei griff er eine Idee wieder auf, die es schon Jakob Bernoulli ermöglicht hatte, die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_1^\infty 1/n$ und die Konvergenz der Reihe $\sum_1^\infty 1/n^2$ zu beweisen.

Euler benutzte diese Beziehung, um beispielsweise die Summe der Glieder der harmonischen Reihe bis zur Ordnung 10^6 sowie die Summe der Reihe $\sum_1^\infty 1/n^2$ näherungsweise bis auf 6 Dezimalstellen genau zu berechnen. Im Jahre 1777 löste er ([2], (1), Bd. XV, S. 268) ein von Condorcet gestelltes Iterationsproblem, den Grenzwert der durch $a_1 = r > 0$, $a_{n+1} = r^{a_n}$ für $n \geqq 1$ definierten Folge (a_n) zu bestimmen, indem er die Schnittpunkte der Kurven $y = x$ und $y = r^x$ untersuchte — in derselben Weise würden wir das heute tun; 1778 verglich er (ebenda S. 298) die „Größenordnung" der Exponentialfunktionen und der iterierten Logarithmen in der Umgebung des Unendlichen und zeigte, daß man hier von einem „immer schneller" bzw. einem „immer langsamer" werdenden Wachstum sprechen kann; er beschränkte sich übrigens nicht auf diese Funktionen; in der gleichen Abhandlung betrachtete er zum Beispiel Funktionen vom Typ $x^\gamma e^{\alpha x^\beta}$, für die er bewies, daß für gegen 0 strebendes x die asymptotische Abschätzung

$$\int_0^x t^\gamma e^{-\alpha t^{-\beta}}\,dt \sim \frac{1}{\alpha\beta} x^{\beta+\gamma+1} e^{-\alpha x^{-\beta}}$$

für $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und beliebiges γ gilt.

Die Vorwürfe eines „Mangels an Strenge", den sich die Analytiker des achtzehnten Jahrhunderts von seiten ihrer Nachfolger gefallen lassen mußten, rühren in Wirklichkeit vor allem von der Schwierigkeit her, daß sie versucht haben, die

Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung, von denen sie ja eine gute anschauliche Vorstellung hatten, in präziser Weise zu definieren und manchmal recht spitzfindig zwischen anscheinend benachbarten Begriffen zu unterscheiden; im neunzehnten Jahrhundert beeilte man sich zu sehr, sie dafür zu tadeln, indem man sich nur an ihre fehlerhafte Terminologie hielt, ohne den Zusammenhang näher zu untersuchen. In Wirklichkeit drehte sich alles um den *Funktionsbegriff*. Einer der großen Erfolge des achtzehnten Jahrhunderts war die Entdeckung, daß die „elementaren" Funktionen (rationale Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen und deren Umkehrfunktionen) durch Potenzreihen dargestellt werden können, die wenigstens lokal konvergieren, und daß sowohl die üblichen algebraischen Operationen als auch die Infinitesimalrechnung bei der Anwendung auf Funktionen dieses Typs (d. h. auf Funktionen, die wir heute analytische Funktionen nennen) wieder Funktionen des gleichen Typs liefern. Zu Beginn des achtzehnten Jahrhunderts waren diese Funktionen die einzigen, die von den Mathematikern betrachtet wurden; es waren diejenigen, die Euler „stetige" oder „reguläre" Funktionen nannte, ohne sie übrigens genauer zu definieren als dadurch, daß ihre Werte mit denen der Variablen durch eine „Gleichung" verknüpft seien. Erst um die Mitte des Jahrhunderts, von dem Augenblick an, als die Theorie der Gleichung der schwingenden Saite (vgl. 1.7.) entstand, wurde sich Euler der Notwendigkeit bewußt, auch andere Funktionen einzuführen, die er „mechanische Funktionen" ([2], (2), Bd. X, S. 72) (in einem anderen Sinne als bei Descartes) oder „frei gezeichnete Funktionen" nannte ([2], (1), Bd. XXIII, S. 74, und Bd. XXV, S. XXII). Er hat auch hier keine exakte Definition gegeben, aber diese Funktionen scheinen dem zu entsprechen, was wir heute als stetige, zweimal stückweise differenzierbare Funktionen bezeichnen; sie wurden erst im neunzehnten Jahrhundert mathematisch untersucht.

Zu dieser Zeit glaubte jedermann ohne weiteres, eine unendlich oft differenzierbare Funktion sei im Sinne Eulers „stetig" und durch ihre Taylorreihe in einem Punkt vollständig bestimmt (erste Vorstellung von der späteren analytischen Fortsetzung (siehe 4.6.2.)). Von diesem Prinzip schien sich Euler bei seinen Vorstellungen über Zahlenreihen, die übrigens vorsichtig und ungenau blieben, leiten zu lassen. Zwar wußte er sehr gut, daß man bei einer Reihe $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$, deren allgemeines Glied nicht gegen 0 strebt, nicht von „Konvergenz" im üblichen Sinne sprechen kann. Trotzdem glaubte er ebenso fest, es sei oft möglich, einer solchen Reihe eine „Summe" zuzuordnen, indem dafür eine Definition gegeben wird, die nicht mehr auf dem Begriff des Grenzwertes beruht. Er konnte zwar keine solche allgemeine Definition formulieren, doch konvergiert in den meisten der von ihm betrachteten Beispiele ([2], (1), Bd. XIV, S. 585–617) die Potenzreihe $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots$ im üblichen Sinne für hinreichend kleine x, so daß ihre Summe eine analytische Funktion f ist; besitzt diese Funktion einen *anderen* analytischen Ausdruck, der für $x = 1$ definiert ist, so erklärte Euler $f(1)$ als „Summe" der gegebenen Reihe. Dies führte ihn zum Beispiel dazu,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2} \tag{1}$$

und

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots = -1 \tag{2}$$

zu setzen, da die rechten Seiten die Werte von $1/(1 + x)$ bzw. $1/(1 - 2x)$ für $x = 1$ sind. Anscheinend waren die Meinungen der Zeitgenossen, was die Gültigkeit von (1) betrifft, geteilt, während die meisten (2) für sinnlos hielten, da eine Summe positiver Größen keinen negativen „Wert" haben könne. Euler hatte sich über diesen Punkt *nicht* klar ausgesprochen, sondern sich darauf beschränkt, zur Verteidigung von (2) auf ein Argument zu verweisen (ohne es sich zu eigen zu machen), das auf folgendes hinausläuft: Die Funktion $-1/x$ wächst monoton, geht jedoch von positiven Werten zu negativen Werten über, wenn x wächst und den Wert 0 überspringt.

Viele der Rechnungen Eulers *mit diesen* Reihen (siehe zum Beispiel 1.4.1.) laufen genau genommen auf Rechnungen im Rahmen des Zweiges hinaus, den wir jetzt Algebra der *formalen Reihen* nennen: Eine solche Reihe wird mit der Folge (a_n) ihrer Koeffizienten identifiziert, die keinerlei Bedingungen unterworfen wird; Addition und Multiplikation werden wie beim Rechnen mit Potenzreihen definiert. Man muß sich aber sehr wohl darüber im klaren sein, daß die Erklärungen, die Euler für die verschiedenen Bedeutungen des Wortes „Summe" einer Reihe gab, ziemlich verworren, ja sogar augenscheinlich widersprüchlich waren, etwa wenn er behauptete (ebenda S. 585), die Bedingung $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ sei für die Konvergenz einer Reihe im üblichen Sinne hinreichend (obwohl er das Gegenbeispiel der harmonischen Reihe kannte; vielleicht vergaß er hinzuzufügen, daß er dann $f(1)$ als endlich voraussetzte, denn dann stimmt die Behauptung unter der zusätzlichen Annahme, daß die Folge (a_n) monoton fällt). Außerdem konnte sich Euler kaum der seiner Definition der „Summe" einer Reihe innewohnenden Schwierigkeiten bewußt sein, beispielsweise, wenn f keine eindeutige analytische Fortsetzung hat. Ein Beispiel einer Rechnung, bei der seine „Definition" versagte, war sein Versuch, der „Summe" der Reihe

$$1 - 1! + 2! - 3! + \cdots + (-1)^n n! + \cdots$$

einen Sinn zu geben. Ohne sich um die Tatsache zu kümmern, daß die Potenzreihe

$$y = x - 1!\,x^2 + 2!\,x^3 - 3!\,x^4 + \cdots$$

für kein $x \neq 0$ konvergiert, differenzierte er sie gliedweise und erhielt formal die Differentialgleichung $x^2y' + y = x$. Nun hat diese Gleichung tatsächlich eine einzige Lösung, für die $y(0) = 0$ ist, nämlich

$$y(x) = e^{1/x} \int_0^x \frac{1}{t} e^{-1/t}\, dt; \tag{3}$$

daher sah Euler $y(1)$ als die von ihm gesuchte „Summe" an (offenbar merkte er nicht, daß er in Wirklichkeit damit das erste Beispiel einer auf $[0, +\infty[$ unendlich oft differenzierbaren Funktion angab, die im Punkt $x = 0$ nicht analytisch ist).

Auf die gleiche Reihe wendete er, ohne zu zögern, wiederholt seine Methode der Konvergenzverbesserung an (siehe 1.9.), obgleich man so niemals eine konvergente Reihe erhalten kann. Nach mehrmaliger Iteration und Beschränkung auf die ersten Glieder der Reihe erhielt er einen Wert, der nahe bei $y(1)$ liegt. (Für eine Erklärung dieses sehr paradoxen Resultats vergleiche man [3].)

Die Differentialrechnung wurde in dem gleichen „formalen" Geiste behandelt ([2], (1), Bd. X, S. 84). Genauso wenig wie Leibniz definierte Euler, was er unter einem Differential dx bzw. einem höheren Differential $d^n x$ versteht; er begnügte sich vielmehr damit, auf die Definition der „endlichen Differenzen" (siehe 1.7.) zu verweisen, von denen die Differentiale Grenzfälle seien. Tatsächlich rechnete er so, wie man es gegenwärtig in der algebraischen Geometrie über einem beliebigen Körper macht. Wenn man zum Beispiel drei Funktionen x, y, z hat, die durch eine Relation $F(x, y, z) = 0$ verknüpft sind, betrachtet man dx, d^2x, ... als neue Unbestimmte der „Gewichte" 1, 2, ...; Entsprechendes gilt für die Differentiale von y und z. Man entwickelt die Relation

$$F(x + dx + d^2x + \cdots,\ y + dy + d^2y + \cdots,\ z + dz + d^2z + \cdots) = 0$$

in eine Taylorreihe und setzt die Summe der Terme mit gleichen „Gewichten" gleich null. So erhält man für die Gewichte 1 und 2

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}\left(F''_{x^2}\,dx^2 + F''_{y^2}\,dy^2 + F''_{z^2}\,dz^2 + 2F''_{xy}\,dx\,dy + 2F''_{yz}\,dy\,dz + 2F''_{zx}\,dz\,dx\right)$$
$$+ F'_x\,d^2x + F'_y\,d^2y + F'_z\,d^2z = 0\,,$$

was unmittelbar beispielsweise die Werte von dz und d^2z mittels der anderen Differentiale liefert. Trotz des Vorteils dieses Verfahrens (bei dem man die unabhängigen Variablen nicht besonders zu kennzeichnen braucht) kamen die höheren Differentiale nach und nach außer Gebrauch; in seiner *Théorie des fonctions* ([4], Bd. IX) behandelte Lagrange die gleichen Probleme unter ausschließlicher Benutzung der Ableitungen.

1.3. Allgemeine Sätze

Da Fragen der Konvergenz (im heutigen Sinne) im achtzehnten Jahrhundert, außer bei numerischen Berechnungen, fast niemals angeschnitten wurden, ist die Diktion der Arbeiten, die sich mit Analysis beschäftigten, von der unserer Epoche sehr verschieden: Fast immer geht es um *Gleichungen*, während seit Weierstraß die Analysis vor allem darin besteht, *Ungleichungen*, Abschätzungen nach oben bzw. unten, zu beweisen. Als fast einzige Ausnahme muß man Lagranges Abschätzung ([4], Bd. X, S. 94) des Restes R_n der Taylorformel zitieren,

$$\frac{m}{n!}(x - a)^n \leqq R_n \leqq \frac{M}{n!}(x - a)^n\,,$$

wobei m und M die kleinsten bzw. größten Werte der n-ten Ableitung auf dem Intervall $[a, x]$ sind.

Erst recht fehlten in den Lehrbüchern dieser Epoche die allgemeinen Sätze, die das Werkzeug der modernen Analysis bilden. Solche Eigenschaften wie die Existenz eines Maximums einer stetigen reellwertigen Funktion auf einem kompakten Intervall oder die Tatsache, daß eine solche Funktion das Vorzeichen nicht ändern kann, ohne wenigstens einmal den Wert null anzunehmen, wurden nicht einmal erwähnt; sie wurden jedoch stets, wenn man sie brauchte, als selbstverständlich benutzt.

Wir wollen nun nacheinander die folgenden Probleme behandeln:

1. Regeln zur Berechnung der Ableitungen und Integrale
2. Funktionen von großen Zahlen
3. Die Euler-Maclaurinsche Summenformel
4. Trigonometrische Reihen
5. Kettenbrüche.

1.3.1. *Regeln zur Berechnung der Ableitungen und Integrale*

Die elementaren Sätze zur Berechnung der Ableitungen gehen auf Newton und Leibniz zurück. Zu Beginn des achtzehnten Jahrhunderts begann man, die partiellen Ableitungen zu benutzen; von Euler stammt die nach ihm benannte Beziehung

$$xF'_x + yF'_y + zF'_z = mF$$

für eine homogene Funktion $F(x, y, z)$ vom Grade m. Es war auch bekannt, daß die Reihenfolge bei sukzessiver partieller Differentiation keine Rolle spielt; die Bedingung $P'_y = Q'_x$ dafür, daß ein Ausdruck $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ das Differential einer Funktion $V(x, y)$ ist, trat sehr früh auf, zum Beispiel in den Arbeiten Clairauts (1740) über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Euler zeigte, wie man die Funktion V erhalten kann, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist: Man integriert nach x und läßt dabei y konstant, dann nach y, wobei x konstant bleibt; von Kurvenintegralen war jedoch noch nicht die Rede.

Doppelintegrale wurden in allgemeiner Form erstmalig in einer Abhandlung Eulers ([2], (1), Bd. XVII, S. 289—315) von 1769 untersucht. Es handelte sich zunächst um „unbestimmte" Integrale: In Analogie zu $\int f(x)\,dx$, der Lösung von $y' = f(x)$, bezeichnete das Symbol $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$ eine Lösung von $z''_{xy} = f(x, y)$. Immerhin hatte Euler eine klare Vorstellung von einem Integral über ein ebenes Gebiet und konnte es mittels zweier aufeinanderfolgender einfacher Integrationen berechnen. Er gab außerdem die Formel für eine Variablentransformation unter Beibehaltung der Orientierung an und wendete sie zur Berechnung von Volumina von Körpern mit gekrümmten Oberflächen bzw. von Flächeninhalten krummer Flächenstücke an. Etwas später erweiterte Lagrange im Zusammenhang mit der Anziehung von Sphäroiden (einem Problem, das Maclaurin 1740 mit der „synthe-

tischen" Methode der *Principia* behandelt hatte) diese Begriffe und diesen Kalkül auf Dreifachintegrale, für die er ebenfalls die Formel für die Variablentransformation (in ihrer heutigen Form mit dem Absolutbetrag der Funktionaldeterminante) und insbesondere den Übergang zu Polarkoordinaten angab ([4], Bd. III, S. 627).

Da alle Funktionen, mit denen man rechnete, als analytisch vorausgesetzt wurden, boten die impliziten Funktionen kein Problem. Wenn eine „implizite" Funktion y von x durch eine Relation $F(x, y) = 0$ gegeben war, substituierte man für y eine Potenzreihe in x mit unbekannten Koeffizienten und bestimmte diese sukzessiv, indem man die Koeffizienten der durch diese Substitution erhaltenen Potenzreihe in x gleich null setzte (für eine Gleichung der Gestalt $x - G(y) = 0$ ist dies die sogenannte „Umkehr der Folgen"). Das schönste Beispiel für dieses Verfahren ist die Inversionsformel von Lagrange ([4], Bd. III, S. 25): Hatte die Relation zwischen x und y die Gestalt $y = x + \alpha f(y)$, so erhielt er für eine beliebige Funktion $\phi(y)$ die Reihenentwicklung

$$\phi(y) = \phi(x) + \alpha\phi'(x) f(x) + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (\phi'(x) f(x)^n) + \cdots;$$

er benutzte diese Formel insbesondere zur Auflösung der Keplerschen Gleichung $y = x + \alpha \sin y$.

1.3.2. *Funktionen von großen Zahlen*

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung erfordert die asymptotische Abschätzung von Funktionen einer ganzen Zahl n, wenn n gegen ∞ strebt. Schon 1730 hatte Stirling die berühmte asymptotische Abschätzung $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n}$ erhalten; im Jahre 1778 setzte sich Laplace das Ziel, für Integrale des Typs

$$\int_a^b g(t)\, h(t)^n\, dt$$

für $n \to +\infty$ und $g \geqq 0$ und $h \geqq 0$ asymptotische Formeln zu erhalten. Zu diesem Zweck betrachtete er den Punkt c, in dem die Funktion h ihren größten Wert erreicht, und entwickelte g und h im Punkt c in Taylorreihen. Seine Rechnung war rein formal, ohne irgendeine Abschätzung. Beispielsweise erhielt er ([5], Bd. VII, S. 113) im Fall $h'(c) = 0$, $h''(c) < 0$ den Hauptteil

$$\sqrt{\frac{2\pi}{-nh''(c)}} \cdot g(c)\, h(c)^n .$$

1.3.3. *Die Euler-Maclaurinsche Summenformel*

Schon 1730 wollte Euler für auf $[0, +\infty[$ analytisches y die Summe

$$S_n(y) = y(1) + y(2) + \cdots + y(n)$$

für unbegrenzt wachsendes n berechnen. Er setzte $y = z'$ und wendete die Taylorformel in der Gestalt

$$z(h-1) = z(h) - \frac{1}{1!} z'(h) + \frac{1}{2!} z''(h) - \cdots$$

an, woraus er, indem er h nacheinander die Werte 1, 2, ..., n erteilte, die Formel

$$\int y(x)\, dx = z(n) - z(0) = S_n(y) - \frac{1}{2!} S_n(y') + \frac{1}{3!} S_n(y'') - \cdots$$

gewann. Er wiederholte dann das Verfahren für die sukzessiven Ableitungen von y:

$$\begin{aligned} y(n) - y(0) &= S_n(y') - \frac{1}{2!} S_n(y'') + \cdots, \\ y'(n) - y'(0) &= \qquad\quad S_n(y'') + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Danach „eliminierte" er die $S_n(y^{(p)})$ für $p \geqq 1$, indem er jede dieser Gleichungen mit geeigneten Koeffizienten multiplizierte und gliedweise addierte; so erhielt er ([2], (1), Bd. X, S. 311) eine „Reihenentwicklung"

$$S_n(y) = \int y(x)\, dx + C + c_1 y(n) + c_2 y'(n) + c_3 y''(n) + \cdots, \tag{4}$$

wobei C eine (von y abhängende) Konstante ist und die c_j von y unabhängige rationale Zahlen sind, von denen er einige für kleine Werte von j berechnete. Einige Jahre später ([2], (1), Bd. XIV, S. 436) bemerkte er, daß sein Eliminationsverfahren mit dem Verfahren übereinstimmt, mit dem er die Koeffizienten c_i einer Potenzreihe mit der Eigenschaft

$$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots)\left(1 - \frac{1}{2!} x + \frac{1}{3!} x^2 - \cdots\right) = 1$$

zu bestimmen hatte, mit anderen Worten, für welche

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots = \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n x^{2n}}{(2n)!}$$

gilt. Dabei sind die B_n rationale Zahlen, auf die zu Anfang des Jahrhunderts Jakob Bernoulli gestoßen war und die als Bernoullische Zahlen bekannt sind. Es ist hier ganz klar, daß diese Rechnung für keine der Interpretationen, die Euler mit dem Begriff der „Konvergenz" verband, sinnvoll sein kann. Darüber war er sich übrigens selbst im klaren; denn er kannte die Größenordnung der Bernoullischen Zahlen und wußte insbesondere, daß B_{n+1}/B_n wie n^2 gegen $+\infty$ strebt (siehe 1.4.1.). Wollte er die Formel (4) zu einer numerischen Rechnung anwenden (er benutzte sie zum Beispiel zur Berechnung von π auf sehr viele Dezimalstellen), so hütete er sich angesichts der Gefahr, daß die Reihe divergiert, zu viele Terme zu nehmen. Sein Spürsinn als geübter Rechner legte ihm nahe, mit dem kleinsten Glied aufzuhören, für welches der Fehler die Ordnung dieses Gliedes hat. Tatsächlich genügt es, die gleiche Rechnung durchzuführen, aber die Taylorformel bei einer festen Ordnung abzubrechen und das Lagrangesche Restglied zu benutzen, um die Formel in

ihrer modernen Gestalt

$$y(m) + y(m+1) + \cdots + y(n) =$$
$$\int_m^n y(t)\,dt + \frac{1}{2}(y(m) + y(n))$$
$$+ \sum_{h=1}^{r} (-1)^{h-1} \frac{B_h}{(2h)!} \times \left(y^{(2h-1)}(n) - y^{(2h-1)}(m)\right) + R_r \qquad (5)$$

zu erhalten; dabei besitzt R_r eine Majorante, in welche die Ableitung $y^{(2r+1)}$ eingeht. Damit ist erklärt, daß die numerische Rechnung Eulers wohlbegründet ist. Dies aber wird nicht vor dem neunzehnten Jahrhundert erkannt, wobei man leider noch lange von einer „Reihe" spricht, wenn es sich in Wirklichkeit um eine Entwicklung mit *endlich* vielen Gliedern handelt.

Mit Hilfe seiner Summationsformel (die übrigens Maclaurin wenig später unabhängig von ihm fand), entdeckte Euler die Formel

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{B_1}{2n^2} + \frac{B_2}{4n^4} - \cdots,$$

wobei $\gamma = 0{,}577\ldots$ die nach ihm benannte Konstante ist ([2], (1), Bd. XIV, S. 118). Er gab dafür noch viele andere Ausdrücke an, mit denen man sie auf sehr viele Dezimalstellen berechnen kann.

1.3.4. *Trigonometrische Reihen*

Etwa von 1730 an tauchten in vielfältigem Zusammenhang Reihen mit dem allgemeinen Glied $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ auf. Sie ergaben sich gelegentlich als Real- bzw. Imaginärteil von Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, wenn dort $z = e^{ix}$ gesetzt wurde. So betrachtete Euler, getreu seinen Prinzipien, die Reihe

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

und schrieb

$$\frac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cdots, \qquad \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = \sin x + \sin 2x + \cdots;$$

er differenzierte und integrierte ohne weiteres Entwicklungen von Funktionen in trigonometrische Reihen gliedweise und erhielt auf diese Weise Ausdrücke, die erst in unseren Tagen mit der Theorie der Distributionen einen Sinn bekommen haben.

Während seines langen Lebens gewann Euler trigonometrische Reihen mittels vielfältigster Methoden; beispielsweise ergab sich die Entwicklung

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin n + \cdots \tag{6}$$

durch Grenzübergang aus der Lagrangeschen Interpolationsformel ([2], (1), Bd. XV, S. 446).

Zum anderen sah sich Euler 1749 in einer Abhandlung über die Unterschiede in den Bewegungen von Jupiter und Saturn (siehe 1.5.) veranlaßt, die Funktion $f(x) = 1/(1 - n\cos x)^s$ zu integrieren, und da es ihm um numerische Rechnungen ging, stellte er fest, daß die nach Potenzen von $\cos x$ fortschreitenden Reihen zu langsam konvergierende Zahlenreihen liefern, wenn n nahe bei 1 liegt; auch schlug er vor, die Funktion in der Gestalt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \cos kx$ zu entwickeln, und gab Rekursionsformeln zur Berechnung der A_k an. D'Alembert interessierte sich sofort für das Problem und erhielt die Formeln

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\,dx\,, \qquad A_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx\,. \tag{7}$$

Clairaut, der das Problem einige Jahre später wieder aufgriff, gewann die allgemeine Formel

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad (k \geqq 1) \tag{8}$$

durch Grenzübergang aus den Interpolationsformeln

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-1} f\left(\frac{2h\pi}{n}\right)\cos\frac{2hk\pi}{n}\,,$$

die für hinreichend große n gelten, wenn f ein gerades trigonometrisches Polynom ist. Er betonte übrigens die Tatsache, daß man in diesen Formeln f nicht als analytisch vorauszusetzen braucht. Man möchte nun glauben, die Theorie der „Fourierreihen" werde sich hiervon ausgehend in natürlicher Weise entwickeln, umso mehr, als Euler, zwar in einer späteren, erst nach seinem Tode veröffentlichten Abhandlung ([2], (1), Bd. XVI, S. 333), die Formeln (8) aus den „Orthogonalitätsrelationen"

$$\int\limits_0^{\pi} \cos hx \cos kx\,dx = 0 \quad \text{für} \quad h \neq k \tag{9}$$

erhalten und in einer Arbeit aus dem Jahre 1750 am Ende eines tollen Rechenganges (wobei er eine Differentialgleichung unendlicher Ordnung mit konstanten Koeffizienten $y' + \frac{1}{2!}y'' + \frac{1}{3!}y''' + \cdots = 0$ „integrierte") behauptet hatte, daß eine periodische Funktion der Periode 2π sich als Summe einer trigonometrischen

Reihe schreiben lassen muß. Hier berührt man aber ein Gebiet, auf dem die in den Köpfen der Analytiker des achtzehnten Jahrhunderts durch die Theorie der Reihen im Zusammenhang mit ihrem Begriff einer „stetigen" Funktion angerichteten Verwirrungen nicht mehr zu beseitigen waren; außerdem muß man auch die Tatsache berücksichtigen, daß sich Euler im Fieber seines Schaffensdranges nicht immer daran erinnert zu haben schien, was er einige Jahre zuvor geschrieben hatte. Jedenfalls schien ihn die Tatsache nicht zu stören, daß die Funktionen, die er wie in (6) in eine trigonometrische Reihe entwickelte, keineswegs periodisch waren; und als er sich das Problem stellte, den Widerspruch zu klären, den schon die Formel (6) für $x = \pi$ aufwirft, gelang es ihm nicht, das Phänomen der nichtgleichmäßigen Konvergenz zu erhellen, auf das er hier (erstmals in der Analysis) gestoßen war ([2], (1), Bd. XV, S. 449). Daniel Bernoulli war der erste, der 1772, als er die Summen der Reihen $\sum_n \frac{\cos nx}{n^k}$ und $\sum_n \frac{\sin nx}{n^k}$ für $k \leqq 5$ berechnete, für $|x| \leqq \pi$ Polynome erhielt (wobei er nicht erkannt zu haben schien, daß es bis auf einen Faktor die Polynome waren, die sein Onkel Jakob Bernoulli eingeführt hatte); er bemerkte aber, daß die Formeln, auf die er geführt wurde, modifiziert werden müssen, wenn das Intervall, in dem x variiert, geändert wird. Er war auch der einzige, der in der langen Auseinandersetzung, die um die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe im Zusammenhang mit der Differentialgleichung der schwingenden Saite (siehe 1.7.) entstand, einen richtigen Standpunkt einnahm; doch dauerte es bis ins neunzehnte Jahrhundert, ehe man sich darüber klar wurde.

1.3.5. *Kettenbrüche*[1])

Lord Brouncker hatte 1655 Wallis ohne Beweis einen bemerkenswerten Ausdruck für π mitgeteilt:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}$$

Darunter ist der Limes der Folge der Näherungsbrüche zu verstehen, die sich ergeben, wenn jeweils bei einem bestimmten Nenner abgebrochen wird. Euler war

[1]) Dieser deutsche Terminus ist eindeutig; im französischen Original verwendet der Autor "fractions continuées" (wörtlich „fortgesetzte Brüche") im Unterschied zu dem traditionellen "fractions continues", weil dies seiner Meinung nach zu Mißverständnissen führen könnte, wenn Zähler bzw. Nenner von Parametern abhängen. Er lehnt sich dabei an das englische "continu*ed* (nicht "continu*ous*") fractions" an; auch im Russischen heißt es "nepreryvnyj drob" (wörtlich: stetiger Bruch) (Fußnote sinngemäß übersetzt).

von dieser Formel fasziniert und unternahm es, sie in eine allgemeine Theorie einzubetten ([2], (1), Bd. XIV, S. 187), die er in sehr vielfältiger Weise anwandte (siehe 1.4.5. und 1.5.). Für zwei endliche Folgen $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ und $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ wird der *Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} \tag{10}$$

rekursiv als die Zahl

$$s = b_0 + \frac{a_1}{s'} \quad \text{mit} \quad s' = b_1 + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a^n|}{|b_n}$$

definiert. Euler zeigte, daß die Zahl (10) in der Gestalt A_n/B_n geschrieben werden kann, wobei die A_j und die B_j durch die Rekursionsformeln

$$A_0 = b_0\,, \qquad B_0 = 1\,, \qquad A_j = b_jA_{j-1} + a_jA_{j-2}\,, \qquad B_j = b_jB_{j-1} + a_jB_{j-2} \tag{11}$$

(mit $A_{-1} = 1$, $B_{-1} = 0$) definiert sind. Er bewies die grundlegende Formel

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{B_{n-1}B_n}\,. \tag{12}$$

Betrachtet man jetzt zwei unendliche Folgen $(a_n)_{n\geqq 1}$, $(b_n)_{n\geqq 0}$, so ist der (unendliche) Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \cdots$$

der Grenzwert der Kettenbrüche (10) für $n \to +\infty$ (wenn dieser Grenzwert existiert). Die Formel (12) zeigt, daß dieser Limes die Summe der Reihe

$$b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{B_{n-1}B_n}$$

ist. Umgekehrt bewies Euler, daß eine gegebene Reihe als Kettenbruch geschrieben werden kann:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}c_n = c_1 + \frac{c_2|}{|c_1 - c_2} + \cdots + \frac{c_{n-2}c_n|}{|c_{n-1} - c_n} + \cdots.$$

Dieser Formeln bediente er sich mit außerordentlicher Virtuosität und erhielt so zahlreiche elegante Relationen zwischen den speziellen Funktionen, die ihm so sehr am Herzen lagen.

1.4. Untersuchung spezieller Funktionen

Mit der Leidenschaft eines Käfer- oder Schmetterlingssammlers befaßte sich Euler in den meisten seiner Arbeiten zur Analysis damit, ständig neue überraschende Eigenschaften spezieller Funktionen zu entdecken, die noch heute unsere Be-

wunderung erregen. Wir beschränken uns auf die wichtigsten dieser Probleme:

1. Elementare Funktionen
2. Besselfunktionen
3. Die hypergeometrische Funktion
4. Gammafunktion und Eulersche Integrale
5. Berechnung von Integralen
6. Legendrepolynome und Kugelfunktionen

1.4.1. Elementare Funktionen

Die Entwicklungen der „elementaren" Funktionen e^x, $\log(1+x)$, der Winkelfunktionen und ihrer „Inversen" in Potenzreihen waren seit dem siebzehnten Jahrhundert bekannt. Seit Cotes und de Moivre wußte man auch, daß sich der Ausdruck $\cos x + i \sin x$ in der Formel

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

für natürliches n wie eine Exponentialfunktion verhält, doch schien niemand vor Euler die Relation $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ bemerkt zu haben,[1]) die sich unmittelbar aus den Reihenentwicklungen ergibt. Euler folgerte daraus die berühmten Formeln

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Andererseits kannte er die Beziehung $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ und leitete daraus das „Eulersche Produkt"

$$\sin x = x \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\nu^2\pi^2}\right) \tag{13}$$

und durch Bildung der logarithmischen Ableitung die Reihe

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \nu^2\pi^2} \tag{14}$$

her. Er konnte nämlich $x^{-1} \sin x$ als Limes der Polynome

$$\frac{\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{ix}{n}\right)^n}{2ix} = \prod_{\nu=1}^{n/2}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\,\frac{1 + \cos\frac{2\nu\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2\nu\pi}{n}}\right)$$

(für gerades n) schreiben, wobei sich die Produktzerlegung aus den Ausdrücken für die Einheitswurzeln ergibt, die Cotes angegeben hatte. Dann braucht man nur n gegen $+\infty$ streben zu lassen, um (13) zu erhalten ([2], (1), Bd. XIV, S. 144), während man (14) durch einen analogen Grenzübergang in den logarithmischen

---

[1]) In seiner Rezension des französischen Originals bemerkte Juškevič, daß schon Cotes diese Relation gekannt habe. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

Ableitungen erhält. Diese Überlegungen, die schon von Eulers Zeitgenossen als nicht hinreichend streng angegriffen worden waren, sind völlig korrekt, wenn man sie innerhalb der Algebra der formalen Reihen vollzieht, da in dieser Algebra die Konvergenz einer Folge formaler Reihen $s_k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} X^n$ gegen eine formale Reihe $s = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$ bedeutet, daß für jedes n die Folge der $c_n^{(k)}$ gegen c_n strebt. Man kann übrigens die rechten Seiten von (13) und (14) in Potenzreihen entwickeln, was in der Algebra der formalen Reihen ebenfalls korrekt ist; dies liefert eine der schönsten Formeln Eulers:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

(für die er noch zahlreiche andere Beweise fand). Allgemeiner erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_k\,, \tag{15}$$

wobei die B_k die Bernoullischen Zahlen sind; dazu genügt es, die Formel

$$x \cot x = ix - \frac{2ix}{1 - e^{2ix}}$$

zu benutzen.[1])

In der Folge sollte Euler noch oft auf die Reihen (15) zurückkommen (die nichts anderes sind als die Werte $\zeta(2k)$ der Riemannschen „Zetafunktion" für die geraden natürlichen Zahlen). Bei eben dieser Gelegenheit entdeckte er, als er den Reihen (15) für ganzzahliges (oder sogar rationales) $k < 0$ eine „Summe" nach seinen Vorstellungen zuschrieb (vgl. 1.2.), die Funktionalgleichung der Zetafunktion (siehe 5.6.).

1.4.2. *Besselfunktionen*

Seit den Arbeiten Bessels um 1830 versteht man unter einer Besselfunktion J_λ (bis auf einen konstanten Faktor) die eindeutig bestimmte Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) y = 0\,, \tag{16}$$

die endlich bleibt, wenn x gegen 0 strebt (für $\lambda \geqq 0$). Schon 1733 jedoch war Daniel Bernoulli bei seinen Untersuchungen der kleinen Schwingungen eines senkrecht

[1]) Diese Formel ist ein schönes Beispiel für eine „erzeugende Reihe". Dieser Begriff scheint erstmals von de Moivre eingeführt worden zu sein: Will man eine Zahlenfolge (a_n) untersuchen, so ordnet man ihr die Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$ zu; ist $f(x)$ die Summe dieser Reihe, so liefern die Eigenschaften der Funktion f oft unvermutete Eigenschaften der Folge (a_n) (für eine der schönsten Anwendungen dieser Idee, die Methode von Hardy-Littlewood, vgl. 5.11.).

hängenden eingespannten schweren homogenen Fadens darauf gekommen, Potenzreihen zu bilden, die nichts anderes als die Funktionen J_0 und J_1 waren, und die Eigenfrequenzen mit Hilfe der Nullstellen von $J_0(x)$ zu bestimmen ([2], (2), Bd. XI$_2$, S. 157—165). Etwas später untersuchten Daniel Bernoulli und Euler ([2], (2), Bd. XI$_2$, S. 306) das gleiche, auf einen inhomogenen Faden verallgemeinerte Problem; Euler zeigte, daß es in einem Spezialfall auf die Integration einer Differentialgleichung der Gestalt $y'' + cx^\mu y = 0$ (c eine Konstante) führt, die sich wiederum durch Variablentransformation auf (16) zurückführen läßt. Er stieß übrigens auch bei der Untersuchung der Schwingungen einer kreisförmigen Membran auf diese Gleichung. In diesem Zusammenhang führte er eine detaillierte Untersuchung durch und erhielt dabei für J_λ eine Integraldarstellung, die zu

$$J_\lambda(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^\lambda}{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} \cos(z \sin\varphi) \cos^{2\lambda}\varphi \, d\varphi$$

äquivalent ist, und für große x eine Entwicklung, die der asymptotischen Entwicklung

$$J_\lambda(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda\pi}{2}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2p}}{x^{2p}} + \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\lambda\pi}{2}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_{2p+1}}{x^{2p+1}}\right)$$

äquivalent ist. Schließlich untersuchte er den Fall, daß die Integration auf elementare Funktionen führt. Er sprach die Vermutung aus, die Gleichung $J_0(x) = 0$ habe nur reelle Lösungen, und berechnete die kleinsten (siehe 1.9.); schließlich bestimmte er die Reihenentwicklung des zweiten Integrals Y_0 der Gleichung (16) für $\lambda = 0$ ([2], (2), Bd. XI$_2$, S. 333). Natürlich wurden Fragen der Konvergenz nicht angeschnitten.

1.4.3. *Die hypergeometrische Funktion*

Bei seinen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die durch Potenzreihen einfachen Typs integrierbar sind, wurde Euler dazu geführt ([2], (1), Bd. XII, S. 175), Gleichungen des folgenden Typs zu betrachten:

$$x^2(a + bx^n) y'' + x(c + dx^n) y' + (e + fx^n) y = 0,$$

ebenso die speziellere Gleichung

$$x(1 - x) y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1) x) y' - \alpha\beta y = 0.$$

Ein Integral dieser Gleichung ist die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\,\beta(\beta + 1)}{2!\,\gamma(\gamma + 1)} x^2 + \cdots. \tag{17}$$

Euler bewies die Identität ([2], (1), Bd. XVI$_2$, S. 43)

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; x)$$

und gab für $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ Integralausdrücke der Gestalt

$$\int_0^1 t^\lambda (1-t)^\mu (1-xt)^\nu \, dt \tag{18}$$

an ([2], (1), Bd. XII, S. 256). Beispielsweise ist

$$\frac{(1-x^2)^{2n+1}}{\pi x^m} \binom{m+n}{n} F(m-n, -n, m+1; x^2)$$

$$= \int_0^\pi \frac{\cos m\varphi \, d\varphi}{(1+x^2-2x\cos\varphi)^{n+1}};$$

hieraus leitete er die Identität

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n \, d\varphi = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x-\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}$$

her, die später von Jacobi ([2], (1), Bd. XVI_2, S. 54) wiedergefunden wurde.

1.4.4. *Gammafunktion und Eulersche Integrale*

Interpolationsprobleme gehörten zu den Aufgaben, die oft die Phantasie Eulers anregten. Newton hatte eine Formel zur Darstellung eines Polynoms höchstens n-ten Grades angegeben, das in $n+1$ Punkten vorgegebene Werte annimmt, und später erhielt Lagrange daraus eine äquivalente Formel. Euler stellte sich das schwierigere Problem, eine für $x > 0$ definierte, in seinem Sinne „stetige" Funktion (siehe 1.2.) zu finden, welche für die ganzzahligen Werte von x vorgegebene Werte annimmt. Schon 1732 „interpolierte" er so die Folge der Zahlen $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ durch die Funktion $x \mapsto \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} \, dt$. Später ([2], (1), Bd. XVI_1, S. 1) untersuchte er das Problem, bei gegebenem φ eine Funktion f so zu bestimmen, daß

$$f(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \cdots + \varphi(n)$$

gilt, und schlug die Definition

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (\varphi(\nu) - \varphi(x+\nu))$$

vor, wobei die Reihe auf der rechten Seite tatsächlich konvergiert, wenn für gegen $+\infty$ strebende x die Werte $\varphi(x)$ monoton fallend gegen 0 streben. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so bewies er, daß man mitunter

$$f(x) = x\varphi(1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\varphi(\nu) - \varphi(x+\nu) + x(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu))\right)$$

als Lösung nehmen kann, was ihn zu der Bemerkung führte, daß das Problem mehrere Lösungen haben kann, die sich um eine periodische Funktion unterscheiden.

Seine schönsten Resultate betreffen die Folge der Fakultäten $n!$, für die er schon 1729 die Interpolationsfunktion in Gestalt eines unendlichen Produktes ([2], (1), Bd. XIV, S. 1)

$$\Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-x}(n+1)^x}{n+x}$$

und dann die Integraldarstellung

$$\Gamma(x+1) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^x dt = \int_0^\infty u^x e^{-u} du$$

erhielt. Er kam oft auf diese Funktion zurück, entdeckte ([2], (1), Bd. XVII, S. 355) die Integraldarstellung

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

die Beziehung (den Ergänzungssatz) ([2], (1), Bd. XIV, S. 82)

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

und schließlich ([2], (1), Bd. XIX, S. 483) einen Spezialfall der Formel von Legendre und Gauß:

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{(n-1)/2}\, n^{-1/2}.$$

1.4.5. *Berechnung von Integralen*

Leibniz hatte eine Methode angegeben, die es im Prinzip erlaubt, die Stammfunktion einer rationalen Funktion mit Hilfe „elementarer" Funktionen durch Zerlegung in eine Summe „einfacher Elemente" der Gestalt $A/(x-a)^n$ zu erhalten, wobei a und A komplexe Konstanten sind (Partialbruchzerlegung). In seinen Lehrbüchern setzte Euler diese Methode im Detail auseinander und zeigte, wie man die Berechnung zahlreicher anderer Stammfunktionen auf diese Methode zurückführen kann, etwa von $\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$ für gewisse Werte von m, n und p oder von $\int R(x, \sqrt{P(x)})\,dx$, wobei R eine rationale Funktion und P ein Polynom höchstens zweiten Grades ist. Die Untersuchung des Falles, daß dieser Grad mindestens 3 ist, sollte auf die Theorie der elliptischen und der Abelschen Funktionen führen (siehe Kapitel 7).

Euler berechnete auch den Wert einer großen Anzahl von bestimmten Integralen $\int_a^b f(x)\,dx$, wenn die Stammfunktion von f keine „elementare" Funktion ist; er benutzte zu diesem Zweck zahlreiche Kunstgriffe, indem er insbesondere zeigte, wie viele Integrale sich auf die Eulerschen Integrale $\Gamma(x)$ bzw. $B(p, q)$ oder auf allgemeinere Integrale vom Typ (18) zurückführen lassen. Eine seiner allgemeinen Ideen bestand darin, zwei Funktionen P, R zu betrachten, die für jedes ganzzahlige $n \geqq 1$ einer Rekursionsformel der Gestalt ([2], (1), Bd. XIV, S. 324)

$$(n\alpha + a) \int_0^1 PR^n\,dx = (n\beta + b) \int_0^1 PR^{n+1}\,dx + (n\gamma + c) \int_0^1 PR^{n+2}\,dx \tag{19}$$

genügen; hieraus gewann er die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{\int_0^1 PR\,dx}{\int_0^1 P\,dx} = \frac{\beta - b}{c - \gamma} + \frac{\frac{a-\alpha}{c-\gamma}\Big|}{\Big|\frac{2\beta - b}{c - 2\gamma}} + \frac{\frac{a-2\alpha}{c-2\gamma}\Big|}{\Big|\frac{3\beta - b}{c - 3\gamma}} + \cdots.$$

Er zeigte, wie man alle Funktionen P, R, die (19) erfüllen, bestimmen kann; dann wendete er diese Methode auf Integrale des Typs (18) an, indem er P und R spezialisierte. Beispielsweise fand er für das Integral $s = \int_0^1 \frac{x^{m-1}}{1 + x^n}\,dx$ die Entwicklung

$$\frac{1}{s} = m + \frac{m^2\,|}{|\,n} + \frac{(m+n)^2\,|}{|\,n} + \frac{(m+2n)^2\,|}{|\,n} + \cdots,$$

und als er die gleiche Methode auf die Integrale $\int x^n e^{\alpha x}\,dx$ anwendete, erhielt er die Entwicklung

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{2\,|}{|\,3} + \frac{3\,|}{|\,4} + \cdots.$$

1.4.6. Legendrepolynome und Kugelfunktionen

Die vollständige Berechnung der Newtonschen Anziehung eines homogenen Ellipsoids auf einen Massenpunkt konnte durch Maclaurin und Lagrange nur für spezielle Lagen des Punktes durchgeführt werden. Das allgemeine Problem (für die von einem homogenen starren Körper beliebiger Gestalt ausgeübte Anziehung) wurde um 1782 von Legendre und Laplace im Rahmen der Theorie des Newtonschen Potentials, die sich seit der Mitte des Jahrhunderts allmählich entwickelt hatte, wieder aufgegriffen. Schon 1748 hatte D. Bernoulli bei der Berechnung der Energie, mit der ein Punkt x der Masse μ von endlich vielen Massen m_i angezogen

wird, deren Abstände von x die r_i sind, die Funktion $\Omega(x) = \sum_i (m_i\mu/r_i)$ eingeführt. Lagrange hatte etwas später ([4], Bd. VI, S. 349) bemerkt, daß man die Komponenten der durch diese Massen auf x ausgeübten Kraft erhält, wenn man $\Omega(x)$ nach den Koordinaten von x ableitet. Davon ausgehend ging er zu einem anziehenden Körper V über, indem er die endliche Summe durch ein Integral $\iiint_V \mu\, dm/r$ ersetzte, wobei r der Abstand des Punktes x von einem variablen Punkt von V ist. Zur Berechnung dieses Integrals entwickelte Legendre die Funktion $1/r$, wobei r der Abstand zweier Punkte des Raumes ist, in eine Funktion, die vom Quotienten ϱ ihrer Abstände von einem festen Ursprung und dem Kosinus des Winkels γ zwischen den Vektoren abhängt, die diese Punkte mit dem Ursprung verbinden. Das brachte ihn dazu,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\varrho z + \varrho^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n P_n(z) \tag{20}$$

mit $z = \cos\gamma$ zu setzen; dabei ist $P_n(z)$ ein Polynom vom Grade n, für das er zahlreiche Eigenschaften herleitete, insbesondere die später als „Orthogonalitätsrelationen" bezeichneten Beziehungen

$$\int_0^1 P_n(z)\, P_m(z)\, dz = 0 \qquad \text{für} \quad m \neq n\,,$$

$$\int_0^1 P_n^2(z)\, dz = \frac{2}{2n+1}\,,$$

ferner die Tatsache, daß $|P_n(z)| \leqq 1$ für $-1 \leqq z \leqq 1$ gilt und daß alle Nullstellen von P_n reell und im Intervall $[-1, +1]$ enthalten sind.

Laplace entwickelte dann das Newtonsche Potential eines homogenen Körpers V in einem Punkt x mit den Kugelkoordinaten (r, θ, φ) in eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(\theta, \varphi)}{r^n}$ und zeigte ([5], Bd. X, S. 364), daß

$$U_n(\theta, \varphi) = \iiint_V r_1^{n+2} P_n(\cos\gamma) \sin\theta_1\, dr_1\, d\theta_1\, d\varphi_1$$

gilt; dabei sind r_1, θ_1, φ_1 die Kugelkoordinaten eines variablen Punktes x_1 von V und $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi_1 - \varphi)$. Die U_n werden „sphärische Harmonische" (Laplacesche Kugelfunktionen) genannt und genügen wieder den „Orthogonalitätsrelationen" (ebenda S. 389)

$$\iint U_m(\theta, \varphi)\, U_n(\theta, \varphi)\, d\theta\, d\varphi = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n\,.$$

Er erhielt ferner die Integraldarstellung für die Legendrepolynome:

$$P_n(x) = \int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^n\, d\varphi\,.$$

Etwas später führte Legendre andere Funktionen ein, die mit seinen Polynomen zusammenhängen,

$$P_n^{(\nu)}(x) = (1 - x^2)^{\nu/2} \frac{d^\nu P_n(x)}{dx^\nu},$$

und bewies, daß die Kugelfunktionen vom Index n mittels der Entwicklung

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu P_n^{(\nu)}(\cos\theta)\, P_n^{(\nu)}(\cos\theta_1)\cos\nu(\varphi_1 - \varphi)$$

mit

$$h_\nu = (-1)^\nu \frac{2(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))^2}{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}$$

in der allgemeinen Gestalt

$$U_n(\theta, \varphi) = \sum_{\nu=0}^{n} (A_\nu \cos\nu\varphi + B_\nu \sin\nu\,\varphi)\, P_n^{(\nu)}(\cos\theta)$$

dargestellt werden können.

1.5. Differentialgleichungen

Im siebzehnten Jahrhundert hatten schon verschiedene Probleme der Geometrie und der Mechanik auf Probleme der Analysis geführt, die der Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung äquivalent sind. Mit der Formulierung der Axiome der Mechanik durch Newton und der systematischen Verwendung kartesischer Koordinaten im achtzehnten Jahrhundert wurde klar, daß jedes Problem der Mechanik, das sich auf n Massenpunkte bezieht, auf die Integration eines Systems von $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinausläuft, wobei die unbekannten Funktionen der Zeit die Koordinaten dieser Punkte sind. Die Fundierung der Mechanik starrer Körper durch d'Alembert, Euler und Lagrange und allgemeiner der von endlich vielen Parametern abhängigen Systeme (durch Lagrange) führte auf analoge Probleme, die sich durch die „Lagrangeschen Gleichungen" für die holonomen Systeme ausdrücken lassen, und auf ihre Verallgemeinerung auf nichtholonome Systeme (siehe [1] und [7]).

Auf Grund des in jener Epoche vorherrschenden Funktionsbegriffs verfügte man seit Newton (auch für implizite Funktion) über eine allgemeine Methode zur Integration von Differentialgleichungssystemen, nämlich die Entwicklung der gesuchten unbekannten Funktionen in Potenzreihen, wobei sich die Koeffizienten dieser Reihen mit Hilfe der Gleichungen und der Anfangsbedingungen durch Rekursionsformeln bestimmen lassen. Doch schon die Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts gaben sich mit diesem Verfahren nicht zufrieden, sondern versuchten, die Lösungen mittels „elementarer Funktionen" auszudrücken oder wenigstens mittels Stammfunktionen der in den Gleichungen direkt gegebenen Funktionen; eben dies wird „Integration durch Quadratur" genannt. Die wenigen

Gleichungen erster Ordnung, bei denen dies möglich ist (besonders bei den linearen Gleichungen erster Ordnung) waren schon den Brüdern Bernoulli bekannt; diesen klassischen Fällen fügte Riccati 1722 einige spezielle Gleichungen des Typs

$$y' + ay^2 = bx^n \qquad (a, b, n \text{ Konstanten})$$

für gewisse Werte des Exponenten n hinzu.

Für die Differentialgleichungen erster Ordnung der Gestalt $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ hatte Clairaut schon 1734 die Idee, die Gleichung mit einer Funktion $M(x, y)$ zu multiplizieren, die so gewählt ist, daß $MP\, dx + MQ\, dy$ ein totales (exaktes) Differential $dV(x, y)$ wird. Dies lieferte die Lösungen der Gleichung in der „impliziten" Gestalt $V(x, y) = \text{const}$. Euler entwickelte diese Methode der „Multiplikatoren" (integrierenden Faktoren) weiter; sie lieferte ihm gerade für Gleichungen des Typs $y\, dy + \big(A(x)\, y + B(x)\big)\, dx = 0$ Lösungen mittels „Integration durch Quadratur". Er verallgemeinerte diese Idee auf Gleichungen höherer Ordnung als 1 und auf Systeme von Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen.

Man untersuchte in dieser Periode auch die allgemeinen „nichtaufgelösten" (impliziten) Differentialgleichungen $F(x, y, y') = 0$: eine der ersten war (1734) die Clairautsche Differentialgleichung $y - xy' + f(y') = 0$, bei der das Phänomen des „singulären Integrals" auftritt: Zu der Schar der Geraden $y = Cx + f(C)$, die (für eine beliebige Konstante C) das „allgemeine" Integral der Gleichung bilden, muß man die Einhüllende (Enveloppe) dieser Geradenschar hinzunehmen, um alle (analytischen) Lösungen der Gleichung zu erhalten. D'Alembert betrachtete 1748 die allgemeineren Gleichungen

$$xf(y') + yg(y') + h(y') = 0\,,$$

die die gleiche Eigenschaft haben. Euler und Lagrange klärten, was im allgemeinen geschieht, indem sie bewiesen, daß die Kurve der Gleichung $R(x, y) = 0$, die man durch Elimination von y' aus den beiden Gleichungen $F = 0$, $\partial F/\partial y' = 0$ erhält, keine Integralkurve zu sein braucht, sondern im allgemeinen ein Ort singulärer Punkte der „allgemeinen" Integralkurven ist. Sie ist eine „singuläre" Integralkurve, wenn sie auch der Gleichung $y'(\partial F/\partial y) + \partial F/\partial x = 0$ genügt.

Etwa von 1760 an begann die allgemeine Untersuchung der linearen (Differential-) Gleichungen beliebiger Ordnung

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b(x)\,. \tag{21}$$

D'Alembert bemerkte, daß man aus einer speziellen Lösung von (21) und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung $L(y) = 0$ durch Addition die allgemeine Lösung von (21) erhält. Ein wenig später bewies Lagrange, daß sich das allgemeine Integral der homogenen Gleichung $L(y) = 0$ in der Gestalt $\sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ ansetzen läßt, wobei die C_k beliebige Konstanten und die y_k geeignet gewählte spezielle Lösungen sind ([4], Bd. I, S. 474). Dann zeigte er mit seiner berühmten Methode der „Variation der Konstanten" ([4], Bd. IV, S. 159), daß man die Lösung

der inhomogenen Gleichung (21) durch n Quadraturen erhalten kann, wenn man die allgemeine Lösung $\sum_{k=1}^{n} C_k y_k$ der homogenen Gleichung kennt: Man sucht die Lösung in der Gestalt $y = \sum_{k=1}^{n} z_k y_k$, wobei man die Funktionen z_k den $n - 1$ linearen Bedingungen

$$\sum_{k=1}^{n} z'_k y_k^{(\nu)} = 0 \qquad (0 \leqq \nu \leqq n - 2) \tag{22}$$

unterwirft. Aus diesen Bedingungen ergibt sich $y^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{n} z_k y_k^{(\nu)}$ für $0 \leqq \nu \leqq n - 1$, und indem man y in (21) durch $\sum_{k=1}^{n} z_k y_k$ ersetzt, erhält man für die z'_k eine n-te Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} z'_k y_k^{(n-1)} = b; \tag{23}$$

wenn man die z'_k aus den n linearen Gleichungen (22) und (23) mit Hilfe der Cramerschen Formeln bestimmt hat, muß man noch n Quadraturen ausführen, um die z_k zu erhalten.

Hinsichtlich der homogenen Gleichung $L(y) = 0$ stellte d'Alembert folgendes fest: Wenn eine spezielle Lösung y_1 bekannt ist und man $y = y_1 z$ setzt, so erhält man für z eine Gleichung $(n - 1)$-ter Ordnung. Lagrange führt für jeden linearen Differentialoperator L der Gestalt (21) den *adjungierten* Operator M ein, für welchen ([4], Bd. I, S. 471)

$$zL(y) - yM(z) = \frac{d}{dx}\left(B(y, z)\right)$$

gilt, wobei B in y, z und deren Ableitungen bis zur $(n - 1)$-ten Ordnung bilinear ist. Daraus folgt: Kennt man eine spezielle Lösung z_1 der adjungierten Gleichung $M(z) = 0$, so kann man die Integration von $L(y) = 0$ auf die Integration einer Gleichung $B(y, z_1) = \text{const}$ der Ordnung $n - 1$ zurückführen.

Spezielle lineare Gleichungen (21) waren schon lange vorher eingeführt worden, vor allem im Zusammenhang mit zahlreichen Problemen der Mechanik. Die Tatsache, daß eine lineare Gleichung zweiter Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten im allgemeinen als Lösung eine Linearkombination von Exponentialfunktionen oder Winkelfunktionen besitzt, war schon sehr früh bekannt. Als aber um 1739 Euler im Zusammenhang mit dem Problem der Schwingung von Stäben auf eine Gleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten stieß, konnte er die allgemeine Lösung nicht angeben. Erst 1743 erhielt er den allgemeinen Satz über die Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, indem er die *charakteristische Gleichung* aufstellte, welche die Exponenten r in dem exponentiellen Lösungsansatz $y = e^{rx}$ liefert. Ein wenig später bewies er, wie man alle Lösungen erhält, wenn die charakteristische Gleichung mehrfache Lösungen hat; in diesem Fall muß man Lösungen der Gestalt $y = x^k e^{rx}$ („Exponentialmonome") ([2], (1), Bd. XXII, S. 108–149) einführen. Schließlich stieß Lagrange in seiner Theorie der kleinen Bewegungen eines Systems um die Gleichgewichtslage auf Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und übertrug auf sie die Resultate Eulers.

Wir haben oben (siehe 1.4.3) schon die Untersuchungen Eulers über spezielle lineare Differentialgleichungen erwähnt, die er mit Hilfe von Reihenentwicklungen integrierte. Er war sich darüber klar, daß man im allgemeinen Reihen der Gestalt $x^\lambda(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots)$ betrachten muß, mit Exponenten λ, die nicht notwendig ganzzahlig sind ([2], (1), Bd. XII, S. 178). Im Falle der Ordnung 2 (des Typs, der später von Fuchs (siehe 8.2.1.) betrachtet wird) erhielt er eine Gleichung zweiten Grades zur Bestimmung von λ und stellte bereits fest, daß dann, wenn die Differenz der Wurzeln dieser Gleichung eine ganze Zahl ist, ein zweites Integral der Gleichung im allgemeinen einen logarithmischen Term enthalten muß (ebenda S. 182).

Es war ebenfalls Euler, der als erster versuchte, für die linearen Gleichungen zweiter Ordnung die Lösungen durch ein von dem Parameter x abhängendes Integral $x \mapsto \int_a^b F(x, t)\, dt$ darzustellen ([2], (1), Bd. XII, S. 221–245), nämlich durch ein Integral der Gestalt $x \to \int_a^b e^{xt}f(t)\, dt$. Laplace nahm diese Idee für die allgemeine Gleichung

$$(ax_0 + b_0)\, y^{(n)} + (a_1x + b_1)\, y^{(n-1)} + \cdots + (a_nx + b_n)\, y = 0$$

wieder auf ([5], Bd. X, S. 251) und zeigte, daß man in diesem Fall die Funktion f, die eine Darstellung der Lösung ermöglicht, explizit bestimmen kann. Dies kann man als das erste Beispiel für die „Laplace-Transformation" ansehen.

Andererseits wußte Euler, daß sich die homogene lineare Gleichung zweiter Ordnung auf eine allgemeine Riccatische (Differential-)Gleichung

$$z' = A(x)\, z^2 + B(x)\, z + C(x) \tag{24}$$

zurückführen läßt, wenn man $z = y'/y$ wählt, und daß es daher zur Bestimmung von y nur einer Quadratur bedarf, wenn man die Gleichung (24) integrieren kann. Er wußte auch, daß eine Riccatische (Differential-)Gleichung (24) in eine analoge Gleichung übergeht, wenn man die Funktion durch $z_1 = (P_z + Q)/(P_1z + Q_1)$ transformiert, wobei P, Q, P_1, Q_1 beliebige Funktionen von x sind. Er benutzte dies, um Fälle zu erhalten, in denen (24) mittels elementarer Funktionen integrierbar ist. Euler selbst ([2], (1), Bd. XIV, S. 208) und etwas später Lagrange in allgemeinerer Art ([4], Bd. IV, S. 310) gewannen aus dieser Bemerkung eine Methode zur Integration von (24) durch Kettenbrüche: Wenn ax^λ das erste Glied der Entwicklung einer Lösung z von (24) in der Umgebung von $x = 0$ ist, setzte Lagrange $z = \dfrac{ax^\lambda}{1 + z_1}$, erhielt eine Riccatische (Differential-)Gleichung für z_1 und iterierte dieses Verfahren beliebig oft. Als Beispiel für die Anwendung dieser Methode möge der von Euler erhaltene Kettenbruch

$$e^{1/x} = 1 + \frac{1|}{|x-1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|3x-1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|5x-1} + \cdots$$

dienen.

Man muß auch die sehr umfangreichen mathematischen Entwicklungen erwähnen, zu denen die Himmelsmechanik Anlaß gab. Es handelte sich im wesent-

lichen um das „n-Körper-Problem“: Man betrachtet n Körper, die als Massenpunkte positiver Masse aufgefaßt werden und sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetz anziehen (die Kraft, die zwei Punkte der Masse m_i bzw. m_j aufeinander ausüben, ist $\frac{Gm_im_j}{r_{ij}^2}$, wobei G eine universelle Konstante und r_{ij} der Abstand zwischen den beiden Punkten ist); es geht dann darum, das System der $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche die Bewegung dieser n Punkte beschreiben, (wenigstens näherungsweise) zu lösen. Damit hoffte man, die Bewegungen der Planeten, ihrer Satelliten und der Kometen im Sonnensystem im einzelnen zu erfassen. Der allgemeine Gedankengang beruhte auf der Tatsache, daß eine der Massen (die der Sonne) bedeutend größer ist als die anderen. Man begann nun damit, nur zwei der Körper (von denen einer die Sonne ist) zu betrachten und die Wirkung der anderen zu vernachlässigen. Die Integration der Bewegungsgleichungen war dann ziemlich einfach und führte auf die Keplerschen Gesetze. Die Einflüsse der anderen Körper äußern sich dann in der Weise, daß in der Differentialgleichung zusätzliche Glieder auftreten, mit Koeffizienten, die von diesen Körpern abhängen, aber im allgemeinen ziemlich klein sind. Die allgemeine Methode besteht darin, die sechs Parameter, von denen die Keplersche Bewegung abhängt, in Reihen zu entwickeln (deren Glieder von diesen Koeffizienten abhängen). Die konstanten Glieder in diesen Reihen sind diejenigen, die man erhält, wenn man die nicht von der Sonne herrührenden Anziehungen vernachlässigt: Man erhielt so eine Folge von einfachen Differentialgleichungen für die nacheinander auftretenden Glieder dieser Reihe. Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange und Laplace befaßten sich in zahlreichen längeren Abhandlungen mit verschiedenartigen Methoden der Einführung solcher Entwicklungen (vor allem deshalb, um soweit wie möglich das Auftreten von Gliedern, die bezüglich der Zeit nichtperiodisch sind, von sogenannten „Säkulartermen“, zu vermeiden). Das Resultat dieser Bemühungen zeigt eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Vom mathematischen Standpunkt aus muß man jedoch bemerken, daß im achtzehnten Jahrhundert keine Rede davon war, die oberen Schranken der Fehler abzuschätzen, die man begeht, wenn man die betrachteten Entwicklungen auf die Glieder beschränkt, die man für wichtig hält. Die Lösung des größten Problems der Himmelsmechanik, die Stabilität des Sonnensystems, wurde also plausibel gemacht, aber nicht bewiesen.

Was schließlich die Parameter betrifft, die in einer Differentialgleichung auftreten, so ist auf das erste Beispiel für die später als „Sturm-Liouvillesches Problem“ bezeichnete Aufgabe (siehe 8.5.1.) hinzuweisen: Bei der Untersuchung der Schwingungen einer inhomogenen Saite kam d'Alembert auf die Betrachtung der linearen Gleichung $y'' = \lambda\varphi(x)\, y$ und suchte solche Werte des Parameters λ, für die eine nicht identisch verschwindende Lösung der Gleichung an den beiden Endpunkten des Intervalls $[0, a]$ null wird. Außerdem verlangte er, daß y in keinem inneren Punkt dieses Intervalls verschwindet; er untersuchte sodann die durch y'/y befriedigte Riccatische Gleichung und bewies mittels einer unvollständigen, aber zu einer strengen auszubauenden Überlegung die Existenz eines einzigen Wertes λ, der das Gewünschte leistet ([2], (2), Bd. XI_2, S. 311).

1.6. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Der Begriff der partiellen Ableitung war am Ende des siebzehnten Jahrhunderts bekannt, doch tauchten die ersten partiellen Differentialgleichungen nicht vor 1740 auf. Da sie mit Problemen der Mechanik (vgl. 1.7.) verknüpft sind, geht es dabei übrigens um Gleichungen mindestens zweiter Ordnung. Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung begann man in allgemeinem Zusammenhang erst um 1770 zu studieren. Euler zeigte, daß eine von zwei Parametern a, b abhängende Schar von Funktionen $z = f(x, y, a, b)$ einer solchen Gleichung genügt, die man durch Elimination von a und b aus den Ausdrücken für z und für die partiellen Ableitungen $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ erhält. Er bemerkte aber, daß umgekehrt die erhaltene Gleichung Lösungen besitzt, die von einer „willkürlichen" Funktion abhängen (die, worauf er ausdrücklich hinwies, nicht in seinem Sinne „stetig" (d. h. analytisch) zu sein braucht). Mit Hilfe verschiedener Kunstgriffe gelang es ihm, mehrere Typen von Gleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$ (mit $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$, die Bezeichnungen stammen von Euler selbst) zu integrieren.

Es ist interessant zu bemerken, daß er in diesen Rechnungen x, y, z, p, q eher als fünf Variable auffaßte, die nur durch die Relation $F(x, y, z, p, q) = 0$ und die Relation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ zwischen ihren Differentialen verknüpft sein sollen, als daß er x und y systematisch als „unabhängige" Variable betrachtete, von denen die anderen als Funktionen abhängen. Dies ermöglichte es ihm, alles mit Hilfe von zwei passend gewählten unabhängigen Variablen, die nicht mehr notwendigerweise x und y sein müssen, auszudrücken. Bei der Integration der Gleichung $pq = 1$ ([2], (1), Bd. XIII, S. 63) bemerkte er beispielsweise, daß aus dieser Gleichung und der Relation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ die Beziehung

$$d\left(z - px - \frac{y}{p}\right) = -\left(x - \frac{y}{p^2}\right) dp \tag{25}$$

folgt. Indem er y und p als unabhängige Variable wählte, stellte er fest, daß die rechte Seite von (25) nur dann ein totales Differential sein kann, wenn $x - y/p^2$ eine Funktion von p allein ist. Er setzte diese Funktion als eine Ableitung $f'(p)$ an und erhielt so das allgemeine Integral der Gleichung in der Gestalt

$$x = \frac{y}{p^2} + f'(p)\,, \qquad z = px + \frac{y}{p} - f(p)\,.$$

Die Integralflächen erweisen sich als von Geradenscharen erzeugt; in diesem Verfahren erkennen wir jetzt einen Spezialfall der Anwendung der Berührungstransformation wieder, die später von Legendre eingeführt wurde (siehe 9.2.4.).

Schon 1740 hatte Clairaut in Analogie zu den in der Gestalt $P\,dx + Q\,dy = 0$ geschriebenen Differentialgleichungen die totalen Differentialgleichungen („Pfaffsche Differentialgleichungen")

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0$$

betrachtet und folgendes bemerkt: Wenn diese Gleichung durch eine Flächenschar $V(x, y, z) = C$ mit einer beliebigen Konstanten C erfüllt wird, so muß dV zu

$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ proportional sein, mit anderen Worten, es muß ein Faktor (Multiplikator) M existieren derart, daß $M(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$ ein totales Differential ist. Dies liefert sofort die Bedingung

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0\,, \tag{26}$$

das erste Beispiel der Integrabilitätsbedingung, die im neunzehnten Jahrhundert von Jacobi, Clebsch und Frobenius (siehe 8.1.2.) in allgemeiner Weise formuliert werden sollte.

War diese Bedingung nicht identisch erfüllt, so hielt Euler die totale Differentialgleichung nicht für lösbar. Monge sollte diesen Standpunkt noch ausbauen, indem er folgendes bemerkte: Wenn es keine Fläche gibt, die der Gleichung genügt, so gibt es *Kurven*, längs denen die Differentiale der Gleichung $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ genügen: Das war der erste Schritt in Richtung auf die allgemeine Theorie der Integration Pfaffscher Systeme (siehe 8.1.2.).

Die entscheidenden Fortschritte in der Theorie der Gleichungen erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$ wurden von Lagrange erzielt. Seine Gedanken über die singulären Integrale von Differentialgleichungen führten ihn 1772 zu der folgenden Bemerkung: Wenn man eine zweiparametrige Schar

$$g(x, y, z, a, b) = 0$$

von Lösungen — ein, wie Lagrange sagte, „vollständiges Integral" — kennt, dann ist jede Einhüllende einer einparametrigen Schar dieser Flächen (die sich ergibt, wenn man a und b durch eine beliebige Relation verknüpft) ebenfalls eine Integralfläche der Gleichung, die in dem Sinne „allgemein" ist, daß sie von einer willkürlichen Funktion abhängt. Alles reduziert sich also darauf, ein vollständiges Integral zu finden.

In diesem Zusammenhang bemerkte Lagrange ([4], Bd. III, S. 550), der beispielsweise die partielle Differentialgleichung in der Gestalt

$$q = A(x, y, z, p) \tag{27}$$

gegeben annahm, folgendes: Kennt man eine von einem Parameter a abhängende Funktion $B(x, y, z, a)$ mit der Eigenschaft, daß die totale Differentialgleichung

$$B(x, y, z, a)\,dx + A\big(x, y, z, B(x, y, z, a)\big)\,dy = 0 \tag{28}$$

von einer Flächenschar $V(x, y, z, a) - b = 0$ erfüllt wird, so ist diese Schar ein vollständiges Integral von (27). Unter Benutzung der Bedingung (26) erhielt er für B eine Gleichung der Gestalt

$$R\frac{\partial B}{\partial x} + S\frac{\partial B}{\partial y} + T\frac{\partial B}{\partial z} + U = 0 \tag{29}$$

mit

$$R = -\frac{\partial A}{\partial p}(x, y, z, B)\,, \qquad S = 1\,,$$

$$T = A(x, y, z, B) - B\frac{\partial A}{\partial p}(x, y, z, B)\,,$$

$$U = -\frac{\partial A}{\partial x}(x, y, z, B) - B\frac{\partial A}{\partial z}(x, y, z, B)\,,$$

eine Gleichung also, welche die partiellen Ableitungen der unbekannten Funktion B nur in *linearen* Termen enthält. Ferner stellte er ([4], Bd. IV, S. 624) im Jahre 1779 fest, daß eine partielle Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \ldots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_i} + A_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, z) = 0 \tag{30}$$

dieses Typs sich einfach integrieren läßt, indem man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{A_1} = \cdots = \frac{dx_n}{A_n} = \frac{dz}{A_{n+1}} \tag{31}$$

heranzieht. Wenn man das allgemeine Integral dieses Systems in der Gestalt

$$G_j(x_1, \ldots, x_n, z) = C_j \qquad (1 \leqq j \leqq n) \tag{32}$$

ansetzt, wobei die Funktionen G_j unabhängig und die C_j beliebige Konstanten sind, so erhält man das „allgemeine" Integral von (30) in der Gestalt

$$\phi\big(G_1(x_1, \ldots, x_n, z), \ldots, G_n(x_1, \ldots, x_n, z)\big) = 0$$

mit einer willkürlichen Funktion ϕ. Man möchte also glauben, Lagrange habe dieses Resultat sogleich auf die spezielle Gleichung (29) angewandt, um daraus eine Methode zur Integration aller Gleichungen (27) herzuleiten. Es ist überraschend, daß er diese Möglichkeit anscheinend nicht bemerkt hat. Diese Schlußfolgerung aus den Arbeiten Lagranges wurde allem Anschein nach 1784 von einem jungen, früh verstorbenen Mathematiker namens Charpit gezogen, dessen Manuskript nie wieder aufgefunden wurde.

Jedenfalls wendete Monge ([6], [8]) einige Zeit später die Methode von Lagrange nicht nur auf zahlreiche Probleme der Geometrie an (siehe Kapitel 9), sondern entdeckte auch eine sehr einfache geometrische Interpretation der Integrale des Differentialgleichungssystems (31), das der speziellen Gleichung (29) entspricht: Drückt man x, y, z, p und $q = A(x, y, z, p)$ mit Hilfe eines Parameters t und der Integrationskonstanten aus, so sind die Kurven

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3)\,, \qquad y = y(t, C_1, C_2, C_3)\,, \qquad z = z(t, C_1, C_2, C_3)$$

die Berührungskurven mit der Enveloppe einer Integralfläche $V(x, y, z, a) - \varphi(a) = 0$, die in einer einparametrigen Schar variiert, und die beiden Relationen $p = p(t, C_1, C_2, C_3)$, $q = (t, C_1, C_2, C_3)$ bestimmen die Tangentialebenen (an die Fläche und ihre Einhüllende) längs dieser Kurve. Das ist der grundlegende Begriff der „charakteristischen Streifen", welcher seit Cauchy die Theorie der partiellen Differentialgleichungen beherrscht (siehe 8.1.2.).

1.7. Partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wenn die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung außerhalb der Geometrie kaum Verbindung mit den Anwendungen der Analysis haben, so sind die Aufstellung von Gleichungen höherer Ordnung und ihre Integration die wichtig-

sten Hilfsmittel, welche diejenigen Mathematiker nach und nach beherrschen lernen sollten, die vom Beginn des achtzehnten Jahrhunderts an Probleme der Mechanik deformierbarer Körper (Mechanik der Kontinua), der Elastizitätstheorie und der Hydrodynamik in Angriff nahmen, ehe sie sich im folgenden Jahrhundert an der Optik und der Elektrizitätslehre maßen. Die Schwierigkeit bestand darin, die von Newton aufgestellten Gesetze der Mechanik zu formulieren, wenn es sich um nichtstarre Körper handelt, d. h. um Systeme von Massenpunkten, die durch „Kohäsionskräfte" verbunden sind, von denen man wenig wußte. Auch die ersten Mathematiker, die diese Fragen anschnitten, die Brüder Bernoulli, Brook Taylor, Daniel Bernoulli und Euler vor 1740, erhielten noch keine partiellen Differentialgleichungen, welche die allgemeinsten Bewegungen beschreiben, sondern beschränkten sich darauf, einige spezielle Probleme mit eigens für diesen Zweck angestellten geometrischen Überlegungen zu behandeln. Erst im Jahre 1743 setzte d'Alembert die erste partielle Differentialgleichung der Mechanik an, nämlich die der Schwingungen einer schweren Kette in der Umgebung ihrer senkrechten Gleichgewichtslage:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial y}{\partial s} - (l - s)\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}.$$

Er fand schnell Nachahmer, und etwa um die Mitte des Jahrhunderts begegnete man der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

in der Hydrodynamik ([4], Bd. I, S. 444), der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

für die Ausbreitung des Schalls, der analogen Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

für die Schwingungen einer Membran. Man kannte auch kompliziertere Gleichungen zweiter Ordnung, wie die Gleichung

$$(m^2 \sin^2 \theta - a)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + a \sin \theta \cos \theta \frac{\partial z}{\partial \theta},$$

auf die Laplace in seiner Theorie der Gezeiten stieß, ebenso wie Gleichungen vierter Ordnung, wie die von Euler aufgestellte Gleichung

$$\frac{1}{c^4}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

für die Schwingungen eines Stabes. Euler erhielt sogar die allgemeinen Gleichungen der Bewegungen eines Fadens in Gestalt eines ziemlich komplizierten linearen Systems, und Lagrange fand einen analogen Kalkül für die Theorie der Wellen ([2], (2), Bd. XI_2, XII und XIII).

Es ist zu beachten, daß es sich bei all diesen mechanischen Problemen nicht so sehr darum handelte, das „allgemeine" Integral der betrachteten Gleichungen zu finden, als vielmehr darum, Integrale zu bestimmen, die außerdem „Randbedingungen" bzw. „Anfangsbedingungen" genügen, die ja einen wesentlichen Bestandteil des betreffenden Problems bilden. Die technischen Mittel der Analysis waren in jener Epoche völlig unzureichend, um die meisten dieser Probleme ernsthaft in Angriff zu nehmen, die erst gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts einer mathematischen Behandlung zugänglich zu werden begannen (siehe 8.5.3.). Ein einziges dieser Probleme wurde im achtzehnten Jahrhundert genauer studiert, das der schwingenden Saite; es wird durch die Gleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{33}$$

beschrieben, die erstmalig von d'Alembert 1746 (mit anderen Bezeichnungen) aufgestellt wurde; dabei kann c eine nichtkonstante Funktion von x sein, wenn die Saite nicht homogen ist. In der gleichen Abhandlung gab d'Alembert außerdem für den Fall, daß die Funktion c konstant ist, die allgemeine Lösung von (33) in der Gestalt

$$y = F(ct + x) + G(ct - x) \tag{34}$$

an, wobei die Funktionen F und G willkürlich sind; dies stellt sogleich das Problem, das Rechenergebnis mit den Erfahrungstatsachen zu vergleichen (wobei man damals nur das Problem der Schwingung einer an ihren Endpunkten fest eingespannten Saite betrachtete). Tatsächlich hatte B. Taylor im Jahre 1715, ohne die Gleichung (33) aufzustellen, auf direktem Wege gezeigt, daß eine Lösung des Problems durch

$$y = \sin \alpha x \cdot \sin c\alpha t \tag{35}$$

gegeben wird, wobei π/α die Länge der Saite ist; diese Lösung entspricht experimentell dem „Grundton". Man wußte aber genau (ebenfalls durch Experimente), daß die von der Saite angenommene Gestalt nicht immer eine Sinuskurve ist und daß man neben dem Grundton auch die „harmonischen" Obertöne in dem von einer schwingenden Saite ausgesandten komplexen Ton zu unterscheiden hat. Die erste dieser Feststellungen ist ohne Zweifel einer der Gründe, die Euler dazu führten, Funktionen, die er „mechanische" nannte, zuzulassen (siehe 1.2.), und kurz nach dem Erscheinen der Arbeit von d'Alembert erklärte er im einzelnen, wie es die Formel (34) ermöglicht, die Periodizität des beobachteten Phänomens aus einer der Saite beliebig vorgegebenen Anfangslage und einer ihr beliebig vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeit wieder zu bestimmen, einschließlich des Phänomens der „harmonischen" Obertöne, wenn die Anfangslage eine Sinuskurve ist, deren Periode ein Bruchteil der Saitenlänge ist. Die Tatsache, daß es unendlich viele in x periodische Lösungen gibt, war übrigens von D. Bernoulli um 1730 erkannt worden, und zwar zunächst bei einem benachbarten Problem, dem der Schwingung eines Stabes. Die Idee, in einer partiellen Differentialgleichung mit zwei Variablen x und t die „Variablen zu trennen", d. h. Lösungen der Gestalt $\varphi(x)\,\psi(t)$ zu bestimmen, wie

sie die von Taylor gefundene Lösung (35) hat, war um 1750 den Mathematikern vertraut geworden. Ferner war aber D. Bernoulli zu der Überzeugung gekommen, die Überlagerung von sinusförmigen Lösungen liefere die allgemeinste Lösung des Problems; daraus ergab sich auf Grund von (34) die Möglichkeit, eine beliebige „mechanische" Funktion in eine trigonometrische Reihe zu entwickeln. Er sollte leider bis zum Beginn des neunzehnten Jahrhunderts mit seiner Meinung allein bleiben, da Euler zwar für F und G in der Formel (34) „mechanische" Funktionen zuließ, aber die Vorstellung ablehnte, die durch das Verfahren von D. Bernoulli erhaltenen Lösungen seien die allgemeinsten; d'Alembert und Lagrange wollten sogar nur analytische Funktionen für F und G zulassen (siehe für all dies [2], (2), Bd. XI_2, S. 237—300).

Neben der Untersuchung spezieller Probleme begann sich eine Tendenz abzuzeichnen, wenigstens für die linearen Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei Variablen allgemeine Überlegungen anzustellen. Laplace bemerkte, daß man durch Variablentransformationen im allgemeinen die Glieder zweiter Ordnung auf ein einziges Glied, auf $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, zurückführen kann; da er sich nicht scheute, die Variablen imaginäre Werte annehmen zu lassen, unterschied er nicht zwischen elliptischen und hyperbolischen Gleichungen (siehe 8.5.). Immerhin bemerkte er den Ausnahmefall der Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$, die im achtzehnten Jahrhundert in den Anwendungen noch nicht auftritt; er beschränkte sich übrigens darauf, ihre Lösungen der Gestalt e^{ax+bt} zu bestimmen ([5], Bd. IX, S. 21).

Was die allgemeine lineare hyperbolische Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} + Cz + D = 0$$

zweier Variablen betrifft, so beschränkte sich Euler darauf, den Fall zu betrachten, daß eine der Funktionen A, B, C identisch null ist, d. h. den Fall, daß man auf gewöhnliche Differentialgleichungen kommen kann; er schlug, um zu diesem Fall zu gelangen, für die Funktion z eine Transformation der Gestalt $z = M\frac{\partial v}{\partial x} + Nv$ vor, eine Methode, die Laplace etwas später weiterentwickelte (ebenda, S. 29). Am Ende des Jahrhunderts ging Monge an die Theorie mit der gleichen geometrischen Auffassung heran wie an die Gleichungen erster Ordnung; auch dort führte er einen „Charakteristikenbegriff" ein, der es ihm unter anderem ermöglichte, das allgemeine Integral der Gleichung der Minimalflächen anzugeben (siehe 9.2.4.).

Schließlich erwähnen wir noch die zahlreichen Untersuchungen, die von den Analytikern des achtzehnten Jahrhunderts über *Differenzengleichungen* angestellt wurden. Für eine unendliche Zahlenfolge (y_n) definierte man die Folgen der aufeinanderfolgenden Differenzen (Δy_n), $(\Delta^2 y_n)$, ... durch $\Delta y_n = y_n - y_{n-1}$, $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n)$ und so fort; entsprechend wurden die aufeinanderfolgenden „partiellen" Differenzen für Doppel- bzw. Mehrfachfolgen definiert. Seit den Anfängen der Infinitesimalrechnung sah man die Differentialrechnung als „Grenzfall" der

Differenzenrechnung an; umgekehrt hatte man bemerkt, daß sich die Methoden zur Integration der Differentialgleichungen oft ebenso gut auf Differenzengleichungen anwenden lassen. Auf diesem Gebiet arbeiteten insbesondere Euler, Lagrange ([4], Bd. I, S. 23, Bd. IV, S. 151, Bd. V, S. 624) und Laplace ([5], Bd. VII, S. 7, und Bd. VIII, S. 5 und 69), hauptsächlich im Hinblick auf Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung; daher beschränkten sie sich meistens auf lineare Gleichungen des Typs

$$a_0 \Delta^k y + a_1 \Delta^{k-1} y + \cdots + a_k y = b$$

für einfache Folgen.

1.8. Variationsrechnung

Bekanntlich war eine der ersten Motivationen für die Differentialrechnung die Bestimmung der Maxima und Minima einer Funktion. Am Ende des siebzehnten Jahrhunderts war einer der Triumphe des neuen Kalküls die Lösung von Extremalaufgaben, bei denen diesmal die Größe, von der ein Maximum bzw. Minimum gesucht wird, nicht mehr von einem oder mehreren Parametern abhängt, sondern von einer variablen *Kurve*. Das Wesen der Differentialrechnung brachte es übrigens mit sich, daß es sich nur um die Bestimmung von *relativen* Extrema handeln kann (siehe unten). Zu der Aufgabe, das alte isoperimetrische Problem zu lösen (Bestimmung einer geschlossenen ebenen Kurve gegebener Länge, welche den größtmöglichen Flächeninhalt begrenzt), gesellten sich viele andere; beispielsweise bestimmte Johann Bernoulli die Kurven minimaler Länge auf einer Fläche (die man später *geodätische Linien* nannte (siehe 9.4.2.)); Newton löste das Problem eines Körpers mit geringstem Widerstand (es handelt sich darum, eine ebene Kurve zu finden, deren Rotation um eine senkrechte Achse einen Körper erzeugt, der beim freien Fall in der Luft minimalen Widerstand bietet); das Problem der Brachistochrone (derjenigen Kurve zwischen zwei gegebenen Punkten in einer senkrechten Ebene, welche ein unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungsfrei gleitender materieller Punkt in kürzester Zeit durchläuft) war Anlaß zu einem Wettstreit zwischen den berühmtesten Mathematikern dieser Epoche.

Euler knüpfte schon in seinen ersten Arbeiten an diesen Typ von Problemen an und gelangte schnell zu einer Methode, welche die Ergebnisse seiner Vorgänger verallgemeinert und systematisiert. Er setzte die Funktion, deren Extrema man sucht, in der Gestalt

$$\int_a^b F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)})\, dx \tag{36}$$

an, wobei y eine unbekannte Funktion von x ist. Alle oben genannten Probleme lassen sich auf diese Gestalt bringen. Eulers Methode bestand darin, das Integrationsintervall durch Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_k$ in kleine Intervalle zu unterteilen und die Kurve $y = y(x)$ durch das dieser Kurve einbeschriebene Polygon zu ersetzen

dessen Eckpunkte die Punkte (x_j, y_j) mit $y_j = y(x_j)$ sind. Er ersetzte außerdem $y'(x_j)$ durch $\Delta y_j/\Delta x_j$, $y''(x_j)$ durch $\Delta^2 y_j/(\Delta x_j)^2$ usw. derart, daß er anstelle von (36) eine Funktion von k Variablen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ erhielt. Er setzte sodann die Ableitungen dieser Funktion nach den y_j als verschwindend an und ließ dann in der Bedingung, die er dafür erhielt, die Anzahl der x_i gegen ∞ streben. So kam er zu der berühmten „Eulerschen Gleichung"

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \cdots = 0 \tag{37}$$

für die unbekannte Funktion y, die es ihm ermöglichte, alle früheren Ergebnisse wiederzufinden und viele neue, ähnlich geartete Probleme zu lösen ([2], (1), Bd. XXIV).

In der Folgezeit wurde Eulers Methode von Lagrange erheblich vereinfacht ([4], Bd. I, S. 335); Lagrange vermied den Übergang zu dem die Kurve approximierenden Polygon, indem er die Kurve selbst variieren ließ, d. h. indem er $y(x)$ durch eine einen variablen Parameter t enthaltende Funktion $y(x, t)$ ersetzte, welche die Bedingung $y(x, 0) = y(x)$ erfüllt (erste Vorstellung von der späteren Homotopie (vgl. Kapitel 10)). Die „Variation" δy ist dann die Funktion $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$, und es ist $\delta(y') = (\delta y)'$, $\delta(y'') = (\delta y)''$ usw. Es genügt dann, $y(x)$ im Integral (36) durch $y(x, t)$ zu ersetzen und zu verlangen, daß die so entstehende Funktion von t für $t = 0$ eine verschwindende Ableitung hat, um nach partieller Integration die Eulersche Gleichung sowie Randbedingungen zu erhalten, von denen Euler meistens abgesehen hatte. Außerdem läßt sich die Lagrangesche Methode ohne wesentliche Änderung auf Doppel- und Mehrfachintegrale anwenden; auf diese Weise erhielt Lagrange beispielsweise die partielle Differentialgleichung der Minimalflächen (siehe 9.2.4.).

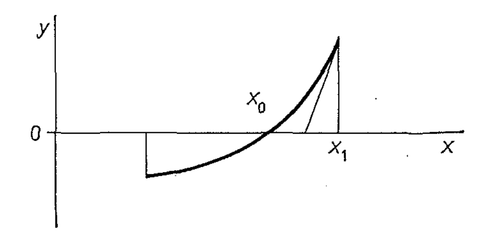
Seit dem siebzehnten Jahrhundert wußte man, daß die Bedingung $f'(x_0) = 0$ nicht hinreichend ist dafür, daß eine Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 ein relatives Maximum oder Minimum annimmt. Lagrange selbst befaßte sich in einer seiner ersten Abhandlungen damit, hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, daß eine Funktion von zwei oder mehreren Variablen in einem Punkt ein relatives Maximum oder Minimum annimmt ([4], Bd. I, S. 3). Erst recht braucht eine Lösung y der Eulerschen Gleichung kein relatives Maximum bzw. Minimum des Integrals (36) zu liefern. Übrigens war hier sogar der Begriff des „relativen Extremums" selbst nicht scharf umrissen, und schon zu Ende des Jahrhunderts war man sich darüber klar, daß der Begriff der einer Funktion „benachbarten" Funktion mehrere Interpretationen zuläßt. Es bedurfte noch eines ganzen Jahrhunderts des Nachdenkens, ehe die Variationsrechnung auf soliden Grundlagen stand (siehe 8.6.).

1.9. Numerisches Rechnen

Wir haben schon das Interesse erwähnt, das die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts dem numerischen Rechnen entgegenbrachten: Euler schrieb nicht weniger als ein halbes Dutzend Abhandlungen über die näherungsweise Berechnung

der Zahl π, und Lagrange widmete der Auflösung algebraischer Gleichungen ein ganzes Buch, in dem die näherungsweise Berechnung der Wurzeln großen Raum einnimmt ([4], Bd. VIII). Beide tun dabei nichts anderes als der Tradition ihrer Vorgänger zu folgen: Ihrem Wesen nach ersetzt die Infinitesimalrechnung komplizierte Funktionen durch Näherungsausdrücke, die sich mittels der Taylorschen Formel ergeben; sie eignet sich daher besonders gut für alle Arten von Näherungsrechnungen, beispielsweise für die Zusammenstellung von Tafeln mit Funktionswerten (Funktionstafeln).

Für die Auflösung von Gleichungen hatte Newton eine Approximationsmethode angegeben, die darin besteht, die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung einer Nullstelle x_0 von $f(x)$ durch die Tangente in einem ihrer Punkte zu ersetzen. Die Methode funktioniert im allgemeinen sehr gut, vorausgesetzt, man geht von einem Punkt x_1 aus, welcher der gesuchten Nullstelle schon hinreichend benachbart ist. Man muß also damit beginnen, die Nullstellen zu „trennen", d. h. hinreichend kleine Intervalle zu bestimmen, die nur eine einzige Nullstelle enthalten. Für die algebraischen



Gleichungen $P(x) = 0$, wobei P ein Polynom vom Grade n mit reellen Koeffizienten ist, verfügt man über Verfahren, die es gestatten, die Anzahl der notwendigen Versuche mittels a-priori-Abschätzungen der Nullstellen als Funktionen der Koeffizienten von P zu reduzieren. Man kann auch, wie Lagrange bemerkte, diese Abschätzungen auf die algebraische Gleichung vom Grade $\frac{n(n-1)}{2}$ anwenden, deren Lösungen die Zahlen $\frac{1}{(x_i - x_j)^2}$ sind (dabei sind die x_i die Nullstellen von $P(x)$). Während des ganzen neunzehnten Jahrhunderts gingen die Bemühungen zahlreicher Algebraiker und Analytiker (Sturm, Hermite, Sylvester, Cauchy, Kronecker usw.) dahin, Kriterien zu erhalten, die es (mehr oder weniger theoretisch, d. h. im Prinzip) erlauben, die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms in einem gegebenen Gebiet der komplexen Ebene zu bestimmen (siehe [D], S. 61–69 und 244–249).

Ein Verfahren, das von D. Bernoulli stammt, gestattet es, die Nullstelle mit dem größten Absolutbetrag zu berechnen, wenn es nur eine einzige solche gibt: In der Entwicklung von $\frac{P'(x)}{P(x)}$ nach Potenzen von $\frac{1}{x}$,

$$\frac{n}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \cdots + \frac{a_m}{x^{m+1}} + \cdots,$$

genügt es, den Grenzwert von $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ zu betrachten. Euler wendete die gleiche Idee ohne Bedenken an, um die kleinsten Nullstellen der Besselfunktion J_0 zu erhalten, indem er annahm, $J_0(2\sqrt{x})$ könne als unendliches Produkt $C\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{x_n}\right)$ angesetzt werden ([2], (2), Bd. XI_1, S. 307–323, und Bd. XI_2, S. 318).

Eine andere Methode, die Lagrange zur Approximation einer Nullstelle x_0 von $P(x)$ empfahl, besteht darin, den ganzen Teil m von x_0 zu bestimmen und dann, indem man $x_0 = m + \frac{1}{x_1}$ setzt (dies liefert eine algebraische Gleichung für x_1), den ganzen Teil von x_1 zu bestimmen, usw. Dies liefert die Entwicklung von x_0 in einen Kettenbruch.

Was die Berechnung von Reihen betrifft, so haben wir oben gesehen, wie die Euler-Maclaurinsche Summenformel Näherungswerte liefern kann, selbst wenn die Reihe langsam konvergiert. Dies ist übrigens nur eines der zahlreichen Verfahren, die Euler zur Verbesserung der Geschwindigkeit der Konvergenz von Reihen erfand. Das bekannteste (für eine Potenzreihe) besteht darin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^n a) \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{n+1}}$$

anzusetzen; dabei ist $\Delta^n a$ die n-te Differenz der Koeffizientenfolge $(a_1, a_2, \ldots)$ (mit $\Delta^0 a = a_1$). Sind die $\Delta^n a$ beschränkt, so konvergiert die Reihe auf der rechten Seite für $x = -1$ wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$. Beispielsweise gehen die langsam konvergierenden Reihen

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

über in

$$\log 2 = 1 + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \cdots,$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\,(2n+1)}\,\frac{1}{2^n}.$$

Umgekehrt ermöglicht die Euler-Maclaurinsche Summenformel die numerische Berechnung eines Integrals durch eine endliche Summe; ein Spezialfall ist die Simpsonsche Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{(b-a)^5}{4!\,5!} f^{(4)}(\xi), \qquad a \leqq \xi \leqq b.$$

Andere Methoden zur Berechnung von Integralen bestanden darin, den Integranden durch ein passend gewähltes Polynom zu approximieren; sie wurden vor allem im neunzehnten Jahrhundert entwickelt.

Schließlich weisen wir darauf hin, daß Euler in der Absicht, numerische Werte der Lösung einer Differentialgleichung zu berechnen, schon die stückweise lineare Approximation verwendete, die im neunzehnten Jahrhundert unter dem Namen „Methode von Cauchy-Lipschitz" bekannt wurde (siehe 8.1.1.).

1.10. Literatur

[1] P. Brousse, Mécanique, A. Colin, Paris 1968.
[2] L. Euler, Opera omnia, 3 Reihen, Teubner und O. Füssli, Leipzig-Berlin-Zürich 1911—1976.
[3] G. H. Hardy, Divergent Series, Clarendon Press, Oxford 1949 (Russische Übersetzung Moskau 1951).
[4] J. L. Lagrange, Oeuvres, 14 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1867—1892.
[5] P. S. Laplace, Oeuvres, 14 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1878—1912.
[6] G. Monge, Applications de l'Analyse à la Géométrie, Paris 1809.
[7] L. Pars, A Treatise on Analytical Dynamics, Heinemann, London 1965.
[8] R. Taton, L'oeuvre scientifique de Monge, Presses universitaires de France, Paris 1951.
[D] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris 1968.

Zusatz bei der deutschen Ausgabe: Zur Geschichte der Differentialgleichungen (vgl. 1.5. und 1.6.) sei noch auf das von A. P. Juschkewitsch (Yuškevič) verfaßte Kapitel X, Historischer Abriß, in W. W. Stepanow, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 5. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1982 (Übersetzung aus dem Russischen), verwiesen.

2. Algebra und Geometrie bis zum Jahre 1840

von Jean Guérindon und Jean Dieudonné

2.0. Einführung

Dieses Kapitel behandelt die Geschichte der Algebra und der Geometrie vom letzten Drittel des siebzehnten Jahrhunderts bis etwa 1840, der Epoche, in der die Arbeiten von Hamilton, Boole, Cayley und Graßmann einen Wendepunkt in der Auffassung der Algebra und ihrem Verhältnis zur Geometrie markieren.

2.0.1. *Der Zustand der Algebra und der Geometrie in der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts*

Obwohl algebraische Probleme seit der Zeit der Babylonier gestellt und gelöst worden sind, vollzog sich die Entwicklung der Algebra im eigentlichen Sinne äußerst langsam und mühsam, vor allem deshalb, weil bis zum Ende des sechzehnten Jahrhunderts geeignete Bezeichnungen fehlten. Erst mit Viète und Descartes fanden für die in Gleichungen auftretenden bekannten und unbekannten Größen Bezeichnungen Verbreitung, die den unsrigen nahekommen, und zwar sowohl für die algebraischen Operationen als auch für die Exponenten. Dagegen wurden Indizes vor Leibniz und Newton kaum benutzt. (Newton schrieb sie oft wie Exponenten links oder rechts von dem Buchstaben ([28], Bd. IV, S. 604–615).)

Bis etwa gegen 1850 bestand die Algebra für alle Mathematiker darin, *algebraische Gleichungen* (oder Systeme solcher Gleichungen) zu untersuchen und Methoden zu ihrer Auflösung zu ersinnen. Die gesuchten Werte für die „Unbekannten" waren „Zahlen", und vor Viète waren auch die Koeffizienten der Gleichungen explizit gegebene Zahlen. Der Begriff „Zahl" umfaßte zunächst die positiven reellen Zahlen, von denen schon die Griechen eine klare Vorstellung hatten (sie nannten sie „Verhältnisse von Größen"), dann die Null und die negativen Zahlen, die man vor dem neunzehnten Jahrhundert rein empirisch benutzte, schließlich aber, nachdem man sie lange umgangen hatte (vgl. die prinzipiellen Einwände wie bei Viète), seit Descartes laufend verwendete; ferner die imaginären Zahlen, die kühne Schöpfung

der italienischen Algebraiker des sechzehnten Jahrhunderts, deren Wesen bis gegen 1800 mysteriös blieb, die aber vom siebzehnten Jahrhundert an in Algebra und Analysis immer mehr verwendet wurden, weil das Rechnen mit ihnen Vereinfachungen mit sich brachte (siehe Kapitel 4).

Seit den Babyloniern kann man Systeme linearer Gleichungen lösen, indem man die Unbekannten nacheinander „eliminiert", bis man das Problem auf eine Aufeinanderfolge von „Dreisatzaufgaben", Gleichungen mit einer einzigen Unbekannten der Gestalt $ax = b$, zurückgeführt hat. Bis zum Jahre 1750 etwa versuchte jedoch niemand, diejenigen Fälle zu charakterisieren, in denen diese Elimination möglich ist, und wenn sie scheiterte, begnügte man sich damit, das Problem als „unmöglich" oder „unbestimmt" zu bezeichnen.

Was die Gleichungen mindestens zweiten Grades (in einer Unbekannten) betrifft, so sind zu der Formel für die Gleichung zweiten Grades (die im wesentlichen den Babylonieren bekannt war) die beiden großen Entdeckungen der Italiener des sechzehnten Jahrhunderts hinzugekommen, die (sogenannte „Cardanosche") Formel

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{1}$$

für die Wurzeln von $x^3 + px + q = 0$, und die Methode, welche die Auflösung einer Gleichung vierten Grades auf die Auflösung einer Gleichung dritten Grades und das Ziehen von Quadratwurzeln zurückführt. Im siebzehnten Jahrhundert hat man den Begriff der Vielfachheit einer Wurzel herausgearbeitet und erkannt, daß eine Gleichung n-ten Grades n Wurzeln hat, die reell oder imaginär, voneinander verschieden sein oder auch zusammenfallen können. Vor der Mitte des achtzehnten Jahrhunderts gab es aber keine Versuche, diese Aussage (die später „Fundamentalsatz der Algebra" genannt wurde) zu beweisen. Schließlich kannte man seit dem Anfang des siebzehnten Jahrhunderts die Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung und den symmetrischen Funktionen der Wurzeln dieser Gleichung.

Was die „Geometrie" betrifft, so war das, was man zu Anfang des siebzehnten Jahrhunderts darunter verstand, die Geometrie der Griechen, wie sie von Euklid, Archimedes, Apollonios und Pappos überliefert worden war. In allen Problemen, welche „Größen" (Längen, Flächeninhalte, Volumina, Winkel) betreffen, war sie niemals von der Algebra getrennt worden; so wird beispielsweise die Untersuchung der Kegelschnitte bei Apollonios vor allem mit Hilfe ihrer Gleichung in bezug auf zwei konjugierte Durchmesser durchgeführt [16]. Die Entdeckung der Methode der kartesischen Koordinaten (die zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts „analytische Geometrie" genannt wurde) durch Descartes und Fermat erhöhte die Bedeutung der Algebra bei geometrischen Fragestellungen beträchtlich, da sie es unter anderem ermöglichte, algebraische Kurven und algebraische Flächen, die allgemeiner sind als Kegelschnitte oder Quadriken, begrifflich zu fassen. Bis gegen 1680 war jedoch der einzige allgemeine Begriff, mit dem gearbeitet wurde, der Grad einer ebenen Kurve, und die Untersuchung solcher Kurven ging nicht über die einiger Spezialfälle hinaus. Immerhin gewöhnte man sich durch die Methoden,

algebraische Gleichungen dadurch zu lösen, daß man ebene Kurven zum Schnitt brachte (solche Methoden wurden seit den Griechen sehr geschätzt), an das Operieren mit Gleichungen algebraischer Kurven sowie daran, Unbekannte aus solchen Kurvengleichungen zu „eliminieren", um Schnittpunkte dieser Kurven zu bestimmen.

2.0.2. *Die Probleme*

Das große Thema des achtzehnten Jahrhunderts in der Mathematik war die Entwicklung der Begriffe der Differential- und Integralrechnung, wie sie von Newton und Leibniz geschmiedet worden war (siehe Kapitel 1), und ihre Anwendung auf eine Vielzahl von Problemen aller Art. Algebra und Zahlentheorie wurden infolgedessen während der ersten Hälfte des Jahrhunderts fast völlig vernachlässigt.

Die Auflösung linearer Gleichungen scheint in dieser Epoche den Mathematikern keine neuen Probleme gestellt zu haben, da man wenigstens für die Gleichungssysteme mit numerisch explizit gegebenen Koeffizienten über ein regelrechtes Verfahren zur Auflösung verfügte. Erst als in den Fragen der algebraischen Geometrie und der Mechanik lineare Gleichungssysteme auftraten, deren *Koeffizienten* selbst Funktionen eines variablen Parameters sind, begann sich um 1750 eine allgemeine Theorie zu entwickeln, in der man versuchte, die Lösung explizit als Funktion dieser Parameter auszudrücken. In diesem Zusammenhang entstand die Theorie der Determinanten, die das Problem löst, wenn die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt und die Determinante des Systems nicht verschwindet. Für mehr als ein Jahrhundert blieb man nun (so erstaunlich es auch scheinen mag) in dieser Frage an dieser Stelle stehen, und erst um 1870 sollte die allgemeine Theorie linearer Gleichungssysteme vollendet werden (vgl. 3.2.2.).

Was die Begriffe betrifft, die gegenwärtig als zur linearen und zur multilinearen Algebra gehörend angesehen werden, wie lineare Unabhängigkeit, lineare Transformationen, Eigenwerte, Dualität, bilineare und quadratische Formen, so werden wir sehen, daß sie schon im achtzehnten Jahrhundert vereinzelt bei zahlreichen, sehr unterschiedlichen Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungen entstammenden Problemen auftraten. Bis gegen 1840 jedoch verwendeten Mathematiker, die ein Problem zu behandeln hatten, bei dem diese Begriffe eine Rolle spielten, ad-hoc-Methoden, ohne daran zu denken, sie in Beziehung zu anderen Fragen zu setzen. Mit Ausnahme der Determinantentheorie war die lineare und die multilineare Algebra während der von uns betrachteten Periode kaum mehr als ein chaotischer Haufen isolierter Ergebnisse, den in eine allgemeine Theorie einzuordnen niemand auch nur im Traum erwog.

Ganz anders ist es in der Theorie der algebraischen Gleichungen mindestens fünften Grades mit einer Unbekannten. Als sie nach 1730 wieder begann, neue Untersuchungen auf sich zu lenken, konzentrierte sie sich auf die beiden von den Algebraikern des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts hinterlassenen Probleme, die Existenz komplexer Wurzeln und die Möglichkeit, die Wurzeln „durch Radikale" auszudrücken. Hier waren sich die Mathematiker des allgemeinen

Charakters ihrer Untersuchungen voll bewußt, und ihre Arbeiten folgten mit beständigen Fortschritten aufeinander. Die vollständige Lösung dieser beiden Probleme nach einem Jahrhundert der Bemühungen sollte einen gewaltigen Einfluß auf die weitere Entwicklung der Mathematik ausüben, indem sie einerseits auf die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen (vgl. 4.3.), andererseits auf die grundlegenden Begriffe Gruppe und Körper führte.

In der Geometrie kam die Tendenz zur Allgemeinheit ebenfalls sehr früh im achtzehnten Jahrhundert in den ersten Versuchen der Klassifikation der algebraischen Kurven und Flächen zum Ausdruck, aus der nach und nach der Begriff der (numerischen oder algebraischen) *Invariante* hervorgegangen ist. An der Wende zum neunzehnten Jahrhundert wurde dann die Untersuchung der „reinen" Geometrie wieder aktuell, und mehrere Autoren versuchten, die Betrachtung der vielfältigen, bei Euklid und seinen Nachfolgern traditionellen „Fallunterscheidungen" zu vermeiden. Diese Bemühungen führten gegen 1820 zu einer der größten Schöpfungen des neunzehnten Jahrhunderts, der *komplexen projektiven Geometrie*, deren spektakuläre Erfolge 100 Jahre lang den Kern der algebraischen Geometrie bildeten. Im Laufe ihrer brillanten Entwicklung bildeten sich zwei zentrale Ideen der heutigen Mathematik heraus, die der Transformation und die der Dualität; ebenfalls hier tauchte auch, mit der Unterscheidung zwischen „metrischen" und „projektiven" Eigenschaften, der erste Keim des Begriffs der *mathematischen Struktur* auf, der 1872 zum „Erlanger Programm" führen sollte (vgl. 3.4.3.).

2.1. Lineare und multilineare Algebra

2.1.1. *Die Determinantentheorie*

Das erste Beispiel einer expliziten Berechnung der Lösung eines Systems von n linearen Gleichungen in n Unbekannten, deren Koeffizienten unbestimmt (also durch Buchstaben dargestellt) sind, wurde von Maclaurin 1748 für $n = 2$ und $n = 3$ praktiziert; er versuchte auch schon, eine allgemeine Regel zu formulieren, welche die Formel für die Lösung bei beliebigem n liefert. Zwei Jahre später beschrieb G. Cramer, offenbar ohne die Arbeit von Maclaurin zu kennen, für beliebiges n explizit die Formeln, welche die Lösung in Gestalt eines Quotienten von zwei Ausdrücken liefern. Zähler und Nenner sind multilineare Polynome in den Koeffizienten des Systems, die nach Cauchy ([5], (2), Bd. I, S. 91—169) als *Determinanten* bezeichnet werden. Cramer machte die Sache nicht zum Gegenstand einer ausführlichen Untersuchung, und erst mit Vandermonde [32] und Laplace ([21], Bd. VIII, S. 395—406) tauchte, nach 1770, der Gedanke auf, die Determinanten n-ter Ordnung durch Induktion nach n zu definieren („Entwicklung" nach Zeilen oder Spalten); damals wurden auch ihre ersten allgemeinen Eigenschaften erkannt, beispielsweise, daß es alternierende multilineare Funktionen der Zeilen und der Spalten sind und daß die Determinante sich beim Transponieren nicht

ändert. Wie die meisten Algebraiker vor Cauchy (und auch noch danach) begnügten sie sich übrigens damit, diese Eigenschaften für kleine Werte von n zu verifizieren.

Es war Cauchy, in der Algebra wie in der Analysis gleichermaßen als „Gesetzgeber" wirkend (vgl. die Kapitel 4, 6 und 8), der in einer seiner ersten Arbeiten ([5], (2), Bd. I, S. 91–169) die allgemeinen Sätze über Determinanten vollständig bewies, indem er folgenden eleganten Kunstgriff benutzte. Wenn man das Polynom $a_1 a_2 \cdots a_n \prod_{i<j} (a_j - a_i)$ in Monome bezüglich der n Variablen a_j $(1 \leqq j \leqq n)$ entwickelt und dann die Potenzen a_j^k durch a_{jk} ersetzt, erhält man die Determinante $\det (a_{jk})$. Er ergänzte die Ergebnisse seiner Vorgänger um die allgemeine Formel, die das Produkt zweier Determinanten als eine dritte Determinante liefert (die gleichzeitig und unabhängig von Binet gewonnen wurde), sowie um die Relationen zwischen den Determinanten, die mit Hilfe von Unterdeterminanten verschiedener Ordnung einer gegebenen Determinante gebildet werden (sie ergaben sich später aus der äußeren Algebra, vgl. 3.5.). Von diesem Zeitpunkt an entwickelten sich die Determinanten schnell zu einem universellen Werkzeug, das bei allen Problemen der linearen und der multilinearen Algebra benutzt wurde. Außerdem bildeten die zahlreichen algebraischen Identitäten, die sich beim Rechnen mit Determinanten ergeben, bis zum Ende des Jahrhunderts (siehe [27]) das Entzücken mancher Algebraiker, die den rein formalen Aspekt der Theorie der Determinanten (der schon bei Cauchy spürbar ist) betonten und den Zusammenhang mit den Problemen, bei denen sie auftreten, vernachlässigten, dabei beeindruckende Rechenergebnisse ansammelten, ohne daß sich allerdings viele allgemeine Ideen erkennen ließen (eine Entwicklung, die sich später bei den Matrizen wiederholte (vgl. 3.2.2.)). Wir möchten die Berechnung einiger spezieller Determinanten erwähnen, etwa der sogenannten „Vandermondeschen" Determinante[1]) $\det (a_j^k)$ und der Cauchy-

[1]) Diese auf Cauchy zurückgehende Bezeichnung ist historisch nicht gerechtfertigt, da Vandermonde eine solche Determinante niemals explizit eingeführt hat. Bei ihren algebraischen Untersuchungen (und gerade im Zusammenhang mit der Lösung von Gleichungen „durch Radikale", vgl. 2.2.2.) stießen Vandermonde und vor allem Lagrange auf Systeme linearer Gleichungen der Gestalt

$$a_1^k x_1 + a_2^k x_2 + \cdots + a_n^k x_n = b_k \qquad (k = 0, 1, \ldots n - 1), \tag{V}$$

wobei die a_j paarweise verschiedene Zahlen sind. Zur Lösung eines solchen Systems benutzte Lagrange, ohne Zweifel von seiner Interpolationsformel inspiriert, eine direkte Methode (die auf das zu (V) transponierte System führt). Er betrachtete die beiden Polynome

$$P(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n) = z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n,$$
$$Q(z) = (z - a_2) \cdots (z - a_n) = z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \cdots + q_{n-1},$$

wobei sich die q_j durch die Rekursionsformeln

$$q_1 = a_1 + p_1, \qquad q_2 = a_1^2 + p_1 a_1 + p_2,$$
$$q_3 = a_1^3 + p_1 a_1^2 + p_2 a_1 + p_3, \ldots$$

ergeben; dann erhielt er auf Grund der Relationen (V) die Beziehung

$$x_1 Q(a_1) = b_1 q_{n-1} + b_2 q_{n-2} + \cdots + b_n$$

und hieraus den Ausdruck für x_1.

schen Determinante det $(1/(a_j + b_k))$; Jacobi bewies als erster, daß eine schiefsymmetrische Determinante $(a_{kj} = -a_{jk})$ ungerader Ordnung gleich null ist. Auf lineare Systeme mit schiefsymmetrischer Determinante war Pfaff 1815 bei einem Problem der partiellen Differentialgleichungen gestoßen; für den Fall, daß die Anzahl n der Gleichungen und der Unbekannten durch 2 teilbar ist, hatte Pfaff (für kleine Werte von n) Formeln für die Lösung angegeben, die sich von den Cramerschen unterschieden, wobei die Funktionen der a_{jk} in Zähler und Nenner in den a_{jk} nur vom Grade $n/2$ waren. Jacobi ([17], Bd. IV, S. 17—29) wies kurz auf das allgemeine Bildungsgesetz dieser Ausdrücke hin (die später *Pfaffsche Ausdrücke* (*Pfaffianden*) genannt wurden); im Jahre 1849 zeigte Cayley, daß dann det (a_{jk}) das Quadrat des Pfaffschen Ausdrucks ist ([6], Bd. I, S. 410—413).

Wie schon gesagt, waren die anderen Begriffe der linearen und der multilinearen Algebra vor 1840 nicht Gegenstand irgendeiner allgemeinen Untersuchung; falls ein solcher Begriff auftauchte, gab man sich damit zufrieden, wenn man ihn mit einem Problem der Determinantentheorie verknüpfen konnte.

2.1.2. *Linearkombinationen, lineare Abhängigkeit, kommutative Gruppen*

Das erste Beispiel für lineare Abhängigkeit tauchte bei einem geometrischen Problem auf. Die Gleichung $P(x, y) = 0$ einer ebenen algebraischen Kurve n-ten Grades enthält $(n + 1)(n + 2)/2$ Koeffizienten, und die Kurve ändert sich nicht, wenn man P mit einer Konstanten multipliziert. Daher hängen die Kurven n-ten Grades von $n(n + 3)/2$ Parametern ab, so daß man sich das Problem stellte, eine solche Kurve durch die Bedingung zu bestimmen, daß sie durch $n(n + 3)/2$ in der Ebene vorgegebene Punkte (x_j, y_j) gehen soll. Zu dieser Zeit nahm man jedoch an, daß „im allgemeinen" zwei Kurven n-ten Grades n^2 verschiedene Punkte gemeinsam haben (siehe 2.3.1.); im Fall $n \geqq 3$ wird also für gewisse Lagen des Systems der $n(n + 3)/2$ Punkte mehr als eine Kurve n-ten Grades durch diese Punkte gehen. Diese Tatsache war schon 1720 von Maclaurin [22] bemerkt worden; man bezeichnet diese Erscheinung oft als „Cramersches Paradoxon", da Cramer 1744 Euler das Problem unterbreitet hatte. Die von Euler zu diesem Thema publizierte Arbeit ([12], (1), Bd. XXVI, S. 33—45) läßt vom Standpunkt der Klarheit nichts zu wünschen übrig; sie zeigt, daß die linearen Gleichungen $P(x_j, y_j) = 0$, welche die Koeffizienten von P bestimmen, nicht mehr linear unabhängig sind, wenn die gewählten Punkte einem System von n^2 Punkten angehören, welche zwei Kurven gemeinsam sind. Dabei blieb Euler stehen, ohne daß er versuchte, den Begriff der linearen Abhängigkeit weiter zu klären.

Etwas früher tauchte bei Euler im Zusammenhang mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen (siehe 1.5.) der Begriff der Linearkombination von *Funktionen* auf, welche spezielle Lösungen einer solchen Gleichung sind. Doch weder er noch d'Alembert oder Lagrange, welche dieses Problem ebenfalls behandelten, wiesen darauf hin, daß man sich, wenn man die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung durch Linearkombination von n parti-

kulären Lösungen erhalten will, vergewissern muß, daß diese linear unabhängig sind. Diese Tatsache scheint zum ersten Mal von Cauchy klar formuliert worden zu sein, der das Problem sogleich auf die Bedingung zurückführte, daß das lineare System, das zum Ausdruck bringt, daß die Kombination $C_1y_1 + \cdots + C_ny_n$ der n partikulären Lösungen und ihre $n - 1$ Ableitungen in einem Punkt vorgegebene Werte annehmen, lösbar ist ([26], S. 573—574) (dies läuft natürlich darauf hinaus, daß die entsprechende Determinante, die von Wronski um 1815 eingeführt wurde und seither Wronskische Determinante der n Funktionen y_i genannt wird, nicht verschwindet).

Seit dem Ende des achtzehnten Jahrhunderts treten auch Linearkombinationen mit *ganzzahligen* Koeffizienten und der entsprechende Begriff der linearen Unabhängigkeit über $\mathbf{Z}$ in verschiedenen Zusammenhängen auf: Perioden elliptischer bzw. Abelscher Funktionen bei Gauß, Abel, Jacobi und ihren Nachfolgern (siehe Kapitel 7), Logarithmen der Einheiten von algebraischen Zahlkörpern bei Dirichlet (siehe 5.5.1.), Verknüpfungen der Klassen binärer quadratischer Formen bei Gauß (siehe 5.4.) und schließlich Linearkombinationen mit ganzzahligen Koeffizienten von algebraischen Zahlen bei Gauß, Jacobi, Dirichlet und Eisenstein. Von unserem Standpunkt aus sind dies Spezialfälle von *$\mathbf{Z}$-Moduln*, aber dieser Grad von „Abstraktheit" wird nicht vor den Arbeiten Dedekinds über die Ideale (vgl. 3.3.1. und 5.5.3.) erreicht.

Tatsächlich tauchten auch die kommutativen Gruppen (und vor allem die endlichen kommutativen Gruppen), multiplikativ geschrieben, auf (selbstverständlich in anderer Terminologie): die multiplikative Gruppe der Zahlen modulo n (die im wesentlichen schon von Euler betrachtet worden war), die multiplikative Gruppe der Einheitswurzeln und sogar die multiplikative Gruppe der streng positiven rationalen Zahlen, bei denen der Satz über die Zerlegung in Primfaktoren als Beschreibung der Struktur angesehen werden kann. Alle diese Probleme wurden von Gauß in den *Disquisitiones Arithmeticae* und seinen späteren Arbeiten zur Zahlentheorie behandelt. Im Unterschied zu Cauchy versuchte er nicht, alle diese Ergebnisse allgemeinen Prinzipien unterzuordnen, war sich aber völlig im klaren darüber, daß sie miteinander verwandt sind ([14], Bd. I, S. 371). Übrigens entspricht die Art und Weise, in der er die Theorie der Klassen binärer quadratischer Formen entwickelte ([14], Bd. I, S. 273), so sehr modernen Auffassungen, daß man sie fast vollständig übertragen könnte, ohne mehr zu ändern, als die Worte „Klasse binärer quadratischer Formen" durch „Element einer kommutativen Gruppe" zu ersetzen. Im Laufe dieser Untersuchung bewies er die Existenz einer Klasse, deren Ordnung das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Ordnungen aller Klassen ist (was in moderner Terminologie darauf hinausläuft, den größten Normalteiler der Gruppe zu bestimmen), und bemerkte, daß die Gruppe der Klassen binärer Formen nicht immer zyklisch ist oder, in seinen Worten, daß „eine Basis [d. h. ein erzeugendes Element] nicht genügen könnte, man muß dazu zwei oder eine größere Anzahl nehmen, die durch Multiplikation [mit einer ganzen Zahl] und der Zusammensetzung [additiv gekennzeichnet] jede Klasse liefern können" ([14], Bd. I, S. 374—375). Er war also dem Satz über die Struktur der endlichen kommutativen Gruppen sehr nahe, und in einem aus der gleichen Epoche stammenden, aber zu

seinen Lebzeiten nicht publizierten Manuskript hatte er einen Beweis eines Satzes skizziert, der in moderner Terminologie der Zerlegung einer Gruppe in die direkte Summe von p-Gruppen (p Primzahlen) äquivalent ist ([14], Bd. II, S. 266).

2.1.3. *Lineare Transformationen*

Die Geschichte der linearen Transformationen verlief völlig analog. Die Geometrie wurde vor allem als Untersuchung der „Figuren" aufgefaßt, und wenn man Transformationen kannte, wie etwa die Inversion bei Viète und Fermat oder die „Affinität" bei Euler (die wir durch $(x, y) \mapsto (ax, by)$ kennzeichnen), so wurden sie nur auf *Kurven* angewandt und nicht auf die ganze Ebene ([12], (1), Bd. IX, S. 240 bis 250). Die Projektionen wurden höchstens als Abbildungen des ganzen Raumes auf eine Ebene oder einer Ebene auf eine Gerade aufgefaßt. Immerhin führten die Transformationen kartesischer Koordinaten auf Rechnungen, die denen der Theorie der linearen Transformationen gleichen, und insbesondere zu einer Beschreibung dieser Variablentransformationen mit Hilfe von geeigneten Parametern (siehe 2.1.5.).

Was wir „lineare Transformation" nennen, erscheint deutlicher (unter dem Namen „lineare Substitution") in den Arbeiten über die quadratischen Formen mit ganzen Koeffizienten, von zwei Variablen bei Lagrange, von drei Variablen bei Gauß. Ausgangspunkt für Lagrange war, daß sich die Menge der Werte einer Funktion $F(x, y)$, wenn x und y alle ganzzahligen Werte annehmen, nicht ändert, falls man an Stelle von F die Funktion $F(\alpha x + \beta y,\ \gamma x + \delta y)$ betrachtet, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen mit $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ sind ([20], Bd. III, S. 695–795). Gerade auf diese Beobachtung gründete er die Theorie der binären quadratischen Formen, die von Gauß beträchtlich weiterentwickelt werden sollte (siehe 5.4.). Dieser griff in der gleichen Art die Theorie der ternären Formen an; zur Darstellung der „linearen Substitution", die x, y, z durch $\alpha x + \beta y + \gamma z$, $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z$, $\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$ ersetzt, benutzte er zum ersten Mal eine „Matrizenschreibweise"

$$\begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix},$$

die er übrigens mit einem einzigen Buchstaben S abkürzte. Er bemerkte explizit, daß man statt einer Hintereinanderausführung von zwei linearen Transformationen, einer mit dem obigen Koeffizientenschema und einer mit dem Koeffizientenschema

$$\begin{matrix} \delta & \varepsilon & \xi \\ \delta' & \varepsilon' & \xi' \\ \delta'' & \varepsilon'' & \xi'' \end{matrix},$$

eine einzige lineare Transformation mit dem Koeffizientenschema

$$\begin{matrix} \alpha\delta + \beta\delta' + \gamma\delta'' & \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + \gamma\varepsilon'' & \alpha\xi + \beta\xi' + \gamma\xi'' \\ \alpha'\delta + \beta'\delta' + \gamma'\delta'' & \alpha'\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \gamma'\varepsilon'' & \alpha'\xi + \beta'\xi' + \gamma'\xi'' \\ \alpha''\delta + \beta''\delta' + \gamma''\delta'' & \alpha''\varepsilon + \beta''\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'' & \alpha''\xi + \beta''\xi' + \gamma''\xi'' \end{matrix}$$

vornehmen kann ([14], Bd. I, S. 302—305). Mit anderen Worten, er gab in diesem Fall die Multiplikation von Matrizen an und fügte übrigens hinzu, es handle sich um ein Ergebnis, das sich auf beliebig viele Variablen ausdehnen lasse, verfolgte diesen Gedanken aber nicht weiter. Vermutlich ist es diese Stelle bei Gauß, welche Cauchy zu seiner Regel für die Multiplikation von Determinanten inspirierte; doch scheint sich nach Gauß solange niemand für lineare Substitutionen interessiert zu haben, bis sie in der projektiven Geometrie auftauchten (siehe 2.4.4.).

2.1.4. *Eigenwerte*

Der allgemeine Begriff des Eigenwertes eines Endomorphismus tauchte im achtzehnten Jahrhundert auf, und zwar nicht im Zusammenhang mit linearen Transformationen, sondern in der Theorie der Systeme homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (vgl. 1.5.). Im Jahre 1762 wurde Lagrange bei der Untersuchung „kleiner Bewegungen" eines n-parametrigen Systems in der Umgebung einer Gleichgewichtslage auf die Integration eines Systems linearer Differentialgleichungen der Gestalt

$$x_j'' = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \qquad (1 \leqq j \leqq n) \tag{2}$$

geführt, wobei die a_{jk} Konstanten sind. Einer von Euler für skalare Gleichungen beliebiger Ordnung angegebenen Methode folgend, suchte er eine Lösung in der Gestalt $x_j(t) = y_j\, e^{\varrho t}$, wobei die y_j zu bestimmende Konstanten und ϱ eine komplexe Zahl sind, und kam auf das lineare System

$$\varrho^2 y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}y_k \qquad (1 \leqq j \leqq n)\,, \tag{3}$$

und da die y_k nicht sämtlich Null sein dürfen, muß ϱ^2 (in moderner Terminologie) Eigenwert der Matrix (a_{jk}) sein. Lagrange sprach nicht von Determinanten und beschränkte sich darauf, zu sagen, die „Elimination" der y_k in dem System (3) führe auf eine Gleichung n-ten Grades in ϱ^2, und man könne die y_k (bis auf einen skalaren Faktor) bestimmen, wenn man eine Wurzel dieser Gleichung wähle, zumindest dann, falls diese Gleichung nur einfache Wurzeln habe ([20], Bd. I, S. 520—534). Im Jahre 1774 stieß er auf ein analoges System in der Theorie der „Säkularungleichungen" der Planeten ([20], Bd. VI, S. 655—666), und auch Laplace untersuchte 1784 dieses Problem ([21], Bd. XI, S. 91—92). Bei diesen Problemen treten die Imaginärteile der Exponenten ϱ als die „Frequenzen" der untersuchten Phänomene in Erscheinung. Bei mechanischen Systemen, die von unendlich vielen Parametern abhängen, wie den schwingenden Saiten, wurde die Verwandtschaft zwischen dem Problem der Bestimmung dieser Frequenzen und dem, was wir heute das „Spektrum" eines linearen Differentialoperators zweiter Ordnung nennen, schon von D. Bernoulli vorausgeahnt; er gelangte nämlich zu der Gleichung der schwingenden Saite durch einen „Grenzübergang", ausgehend von der Bewegung endlich vieler Massen, die auf der Saite äquidistant verteilt

sind ([12], (2), Bd. XI_2). Mathematisch erschien jedoch der allgemeine Begriff des Eigenwertes eines Operators in der Analysis erst mit der Theorie von Sturm-Liouville (vgl. 8.5.1.).

2.1.5. *Bilinearformen, quadratische Formen und Dualität*

Das einzige Beispiel einer Bilinearform, das man im achtzehnten Jahrhundert findet und das nicht unmittelbar mit quadratischen Formen verknüpft ist, gehört eigentlich nicht zur Algebra, sondern zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Bei der Untersuchung einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung $L(x) = 0$ mit $L(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j D^j x$ (wobei die c_j Funktionen der Variablen t auf einem Intervall $[a, b]$ sind) führte Lagrange ([20], Bd. I, S. 471–668), ohne ihm einen Namen zu geben, einen anderen linearen Operator $L^*(x)$ ein, der durch die Relation

$$\int_a^b zL(y)\, dt = \int_a^b yL^*(z)\, dt \tag{4}$$

charakterisiert wird, welche für Funktionen y und z von t gültig ist, die auf $[a, b]$ stetige Ableitungen bis zur n-ten Ordnung haben und die nebst ihren ersten $n - 1$ Ableitungen in den Intervallendpunkten a und b verschwinden. Von unserem Standpunkt aus ist L^* der „Adjungierte" des Operators L bezüglich der symmetrischen Bilinearform $(y, z) \mapsto \int_a^b yz\, dt$ auf dem Vektorraum dieser Funktionen; doch konnte die Verwandtschaft mit den quadratischen Formen endlich vieler Variablen damals selbstverständlich nicht vermutet werden.

Tatsächlich lag im achtzehnten Jahrhundert nicht mehr an algebraischer Theorie der quadratischen Formen als an linearer Algebra in unserem Sinne vor. Als Lagrange in der Analysis die notwendigen bzw. hinreichenden Bedingungen dafür untersuchte, daß eine reellwertige analytische Funktion mehrerer Variabler in einem Punkt ein relatives Maximum oder Minimum annimmt, stieß er auf die quadratische Form, die aus den Gliedern zweiter Ordnung der Taylorentwicklung der Funktion in einer Umgebung des Punktes besteht ([20], Bd. I, S. 3–20). Er zeigte (indem er die klassische Reduktion des Trinoms $ax^2 + bx + c$ auf die Gestalt $aX^2 + d$ verallgemeinerte), wie man durch lineare Variablensubstitution die quadratische Form auf eine Summe von Quadraten mit den Koeffizienten ± 1 reduzieren kann. Er war sich der Willkür bewußt, die in der Wahl dieser Variablensubstitution besteht, aber selbst nicht imstande, das herauszulösen, was bei allen entstehenden Formen invariant bleibt (vgl. 3.2.2.).

Außerhalb dieses Problems trifft man im achtzehnten Jahrhundert kaum auf quadratische Formen in zwei bzw. drei Variablen, außer in der Theorie der Kegelschnitte und der Quadriken einerseits und in arithmetischen Untersuchungen über die Diophantischen Gleichungen zweiten Grades andererseits. Schon Fermat hatte durch Gleichungen zweiten Grades definierte ebene Kurven mit Kegelschnitten

identifiziert. Das analoge Problem für die Quadriken wurde von Euler in Angriff genommen, der versuchte, die Gleichung der Quadrik durch eine Hauptachsentransformation auf die Gestalt $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$ mit $ABC \neq 0$ zu bringen ([12], (1), Bd. IX, S. 379). Er bemerkte, daß eine solche Transformation bei der ursprünglichen Quadrikgleichung

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy + cx + c'y + c''z + d = 0$$

nur möglich ist, wenn die Zahl

$$\varDelta = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b'' \tag{5}$$

von null verschieden ist ([12], (1), Bd. IX, S. 382). Dieser Ausdruck ist natürlich die Determinante der zur quadratischen Form

$$Q(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy \tag{6}$$

gehörigen Matrix (Sylvester nannte ihn später die *Diskriminante*), und wenn er nicht null ist, sind die Koeffizienten A, B, C die Eigenwerte dieser Matrix. Euler beschränkte sich jedoch darauf, ein begleitendes Dreibein $Ox'y'z'$ in bezug auf das Ausgangsdreibein $Oxyz$ durch die drei „Eulerschen Winkel" zu markieren, den Winkel θ zwischen Oz und Oz', den Winkel ψ, den die Schnittgerade D von Oxy und $Ox'y'$ mit Ox bildet, und schließlich den Winkel φ zwischen Ox' und D; die Ausdrücke für die Koordinaten x, y, z mit Hilfe von x', y', z' haben daher als Koeffizienten trigonometrische Funktionen von θ, ψ und φ, und es handelt sich darum, zu zeigen, daß man durch passende Wahl der drei Winkel erreichen kann, daß die „Rechteck"-Terme (gemischten Glieder) $y'z'$, $z'x'$ und $x'y'$ in der Form verschwinden, die sich ergibt, wenn man die obigen Ausdrücke in $Q(x, y, z)$ einsetzt. Allerdings beschränkte sich Euler auf die Behauptung, eine solche Wahl sei möglich, ohne daß er dafür eine Begründung gab und sogar ohne sich darüber im klaren gewesen zu sein, daß das Problem von einer Gleichung dritten Grades abhängt.

Im Jahre 1765 stieß Euler bei der Untersuchung der Trägheitsachsen eines starren Körpers auf das gleiche Problem, schien aber nicht bemerkt zu haben, daß die beiden Fragen äquivalent sind (wenigstens für Ellipsoide). Es handelt sich darum, die Extrema von $Q(x, y, z)$ zu finden, wenn (x, y, z) die Sphäre $\mathbf{S}_2$ durchläuft; daher braucht man hier nur eine Funktion zweier Winkel θ, φ zu betrachten. Diesmal führte Euler die Rechnung durch, fand für $\tan\theta$ eine Gleichung dritten Grades mit reellen Koeffizienten und stellte fest, daß man nun die rechtwinkligen Koordinaten in der Weise transformieren kann, daß eine der Achsen die Sphäre in einem Punkt durchstößt, der einer reellen Wurzel dieser Gleichung entspricht. Das Problem ist somit auf die gleiche Frage im zweidimensionalen Raum zurückgeführt. Die zu lösende Gleichung ist dann vom Grade 2, und man sieht sofort, daß ihre Wurzeln reell sind, so daß das Problem diesmal gelöst ist. Hachette und Poisson [15] benutzten im Jahre 1800 die gleiche Methode für eine beliebige, nicht entartete Form Q.

In diesem Zeitraum stieß Lagrange 1773 im Zusammenhang mit der Bewegung eines starren Körpers auf ein Problem, das den oben genannten äquivalent ist [(20], Bd. III, S. 579–616), aber er griff es auf andere Art an, ohne Winkel zu benutzen. Er forderte, daß die Koordinaten x, y, z eines Punktes einer der gesuchten

neuen Achsen den drei linearen Gleichungen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \lambda x\,, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \lambda y\,, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \lambda z \tag{7}$$

für ein zu bestimmendes λ genügen müssen, und leitete daraus die Gleichung dritten Grades her, welche λ liefert (er sprach dabei nicht von Determinanten, erkannte aber zweifellos die Verwandtschaft mit dem Problem, auf das er bei den kleinen Bewegungen gestoßen war). Er versuchte dann wie Euler, die Tatsache zu benutzen, daß eine der Wurzeln reell ist, beging aber einen eigentümlichen Fehler, indem er glaubte, daß sich, wenn die Wurzel einmal bekannt ist, die beiden anderen Achsen durch ein lineares System bestimmen lassen (er sah nicht, daß in einer seiner linearen Gleichungen sämtliche Koeffizienten null sind). Als er 1788 das Problem wieder aufgriff, um es in seine „*Mécanique analytique*" aufzunehmen, sollte er sein Versehen entdecken; denn er beendete die Überlegung korrekt. Er nahm an, daß es zwei nichtreelle, konjugiert komplexe Wurzeln gibt, welchen zwei Systeme von Lösungen (x, y, z) bzw. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ seines linearen Systems entsprechen, die aus konjugiert komplexen Zahlen bestehen. Da er aber bewiesen hatte, daß für zwei verschiedene Wurzeln seiner Gleichung in λ die entsprechenden Lösungen (x', y', z') und (x'', y'', z'') des linearen Systems der Relation

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$$

genügen, erhielt er die Beziehung $x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} = 0$, im Widerspruch zu der Tatsache, daß x, y, z nicht sämtlich gleich null sind ([20], Bd. XII, S. 239).

Im Jahre 1826 hatte Cauchy im Hinblick auf seine Lehrtätigkeit an der Ecole Polytechnique das Problem der Reduktion einer Quadrik auf ihre Achsen wieder aufgegriffen und bemerkt, daß sich die Wurzeln der Gleichung dritten Grades nicht ändern, wenn man an der Form (6) eine Transformation der rechtwinkligen Koordinaten vornimmt ([5], (2), Bd. V, S. 252). Ohne Zweifel bemerkte er bei dieser Gelegenheit die Symmetrie der Koeffizienten in dem linearen System (7); denn 1829 ([5], (2), Bd. IX, S. 174—195) stellte er sich das Problem, die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix beliebiger Ordnung zu ermitteln (in heutiger Terminologie), und bewies, daß die Wurzeln der erhaltenen Gleichung n-ten Grades reell sind, wobei er die Überlegung von Lagrange aus dem Jahre 1788 verwendete.

Die Invarianz der Diskriminante (5) bei Transformation der rechtwinkligen Koordinaten ist natürlich eine Spezialfall des allgemeineren Satzes bezüglich einer beliebigen linearen Koordinatentransformation in einer quadratischen Form Q; die Diskriminante multipliziert sich dabei mit dem Quadrat der Determinante der linearen Transformation. Dies war schon von Lagrange für $n = 2$ und von Gauß für $n = 3$ ([14], Bd. I, S. 302) im Verlaufe ihrer Untersuchungen über die quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten beobachtet worden. Die Invarianz wird dann eine einfache Folgerung aus der Formel für die Multiplikation von Determinanten; doch gerade diese „Kovarianz" wurde nach 1840 einer der Ausgangspunkte der Invariantentheorie (vgl. 3.2.3.).

Ebenfalls bei seinen zahlentheoretischen Untersuchungen führte Gauß für eine ternäre quadratische Form die „adjungierte" (oder „inverse") Form ein, deren

Koeffizienten (in moderner Terminologie) die Minoren der Matrix der Ausgangsform sind. Er stellte dabei im wesentlichen fest: Wendet man eine lineare Substitution S auf diese Matrix an, so ist die Adjungierte der dadurch entstehenden Form diejenige Form, die sich aus der Adjungierten der Ausgangsform durch eine lineare Substitution ergibt, deren Matrix die „adjungierte" der Matrix von S ist; vermutlich ist es die Einführung dieser adjungierten Matrix, die Cauchy zu seinem Satz über Determinanten geführt hat, deren Elemente Unterdeterminanten einer anderen Determinante sind (vgl. 2.1.1.).

Eine bemerkenswerte Abhandlung Eulers aus dem Jahre 1770 ([12], (1), Bd. VI, S. 287—315), in der sich geometrische und zahlentheoretische Betrachtungen vermischen, befaßt sich mit Transformationen rechtwinkliger Achsen und ihren Verallgemeinerungen. Euler war ohne Zweifel der erste, der folgendes bemerkte: Schreibt man, wie er es machte, die Richtungskosinus der drei Geraden, die ein rechtwinkliges Dreibein bilden, in einem quadratischen Schema

$$\begin{array}{c|c|c} x & y & z \\ \hline x' & y' & z' \\ \hline x'' & y'' & z'' \end{array} \tag{8}$$

auf, so gelten nicht nur die Relationen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $xx' + yy' + zz' = 0$ usw., welche die dieses Schema definierenden Eigenschaften zum Ausdruck bringen, sondern auch die gleichen Relationen $x^2 + x'^2 + x''^2 = 1$, $xy + x'y' + x''y'' = 0$ usw. für das „transponierte" Schema sowie auch die Beziehungen $x = y'z'' - z'y''$ usw. (was wir heute durch die Aussage, die Matrix sei die Inverse ihrer Transponierten, zum Ausdruck bringen). Auf den ersten Blick noch überraschender ist, daß Euler diese Ergebnisse auf quadratische Schemata (a_{jk}) beliebiger Ordnung verallgemeinerte (während er niemals an eine „n-dimensionale Geometrie" gedacht zu haben schien). Er wußte, daß für die entsprechenden linearen Substitutionen $y_j = \sum\limits_k a_{jk}x_k$ die Beziehungen $\sum\limits_j x_j^2 = \sum\limits_j y_j^2$ gelten, und beschäftigte sich vor allem damit, Parameterdarstellungen der a_{jk} zu erhalten, indem er bewies, daß man die lineare Substitution, welche sie definieren, durch Hintereinanderausführung von $\frac{n(n-1)}{2}$ Drehungen

$$y_j = x_j \cos \alpha_{jk} - x_k \sin \alpha_{jk},$$
$$y_k = x_j \sin \alpha_{jk} + x_k \cos \alpha_{jk}$$

bei passender Wahl der α_{jk} erhalten kann. Noch bemerkenswerter ist, daß er für $n = 3$ und $n = 4$ *rationale* Ausdrücke der a_{jk} erhielt, für $n = 3$ als Funktionen von vier homogenen Parametern, für $n = 4$ als Funktionen von acht homogenen, durch eine Relation verknüpften Parametern. Dies sind genau die Ausdrücke, die Cayley später aus der Theorie der Quaternionen herleitete (vgl. 3.2.4.). Tatsächlich stammen diese Formeln aus Versuchen, die Euler 20 Jahre zuvor gemacht hatte, um den von Fermat ausgesprochenen Satz über die Darstellbarkeit jeder ganzen Zahl als Summe von vier Quadraten zu beweisen (vgl. 5.11.). Allerdings

war ihm durch Beweis einer Identität

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\,(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2\,,$$

wobei die z_j Bilinearformen in den x_j und den y_j sind, nur der Nachweis gelungen, daß jede ganze Zahl Summe von Quadraten von vier *rationalen* Zahlen ist. Auch diese Identität ergab sich später aus der Quaternionentheorie.

In den sich mit Geometrie befassenden Kapiteln der *Introductio* hatte sich Euler auch damit beschäftigt, diejenigen ebenen Kurven zu untersuchen, die bei einer Isometrie der Ebene invariant bleiben; die Überlegungen, die er bei dieser Gelegenheit anstellte, laufen auf den Nachweis hinaus, daß eine solche Isometrie eine Translation ist oder eine Drehung oder eine Translation mit einer anschließenden Spiegelung an einer zur Translationsrichtung parallelen Achse. Im Jahre 1776 bewies er sogar, daß eine Ähnlichkeitsabbildung der Ebene im allgemeinen einen Fixpunkt besitzt. Im vorangegangenen Jahr hatte er im Zusammenhang mit seinen Arbeiten zur Mechanik zu beweisen versucht, daß eine die Orientierung erhaltende orthogonale Transformation im dreidimensionalen Raum eine Gerade fest läßt, was auf den Nachweis hinausläuft, daß die Matrix (8) einen Eigenwert besitzt, der gleich 1 ist. Tatsächlich ging Euler auf diese Weise an das Problem heran, ließ aber bald die Rechnung sein (die im folgenden Jahr von Lexell zum guten Ende geführt werden sollte) und begnügte sich damit, einen geometrischen Beweis anzugeben, indem er seine Überlegungen für die ebenen Drehungen auf die Sphäre übertrug. Nach Euler scheint allerdings kaum jemand die Isometrien des euklidischen Raumes untersucht zu haben, bis Chasles 1830 in seinen Arbeiten ein folgerichtiges und umfassendes Programm zur Klassifikation dieser Isometrien und ihrer Hintereinanderausführung gab [7].

2.2. Die Auflösung algebraischer Gleichungen

2.2.1. *Der „Fundamentalsatz der Algebra"*

Der Standpunkt der Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts zu den Wurzeln algebraischer Gleichungen läßt sich nicht genau bestimmen. Sie nahmen an, daß es zu einem Polynom

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

mit reellen Koeffizienten n „imaginäre Wurzeln" $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gibt, *die nicht von vornherein in der Gestalt* $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ *angesetzt werden*, mit denen man aber rechnen kann, *als ob* es Zahlen seien (und mit denen man insbesondere die aus $P(x) = a_0(x - z_1) \cdots (x - z_n)$ herleitbaren Beziehungen zwischen Koeffizienten und Wurzeln aufschreiben kann). Das Problem besteht darin, zu zeigen, daß man für diese Wurzeln tatsächlich komplexe Zahlen $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ nehmen kann. Heute ist es leicht, diesen Standpunkt zu rechtfertigen, indem man sich in eine $\boldsymbol{R}$-Algebra begibt, die ein „Wurzel(= Zerfällungs)körper" von $P \in \boldsymbol{R}[X]$ ist (vgl. 3.3.2.),

und die Existenz komplexer Wurzeln läßt sich auf den Nachweis zurückführen, daß dieser Körper $\boldsymbol{R}$-isomorph zu einem Teilkörper von $\boldsymbol{C}$ ist. Die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts mußten sich aber auf einen „Formalismus" beschränken, der in die damals gängigen Begriffssysteme nicht eingebettet war.

Alle zwischen 1740 und 1830 für den „Fundamentalsatz der Algebra" vorgeschlagenen Beweise unterscheiden sich von den üblichen algebraischen Überlegungen dadurch, daß in einem bestimmten Stadium des Beweises in irgendeiner Weise Stetigkeitsbetrachtungen eingehen. Diese Tatsache wurde erst 1927 durch die Theorie der „geordneten" Körper von Artin-Schreier [L] vollständig geklärt.

Den zeitlich frühesten dieser Beweise verdankt man d'Alembert (1746) [10]. Auf der Grundlage der Newtonschen Polygonzugmethode (siehe 2.3.1) nahm er an (was erst 1851 von Puiseux (vgl. 4.4.6.) korrekt bewiesen werden sollte), daß es zu einem Paar komplexer Zahlen z_0, w_0 mit $P(z_0) = w_0$ Potenzreihen $z = z_0 + \sum_{r=1}^{\infty} c_r(w - w_0)^{r/q}$ mit passendem ganzzahligem q gibt, welche der Relation $P(z) = w$ für alle zu w_0 hinreichend benachbarten w genügen. Ausgehend von einem reellen Punkt (x_0, y_0) der Kurve $y = P(x)$ ließ er dann y von y_0 bis 0 variieren und „setzte" die Kurve in das komplexe Gebiet „fort", indem er sich des obigen Satzes bediente (was wir heute durch eine elementare Kompaktheitsüberlegung vollständig begründen können).

Beiläufig hatte d'Alembert folgendes festgestellt: Setzt man

$$P(x + iy) = X(x, y) + iY(x, y)$$

an, wobei X und Y Polynome in den beiden Variablen x, y mit reellen Koeffizienten sind, so erhält man die komplexen Wurzeln $x + iy$ von $P(z) = 0$, indem man für (x, y) die Schnittpunkte der Kurven $X(x, y) = 0$, $Y(x, y) = 0$ nimmt. In seinem ersten (1799 als Doktordissertation eingereichten) Beweis griff Gauß, der die unklaren Stellen der d'Alembertschen Überlegung bei voller Anerkennung des wohlbegründeten Grundprinzips kritisierte, diesen Gedanken wieder auf, um die Existenz eines solchen Schnittpunktes zu beweisen. Er bemerkte, daß im Außengebiet eines Kreises Γ: $|z| = R$ mit großem Radius die beiden Kurven denjenigen Kurven dicht benachbart sind, welche dem Polynom $a_0 z^n$ entsprechen, d. h. $4n$ Halbgeraden, die den Ursprung mit den Ecken eines dem Kreis $|z| = R$ einbeschriebenen regelmäßigen Polygons mit $4n$ Seiten verbinden, die abwechselnd zu der einen und zu der anderen Kurve gehören, wenn man den Kreis Γ durchläuft. Der Gedanke von Gauß bestand nun darin, zu zeigen, daß man einen solchen „Zweig" der Kurve $X = 0$ ins Innere des Kreises zu einer stetigen Kurve fortsetzen kann, die schließlich den Kreis wieder im Anfangspunkt eines anderen „Zweiges" trifft. Eine kombinatorische Überlegung ermöglichte dann den Beweis der Tatsache, daß die von $X = 0$ ausgehend erhaltenen Kurven unbedingt eine der von $Y = 0$ ausgehend erhaltenen Kurven schneiden müssen. Dieser Schluß ist völlig korrekt, sobald man sich auf den Bolzanoschen Satz über die Existenz von Nullstellen einer stetigen Funktion mit Werten verschiedenen Vorzeichens stützen kann. Der kritische Punkt der Beweisführung ist (wie auch bei d'Alembert) der Nachweis, daß Fortsetzungen der Zweige der Kurve existieren. Da klare Sätze der

Analysis (wie beispielsweise der Satz über implizite Funktionen) damals nicht vorlagen, kann man nicht sagen, dieser Beweis genüge völlig den heutigen Anforderungen an Strenge; es ist aber durchaus möglich, die Gaußsche Überlegung so zu gestalten, daß sie völlig korrekt und streng ist ([14], Bd. X_2, Abh. 2: A. Ostrowski, *Über den ersten und vierten Gaußschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra*, S. 1–18).

Der zweite und der dritte Beweis von Gauß dagegen sind völlig streng. Den dritten Beweis (1816) ([14], Bd. III, S. 57–64) führte er indirekt, indem er annahm, auf $\boldsymbol{C}$ sei $P(z) \neq 0$, und die Funktion

$$F(z) = z\frac{P'(z)}{P(z)}$$

betrachtete, die für $|z| \to +\infty$ gegen n strebt. Setzt man $F = X + iY$, so ist also $X > 0$ auf dem Kreis $|x| = R$ für hinreichend großes R. Gauß bemerkte, daß man durch die Substitution $z = re^{i\varphi}$ zu

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Y}{\partial \varphi}$$

gelangt (auf Grund der „Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen"). Indem er dann das Doppelintegral $\iint\limits_{|z|\leq R} \frac{\partial X}{\partial r}\, dr\, d\varphi$ auf zwei Arten berechnete, zeigte er, daß es einerseits null ist, andererseits den Wert $\int\limits_0^{2\pi} \big(X(R, \varphi) - X(0, \varphi)\big)\, d\varphi$ hat. Es müßte also

$$0 = X(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} X(R, \varphi)\, d\varphi$$

sein, was mit $X(R, \varphi) > 0$ unvereinbar ist.

Der mehr „algebraische" Beweis geht von einer Idee Eulers (1749) aus. Euler sah es als evident an, daß ein Polynom P, welches zwischen $-\infty$ und $+\infty$ das Vorzeichen ändert, für einen reellen Wert z verschwindet. Das ist insbesondere der Fall, wenn der Grad von P ungerade ist *oder* wenn a_0 und a_n entgegengesetzte Vorzeichen haben. Davon ausgehend, setzte er den Grad n von P in der Gestalt $2^m q$ an, wobei q ungerade ist, und schloß rein algebraisch durch vollständige Induktion nach m, da der Satz für $m = 0$ als richtig angesehen wird. Sein Gedanke bestand darin, $P = P_1 P_2$ in zwei Polynome vom Grad $2^{m-1}q$ mit *reellen* Koeffizienten zu zerlegen, was ihm ermöglichte, weiterzuschließen. Man kann sich auf den Fall $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ beschränken; mit dem Ansatz $P_1(z) = z^r - uz^{r-1} + \cdots$ mit $n = 2r$ verifizierte Euler, daß man für kleine Werte von r durch Koeffizientenvergleich in der Relation $P = P_1 P_2$ alle unbekannten Koeffizienten von P_1 und P_2 als rationale Funktionen von u ausdrücken kann und daß man durch „Elimination" dieser Koeffizienten schließlich auf eine Gleichung $\left(\text{vom Grade } \binom{2r}{r}\right)$ in u stößt, deren höchster und niedrigster Koeffizient entgegengesetzte Vorzeichen haben

Dies ermöglicht die Aussage, daß die Gleichung mindestens eine reelle Wurzel hat; damit ist die Existenz einer Zerlegung P_1P_2 in der gesuchten Gestalt gesichert. Für den allgemeinen Fall war sein Beweis nur eine Skizze, bei der zahlreiche wesentliche Punkte stillschweigend übergangen wurden ([12], (1), Bd. VI, S. 78—147). Lagrange, der 1772 das Problem wieder aufgriff, bemerkte unter anderem, daß 0 eine Lösung der Gleichung in u sein kann und daß für $u = 0$ in den rationalen Ausdrücken für die anderen Koeffizienten von P_1 und P_2 als Funktionen von u Zähler und Nenner dieser Ausdrücke gleichzeitig verschwinden können. Er versuchte dann, die Aussage Eulers über die Existenz der Zerlegung $P = P_1P_2$ streng zu beweisen; seine Idee bestand darin (wenn $a_0 = 1$ ist), $v = 2u + a_1$ als Unbekannte zu nehmen und festzustellen, daß die „imaginären" Wurzeln der Gleichung in v die Ausdrücke

$$v_\sigma = \sum_{k=1}^{r} z_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{r} z_{\sigma(k+r)}$$

sind, wobei σ alle Permutationen von $\{1, 2, \ldots, 2r\}$ durchläuft. Man sieht leicht, daß das Produkt der v_σ stets höchstens 0 ist. Um die Schwierigkeit zu vermeiden, die sich ergibt, wenn dieses Produkt gleich null ist, ersetzte Lagrange v_σ durch eine geeignete Kombination der Koeffizienten von P_1 mit beliebigen (reellen) Koeffizienten, und dank seiner Resultate über die Permutationen der Wurzeln einer Gleichung (siehe 2.2.2.) führte er den Beweis korrekt zu Ende ([20], Bd. III, S. 479—516).

Dennoch wendete Gauß 1815 ein „. . ., daß man die Sache so genommen hat, als sei bloß die Form der Wurzeln zu bestimmen, deren Existenz man voraussetzte, ohne sie zu beweisen, eine Schlußart, die gerade hier bloß illusorisch, und in der That eine wahre *petitio principii* ist" ([14], Bd. III, S. 105—106).[1]) Stets um Verständlichkeit und Klarheit bemüht, zeigte er dann in seinem zweiten Beweis, wie man sehr wohl den Ideen Eulers folgen kann, ohne auf die „imaginären Wurzeln" zurückzugreifen, deren „Existenz" durch nichts garantiert ist. Im Grunde griff er eine einfachere Modifikation der Eulerschen Rekursionsmethode wieder auf, die 1759 von de Foncenex vorgeschlagen worden war. Sie besteht darin, die $\frac{n(n-1)}{2}$ Kombinationen

$$u_{jk} = (z_j + z_k) + bz_jz_k$$

der „imaginären Wurzeln" von P, mit einem passend gewählten reellen Koeffizienten b, zu betrachten: Die u_{jk} sind Wurzeln einer Gleichung vom Grade $2^{m-1}q(2^mq - 1)$ mit reellen Koeffizienten; daher ist nach Voraussetzung mindestens eine dieser Wurzeln eine komplexe Zahl. Kann man b zwei verschiedene Werte b', b'' beilegen, für welche die beiden Kombinationen $(z_j + z_k) + b'z_jz_k$ und $(z_j + z_k) + b''z_jz_k$ der *gleichen* Wurzeln z_j, z_k komplexe Zahlen sind, so folgt daraus durch Auflösung einer Gleichung zweiten Grades das gleiche für z_j, z_k.

---

[1]) Am 7. Dezember 1815 übergebene Anzeige, die am 23. 12. 1815 in den „Göttingischen Anzeigen" erschien. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

Um die „imaginären Wurzeln" zu vermeiden, betrachtete Gauß $n+2$ Unbestimmte $u, x, y_1, \dots, y_n$ und das Polynom

$$\prod_{j<k} \left(u - (y_j + y_k)\,x + y_j y_k\right) = f(u, x, \lambda_1, \dots, \lambda_n);$$

dabei sind die λ_j die elementarsymmetrischen Funktionen der y_j, die, wie Gauß bewies, über $\mathbf{Q}$ algebraisch unabhängig sind. Wenn man f als Polynom in u betrachtet, so ist seine Diskriminante $\Delta(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ein Polynom in x; hat P keine mehrfachen Nullstellen und ist $a_0 = 1$ (was man immer erreichen kann), so ist das Polynom $\Delta\left(x, -a_1, a_2, \dots, (-1)^n a_n\right)$ nicht identisch null; daher kann man x einen solchen reellen Wert X beilegen, daß das Polynom

$$f\left(u, X, -a_1, a_2, \dots, (-1)^n a_n\right)$$

in u keine mehrfachen Nullstellen besitzt. Da es vom Grade $2^{m-1}q(2^m q - 1)$ ist, hat es eine komplexe Nullstelle U. Gauß bewies dann, daß man

$$P(z) = \left(z^2 + \varphi_{n-1}(U)\,z + \varphi_n(U)\right)\left(z^{n-2} + \varphi_1(U)\,z^{n-3} + \cdots + \varphi_{n-2}(U)\right)$$

setzen kann, wobei die $\varphi_j(U)$ explizit bestimmt sind; damit konnte er weiter schließen ([14], Bd. III, S. 31–56). Man erkennt in diesem Beweis deutlich die erste Vorstellung einer „Spezialisierung" der Unbestimmten, die in der modernen algebraischen Geometrie zu einem fundamentalen Begriff geworden ist [11].

2.2.2. *Die Auflösung von Gleichungen in Radikalen*

Der erste Ansatz einer allgemeinen Methode, mit der eine Gleichung $P(z) = 0$ vom Grade n „in Radikalen" gelöst werden sollte, wurde 1683 von Tschirnhaus veröffentlicht. Sie besteht darin, eine neue Unbekannte $y = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-1} z^{n-1}$ zu wählen, die folglich einer Gleichung n-ten Grades $P_1(y) = 0$ genügt, deren Koeffizienten von den Koeffizienten b_j abhängen. Es geht darum, diese Koeffizienten b_j so zu bestimmen, daß $P_1(y)$ die Gestalt $y^n - c$ erhält; das führt auf die Lösung einer Gleichung $(n-1)$-ten Grades in z. Die Methode führt im Fall $n = 3$ zum Erfolg, indem sie für b_1/b_2 eine Gleichung zweiten Grades liefert, was eine neue Methode zur Auflösung der Gleichung dritten Grades mit sich bringt. Für $n = 5$ führt aber die Bestimmung der b_j auf eine Gleichung 24. Grades, die sich anscheinend „im allgemeinen" nicht in ein Produkt von Gleichungen niedrigeren Grades zerlegen läßt.

Bis zum Jahre 1770 gab es in dieser Frage keine Fortschritte. Zwei Versuche Eulers gingen nicht über Tschirnhaus hinaus; ein anderer von Bezout im Jahre 1762 ist etwas interessanter, weil er die Einheitswurzeln ins Spiel bringt: Bezout versuchte, eine Wurzel α von $P(z) = 0$ in der Gestalt

$$\alpha = A_1 \varrho + A_2 \varrho^2 + \cdots + A_{n-1} \varrho^{n-1} \tag{9}$$

auszudrücken, wobei ϱ eine n-te Einheitswurzel ist, also der Relation $1 + \varrho + \varrho^2 + \cdots + \varrho^{n-1} = 0$ genügt. Die Elimination von ϱ aus dieser Relation und aus (9) ergibt für α eine Gleichung, deren Koeffizienten Polynome in $A_1, \dots, A_{n-1}$ sind, die man den a_j gleichsetzen muß. Für $n = 5$ führt dies nach Elimination aber wieder auf eine Gleichung 24. Grades zur Bestimmung der A_j.

Zwischen 1770 und 1772 erschienen fast gleichzeitig (und unabhängig voneinander) drei Abhandlungen, in denen man erstmals das Bemühen findet, von dem Empirismus, der bis dahin uneingeschränkt herrschte, abzugehen und durch systematische Analyse der Methoden zur Auflösung von Gleichungen höchstens vierten Grades zu versuchen, die Ursachen zu verstehen, die bei diesen zum Erfolg und bei ihrer Übertragung auf Gleichungen höheren Grades auf die erwähnten Schwierigkeiten führen. Waring, Lagrange und Vandermonde stellten fest, daß für $n \leqq 4$ Polynome in den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der Gleichung $P(z) = 0$ existieren, die *weniger als n! verschiedene Werte annehmen*, wenn man darin die α_j auf alle möglichen Arten permutiert. Beispielsweise nimmt $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4$ für $n = 4$ nur drei verschiedene Werte $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ an, und diese Werte sind also Wurzeln einer Gleichung dritten Grades, deren Koeffizienten sich als symmetrische Funktionen der α_j mit Hilfe der Koeffizienten a_j von P berechnen lassen. Nimmt man diese Gleichung als gelöst an, so erhält man $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_3\alpha_4$ als Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades, deren Koeffizienten mit Hilfe der β_j bekannt sind, da das Produkt $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ eine symmetrische Funktion ist. Anschließend erhält man ebenso $\alpha_1 + \alpha_2$ und $\alpha_3 + \alpha_4$, da ihre Summe symmetrisch und ihr Produkt $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) = \beta_2 + \beta_3$ ist. Schließlich liefert eine letzte Gleichung zweiten Grades α_1 und α_2.

Bei Lagrange und Vandermonde brachte dieser Gedanke die deutlichsten Fortschritte hervor. Die Auflösungsformel (1) der Gleichung dritten Grades scheint überflüssige Wurzeln ins Spiel zu bringen, da jede der Kubikwurzeln drei Werte annehmen kann. Diese Tatsache hatte die Aufmerksamkeit Eulers erregt ([12], (1), Bd. VI, S. 1—19), der gezeigt hatte, wie man die Werte dieser Wurzeln bestimmen und miteinander verknüpfen muß, damit man drei Wurzeln und nicht neun erhält (das Produkt der Radikale muß gleich $-p/3$ sein). Darüber hinausgehend bemerkte Lagrange, daß diese Wurzeln sich in der Gestalt $\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$ schreiben lassen, wobei x_1, x_2, x_3 die drei Wurzeln der Gleichung sind und ω eine dritte Einheitswurzel ist. Mit anderen Worten, die Funktion $(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$ der Wurzeln nimmt für die sechs möglichen Permutationen der x_j nur zwei Werte an. Ohne Zweifel wurde Lagrange durch dieses Resultat dazu geführt, für eine beliebige Gleichung n-ten Grades die berühmten „Lagrangeschen Resolventen"

$$y_k = \sum_{h=1}^{n} \omega_k^h x_h \qquad (1 \leqq k \leqq n) \tag{10}$$

einzuführen, wobei ω_k nacheinander die n Werte der n-ten Einheitswurzeln durchläuft und die x_h die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Ohne Benutzung von Determinanten (siehe 2.1.1.) bewies Lagrange, daß man die x_k bestimmen kann, wenn man die y_k kennt, anschließend (da y_1, das $\omega_1 = 1$ entspricht, symmetrisch in den x_h ist), daß die y_j für $2 \leqq j \leqq n$ Wurzeln einer Gleichung $(n - 1)$-ten Grades sind, deren Koeffizienten jedoch rationale Funktionen einer Wurzel einer Gleichung vom Grade $(n - 2)!$ sind, deren Koeffizienten wiederum als Funktionen der Koeffizienten von P bekannt sind. Diese allgemeine Methode umfaßt also die für Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades bekannten Auflösungsformeln, für $n = 5$ führt sie aber darauf, daß eine andere Gleichung sechsten Grades zu lösen ist.

Dies brachte Lagrange darauf, an der Möglichkeit der Auflösung „durch Radikale“ für $n \geqq 5$ zu zweifeln, obgleich er sich zu diesem Thema nicht sehr klar äußerte und es nicht für ausgeschlossen hielt, daß das Ziel mit anderen Methoden erreicht werden könnte ([20], Bd. III, S. 205—421).

Was aber in der langen Abhandlung Lagranges zweifellos wichtiger ist, sind die neuartigen Überlegungen über Permutationen der Argumente in Ausdrücken, die von gegebenen oder unbestimmten Größen abhängen, zu denen er angeregt wurde. Beispielsweise bewies er, wenn V eine Funktion der n Wurzeln x_j $(1 \leqq j \leqq n)$ einer Gleichung ist, durch dieselbe Überlegung, mit der man heute zeigt, daß die Ordnung einer Untergruppe einer Gruppe der endlichen Ordnung N ein Teiler von N ist (ein Satz, der oft unter dem Namen „Satz von Lagrange“ zitiert wird), daß die Anzahl der Werte, die V annehmen kann, wenn man die x_j auf jede mögliche Art permutiert, ein Teiler von $n!$ ist. Noch bemerkenswerter ist der folgende Satz, den er in diesem Zusammenhang bewies: Sind V_1 und V_2 zwei rationale Funktionen der x_j und bleibt V_1 bei allen denjenigen Permutationen der x_j invariant, welche V_2 invariant lassen, so ist V_2 eine rationale Funktion von V_1 und den Koeffizienten der Gleichung; sind $z_1, \ldots, z_\mu$ die verschiedenen Werte von V_1 und ist y_j der Wert, den V_2 bei der Permutation annimmt, welche V_1 den Wert z_j erteilt, so sind, wie er bemerkte, die Ausdrücke $y_1 z_1^k + \cdots + y_\mu z_\mu^k$ gegenüber allen Permutationen invariant, also rationale Funktionen der Gleichungskoeffizienten, und durch Elimination von $y_2, \ldots, y_\mu$ aus den $0 \leqq k \leqq \mu - 1$ entsprechenden μ Gleichungen erhielt er y_1 als rationale Funktion von z_1 ([20], Bd. III, S. 374).

Weniger systematisch als die Abhandlung von Lagrange ist die Vandermondesche Arbeit [31], die mit der erstgenannten zahlreiche Berührungspunkte hat. So hatte Vandermonde ebenfalls den Gedanken, die „Lagrangeschen Resolventen“ einzuführen. Auch bei ihm lassen sich Vorstellungen erkennen, die in der Theorie der Permutationsgruppen bedeutsam werden sollten (wie die Zerlegung einer Permutation von n Buchstaben in das Produkt „zyklischer“ Permutationen ([G—H], S. 291)), und die erste Vorstellung einer „primitiven“ Permutationsgruppe, d. h. einer Permutationsgruppe, bei der die Menge der n Buchstaben nicht als Vereinigungsmenge von disjunkten Teilmengen mit mehr als einem und weniger als n Buchstaben dargestellt werden kann, welche bei jeder Permutation der Gruppe als Ganzes permutiert werden (natürlich tritt dieser Begriff bei Vandermonde nicht in dieser Gestalt auf).

Das schönste Resultat Vandermondes ist die Auflösung der Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ in Radikalen. Seit de Moivre konnte man die Gleichung $x^n - 1 = 0$, für ungerades $n = 2m + 1$, auf eine Gleichung m-ten Grades zurückführen, indem man $z = x + (1/x)$ als neue Unbekannte wählte. Es handelte sich also für $n = 11$ darum, eine Gleichung fünften Grades zu lösen. Dank der Tatsache, daß die n-ten Einheitswurzeln Potenzen einer dieser n-ten Einheitswurzeln sind, konnte Vandermonde zeigen, daß die fünften Potenzen gewisser Lagrangeschen Resolventen für diese Gleichung rationale Zahlen sind.

Vandermonde hatte sogar behauptet, dieses Ergebnis gelte für alle Gleichungen $x^n - 1 = 0$, in denen n eine ungerade Primzahl ist. Dieser allgemeine Satz wurde aber erst dreißig Jahre später von Gauß bewiesen, als Spezialfall der Tatsache, daß

die mit Hilfe der Einheitswurzeln gebildeten „Perioden", wie er sie nannte, durch Radikale ausdrückbar sind (siehe 5.3.4.). Von dem Gesichtspunkt aus, den wir hier zugrundelegen, ist der wesentliche Gedanke von Gauß die Bemerkung, daß die von 1 verschiedenen Wurzeln von $x^n - 1 = 0$ in der Gestalt $x_k = \zeta^{g^k}$ geschrieben werden können, mit einer primitiven Wurzel g der Kongruenz $z^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ und $0 \leqq k \leqq n - 2$, wobei ζ irgendeine der primitiven Wurzeln von $x^n = 1$ ist. Setzt man $\phi_n(x) = (x^n - 1)/(x - 1)$ (ein Polynom, dessen Irreduzibilität über $\boldsymbol{Q}$ Gauß bewiesen hatte), so kann man diese Bemerkung folgendermaßen in eine moderne Ausdrucksweise übersetzen: Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers K von ϕ_n über $\boldsymbol{Q}$ ist *zyklisch* von der Ordnung $n - 1$, und die Bildung der „Perioden" ist nichts anderes als die Beschreibung der Teilkörper von K, welche den Untergruppen dieser zyklischen Gruppe entsprechen. Die Auflösung der Gleichung durch Radikale folgt dann aus der Tatsache, daß für die *Ordnung*, in der Gauß die x_k anordnete, die Potenz $(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 + \cdots + \omega^{n-2} x_{n-2})^{n-1}$ einer Lagrangeschen Resolvente eine rationale Zahl ist.[1]) Gauß war sich — soviel ist übrigens sicher — der Tatsache bewußt, daß diese Eigenschaft der Wurzeln einer Gleichung, sich durch eine von ihnen durch *Iterationen* einer rationalen Operation θ darstellen zu lassen, d. h. durch x, $\theta(x)$, $\theta(\theta(x))$, ..., $\theta^k(x)$, ..., der eigentliche Grund dafür ist, daß man diese Wurzeln „durch Radikale" ausdrücken kann. In den *Disquisitiones* hatte er nämlich ohne Angabe eines Beweises bemerkt, daß sich die Wurzeln der Gleichung für die Teilung der Lemniskate in n gleiche Teile (n eine ungerade Primzahl) ebenfalls durch Radikale darstellen lassen. Als Abel 1829 versuchte, diese Behauptung von Gauß zu beweisen und sie auf alle elliptischen Funktionen (vgl. 7.1.7.) zu verallgemeinern, stieß er auf die gleiche Iterationseigenschaft und verallgemeinerte sie in folgender Weise: Wenn, ausgehend von einer beliebigen Wurzel x, alle anderen Wurzeln die Gestalt $\theta_j(x)$ für eine rationale Funktion θ_j haben und wenn außerdem $\theta_j(\theta_k(x)) = \theta_k(\theta_j(x))$ ist (was in moderner Terminologie bedeutet, daß die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers *kommutativ* ist), so ist die Gleichung (die man jetzt *Abelsch* nennt) durch Radikale auflösbar ([1], Bd. 1, S. 478).

Die Arbeiten von P. Ruffini, die aus der gleichen Zeit wie die *Disquisitiones Arithmeticae* stammen, zielen in eine ganz andere Richtung: Unter Benutzung Lagrangescher Ideen wollte Ruffini beweisen, was Lagrange nicht zu vermuten gewagt hatte, nämlich daß es unmöglich sei, die „allgemeine" Gleichung fünften Grades durch Radikale zu lösen. Die vier Abhandlungen, die er von 1799 bis 1813 publizierte, enthalten mehrere Varianten seines Beweises. Ebenso wenig wie Lagrange oder Vandermonde hatte er die Sprache der Gruppentheorie zur Verfügung, und seine Überlegungen brachte er in einer Terminologie zum Ausdruck, die sie langatmig und kompliziert macht: „die Anzahl der Werte, die eine Funktion

---

[1]) Für die Gleichung $x^{11} - 1 = 0$ hatte Vandermonde, indem er die Wurzeln der Gleichung fünften Grades, welche die $x_k + x_k^{-1}$ $(0 \leqq k \leqq 4)$ liefern, in eben dieser Ordnung anordnete, das gleiche Resultat für die entsprechenden Resolventen erhalten. Es ist kaum möglich herauszufinden, ob er gesehen hatte, daß es sich um ein allgemeines Verfahren handelt, oder ob er nur durch Probieren ans Ziel gekommen war, da sicher ist, daß er nur diesen einzigen Spezialfall für die Gleichungen $x^n - 1 = 0$ mit $n \geqq 11$ betrachtet hat.

der Wurzeln annimmt, wenn man diese Wurzeln auf alle möglichen Arten permutiert". Im Grunde handelt es sich jedoch um eine weit vorangetriebene Untersuchung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_5$, deren 120 Elemente er explizit angab. Er benutzte die Vandermondesche Zerlegung einer Permutation in zyklische Substitutionen und zeigte unter anderem, daß jede Untergruppe der $\mathfrak{S}_5$, deren Ordnung durch 5 teilbar ist, eine zyklische Substitution enthält. Im Hinblick auf seine ersten Beweise zeigte er, daß $\mathfrak{S}_5$ keine Untergruppen vom Index 3, 4 oder 8 besitzt. Sein letzter Beweis hat ein sehr einfaches Prinzip, das auf den Gebrauch dieser Hilfssätze verzichtet. In moderner Terminologie besteht der Beweis darin: Es wird angenommen, der Zerfällungskörper F des Polynoms $X^n + x_1 X^{n-1} + \cdots + x_n$ lasse sich in eine monoton wachsende Folge einbetten,

$$E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{k-1} \subset E_k = F; \tag{11}$$

dabei ist E_0 der Körper $\mathbf{Q}(x_1, \ldots, x_n)$, und E_{i+1} ergibt sich aus E_i, indem zu E_i eine Wurzel einer Gleichung $z^{p_i} = b_i$ adjungiert wird, wobei b_i ein Element von E_i und p_i eine ungerade Primzahl ist. Es muß gezeigt werden, daß dies unmöglich ist; durch vollständige Induktion nach k reduzierte er den Beweis auf den Fall $k = 1$. Nun operiert die Gruppe $\mathfrak{S}_5$ auf F und läßt jedes Element $b \in E_0$ invariant; ist $z^p = b$ für eine ungerade Primzahl p und $z \in F$, so ist $\sigma(z) = \omega_\sigma z$ mit $\omega_\sigma^p = 1$ für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}_5$, und für je zwei Elemente σ, τ von $\mathfrak{S}_5$ gilt $\omega_{\sigma\tau} = \omega_\sigma \omega_\tau$. Es genügt also zu beweisen, daß $\mathfrak{S}_5$ kein nichttriviales homomorphes Bild in der Gruppe der p-ten Einheitswurzeln (für eine ungerade Primzahl p) haben kann. Zu diesem Zweck betrachtete Ruffini die Bilder der drei Elemente $\tau_1 = (1\ 2\ 3)$, $\tau_2 = (3\ 4\ 5)$ und $\lambda = \tau_1\tau_2 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$; auf Grund der Relationen $\lambda^5 = (\lambda\tau_1)^5 = (\lambda\tau_2)^5 = 1$ sieht man fast sofort, daß die Bilder von τ_1 und τ_2 in einer beliebigen kommutativen Gruppe notwendigerweise gleich dem Einselement sind.

Die Arbeiten Ruffinis über Permutationen sollten Cauchy anregen, der hier 1813 die Gelegenheit fand, seine Talente als Systematiker einzusetzen ([5], (2), Bd. 1, S. 64—90). Es handelt sich um endlich viele Objekte (die keine Wurzeln einer Gleichung zu sein brauchen), die irgendwie angeordnet sind, und um „Substitutionen", welche die Anordnung dieser Objeke ändern; diese Substitutionen bezeichnete er mit $\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & l \\ \alpha & \beta & \gamma & \ldots & \lambda \end{pmatrix}$, um deutlich zu machen, daß sie a in α, b in $\beta, \ldots, l$ in λ überführen; auch benutzte er die Abkürzung $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Der Terminus „Gruppe" wurde noch nicht eingeführt (dies geschieht erst bei Galois), doch setzte Cauchy Substitutionen zusammen, wobei er ihr Produkt mit $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$ und die k-te Potenz von $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^k$ bezeichnete; auch die identische Substitution $\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$ führte er in seine Überlegungen ein. Bemerkenswert ist seine Arbeit wegen der Entdeckung der ersten allgemeinen Sätze über Substitutionsgruppen, von denen Ruffini nur die Spezialfälle bezüglich der Gruppe $\mathfrak{S}_5$ bewiesen hatte, insbesondere der Tatsache, daß die „Zyklen" (abc) die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ erzeugen, sowie der Eigenschaft von $\mathfrak{S}_n$, für $n \geqq 5$ keine Untergruppe zu enthalten, deren Index

gleich der größten Primzahl $p < n$ ist. Übrigens gab Cauchy keine Anwendung seiner Resultate auf das Problem der Auflösung durch Radikale, und wir wissen, daß er Ruffinis Beweis als stichhaltig ansah; das hat ihn vielleicht davon abgebracht, sich mit dem Problem bei anderen als den „allgemeinen" Gleichungen zu beschäftigen.

Um zur vollständigen Aufklärung des Problems zu gelangen, genügten diese elementaren Begriffe über die Permutationen nicht; das Problem selbst mußte klarer formuliert werden, als es Lagrange, Vandermonde und Ruffini getan hatten. Von unserem Standpunkt aus sind vier Begriffe herauszuarbeiten: der Begriff des Körpers, der Begriff der Adjunktion, der Begriff der Irreduzibilität eines Polynoms über einem Körper und schließlich das, was unter einer „allgemeinen" Gleichung zu verstehen ist. Zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts existierten die „mengentheoretischen" Begriffe noch nicht; daher konnte es vor 1860 keine Definition des Körpers geben. Was in der damaligen Terminologie ihren Platz einnahm, war die Betrachtung von Elementen, welche „rationale Funktionen einer gewissen Anzahl von bekannten Größen sind" ([1], Bd. 1, S. 479) (dabei verstand man unter „rationalen Funktionen" Elemente, die sich aus „bekannten Größen" durch die Operationen Addition, Multiplikation und Division ergeben). Die „Adjunktion" bestand also darin, zusätzlich zu vorhandenen Größen bestimmte Größen als „bekannt" anzusehen. Die Irreduzibilität eines Polynoms (in einer Variablen) mit rationalen Koeffizienten (über dem Körper $\mathbf{Q}$) war ein Begriff, der seit der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts bekannt war, und man verfügte über regelrechte Methoden, um festzustellen, ob ein explizit gegebenes Polynom irreduzibel ist oder nicht; doch scheint Gauß der erste gewesen zu sein, der es verstand, die Irreduzibilität für alle Polynome einer unendlichen Familie, die Kreisteilungspolynome ϕ_n (siehe unten), zu beweisen. Wenn die Koeffizienten eines Polynoms rationale Funktionen von einem oder mehreren unabhängigen Parametern sind, interpretierten die Algebraiker des siebzehnten und achtzehnten Jahrhunderts die Irreduzibilität in der Weise, daß kein nichttrivialer Faktor existiert, dessen Koeffizienten rationale Funktionen derselben Parameter sind. Das „allgemeine" Polynom vom Grade n ist dasjenige, das die Gestalt $X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$ hat, wobei die $a_1, a_2, \ldots, a_n$ unabhängige Parameter sind, und Ruffini scheint der erste gewesen zu sein, der seine Irreduzibilität bewiesen hat.

In seiner Abhandlung über die „Abelschen" Gleichungen war sich Abel darüber klar geworden, daß es notwendig ist, von der Irreduzibilität über einem beliebigen Körper zu sprechen, und die Ergebnisse, die er Crelle und Legendre kurz vor seinem Tod mitteilte, zeigen, daß er auf dem Wege zu abschließenden Resultaten war, die zwei Jahre später Galois erhalten sollte. Ausgehend von einer Gleichung $F(x) = 0$ ohne mehrfache Wurzeln, deren Koeffizienten (in moderner Terminologie) in einem in $\mathbf{C}$ enthaltenen Erweiterungskörper K des Körpers $\mathbf{Q}$ liegen, bewies Galois zunächst, daß „man immer eine Funktion V der Wurzeln x_i ($1 \leqq j \leqq n$) bilden kann derart, daß sämtliche Werte, die man erhält, wenn man in dieser Funktion die Wurzeln auf jede Art permutiert, verschieden sind". Zu diesem Zweck wählte er $V = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ mit geeignet gewählten α_j in K (wie es Ruffini in einem Spezialfall schon getan hatte). Anschließend bewies er, daß die Funktion „die Eigenschaft besitzt, daß alle Wurzeln x_j der vorgelegten Gleichung sich

rational als Funktion von V ausdrücken lassen", was nichts anderes ist als ein Spezialfall des oben erwähnten Ergebnisses von Lagrange. Alsdann betrachtete er die (über K) irreduzible Gleichung, welcher V genügt, und zeigte: Sind V, V', V'', ... die Wurzeln dieser Gleichung, so ist, „wenn $a = f(V)$ eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist, auch $f(V')$ eine Wurzel der vorgelegten Gleichung" ([13], S. 51). In moderner Terminologie ausgedrückt: V erzeugt ebenso wie jede der zu V über K Konjugierten den Zerfällungskörper N von F. Galois definierte dann die *Gruppe* Γ von $F = 0$ als die Menge der Permutationen der Wurzeln x_j, die man erhält, wenn man für V in dem rationalen Ausdruck für jedes der x_j als Funktion von V irgendeine Konjugierte von V substituiert. Nach demselben Satz von Lagrange[1]) sind die Elemente von K dadurch charakterisiert, daß sie gegenüber jeder zu Γ gehörenden Permutation invariant sind ([13], S. 51—52). Das wesentlich Neue seiner Argumentation besteht in der Tatsache, daß er sie auf die Untersuchung der Wirkung der Adjunktion neuer Elemente zu K auf die Gruppe der Gleichung $F = 0$ stützte. Ist L der Körper, der sich durch Adjunktion dieser Elemente zu K ergibt, so zerfällt F in über L irreduzible Polynome. Die Elemente von Γ, welche die Wurzeln eines dieser Polynome untereinander permutieren, bilden eine Untergruppe (die wir jetzt die Galoisgruppe von NL über L nennen), und die Untergruppen von Γ, welche den verschiedenen irreduziblen Faktoren von F entsprechen, sind sämtlich zueinander konjugiert. Der entscheidende Punkt ist, daß er den Gedanken hatte, zu K nicht nur eine einzige Wurzel einer über K irreduziblen Gleichung zu adjungieren, wie es Ruffini und Abel getan hatten, sondern *sämtliche* Wurzeln dieser Gleichung auf einmal, und er bemerkte, daß dann alle Untergruppen, welche den verschiedenen Faktoren von F entsprechen, übereinstimmen; in dieser Weise entdeckte er den grundlegenden Begriff des *Normalteilers*.

Um ein notwendiges Kriterium für die Auflösbarkeit in Radikalen zu erhalten, nahm Galois an, daß N in einem Körper enthalten ist, der sich aus K durch sukzessive Adjunktion (wie in der Folge (11)) von Wurzeln z_i binomischer Gleichungen von Primzahlgraden p_i ergibt. Man kann auch annehmen, daß man zu K alle k-ten Einheitswurzeln adjungiert hat, wobei k höchstens gleich dem größten der p_i ist. Nach Gauß lassen sich diese Einheitswurzeln selbst gewinnen, indem man zu $\mathbf{Q}$ sukzessive Wurzeln binomischer Gleichungen adjungiert; daher kann man annehmen, man habe, ehe man eine Wurzel einer binomischen Gleichung p-ten Grades adjungiert, alle in den Ausdrücken für die p-ten Einheitswurzeln auftretenden Radikale adjungiert. Galois betrachtete dann die erste Adjunktion, für welche das Polynom F über dem entsprechenden Körper L nicht mehr irreduzibel ist; dieser ergibt sich, indem man zu einem Körper E (über dem F irreduzibel ist) eine Wurzel einer Gleichung $z^p = b$ mit $b \in E$ adjungiert, und nach den bisherigen Überlegungen kann man annehmen, E enthalte die p-ten Einheitswurzeln. Somit erhält man L aus E durch Adjunktion *aller* Wurzeln von $z^p = b$, und Γ hat infolgedessen einen *Normalteiler* vom Index p. Durch vollständige Induktion kam Galois also zu dem Schluß, daß in der Gruppe Γ eine monoton abnehmende

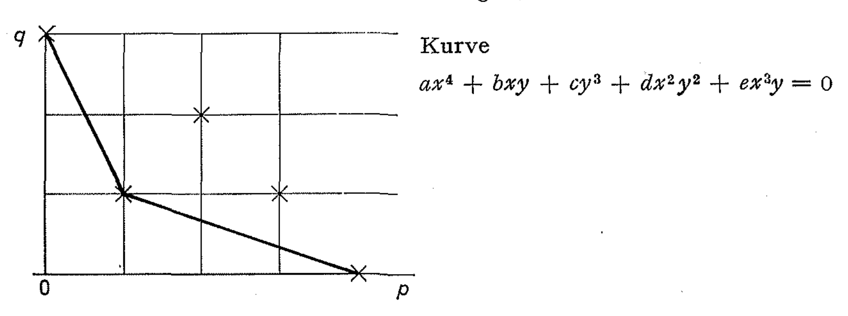
[1]) Merkwürdigerweise bewies Galois, der Gauß, Cauchy und Abel zitierte, die von ihm benötigten Spezialfälle dieses Satzes noch einmal, ohne Lagrange zu erwähnen.

Folge von Untergruppen $\Gamma \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \cdots \supset \Gamma_k = \{e\}$ existieren muß, von denen jede in der vorhergehenden Untergruppe Normalteiler von Primzahlindex ist. Eine solche Gruppe wird heute *auflösbar* genannt. Umgekehrt, hat Γ diese Eigenschaft und ist $(\Gamma : \Gamma_1) = p$, so setzte Galois die Elemente von Γ in der Gestalt $\sigma^j \tau$ für $\tau \in \Gamma_1$ und $\sigma^p = e$ $(0 \leqq j \leqq p - 1)$ an. Ordnet man jeder Wurzel x von F die Zahl $(x + \omega\sigma(x) + \cdots + \omega^{p-1}\sigma^{p-1}(x))^p$ zu (wobei ω eine p-te Einheitswurzel ist), so sind diese Zahlen Wurzeln einer Gleichung der Gruppe Γ_1, und durch vollständige Induktion kann man so die Gleichung durch Radikale lösen.

2.3. Analytische Geometrie und geometrische Analysis

2.3.1. *Die Anfänge der algebraischen Geometrie*

Die Erfindung der Methode der kartesischen Koordinaten hatte es ermöglicht, den Begriff der ebenen algebraischen Kurve, dann den der algebraischen Fläche im dreidimensionalen Raum und später die algebraischen Raumkurven zu definieren. Von der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts an stützten sich jedoch die einschlägigen Untersuchungen viel stärker auf die Infinitesimalrechnung als auf die Algebra. Die Bestimmung der Tangente an eine ebene Kurve führte zur Untersuchung der Wendepunkte, dann zu der Untersuchung der singulären Punkte, in denen die beiden Ableitungen des Polynoms der linken Seite der Kurvengleichung gleichzeitig verschwinden. Zur Untersuchung der singulären Punkte führte Newton einen grundlegenden Gedanken ein, die Zerlegung der Kurve in der Umgebung eines singulären Punktes (x_0, y_0) in „Zweige"; längs jedes dieser Zweige kann $y - y_0$ als Funktion von $x - x_0$ durch eine Reihe $a(x - x_0)^\mu + b(x - x_0)^\nu + \cdots$ dargestellt werden, bei der die Exponenten monoton wachsende rationale, aber nicht notwendig ganze Zahlen sind. Um den kleinsten Exponenten μ der verschiedenen Zweige zu bestimmen, erfand Newton die berühmte Methode des „Newtonschen Polygonzuges". Der Einfachheit halber sei $x_0 = y_0 = 0$; man betrachtet in der Kurvengleichung $\sum_{p,q} A_{pq}x^p y^q = 0$ alle Monome $A_{pq}x^p y^q$ mit nichtverschwindendem Koeffizienten. Für jedes dieser Monome markiert man den Punkt mit den Koordinaten (p, q) in der Ebene, dann betrachtet man den konvexen Polygonzug L, dessen Stücke sämtlich mindestens zwei dieser Punkte enthalten, während die anderen sämtlich auf derselben Seite der Gerade liegen, die diese Strecke enthält:



Dann haben die gesuchten Zahlen μ die Eigenschaft, daß die Zahlen $-1/\mu$ die *Anstiege* der Strecken von L sind. Cramer zeigte später, wie man ebenso die folgenden Exponenten in den Reihenentwicklungen der verschiedenen „Zweige" bestimmen kann [9], doch wurde die Konvergenz dieser Entwicklungen erst von Puiseux bewiesen (vgl. 4.4.6.). Schließlich ermöglichte es die Variablentransformation $x' = 1/x$, $y' = y/x$, die Untersuchung der Zweige im Unendlichen auf die Untersuchung in der Umgebung eines Punktes zurückzuführen.

Ein anderes Problem, das sehr früh im achtzehnten Jahrhundert in Angriff genommen wurde, ist die Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte zweier ebener Kurven mit den Gleichungen $P(x, y) = 0$ bzw. $Q(x, y) = 0$ von Grade m bzw. n. Die Methode besteht darin, y aus den beiden Gleichungen zu „eliminieren", indem man annimmt, daß sie eine gemeinsame Wurzel in y haben; das führt auf eine Gleichung, welche die Abszissen x der Schnittpunkte liefert. Die seit der Mitte des siebzehnten Jahrhunderts bekannten Eliminationsmethoden führten Maclaurin schon 1720 zu der Vermutung, die Anzahl der Schnittpunkte sei „im allgemeinen" gleich $m \cdot n$. Euler, der erfolglose Versuche zum Beweis dieser Vermutung unternahm, war sich über die Schwierigkeiten im klaren, welche auftreten, wenn die Gleichung in x mehrfache oder imaginäre Wurzeln hat oder wenn sich der Grad dieser Gleichung erniedrigt; er dachte schon an die Möglichkeit, die allgemeine Aussage durch Einführung „unendlich ferner Punkte" oder „imaginärer Punkte" zu retten, doch verfolgte er diesen Gedanken nicht über die Betrachtung einiger Spezialfälle hinaus. Das erste allgemeine Ergebnis in Richtung auf den sogenannten Bezoutschen Satz verdankt man tatsächlich Bezout [2]; es ist aber noch weit davon entfernt, die von Euler aufgeworfenen Probleme zu klären. Bezout beschränkte sich nämlich darauf, mit Hilfe einer neuen Eliminationsmethode folgendes zu beweisen: Haben die beiden Kurven keine gemeinsame Asymptotenrichtung, so hat die Gleichung in x stets den Grad $m \cdot n$ (gewisse Stellen seines Beweises lassen zu wünschen übrig, können aber mühelos korrekt gemacht werden). Er übertrug übrigens seine Methode auf eine beliebige Anzahl N von algebraischen Gleichungen in N Variablen.

Als Anwendung dieses Satzes bestimmte man um 1750 die Anzahl der von einem Punkt (a, b) ausgehenden Tangenten an eine Kurve mit der Gleichung (m-ten Grades) $F(x, y) = 0$: Ihre Berührungspunkte sind die Schnittpunkte dieser Kurve und der „polaren" Kurve mit der Gleichung $(a - x)\, F'_x + (b - y)\, F'_y + mF(x, y) = 0$; da diese Kurve den Grad $m - 1$ hat, muß es also „im allgemeinen" $m(m - 1)$ Tangenten geben, aber es ist klar, daß die singulären Punkte stets beiden Kurven angehören. Was im allgemeinen geschieht, wurde erst in den Arbeiten Plückers (vgl. 2.4.4.) vollständig geklärt.

Schon zu Beginn der Untersuchung algebraischer Kurven stieß man auf die Tatsache, daß eine Polynomgleichung $P(x, y) = 0$ die Vereinigung zweier verschiedener oder auch zusammenfallender Kurven darstellen kann, wenn sich P in ein Produkt verschiedener Polynome zerlegen läßt. Zu dieser Zeit verfügte man nicht über eine regelrechte Methode, um festzustellen, ob das nicht der Fall ist (in diesem Fall heißt P *irreduzibel*). Eine solche Methode wurde erst von Kronecker beschrieben ([19], Bd. II, S. 254–260). Doch scheint Maclaurin der erste gewesen zu

sein, der 1720 festgestellt hat, daß die Reduzibilität einer algebraischen Kurve mit der Anzahl ihrer singulären Punkte zusammenhängt: Hat eine Kurve vom Grade n mehr als $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte, so muß sie zerlegbar sein. Durch $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ Doppelpunkte und $2n-3$ andere (einfache) Punkte der Kurve kann man nämlich eine Kurve $(n-1)$-ten Grades legen; wäre diese Kurve kein Teil der gegebenen Kurve C, so hätte sie mit dieser $n^2-n+1=2n-3+2+(n-1)(n-2)$ Punkte gemein (jeder Doppelpunkt von C zählt zweimal als Schnittpunkt), im Widerspruch zum Satz von Bezout ([22], S. 137).

Nach der schon von Fermat durchgeführten Untersuchung der Kegelschnitte an Hand ihrer Gleichung nahm Newton die Klassifikation der ebenen Kurven dritten Grades in Angriff ([28], Bd. VII). Er erhielt dabei 72 „Typen", die nicht durch Transformation der Achsen aufeinander reduzierbar sind, und seine Nachfolger fügten noch sechs andere Typen hinzu, die er nicht gefunden hatte. Zweifellos angeregt durch die Beschreibung der Kegelschnitte als ebene Schnitte eines Kreiskegels zeigte er unter anderem, wie alle diese Kurven dritter Ordnung als ebene Schnitte von Kegeln dargestellt werden können, deren Grundflächen zu nur fünf Typen gehören. Euler versuchte eine analoge Klassifikation der ebenen Kurven vierter Ordnung, gab dies aber wegen der großen Anzahl der möglichen Fälle auf (*im neunzehnten Jahrhundert zählte Plücker 152 „Typen"* von Kurven vierter Ordnung auf).

Schließlich begann man im achtzehnten Jahrhundert damit, die geometrischen Eigenschaften gewisser algebraischer Kurven nach dem Muster der klassischen Untersuchungen der Kegelschnitte zu studieren. Maclaurin [23] schrieb eine ganze Arbeit über die ebenen Kurven dritter Ordnung, in welcher er z.B. bewies, daß die Gerade, die zwei Wendepunkte der Kurve verbindet, durch einen dritten Wendepunkt geht.

2.3.2. *Die Einführung des Vektorbegriffs*

Die Verwendung der kartesischen Koordinaten in der zwei- und dreidimensionalen Geometrie des achtzehnten Jahrhunderts führte meist auf schwerfällige und mühsame Rechnungen, da die Koordinatenachsen unzweckmäßig gewählt und die Rechnungen umständlich durchgeführt wurden. Als Ausnahme kann höchstens auf eine elegante Abhandlung Lagranges ([20], Bd. III, S. 661–692) über die Bestimmung des Inhaltes von Dreiecken und Pyramiden als Funktion der Koordinaten ihrer Ecken verwiesen werden. Auch erzeugte die Koordinatenmethode, die anscheinend der Geometrie neue Horizonte erschlossen hatte, gegen Ende des Jahrhunderts eine gewisse Ernüchterung, und man begann, wie es schon Leibniz getan hatte, verschiedentlich von einer „geometrischen Analysis" zu träumen, in der die geometrischen Objekte unmittelbar in die Berechnungen eingeführt würden und nicht durch Vermittlung von Koordinaten bezüglich irgendwelcher Achsen, die mit dem Problem an sich nichts zu tun haben.

Eine erste Art, den Gebrauch von Koordinaten in der Ebene zu vermeiden, war die Verwendung der komplexen Zahlen. Sobald man die Möglichkeit erkannt hatte, diese Zahlen und die Punkte der Ebene eineindeutig einander zuzuordnen (vgl. 4.3.), war es natürlich, daß man aus der geometrischen Interpretation des Rechnens mit diesen Zahlen Nutzen ziehen wollte, um geometrische Probleme in einfacher Weise zu lösen. Das sieht man bei Gauß in den zu seinen Lebzeiten nicht publizierten, aber zu Anfang des Jahrhunderts datierten Notizen, in denen er insbesondere die Tatsache ausnutzte, daß die Kurven, längs derer der Absolutbetrag oder das Argument von $(az + b)/(cz + d)$ konstant bleibt, Kreise bzw. Geraden sind ([14], Bd. IV, S. 396, und Bd. VIII, S. 307).

Die Addition komplexer Zahlen ist übrigens die Operation, die in Kinematik und Dynamik für die „Zusammensetzung" von Kräften und Geschwindigkeiten seit langem im Gebrauch war; eigentlich ist es ziemlich überraschend, daß niemals versucht wurde, diese Operation in der Algebra zu nutzen. Der Grund dafür ist vielleicht die Tatsache, daß es sich in der Mechanik um Vektoren mit variablem Anfangspunkt, sogenannte „freie Vektoren", handelt. Jedenfalls führte Bellavitis im Jahre 1832 gerade in Gestalt von Äquivalenzklassen „äquipollenter" (d. h. durch Translation auseinander hervorgehender) freier Vektoren die ebene Vektorrechnung und ihre geometrischen Anwendungen (selbstverständlich ohne Kentnnis der Gaußschen Arbeiten) ein; allerdings wurde dieser Kalkül erst von Hamilton und Graßmann auf mehr als zwei Dimensionen übertragen (vgl. 3.2.1.).

Immerhin hatte Möbius schon 1818 den Gedanken an ein System der „geometrischen Analysis" in zwei- und dreidimensionalen Räumen gehabt, das im wesentlichen der Vektorrechnung äquivalent ist und das er von 1823 an unter dem Namen „barycentrischer Calcul" entwickelte [25]. Angeregt durch die Theorie der Schwerpunkte in der Mechanik, formulierte er, ein Punkt S sei Schwerpunkt (oder *Barycentrum*) von in den Punkten $A_1, \ldots, A_k$ des Raumes angebrachten k Massen $m_1, \ldots, m_k$, wenn

$$S = \frac{m_1A_1 + \cdots + m_kA_k}{m_1 + \cdots + m_k} = \alpha_1A_1 + \cdots + \alpha_kA_k \quad \text{mit} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1 \tag{12}$$

ist. Er stellte dabei aber fest, daß man für S *jeden* Punkt des Raumes erhalten kann, wenn man negative „Massen" m_j zuläßt und dabei vereinbart, daß die Relation (12) den drei analogen Relationen entspricht, welche die Koordinaten von S mit Hilfe der Koordinaten der A_j liefern. Überdies ist, wenn man im dreidimensionalen Raum vier nicht in einer Ebene liegende Punkte A, B, C, D nimmt, die Darstellung $S = \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ (mit $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$) eines Punktes des Raumes *eindeutig*, so daß das System $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ der vier durch die Relation $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ verknüpften Zahlen als ein System von Koordinaten von S angesehen werden kann, die man die „barycentrischen Koordinaten" bezüglich A, B, C, D nennt. Diese Auffassung erlaubte es außerdem, sich von dem Zwang zu befreien, alles auf ein System fester Achsen zu beziehen, Will man z.B. die Punkte einer durch zwei Punkte A und B gehenden Geraden betrachten, so schreibt man sie in der Gestalt $\alpha A + \beta B$ mit $\alpha + \beta = 1$. Möbius wandte in seinen Schriften

seine Ideen auf zahlreiche geometrische Probleme an, aber trotz ihrer Vorteile sollte es seiner Methode noch weniger als der linearen Algebra Graßmanns (vgl. 3.2.1.) gelingen, die fast ausschließliche Verwendung kartesischer Koordinaten während mehr als eines Jahrhunderts zu verdrängen.

2.4. Die komplexe projektive Geometrie

2.4.1. *Die Untersuchung der Allgemeinheit*

Die klassischen Überlegungen der Euklidischen Geometrie kennen definitionsgemäß nur Strecken positiver Länge und Winkel zwischen 0 und zwei Rechten. Das bringt in den Problemen die Betrachtung mehrerer „Fallunterscheidungen" je nach der Lage der gegebenen Objekte zueinander mit sich: Beispielsweise muß die Relation, welche auf einer Geraden die Längen der drei Strecken verknüpft, die je zwei von drei gegebenen Punkten A, B, C zu Endpunkten haben, in Abhängigkeit von der relativen Lage dieser drei Punkte in verschiedener Weise angesetzt werden. Der Vergleich dieser Überlegungen mit den Methoden, welche zur Lösung der gleichen Probleme die kartesischen Koordinaten benutzen, ließ erkennen, daß sich die Koordinatenmethoden nicht mit solchen Erwägungen zu belasten brauchen, und zwar dank der Tatsache, daß die Koordinaten Werte beliebigen Vorzeichens annehmen können. Die Bewegung, die Ende des achtzehnten Jahrhunderts zum Abgehen von der Koordinatenmethode führte, um zu direkten (auch „synthetisch" genannten) Schlüssen über die geometrischen Objekte selbst zurückzukehren, sollte dazu führen, daß Mittel zur Erhaltung der Allgemeinheit der Rechnungen der „Analytischen Geometrie" gesucht wurden, ohne daß zu diesem Zweck Achsen gewählt werden mußten.

Eine erste Richtung, die bei diesen Untersuchungen eingeschlagen wurde, bestand darin, den klassischen euklidischen Größen Längen und Winkeln *Vorzeichen* beizulegen und auf diese Weise sogenannte *orientierte* Größen zu definieren. Nach einem steckengebliebenen Versuch L. Carnots im Jahre 1803 (der kaum Erfolg haben konnte, weil sein Autor sich systematisch weigerte, negative Zahlen zu verwenden) war es Möbius (und unabhängig von ihm Chasles), der um 1844 auf einer Geraden D, auf der ein Richtungssinn festgelegt ist, die orientierte Strecke $\overline{AB}$ als $\pm AB$ definierte, je nachdem, ob man im festgelegten oder im entgegengesetzten Sinne von A nach B gelangt; die Relation zwischen drei Punkten A, B, C von D lautet dann in jedem Fall

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0\,.$$

Ebenso versah Möbius nach Wahl einer Orientierung in der Ebene einen Winkel $\sphericalangle\,(DD')$ zwischen Geraden bzw. Halbgeraden mit einem Vorzeichen, indem er ihn gleich dem (zwischen 0 und zwei Rechten gelegenen) üblichen Winkel mit dem Pluszeichen wählte, wenn D im positiv gewählten Sinne in D' übergeht, und mit dem Minuszeichen, wenn dieser Übergang im entgegengesetzten Drehsinn erfolgt.

Die Verwendung der imaginären Größen in der Algebra — und durch Rückwirkung in der analytischen Geometrie — sollte zu kühneren Vorstellungen führen, die in Monges Vorlesungen an der Ecole Polytechnique eine systematische Form annahmen. Seit Maclaurin und Euler hatte man sich angewöhnt zu sagen, eine Lösung (a, b) von zwei Polynomgleichungen $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ stelle im Fall komplexer a und b die Koordinaten eines beiden Kurven mit den Gleichungen $P = 0$ bzw. $Q = 0$ gemeinsamen „imaginären Punktes" dar. Monge ging noch weiter, indem er ohne zu zögern von imaginären Kurven und imaginären Flächen sprach, wobei er darunter (ohne es allerdings ganz klar zu sagen) die „geometrischen Örter" der Punkte mit komplexen Koordinaten verstand, welche Polynomgleichungen (die selbst komplexe Koeffizienten haben) in $\boldsymbol{C}^2$ bzw. $\boldsymbol{C}^3$ genügen. Beispielsweise kann man von den Tangenten an einen Kreis sprechen, die von einem beliebigen Punkt der Ebene ausgehen; sie sind aber imaginär, wenn der Punkt im Innern des Kreises liegt. Er formulierte dann das, was er das „Prinzip der contingenten Relationen" nannte; es läuft auf die folgende Aussage hinaus: Gilt eine Eigenschaft von Punkten, Kurven oder Flächen, die algebraisch von komplexen Parametern abhängen, wenn jeder Parameter beliebige reelle Werte eines gewissen Intervalls annimmt, dann trifft die Eigenschaft auch für *alle* Parameter zu. Läßt sich nämlich die Eigenschaft durch polynomiale Relationen zwischen den Parametern ausdrücken, so sind diese Relationen identisch erfüllt, sobald sie auf einer offenen Menge des $\boldsymbol{R}^N$ gelten (dabei ist N die Anzahl der Parameter). Dieses Prinzip ist deshalb von Interesse, weil es ermöglicht, zahlreiche Resultate der Geometrie ohne Rechnung zu beweisen. Sind beispielsweise C, C', C'' drei sich paarweise schneidende Kreise in einer Ebene und D, D', D'' die Geraden, welche die gemeinsamen Punkte von C' und C'', C'' und C bzw. C und C' verbinden, so gehen diese drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt. Haben nämlich die Sphären mit den Großkreisen C, C', C'' einen gemeinsamen (reellen) Punkt, so gehört die orthogonale Projektion dieses Punktes zu D, D' und D''; das „Prinzip der contingenten Relationen" gestattet dann den Übergang zum allgemeinen Fall.

2.4.2. *Die Vorstellungen Poncelets*

Die letzten Schritte zur Erweiterung der geometrischen Begriffswelt betreffen die Vorstellung „unendlich ferner Punkte", die natürlicherweise gleichfalls beim Rechnen in der analytischen Geometrie auftauchte, tatsächlich aber dem siebzehnten Jahrhundert entstammt. Desargues, Ingenieur von Beruf und Mathematiker aus Liebhaberei, hatte nämlich versucht, den Begriffen der „Perspektive", wie sie von den Malern benutzt wurden, eine mathematische Grundlage zu geben, und in einer von ihm selbst geschaffenen bildhaften Terminologie entwickelte er die Vorstellung des unendlichen Punktes einer Geraden, durch den nach Vereinbarung alle parallelen Geraden gehen sollten: Eine Zentralprojektion des Raumes auf die Ebene transformiert nämlich diese Geraden in zusammenlaufende Geraden. Desargues hatte außerdem die Aufmerksamkeit auf die Verwendung der Zentralprojektion gelenkt, um einfache Beweise für bestimmte Sätze der Geometrie zu

erhalten. So läßt sich beispielsweise der Satz über perspektive Dreiecke in der Ebene, der nach ihm benannt wird, ganz einfach dadurch beweisen, daß man die Zentralprojektion der räumlichen Figur betrachtet, die aus zwei Ebenen besteht, die ein Dreikant schneiden. Pascal hatte die Zentralprojektion benutzt, um seinen Satz über das einem Kegelschnitt einbeschriebene Sechseck auf den Fall zurückzuführen, daß der Kegelschnitt ein Kreis ist, und wenig später hatte La Hire auf analoge Weise andere Sätze über die Kegelschnitte bewiesen. Gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts waren jedoch die Arbeiten von Desargues in Vergessenheit geraten (man glaubte sogar, sein Hauptwerk sei verlorengegangen). Auch hier war es Monge, der im Zusammenhang mit seinen Gedanken über die „Darstellende Geometrie" die Methode der Zentralprojektion wieder zu Ehren brachte.

Die Synthese all dieser Tendenzen verdankt man Poncelet. Er führte gleichzeitig die unendlich fernen Punkte und die imaginären Punkte ein; damit arbeitete er sofort in dem Bereich, den wir heute die komplexe projektive Ebene $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C})$ bzw. den dreidimensionalen komplexen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$ nennen. In seinem großen, 1822 veröffentlichten *Traité des propriétés projectives des figures* zeigte er, wie dieser systematische Standpunkt tatsächlich alle „Fallunterscheidungen" der klassischen Geometrie überwindet. In diesem Rahmen werden so alle nicht entarteten Kegelschnitte (bzw. Quadriken) gleichartig; Poncelet scheint der erste gewesen zu sein, der in dieser Weise den Grund für die spezielle Behandlungsweise von Kreis und Kugel entdeckt hat: „Beliebig in einer Ebene gelegene Kreise", sagte er, „sind keineswegs völlig unabhängig voneinander, wie man auf den ersten Blick glauben könnte, sie haben gedanklich im Unendlichen zwei imaginäre Punkte gemeinsam" (die berühmten „Kreispunkte", unendlich ferne Punkte der „isotropen" Geraden mit der Gleichung $y = \pm ix + b$). Ebenso führte er an späterer Stelle den „absoluten Kegelschnitt", den allen Sphären im Unendlichen gemeinsamen Kegelschnitt, ein. Wenn er auch nicht speziell von den geradlinigen Erzeugenden der Kugel sprach (das sind isotrope Geraden in jeder Tangentialebene), so betonte er zumindest ausdrücklich die Existenz (reeller oder imaginärer) geradliniger Erzeugender für alle nichtentarteten Quadriken.

Der Impuls, den die Geometrie durch diesen neuen Gesichtspunkt erhielt, war beträchtlich; die projektive Geometrie wurde schnell zu einem der aktivsten und populärsten Zweige der Mathematik, besonders im Unterricht für die Anfänger an den Universitäten. In den Augen vieler war einer ihrer hauptsächlichsten Vorzüge, daß sie Rechnungen fast völlig vermeidet, beispielsweise indem sie sich auf die Überlegungen der klassischen Euklidischen Geometrie stützt und anschließend das „Prinzip der contingenten Relationen", das Poncelet „Stetigkeitsprinzip" nannte, anwendet. In dieser Weise verfahren, ganz im Stile von Desargues und Monge, meistens auch Poncelet und mehrere seiner unmittelbaren Nachfolger wie Steiner und Chasles.

Trotzdem merkte man bald, daß man auch in der projektiven Geometrie die Methoden der analytischen Geometrie benutzen kann. Statt den baryzentrischen Koordinaten $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ eines Punktes S (vgl. 2.3.2.) die Bedingung

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$$

aufzuerlegen, kann man sich darauf beschränken, nur $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ vorauszusetzen, wenn man vereinbart, daß $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ und $(t\alpha, t\beta, t\gamma, t\delta)$ für jedes $t \neq 0$ *demselben* Punkt entsprechen. Dann dehnt man diese Zuordnung auf $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$ aus, indem man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ komplexe Werte zuläßt, die der einzigen Bedingung unterworfen sind, nicht sämtlich 0 zu sein. Die Punkte, für welche $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ gilt, sind die „unendlich fernen Punkte". Natürlich müssen die Gleichungen der Kurven oder der Flächen in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ homogen sein. Dieser von Möbius und Plücker eingeführte Gebrauch homogener Koordinaten machte es alsbald möglich, im Rahmen des komplexen projektiven Raumes die algebraische Geometrie für Kurven und Flächen beliebiger Ordnung zu entwickeln, während die Untersuchung vom „synthetischen" Standpunkt aus kaum den Grad 4 überschreiten konnte.

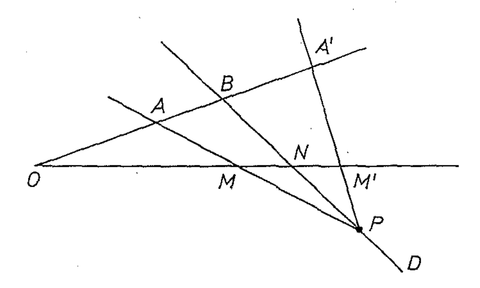
2.4.3. *Projektive und metrische Eigenschaften*

Ganz naturgemäß wurde Poncelet von seinen Auffassungen veranlaßt, die Aussagen der klassischen Euklidischen Geometrie vom Standpunkt der projektiven Geometrie aus zu untersuchen: Neben den Aussagen, die bei Zentralprojektion invariant bleiben, wie die Sätze von Desargues und Pascal, gibt es nämlich auch diejenigen, in welchen Längen und Winkel vorkommen und welche diese Invarianz nicht aufweisen. Bei diesen Aussagen sprach Poncelet von „metrischen Eigenschaften"; er untersuchte nun das Problem, wie sie in der Sprache der komplexen projektiven Geometrie formuliert werden können. Dabei gelangte er jedoch nur zu sehr unvollständigen Ergebnissen. Für die Entfernungen ermöglichte ihm seine Definition des Kreises als durch die Kreispunkte gehender Kegelschnitt in gewissen Fällen solche Überlegungen, in welchen Entfernungen vorkommen, in Überlegungen zu übersetzen, in denen nur Kreise eine Rolle spielen, die also einer projektiven Interpretation zugänglich sind. Für die Winkel griff er zu einem ziemlich ausgefallenen Verfahren, indem er die Aussagen, bei denen sie ins Spiel kommen, mit Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte verknüpfte, wobei er die von ihm entdeckte Interpretation der Brennpunkte eines Kegelschnittes benutzte, und zwar die, daß die Brennpunkte diejenigen Punkte sind, in denen die Tangenten an den Kegelschnitt isotrope Geraden sind ([30], S. 261). Wenn auch diese von Plücker und Chasles auf andere Kurven und Flächen ausgedehnte Eigenschaft zu eleganten geometrischen Ergebnissen führte, gelangte man erst um 1850 zu einer klaren Vorstellung von dem, was die „metrischen Eigenschaften" in der projektiven Geometrie sind (vgl. 3.4.3.).

2.4.4. *Abbildungen und Dualität*

Die Zentralprojektion, Lieblingsinstrument von Desargues und Monge, ursprünglich als Abbildung einer Ebene in eine andere Ebene erdacht, bringt — durch dasselbe Verfahren, das zum Beweis des Satzes von Desargues dient — eine Abbildung der Ebene in sich, die „Perspektivität" hervor: Man gibt sich in der Ebene einen Punkt O und eine Gerade D vor und ordnet jedem Punkt M einen Punkt M' auf

OM so zu, daß jede Gerade AM in eine Gerade $A'M'$ transformiert wird, die AM in einem Punkt von D schneidet. Ersetzt man die Ebene durch den dreidimensiona-



len projektiven Raum und die Gerade D durch eine Ebene, so erhält man die Definition der Abbildung, die Poncelet „Homologie" nannte und die er im dreidimensionalen Raum *in der gleichen* Art benutzte wie die Zentralprojektionen oder die Perspektivitäten in der Ebene. Schon in den Anfängen der projektiven Geometrie spielt also der Begriff der *Abbildung* von $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C})$ bzw. $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$ in sich eine große Rolle, und für Poncelet waren die projektiven Eigenschaften eben diejenigen, welche bei den Perspektivitäten invariant bleiben. Etwas später definierten Möbius und (unabhängig von ihm) Chasles die allgemeinsten *projektiven Abbildungen* als invertierbare lineare Substitutionen der homogenen Koordinaten. Möbius und Chasles waren es auch, die mit einer von Pappos herrührenden *Invarianten* hervortraten: Für je vier verschiedene Punkte M_1, M_2, M_3, M_4 einer Geraden versteht man unter dem *Doppelverhältnis* $(M_1M_2M_3M_4)$ die Zahl

$$\frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_3M_2}} \cdot \frac{\overline{M_4M_2}}{\overline{M_4M_1}}$$

(wobei man im allgemeinen mit $\dfrac{\overline{PM_1}}{\overline{PM_2}}$ die Zahl ϱ bezeichnet, für welche auf der durch M_1 und M_2 gehenden Geraden die Beziehung $P = (M_1 + \varrho M_2)/(1 + \varrho)$ gilt und die eine beliebige komplexe Zahl sein kann.) Pappos hatte schon bemerkt, daß in der obigen Figur die Beziehung $(OBAA') = (ONMM')$ gilt (ohne natürlich die Vorzeichen der Strecken zu berücksichtigen), und Möbius und Chasles zeigten, daß bei *jeder* projektiven Abbildung für die Bilder M_1', M_2', M_3', M_4' von vier auf einer Geraden liegenden Punkten M_1, M_2, M_3, M_4 die Beziehung $(M_1'M_2'M_3'M_4') = (M_1M_2M_3M_4)$ erfüllt ist. Diese Invariante (die zeitlich früheste derjenigen Invarianten, die später Gegenstand der allgemeinen Invariantentheorie sind (vgl. 3.2.3.)), spielte in allen Untersuchungen zur projektiven Geometrie während des ganzen neunzehnten Jahrhunderts eine große Rolle.

Zu den projektiven Abbildungen kommen seit den Jahren 1820—1830 die ersten nichtlinearen *birationalen Transformationen*. Die (schon Viète und Fermat als Abbildung von „Kurve zu Kurve" bekannte) Inversion wird jetzt als Transformation aufgefaßt, die auf den ganzen Raum (mit Ausnahme des „Pols") wirkt, und gegen Ende seines Schaffens untersuchte Möbius die aus mehreren Inversionen

zusammengesetzten Abbildungen in erschöpfender Weise. Eine andere Transformation „von Kurve zu Kurve" war schon von Newton und Maclaurin häufig angewandt worden. Sie besteht darin, daß bei zwei in der Ebene fest gegebenen Punkten A und B einer Kurve Γ diejenige Kurve Γ' zugeordnet wird, die von einem Punkt M' durchlaufen wird, der sich aus einem die Kurve Γ durchlaufenden Punkt M in der Weise ergibt, daß die Winkel $\sphericalangle\,(AM, AM')$ und $\sphericalangle\,(BM, BM')$ mit zwei konstant vorgegebenen Winkeln übereinstimmen. Wie die Inversion ist dies ein Spezialfall der *quadratischen Transformationen*, die vom Standpunkt der ebenen projektiven Geometrie darin bestehen, daß einem Punkt mit den homogenen Koordinaten x, y, z der Punkt $(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ zugeordnet wird, wobei P, Q, R drei homogene Polynome zweiten Grades sind. Die einfachste dieser Transformationen ist diejenige, für die $P(x,y,z) = yz$, $Q(x,y,z) = zx$, $R(x,y,z) = xy$ ist. Sie ist auf dem Komplement der Vereinigung der drei Verbindungsgeraden der „Fundamentalpunkte" mit den homogenen Koordinaten $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ eineindeutig; jedem der von den Fundamentalpunkten verschiedenen Punkte einer dieser Geraden entspricht der gegenüberliegende „Fundamentalpunkt", während der einem „Fundamentalpunkt" entsprechende Punkt offenbar nicht definiert ist. Immerhin gilt folgendes: Streben zwei Punkte längs zweier Kurven, die verschiedene Tangenten besitzen, gegen den gleichen „Fundamentalpunkt", so streben ihre Transformierten gegen zwei verschiedene Punkte der dem „Fundamentalpunkt" gegenüberliegenden Geraden. Man kann sagen, daß die Abbildung den „Fundamentalpunkt" in die gegenüberliegende Gerade „auseinanderzieht". Diese Eigenschaft wird später in den Anwendungen dieser Transformation auf die algebraische Geometrie grundlegend werden, in der sich die quadratischen Abbildungen als der (nach den projektiven Abbildungen) einfachste Typus der birationalen Transformationen der Ebene herausstellen werden.

Im Rahmen dieses Buches können wir die Geschichte dieser neueren Entwicklung nicht beschreiben; wir verweisen dazu auf [11].

Ein anderer Begriff, der den der Transformation verallgemeinert und der in derselben Epoche vor allem bei Chasles auftritt, erweckte die Hoffnung auf eine große Zukunft in der algebraischen Geometrie (siehe [11]): Es ist der Begriff der (algebraischen) *Korrespondenz* auf einer Geraden (oder einer unikursalen Kurve). Es handelt sich um eine Relation zwischen zwei Punkten der Geraden mit den homogenen Koordinaten x_0, x_1 bzw. y_0, y_1, die durch eine Gleichung

$$F(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0$$

beschrieben wird, wobei F ein Polynom ist, das in x_0 und x_1 homogen vom Grade m und in y_0, y_1 homogen vom Grade n ist; jedem Punkt $y \in \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ entsprechen dann m Punkte x, und jedem Punkt x entsprechen n Punkte y (die mit ihrer Vielfachheit gezählt werden); man sagt, es handele sich um eine (n, m)-Korrespondenz. Offenbar ist die Anzahl der Punkte x, die mit mindestens einem ihrer transformierten Punkte y zusammenfallen, (der Koinzidenzpunkte) gleich $m + n$. Dieses „Korrespondenzprinzip" wurde von Chasles in seinen zahlreichen Abhandlungen über die Kegelschnitte mit großer Virtuosität benutzt. Auf diese Weise bewies er zum Beispiel, daß es im allgemeinen 3264 Kegelschnitte gibt, die fünf in der Ebene gegebene

Kegelschnitte berühren. Damit eröffnete er etwa 1864 einen ganzen Zweig der algebraischen Geometrie, die sogenannte „abzählende Geometrie", die im letzten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts stark entwickelt wurde und schwierige Probleme aufwarf, die bis heute noch nicht völlig geklärt sind. (Das ist eins der berühmten „Hilbertschen Probleme" (das 15.), siehe [24] — bzw. [24][1].)

Schließlich löste sich der Typus einer ganz anderen Transformation aus der klassischen (auf Apollonios zurückgehenden) Theorie von Pol und Polare in bezug auf Kegelschnitte heraus und führte über viele Wandlungen zur Herausbildung einer der grundlegenden Ideen, welche die heutige Algebra, Analysis und Topologie beherrschten, zum Begriff der *Dualität*. Gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts übertrug Monge die Begriffe Pol einer Ebene und Polarebene eines Punktes auf Quadriken; er selbst und seine Schüler bemerkten, daß ganz wie die Desarguesschen Zentralprojektionen es die durch die Polarität bezüglich eines Kegelschnittes bzw. einer Quadrik definierte Zuordnung zwischen Punkten und Geraden (in der Ebene) bzw. Punkten und Ebenen (im Raum) ermöglicht, neue Sätze zu erhalten: Das berühmteste Beispiel ist der Satz von Brianchon (1806) über die einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechsecke, der sich mit Hilfe einer Polarität aus dem Satz von Pascal über die einbeschriebenen Sechsecke ergibt. Poncelet entwickelte diesen Gedanken sehr viel weiter: In der Ebene ordnete er einer Kurve C die Enveloppe C' der Polaren ihrer Punkte in bezug auf einen festen Kegelschnitt Γ so zu, daß umgekehrt C die Enveloppe der Polaren der Punkte von C' ist; dies nannte er die „Transformation durch reziproke Polaren". Er verwendete sie bei zahlreichen Problemen ebenso wie ihr Analogon im Raum.

Ist $Q(x, y, z, t) = 0$ die homogene Gleichung einer nichtentarteten Quadrik Γ in $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$, so besteht der analytische Aspekt der Transformation durch reziproke Polaren bezüglich Γ darin, einem Punkt mit den homogenen Koordinaten x, y, z, t die Ebene $uX + vY + wZ + rT = 0$ zuzuordnen, mit $u = \partial Q/\partial x$, $v = \partial Q/\partial y$, $w = \partial Q/\partial z$, $r = \partial Q/\partial t$. Der einfachste Fall ist der, daß $Q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ ist (auf den man das Problem stets durch eine projektive Abbildung zurückführen kann); die Ponceletsche Transformation läuft also darauf hinaus, die homogenen Koordinaten eines Punktes und die Koeffizienten der Gleichung einer Ebene, die man gewöhnlich die „Tangentialkoordinaten" der Ebene nennt, miteinander zu vertauschen. In eben dieser (aus der Theorie der Kegelschnitte und Quadriken entstandenen) Gestalt legten Gergonne und Plücker die Dualität dar, und Gergonne popularisierte die Praxis, in zwei Spalten die „dualen" Interpretationen desselben Gleichungssystems gegenüberzustellen, wobei die Variablen einmal als „Punktkoordinaten" und einmal als „Tangentialkoordinaten" angesehen werden.

Insbesondere hatte das zur Folge, daß in der ebenen projektiven Geometrie der Begriff der *Klasse* einer algebraischen Kurve eingeführt wurde, der zu dem Begriff der Ordnung „dual" ist und definiert wird als die Anzahl der Tangenten, die von einem Punkt der Ebene „in allgemeiner Lage" an die Kurve gezogen werden können. Hier zeigte sich aber ein offensichtliches „Paradoxon". Von einer „allgemeinen" Kurve der Ordnung m wußte man, daß ihre Klasse gleich $m' = m(m - 1)$ ist; auf Grund der Dualität müßte die Ordnung der Ausgangskurve gleich $m'(m' - 1)$ sein, was unmöglich ist. Die Erklärung besteht darin, daß eine „all-

gemeine" Kurve der Ordnung m als Kurve der Klasse $m' = m(m-1)$ nicht „allgemein" ist; sie hat „tangentiale" Singularitäten, Doppeltangenten und Wendetangenten, die zu Doppel- bzw. Umkehrpunkten „dual" sind. Die Klärung dieser Situation führte zu den berühmten *Plückerschen Formeln* (1828). Man beschränkte sich auf (irreduzible) Kurven, die „allgemeine" (punktförmige oder tangentiale) Singularitäten haben, d. h. genau d Doppelpunkte mit verschiedenen Tangenten, d' Doppeltangenten mit verschiedenen Berührungspunkten, s Umkehrpunkte erster Art und s' Wendetangenten mit Berührungen zweiter Ordnung. Dann sind die Ordnung m und die Klasse m' der Kurve mit den vier obigen Zahlen durch die zu sich selbst dualen Formeln

$$\begin{aligned} m' &= m(m-1) - 2d - 3s\,, \\ m &= m'(m'-1) - 2d' - 3s'\,, \\ s' - s &= 3(m' - m) \end{aligned} \tag{13}$$

verknüpft. Diese Formeln müssen modifiziert werden, wenn die Singularitäten nicht mehr „allgemein" sind, aber die Untersuchung dieser Singularitäten wurde erst im letzten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts abgeschlossen.

In den obigen Bezeichnungen heißen zwei Punkte M, M' mit den Koordinaten x, y, z, t und x', y', z', t' *konjugiert* bezüglich der Quadrik Γ, wenn sie der in M und M' *symmetrischen* bilinearen Relation

$$B(M, M') = x'\frac{\partial Q}{\partial x} + y'\frac{\partial Q}{\partial y} + z'\frac{\partial Q}{\partial z} + t'\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

genügen; die Polarebene von M ist die Menge der zum Punkt M konjugierten Punkte M'. Im Jahre 1833 untersuchte Möbius, welches die Biliniearformen $B(M, M')$ sind, für welche die Relation $B(M, M') = 0$ die Beziehung $B(M', M) = 0$ nach sich zieht; so erhielt er im projektiven Raum $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$ ein zweites Beispiel für eine solche Form, die alternierende Bilinearform

$$B(M, M') = xy' - yx' + zt' - tz'\,. \tag{15}$$

Die „Dualität", die sich daraus ergibt, weicht hier von der durch die Formel (14) definierten erheblich ab, sie hängt mit der Untersuchung gewisser Geradenbüschel zusammen, die in der Statik auftreten (was Giorgini veranlaßt hatte, schon im Jahre 1828 die durch die Form (15) definierte Dualität zu untersuchen). Monge hatte nämlich mit der Untersuchung der von zwei bzw. drei Parametern abhängenden Systeme von Geraden im Raum (den „Geradenkongruenzen" bzw. „Geradenkomplexen") begonnen. Hierbei handelt es sich um Geraden des projektiven Raumes, bei denen je zwei Punkte bezüglich der Form (15) konjugiert sind; sie bilden ein dreiparametriges System, einen sogenannten *linearen Komplex.* Diejenigen, die durch einen gegebenen Punkt M gehen, sind die Geraden einer Ebene, die nichts anderes ist als die „Polare" von M bezüglich der durch (15) festgelegten Dualität; man kann sie auch als die Geraden definieren, die zu einem resultierenden Moment eines Kräftesystems in M orthogonal sind.

2.4.5. *Die Geometrie im neunzehnten Jahrhundert*

Durch ihre engen Kontakte zur räumlichen Anschauung, durch ihre augenscheinlich strenge axiomatische Form (im Gegensatz zu den Unbestimmtheiten in den Auffassungen in der Algebra oder in der Analysis) und durch die Einfachheit ihrer Beweise war die Euklidische Geometrie stets der Zweig der Mathematik gewesen, der am meisten die Amateure angezogen hatte. Die projektiven Methoden trugen durch ihre Schmiegsamkeit, die Einfachheit ihrer Anwendung und die Allgemeinheit ihrer Resultate zur Stärkung dieser Popularität erheblich bei, und ein Jahrhundert lang erlebte man, wie eine wahre Flut von Veröffentlichungen zur „elementaren" Geometrie erschien. Diese ansteigende Beliebtheit überschritt übrigens die Grenzen der klassischen Euklidischen Geometrie und führte beispielsweise von etwa 1870 an zu einer „Dreiecksgeometrie", die von „merkwürdigen" Punkten, Geraden und Kreisen überquoll.

Lieblingsthema war die Theorie der Kegelschnitte und der Quadriken, wobei das Neue vor allem in der Untersuchung von Scharen („Bündeln" oder „Netzen") bestand, die linear von einem Parameter oder von mehreren Parametern abhängen. Obwohl sich dabei eine unerschöpfliche Fundgrube für Übungsaufgaben zum Lehrbetrieb auftat, konnten sich die eigentlichen Mathematiker den ziemlich gekünstelten Charakter nicht verhehlen. Im Jahre 1837 schrieb Chasles: „Heute kann jeder kommen, irgendeine bekannte Wahrheit herausgreifen und sie verschiedenen allgemeinen Transformationsprinzipien unterwerfen. Er wird daraus wiederum Wahrheiten, andersartige oder allgemeinere, gewinnen, und diese sind wieder für ähnliche Operationen empfänglich. Derart kann man beinahe bis ins Unendliche hinein die Zahl der aus der ersten Wahrheit abgeleiteten Wahrheiten vervielfachen ... Wer will, kann also im gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft in der Geometrie verallgemeinern und neu schaffen, ein Genie ist nicht mehr erforderlich, um diesem Gebäude einen neuen Stein hinzuzufügen" ([8], S. 268–269).[1] Daher orientierten sich von der Mitte des Jahrhunderts an die neuen Forschungen unter Verzicht auf diese elementaren Aspekte auf die allgemeine Untersuchung der algebraischen Kurven, dann der algebraischen Flächen und der algebraischen Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension und errichteten mit Hilfe der aus der Funktionentheorie und den neuen Entwicklungen der Algebra übernommenen Methoden die algebraische Geometrie als selbständige Disziplin (vgl. 3.2.3., 7.1.14. und [11]).

2.5. Literatur

[1] N. H. Abel, Oeuvres complètes, Hrsg. Sylow und Lie. Grøndahl, Kristiania 1881.
[2] E. Bezout, Hist. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris, 1764, S. 288.
[3] N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques, Neuauflage, Hermann, Paris 1974.

[1]) Zitat in deutscher Sprache übernommen aus N. Bourbaki, *Elemente der Mathematikgeschichte,* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1971, S. 170. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

*[3][1] Deutsche Übersetzung der 1. Auflage, vgl. 0.4.1., Nr. 2.

[4] A. Brill und M. Noether, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit, Jahresber. der DMV *3* (1892—1893), 111—566.

[5] A. L. Cauchy, Oeuvres complètes, 26 Bde., 2 Reihen, Gauthier-Villars, Paris 1882—1958.

[6] A. Cayley, Collected Mathematical Papers, 13 Bde., University Press, Cambridge 1889—1898.

[7] M. Chasles, Note sur les propriétés générales du système de deux corps, Bull. de Férussac, Bd. XIV, S. 321—326 (1830).

[8] M. Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géometrie, Hayez, Bruxelles 1837.

[9] G. Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes, Cramer et Philibert, Genève 1750.

[10] J. d'Alembert, Recherches sur le Calcul intégral, 1. Teil, Hist. Acad. Royale des Sciences de Berlin, 1746. Berlin 1748, S. 182—224.

[11] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, 2 Bde., Presses Univ. de France, Paris 1974.

*[11 bis] H. M. Edwards, Galois Theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 101, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1984.

[12] L. Euler, Opera Omnia, 62 Bde. (bisher erschienen), 4 Reihen, Teubner und O. Füssli, Leipzig-Berlin-Zürich 1911—1976.

[13] E. Galois, Ecrits et mémoires mathématiques, Hrsg. R. Bourgnet und J. Y. Azra, Gauthier-Villars, Paris 1962.

[14] C. F. Gauss, Werke, 12 Bde., Göttingen 1870—1927.

*[14][1] Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen ersten oder zweiten Grades, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 14, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig und Berlin 1913 (dritte Auflage).

[15] J. Hachette et S. Poisson, Addition au mémoire précédent, J. de l'Ecole Polytechn., Heft 11, Jahrg. X, S. 170—172.

[16] T. Heath, A History of Greek Mathematics, 2 Bde., Oxford 1921.

[17] C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke, 7 Bde., G. Reimer, Berlin 1881—1891.

[18] E. Kötter, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Teubner, Leipzig 1901 = Jahresber. der DMV *5* (1901), 2. Heft.

[19] L. Kronecker, Werke, 5 Bde., Teubner, Leipzig 1895—1930.

[20] J. L. Lagrange, Oeuvres, 14 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1867—1892.

[21] P. S. Laplace, Oeuvres, 14 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1878—1912.

[22] C. Maclaurin, Geometrica organica, London 1720.

[23] C. Maclaurin, A Treatise of Algebra, London 1740. Teilweise französische Übersetzung in E. de Jonquières, Mélanges de Géometrie pure, Mallet Bachelier, Paris 1856, S. 197—261.

[24] Mathematical developments arising from Hilbert Problems, Proc. Amer. Math. Soc. Symp. in Pure Math., Bd. XXVIII, Providence 1976.

*[24][1] Die Hilbertschen Probleme, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 252, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1971, S. 61 f.

[25] A. F. Möbius, Gesammelte Werke, 4 Bde., Hirzel, Leipzig 1885—1887.

[26] Abbé Moigno, Leçons de calcul différentiel et intégral, rédigées principialement d'après les méthodes de M. A.-L. Cauchy, Bd. II, Paris 1844.

[27] T. Muir, The theory of determinants in the historical order of development, 4 Bde., London 1906—1923.

[28] I. Newton, The mathematical papers, Hrsg. D. Whiteside, 7 Bde. bisher erschienen, University Press, Cambridge 1967 — 1976.

[29] L. Nový, Origins of modern algebra, Academia, Prag, und Noordhoff, Leyden 1973.

[30] J. V. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Bachelier, Paris 1822.

[31] A. T. Vandermonde, Mémoire sur la résolution des équations, Hist. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris, 1771, Paris S. 365—416 (1774).

[32] A. T. Vandermonde, Mémoire sur l'élimination, Hist. de l'Acad. Royale des Sciences de Paris, 1722, 2. Teil, Paris (1776), S. 516—532.

[L] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1965. (*Russisch*: Verlag MIR, Moskau 1968).

3. Die Algebra seit 1840

von Jean Guérindon und Jean Dieudonné

3.0. Einführung

Vorbereitet durch zahlreiche Untersuchungen und Überlegungen über die algebraischen Operationen während des ersten Drittels des neunzehnten Jahrhunderts (die insbesondere durch die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen angeregt wurden), sah das Jahrzehnt von 1840 bis 1850 eine bemerkenswerte Blütezeit neuer Ideen in der Algebra entstehen, welche ihren Charakter schnell ändern sollten. Zeitlich als erste unter den mathematischen Disziplinen befreite sich die Algebra von der klassischen Vorstellung, eine mathematische Theorie sei die Untersuchung von *Objekten* bestimmter Art; sie entwickelte sich vielmehr zur Untersuchung von *Relationen*, die sich auf ganz verschiedenartige Objekte beziehen können. Der „abstrakte" Charakter dieser neuen Vorstellungen führte jedoch dazu, daß sie lange Zeit verschwommen blieben (insbesondere deshalb, weil „mengentheoretische" Begriffe fehlten) und daß sie, was ihr Eindringen in den allgemeinen Gebrauch betrifft, auf erhebliche Widerstände stießen, die viel größer waren als beispielsweise bei den allerdings viel späteren topologischen Begriffen (vgl. Kapitel 10).

Immerhin wurde der chaotische Zustand, in dem sich die meisten algebraischen Begriffe im achtzehnten Jahrhundert befanden, während der Periode von 1840 bis 1900 nach und nach überwunden; es bildeten sich Themenkreise heraus, die bis zum Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts einander kaum beeinflußten.

Der erste Themenkreis, der gegen 1840 erkennbar wurde, hat die fortschreitende Entwicklung der linearen und der multilinearen Algebra im modernen Sinne zum Inhalt — mit der Einführung der geometrischen Sprache und des Begriffs des Vektorraums, zunächst über $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{C}$, später dann über einem beliebigen Körper. Gegen 1880 war schließlich die Theorie der allgemeinen linearen Gleichungssysteme (über $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{C}$) vollendet, ebenso die Theorie der Eigenwerte quadratischer Matrizen und deren Reduktion auf eine kanonische Form; die Theorie der Bilinearformen wurde zur Theorie der Invarianten erweitert. Schließlich entsprang der linearen Algebra auch die Theorie der „hyperkomplexen Systeme" (die später

„Algebren" genannt wurden); diese Theorie beschränkte sich anfangs auf solche Systeme, deren Grundkörper $\boldsymbol{R}$ oder $\boldsymbol{C}$ ist.

Die Zahlentheorie und danach die algebraische Geometrie führten zu einer anderen Art von Verallgemeinerung der "linearen" Begriffe, indem sie den Begriff des Ringes, später den des Moduls über einem Ring, ins Spiel brachten; ihre Untersuchung führt in unserer Zeit einerseits zur kommutativen Algebra und zur homologischen Algebra (siehe 10.8.3.), andererseits zur allgemeinen Theorie der (nichtkommutativen, aber nicht notwendig über einem Grundkörper definierten) Algebren.

Der dritte Themenkreis entwickelte sich um den Begriff der Gruppe (wobei man sich zunächst auf endliche Gruppen beschränkte) und den der *Operation* (*Wirkung*) einer Gruppe auf einer Menge. Diese Begriffe erfuhren dadurch eine beträchtliche Vertiefung, daß sie in immer stärkerem Maße die ganze Algebra und die „elementare" Geometrie durchdrangen, bis sie schließlich auch in der Analysis, der Differentialgeometrie und der Topologie Eingang fanden.

Etwa seit 1910 vereinigten sich schließlich diese Strömungen und befruchteten sich gegenseitig; dadurch entstand die Algebra, wie wir sie heute kennen.

3.1. Das Rechnen mit neuen Objekten

Die schrittweisen Erweiterungen des Begriffs „Zahl" waren niemals völlig überzeugend begründet worden, obwohl sie sich beim Rechnen unbestritten als nützlich herausgestellt hatten; selbst der Begriff der negativen Zahl wurde zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts noch von manchen Mathematikern abgelehnt. Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen ließ die Diskussionen über das Wesen der Algebra wieder aufleben (vgl. 13.1.2.). Die zwischen 1800 und 1840 allgemein verbreitete (und selbstverständlich ziemlich unklare) Auffassung bestand darin, daß es sich bei der Algebra um ein „Rechnen" mit Objekten handelt, die durch Buchstaben dargestellt werden. Dieses Rechnen umfaßte die beiden üblichen Operationen Addition und Multiplikation, aus denen man seit damals die grundlegenden Eigenschaften Assoziativität, Kommutativität und Distributivität abstrahiert. Die Tatsache, daß diese Eigenschaften bei der Erweiterung des Begriffs der „Zahl" erhalten bleiben, beispielsweise beim Übergang von den reellen zu den komplexen Zahlen, die als Punkte der Ebene (oder, wie Hamilton 1833 vorschlug, als Paare reeller Zahlen) aufgefaßt werden, wurde als ein „Permanenzprinzip" (vgl. 13.2.2.) hervorgehoben, und schon vor 1820 lassen sich mehrere erfolglose Versuche erkennen, unter Beachtung dieses „Prinzips" das „Rechnen" auch auf die Punkte des dreidimensionalen Raumes auszudehnen.

Wir erinnern ferner daran, daß man im Zuge der Entwicklung der Theorie der algebraischen Gleichungen einerseits (vgl. 2.2.2.) und der Theorie der algebraischen Zahlen andererseits (vgl. 5.5.) erkannte, daß man das „Rechnen" auf gewisse Zahlensysteme *einschränken* kann, ohne über diese Systeme hinauszugehen (rationale Kombinationen der Koeffizienten einer gegebenen Gleichung mit eventueller „Adjunktion" von Irrationalitäten, Gaußsche ganze Zahlen $a + bi$, usw.).

Vor 1840 war jedoch der einzige Typus eines wirklich neuen „Rechnens" das mit den „Galoisschen Imaginären". Nach dem Vorbild der Algebraiker des achtzehnten Jahrhunderts (vgl. 2.2.1.) scheute sich Galois nämlich nicht, „imaginäre" Wurzeln einer Kongruenz $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ einzuführen, wobei P ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und p eine Primzahl ist, natürlich ohne daß er hier die Möglichkeit gehabt hätte, diese abstrakten „Objekte" auf „Zahlen" in irgendeinem Sinne des Wortes zurückzuführen. Galois beschränkte sich fast ausschließlich auf den Fall, daß P irreduzibel modulo p ist, und stellte sinngemäß fest, daß in diesem Fall die „imaginären Wurzeln" der Kongruenz einen endlichen Körper mit p^f Elementen bilden, die sämtlich der Gleichung $x^{p^f} - x = 0$ genügen, und daß die multiplikative Gruppe dieses Körpers zyklisch ist [16]. Die Galoissche Arbeit wurde jedoch bis etwa 1850 nicht zur Kenntnis genommen. Nach dem Tode von Gauß fand Dedekind bei der Herausgabe des Gaußschen Nachlasses, daß Gauß schon 1798 zu Resultaten gekommen war, die denen von Galois äquivalent waren und die er ursprünglich in den *Disquisitiones Arithmeticae* zu publizieren beabsichtigt hatte. Getreu seinen Prinzipien (vgl. 2.2.1.) lehnte es Gauß jedoch ausdrücklich ab, von „Imaginären" zu sprechen, und formulierte seine Sätze als Kongruenzen zwischen Polynomen ([17], Bd. II, S. 212–240).

Schließlich weisen wir darauf hin, daß neben diesen Bereichen mit zwei Verknüpfungsgesetzen seit 1800 Theorien auftauchten, in denen nur ein einziges Verknüpfungsgesetz auftritt, wobei sich die Gewohnheit einbürgerte, diese Vorschrift als Addition oder als Multiplikation der Buchstaben oder der Symbole, welche die zu verknüpfenden „Objekte" darstellen, zu bezeichnen: der Permutationen bei Cauchy (vgl. 2.2.2.), der Klassen binärer quadratischer Formen bei Gauß (vgl. 2.1.2.), der Punkte des Raumes im baryzentrischen Kalkül bei Möbius (vgl. 2.3.2.).

Von 1840 an sollte eine ganze Reihe neuer Ideen diese Vorstellungen beträchtlich erweitern und nach und nach zu der Auffassung führen, daß die Algebra die Wissenschaft von *Operationen* mit *beliebigen* Objekten ist.

3.2. Lineare und multilineare Algebra

3.2.1. *Vektoren und Matrizen*

Die Tatsache, daß die Überlegungen der linearen Algebra von der Anzahl der Variablen unabhängig sind, während sie nur für $n \leqq 3$ unmittelbar geometrisch interpretiert werden können, war sehr bald nach der Einführung der Methode der kartesischen Koordinaten bemerkt worden und legte die Vorstellung eines „n-dimensionalen Raumes" nahe. Solange man aber der Meinung war, die mathematischen Objekte müßten in der wahrnehmbaren Welt interpretierbar sein, konnte man kaum versuchen, die geometrische Sprache auch dann noch zu benutzen, wenn eine solche Interpretation versagte. Dieser Schritt wurde erstmals in den Jahren 1843–1845 von Cayley und Graßmann für beliebiges n gegangen. Cayley

hob die Tatsache besonders hervor, es handele sich nur um eine bequeme Sprechweise, und für ihn sei ein Vektor des n-dimensionalen Raumes einfach ein System $(x_1, \ldots, x_n)$ von n reellen oder komplexen Zahlen ([6], Bd. I, S. 325).

Die Auffassungen Graßmanns gehen viel tiefer. Seine große Idee, die in der Entdeckung der äußeren Algebra (siehe 3.2.5.) Gestalt annahm, bestand darin, eine „geometrische Analysis" zu entwickeln, die viel weiter geht als die Möbiussche und mit „extensiven Größen" rechnet; die Vektoren im Sinne von Cayley (die mit dem baryzentrischen Kalkül von Möbius (vgl. 2.3.2.) verknüpft werden können, indem man die Differenzen $B - A$ zweier Punkte nimmt) sind jedoch nur die Größen „*erster Stufe*", während Graßmann extensive Größen *beliebiger* Stufe einführen wollte, sich daher nicht mit diesem primitiven Standpunkt begnügen konnte. Auf die Geschichte zurückblickend, sehen wir ihn darum ringen, den „abstrakten" Begriff der Struktur des Vektorraums (über $\boldsymbol{R}$ bzw. $\boldsymbol{C}$) herauszuarbeiten, ohne daß ihm das völlig gelang. In der ersten Auflage (1844) seines Hauptwerkes *Die Ausdehnungslehre* wurden die grundlegenden Begriffe nicht klar definiert, mit philosophischen Betrachtungen verknüpft, die das Verständnis nicht erleichtern. Als er 1862 eine neue, überarbeitete Auflage dieses Buches veröffentlichte, war er dem Ziel schon viel näher: Die Begriffe Linearkombination von „Größen", die linear unabhängig sind, Basis eines „Gebiets" (*Gebiet* entspricht unserem Begriff des Vektorraumes oder des Vektorteilraumes) und Dimension werden sehr klar beschrieben; dort findet man auch erstmals die grundlegende Relation zwischen den Dimensionen zweier Vektorteilräume:

$$\dim V + \dim W = \dim (V + W) + \dim (V \cap W) \tag{1}$$

(hier verwenden wir natürlich die moderne Bezeichnungsweise) ([19], Bd. I_1, S. 209, und Bd. I_2, S. 21).

Diese neue Darstellung scheint jedoch in der mathematischen Welt keinen größeren Widerhall gefunden zu haben als die erste. Als einziger unternahm es G. Peano im Jahre 1888, das Werk Graßmanns wieder erstehen zu lassen. Da er jetzt über die mengentheoretische Sprechweise verfügte, die Graßmann nicht zur Verfügung gestanden hatte (vgl. 6.7.), konnte er eine allgemeine Definition der Vektorräume (über $\boldsymbol{R}$) geben, die sich nur in zweitrangigen Punkten von der unseren unterscheidet, und (was Graßmann nicht hatte machen können) eine allgemeine Definition der linearen Abbildungen hinzufügen; außerdem bemerkte er ausdrücklich, daß seine Definition auch unendlichdimensionale Vektorräume umfaßt, wobei er als Beispiel den Raum aller Polynome mit reellen Koeffizienten anführte [30].

Tatsächlich setzte sich erst dann, als die Entwicklungen der Funktionalanalysis das Abgehen von der Definition eines Vektorraumes durch Koordinaten notwendig machten, im Gegenzug die direkte Definition eines Vektorraumes selbst für endlichdimensionale Räume durch (siehe 3.5.). Bis dahin hatten die Bemühungen Peanos nicht mehr Erfolg als die von Graßmann, und es war die Cayleysche Definition, die von 1850 bis gegen 1930 das Feld uneingeschränkt beherrschte. In dieser Form wurde die auf beliebige endliche Dimensionen verallgemeinerte geometrische Sprechweise ziemlich schnell von zahlreichen Mathematikern übernommen und

angewandt; so unternahmen es Schläfli [34] und C. Jordan ([20], Bd. III, S. 79 bis 149), die Begriffe und Sätze der n-dimensionalen Euklidischen Geometrie (Parallelität, Orthogonalität, Abstand, Winkel, Flächeninhalte und Volumina usw.) zu erarbeiten. Zum anderen ließ sich die Definition des projektiven Raumes $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$ mit Hilfe homogener Koordinaten sofort verallgemeinern, so daß der projektive Raum $\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{C})$ für beliebige Dimension n definiert werden konnte, wobei die Punkte dieses Raumes durch die Systeme $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ von nicht sämtlich verschwindenden $n + 1$ komplexen Zahlen gegeben werden und zwei solche Systeme demselben Punkt entsprechen, wenn sie sich nur um einen von null verschiedenen Faktor unterscheiden. Außerdem dauerte es nicht lange, bis sich die Schulen der projektiven und der algebraischen Geometrie dieses neuen Gebietes annahmen, auf dem die neuen allgemeinen Phänomene viel deutlicher in Erscheinung traten als bei niedrigen Dimensionen, und das darüber hinaus neue wertvolle Hilfsmittel zur Untersuchung algebraischer Kurven und Flächen (beispielsweise die Abelschen Mannigfaltigkeiten [11]) lieferte.

Während die „Vektoren" nach der Auffassung von Cayley Systeme von n Zahlen sind, wurden die „linearen Substitutionen" dieser Vektoren wie bei Gauß (vgl. 2.1.3.) mit dem Schema ihrer Koeffizienten identifiziert. Schon in seinen ersten Arbeiten zur Zahlentheorie von 1844 machte sich Eisenstein die Gaußsche Symbolik zu eigen; er ging jedoch weiter, indem er die Zusammensetzung (Hintereinanderausführung) zweier mit S bzw. T bezeichneter linearer Substitutionen in der Gestalt $S \times T$ schrieb, und stellte (wie Gauß) fest, daß es sich um Begriffe und Bezeichnungen handelt, die für beliebig viele Variable gelten. Er machte darauf aufmerksam, daß man sorgfältig zwischen $S \times T$ und $T \times S$ unterscheiden muß, und führte auch die Bezeichnung $1/S$ ein, wenn S eine nichtverschwindende Determinante hat ([13], Bd. I, S. 202–206). In einer Notiz zu einer späteren Abhandlung (1850) wies er sogar darauf hin, daß man die linearen Substitutionen addieren kann, verwendete aber diese Operation nicht, für die er übrigens keine Bezeichnung vorschlug. Kurz, er hatte das Wesen des Begriffes der quadratischen Matrizen erfaßt, und Hermite benutzte in seinen aus der gleichen Zeit stammenden Arbeiten über Zahlentheorie und Abelsche Funktionen die gleiche Symbolik ständig.

Die erste Verwendung der *Addition* von Matrizen scheint durch die Untersuchung des schon im achtzehnten Jahrhundert von Euler betrachteten Problems angeregt worden zu sein, orthogonale Transformationen von n Variablen mit Hilfe von $\frac{n(n-1)}{2}$ Parametern auszudrücken (vgl. 2.1.5.). Olinde Rodrigues hatte im Jahre 1840 die Eulerschen Formeln wiedergefunden, die (wenigstens in der Umgebung der identischen Transformation) für $n = 3$ diese Transformationen als rationale Funktionen von drei Parametern lieferten. Cayley zeigte im Jahre 1846, daß man diese Formeln auf beliebiges n verallgemeinern kann. Er behandelte das Problem noch mit der Determinantentheorie: Ist (λ_{rs}) ein System von n^2 Zahlen mit

$$\lambda_{rr} = 1\,, \qquad \lambda_{sr} = -\lambda_{rs} \quad \text{für} \quad r \neq s \quad \text{und} \quad D = \det(\lambda_{rs}) \neq 0\,,$$

so bildet das System (α_{rs}) der durch

$$\alpha_{rs} = 2\frac{D_{rs}}{D} - \delta_{rs} \quad \text{mit} \quad D_{rs} = \frac{\partial D}{\partial \lambda_{rs}} \text{ (Minor von } D) \tag{2}$$

definierten n^2 Zahlen eine orthogonale Matrix.

Wenig später verallgemeinerte Hermite (ohne Cayley ausdrücklich zu zitieren) die Methode im Hinblick auf die arithmetische Untersuchung ternärer quadratischer Formen für $n = 3$ und eine beliebige quadratische Form (an Stelle von $x^2 + y^2 + z^2$). Im Jahre 1855 nahm Cayley die Fragestellung wieder auf und stellte fest, daß die von Hermite angegebene Lösung (für beliebiges n) als Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} a & h & g & \dots \\ h & b & f & \dots \\ g & f & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & h-\nu & g+\mu & \dots \\ h+\nu & b & f-\lambda & \dots \\ g-\mu & f+\lambda & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & h+\nu & g-\mu & \dots \\ h-\nu & b & f+\lambda & \dots \\ g+\mu & f-\lambda & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & h & g & \dots \\ h & b & f & \dots \\ g & f & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{3}$$

geschrieben werden kann, ohne daß allerdings die Addition von Matrizen benutzt wird. Wahrscheinlich veranlaßte ihn diese Formel im Jahre 1858, die Abhandlung zu schreiben, welche oft als Ursprung der Matrizentheorie angesehen wird ([6], Bd. II, S. 475—496). Er definierte darin sowohl die Addition als auch die Multiplikation von (quadratischen und rechteckigen) Matrizen[1]), was ihm wenig später ermöglichte, das Produkt (3) in einer der heutigen Gestalt

$$\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{A} - \mathrm{S})\,(\mathrm{A} + \mathrm{S})^{-1}\,\mathrm{A} \tag{4}$$

ähnlichen Gestalt zu schreiben; dabei ist A symmetrisch und S schiefsymmetrisch. Für Cayley (wie für Gauß) war eine Matrix vom Typ $m \times n$ nichts anderes als eine abgekürzte Schreibweise für eine lineare Substitution; doch außer der Einführung dieser Bezeichnung ist der Inhalt seiner Abhandlung eher schwach: Der einzige nichttriviale Satz, der darin formuliert wird, ist der sogenannte „Satz von Hamilton-Cayley", der zum Ausdruck bringt, daß eine quadratische Matrix A der Polynomgleichung $\chi(\mathrm{A}) = 0$ genügt, wobei $\chi(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - \mathrm{A})$ das charakteristische Polynom von A ist.[2]) Diese Arbeit scheint übrigens fast bis gegen Ende 1880 unbeachtet geblieben zu sein; ebenso war es mit einer Abhandlung von Laguerre

---

[1]) Der Terminus „Matrix" zur Bezeichnung eines rechteckigen Zahlenschemas ist eines der zahllosen Wörter, die (mit mehr oder weniger großem Erfolg) durch die fruchtbare Phantasie Sylvesters (1850) in das Vokabular der Algebra eingeführt wurden.

[2]) Er bewies diesen Satz nur für $n = 2$ und $n = 3$, was die allgemeine Haltung von Cayley und Sylvester recht gut illustriert, für welche die Beweise nur einen sekundären Aspekt einer Entdeckung darstellten.

aus dem Jahre 1867, in der dieser (ohne Cayley zu zitieren) eine äquivalente Theorie entwickelt hatte. Eine tiefgründigere Untersuchung der Matrizen und besonders ihrer Klassifikation nach verschiedenen Gesichtspunkten bahnte sich in Gestalt einer äquivalenten Theorie, der Theorie der Bilinearformen, an.

3.2.2. *Die „Reduktionssätze" für Bilinearformen*

Ständiger Gegenstand der Algebra seit der Mitte des achtzehnten Jahrhunderts war, wie wir gesehen haben, die Suche nach linearen Transformationen (mit reellen oder auch ganzzahligen Koeffizienten), mit deren Hilfe sich quadratische Formen in zwei oder drei Variablen auf einfache Typen zurückführen lassen, d. h. also, diese Formen durch Invarianten zu klassifizieren, welche diese „reduzierten" Formen charakterisieren; in der Geometrie hatte dies zur Klassifikation der Quadriken durch Euler (vgl. 2.1.5.) und in der Zahlentheorie zu den Theorien von Lagrange und Gauß über die binären Formen (vgl. 2.1.3. und 5.4.) geführt.

Von 1840 an nahm dieses Thema eine beachtliche Entwicklung. Eisenstein, dann Hermite und später H. J. Smith und Jordan erweiterten die Gaußschen Arbeiten über die binären quadratischen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten, indem sie ternäre quadratische Formen, dann Formen mit beliebig vielen Variablen (vgl. 5.10.) betrachteten. Die Transformation durch reziproke Polaren und ihre Verallgemeinerungen (vgl. 2.4.4.) haben dazu geführt, neben den quadratischen Formen in n Variablen Bilinearformen mit *zwei* Variablensystemen $x_1, \dots, x_m$ und $y_1, \dots y_n$ zu betrachten:

$$\sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} A_{pq} x_p y_q \,. \tag{5}$$

Bezeichnet A die $m \times n$-Matrix (A_{pq}) und sieht man $x = (x_1, \dots, x_m)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ als „Spaltenmatrizen" vom Typ $m \times 1$ bzw. $n \times 1$ an, so läßt sich der Ausdruck (5) als Matrizenprodukt

$${}^t x \cdot \mathrm{A} \cdot y \tag{6}$$

schreiben. Eine lineare Substitution $x_p = \sum_{r=1}^{m} u_{pr} x'_r$ $(1 \leqq p \leqq m)$ (bzw. $y_q = \sum_{s=1}^{n} v_{qs} y'_s$ $(1 \leqq q \leqq n)$) läßt sich in der Gestalt $x = \mathrm{U} \cdot x'$ (bzw. $y = \mathrm{V} \cdot y'$) mit einer quadratischen Matrix $\mathrm{U} = (u_{pr})$ der Ordnung m (bzw. $\mathrm{V} = (v_{qs})$ der Ordnung n) schreiben, und die transformierte Gestalt von (6) lautet ${}^t x' \cdot \mathrm{A}' \cdot y'$ mit

$$\mathrm{A}' = {}^t\mathrm{U} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{V} \,. \tag{7}$$

Etwa seit 1850 erschien eine ganze Reihe von Arbeiten, die das Ziel hatten, für eine oder mehrere Bilinearformen (6) *Invarianten* gegenüber linearen Substitutionen zu ermitteln, welche invertierbare Matrizen U, V besitzen (die eventuell zusätzlichen Bedingungen unterworfen sind). Diese Probleme können wie folgt klassifiziert werden:

I. a) A eine beliebige Matrix mit reellen oder komplexen Elementen, U, V entsprechend Matrizen mit reellen oder komplexen Elementen.

b) A eine beliebige Matrix mit ganzzahligen Elementen, U, V Matrizen mit ganzzahligen Elementen.

c) A eine symmetrische oder schiefsymmetrische (${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$) oder hermitesche (${}^t\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}$) quadratische Matrix mit reellen oder komplexen Elementen, V = U eine Matrix mit reellen (bzw. komplexen) Elementen, wenn A symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, und mit reellen (bzw. komplexen) Elementen und $\mathrm{V} = \overline{\mathrm{U}}$, falls A hermitesch ist.

d) A eine symmetrische oder schiefsymmetrische quadratische Matrix mit ganzzahligen Elementen, V = U mit ganzzahligen Elementen.

II. a) Man sucht Invarianten von *Paaren* (A, B) von beliebigen Matrizen des gleichen Typs, mit reellen oder komplexen Elementen, bezüglich *derselben* Substitutionen für A und B; das läuft darauf hinaus, „reduzierte Formen" für das Paar (${}^t\mathrm{U} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{V}$, ${}^t\mathrm{U} \cdot \mathrm{B} \cdot \mathrm{V}$) zu finden, wobei U und V invertierbare Matrizen mit reellen oder komplexen Elementen sind.

b) Man schränkt A und B auf symmetrische (bzw. hermitesche) quadratische Matrizen ein, wobei B invertierbar ist, und fordert V = U, wenn A und B symmetrisch sind, $\mathrm{V} = \overline{\mathrm{U}}$, falls A und B hermitesch sind.

Zeitlich gesehen ist das Problem Ic) für die symmetrischen *reellen* Matrizen als erstes betrachtet worden; es ist nichts anderes als die Reduktion einer reellen quadratischen Form auf eine Kombination von Quadraten mit den Koeffizienten ± 1 (vgl. 2.1.5.). Etwa um 1850 bewiesen Jacobi und Sylvester unabhängig voneinander, daß die Anzahl der Koeffizienten $+1$ und die Anzahl der Koeffizienten -1 für alle reduzierten Formen stets übereinstimmen (*Trägheitsgesetz der quadratischen Formen*). Im Jahre 1855 führte Hermite im Zusammenhang mit zahlentheoretischen Untersuchungen die Formen ein, welche seither hermitesche Formen genannt werden und auf die sich das Trägheitsgesetz sofort verallgemeinern läßt.

Dann kommt das Problem IIb) für B = I, A *reell* und symmetrisch, was nichts anderes ist als das auf n Dimensionen verallgemeinerte Problem, die Hauptachsen einer Quadrik zu bestimmen. Es war von Cauchy gelöst worden (vgl. 2.1.5.); in diesem Fall sind die Invarianten die (reellen) Eigenwerte von A oder, was auf das gleiche hinausläuft, das charakteristische Polynom $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})$.

Im Jahre 1851 griff Sylvester das gleiche Problem IIb) für $n \leqq 4$, B = I auf; diesmal sollte A symmetrisch sein, aber beliebige *komplexe* Elemente haben dürfen: Geometrisch bedeutet dies (für $n = 4$) die Untersuchung der jeweiligen Lagen zweier Quadriken in $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$. Im vorangegangenen Jahr hatte er erstmals die Idee gehabt, die Matrizen nach einer Zahl zu klassifizieren, welche Frobenius später ihren *Rang* nannte, d. i. die größte ganze Zahl r mit der Eigenschaft, daß es in der Matrix einen von null verschiedenen Minor der Ordnung r gibt. Die Klassifizierung, die er für das Problem IIb) bezüglich einer symmetrischen Matrix A mit komplexen Elementen gab, beruht auf einer detaillierten Untersuchung der Minoren der Matrix $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}$, wenn man darin für λ einen der Eigenwerte von A einsetzt ([38], Bd. I, S. 219–240).

Mit demselben Problem, aber für beliebiges n, befaßte sich Weierstraß im Jahre 1868, anscheinend ohne die Arbeit Sylvesters zu kennen. Tatsächlich erörterte er zur gleichen Zeit das Problem II a) für nicht notwendig quadratische Matrizen A, B mit *komplexen* Elementen, wobei er aber B als invertierbar voraussetzte. Es ergibt sich nämlich, daß dann, wenn überdies A und B symmetrisch sowie auch $A' = {}^tU \cdot A \cdot V$ und $B' = {}^tU \cdot B \cdot V$ symmetrisch sind, eine invertierbare quadratische Matrix R existiert mit $A' = {}^tR \cdot A \cdot R$, $B' = {}^tR \cdot B \cdot R$.

Bei dem Problem II a) mit quadratischen Matrizen A und B und invertierbarem B kann man sich auf den Fall $B = I$ beschränken; Weierstraß betrachtete dann die Matrix $A - \lambda I$ als Funktion des komplexen Parameters λ und für jede ganze Zahl j den größten gemeinsamen Teiler D_j der aus den Minoren der Ordnung j von $A - \lambda I$ gebildeten Polynome in λ. Er bewies, daß D_j Teiler von D_{j+1} ist und daß $P_j = D_{j+1}/D_j$ (mit $D_0 = 1$) Teiler von P_{j+1} ist. Die Polynome P_j nennt man die *invarianten Faktoren* (*Elementarteiler*) von $A - \lambda I$. Genau dann existiert eine invertierbare Matrix U mit komplexen Elementen, für die $A' = UAU^{-1}$ ist, wenn $A - \lambda I$ und $A' - \lambda I$ die gleichen invarianten Faktoren besitzen ([45], Bd. II, S. 19—44). Damit war das Problem II a) für solche quadratischen Matrizen A und B mit komplexen Elementen, für welche die Determinante $\det(A + \lambda B)$ in λ nicht identisch verschwindet, vollständig gelöst. Wenig später ergänzte Kronecker die Weierstraßschen Resultate, indem er die Probleme II a) und b) für Matrizen mit komplexen Elementen vollständig löste ([24], Bd. I, S. 163—174 und 349—413). Unabhängig war (mit einigen Fehlern) Jordan zu den gleichen Ergebnissen gekommen (für eine moderne Darlegung dieser Resultate siehe [11] und ([20], Bd. III, S. vii—xiv)).

Inzwischen hatte H. J. Smith im Jahre 1861 ([36], Bd. I, S. 367—409) das Problem I b) gelöst; er betrachtete dort den größten gemeinsamen Teiler D_j der Minoren der Ordnung j von A, bewies, daß D_j Teiler von D_{j+1} ist (mit $D_0 = 1$) und daß $e_j = D_{j+1}/D_j$ auch Teiler von e_{j+1} ist. Die ganzen Zahlen e_j werden die *invarianten Faktoren* von A genannt. Für die Existenz zweier invertierbarer Matrizen U und V mit ganzzahligen Elementen, für welche $A' = {}^tU \cdot A \cdot V$ gilt, ist notwendig und hinreichend, daß A und A′ die gleichen invarianten Faktoren besitzen, und es gibt für die Form (6) eine eindeutig bestimmte „reduzierte" Form

$$e_1x_1y_1 + e_2x_2y_2 + \cdots + e_rx_ry_r, \tag{8}$$

wobei r der Rang von A ist.

Die Rolle des „Gesetzgebers", die Cauchy für die Determinantentheorie gespielt hatte (vgl. 2.1.1.), wurde für die Theorie der Matrizen von Frobenius übernommen. In mehreren, zwischen 1877 und 1880 veröffentlichten Abhandlungen griff er die meisten früheren Resultate auf, entwickelte sie systematisch und fügte zahlreiche Ergänzungen hinzu. Beispielsweise bewies er, daß sich die Theorie H. J. Smiths ohne wesentliche Änderungen auf Matrizen ausdehnen läßt, deren Elemente Polynome einer Variablen mit reellen oder komplexen Koeffizienten sind, und daß sich die Weierstraßschen Resultate als einfache Folgerungen aus dieser Theorie ergeben. Er löste auch die Probleme I c) und I d) für die schiefsymmetrischen Matrizen, indem er zeigte: Wenn es sich um Matrizen mit ganzzahligen Elementen handelt, so gelten die Relationen $e_{2j-1} = e_{2j}$ zwischen den invarianten Faktoren,

und es gibt eine eindeutig bestimmte „reduzierte Form“

$$e_1(x_1y_2 - x_2y_1) + e_3(x_3y_4 - x_4y_3) + \cdots + e_{2r-1}(x_{2r-1}y_{2r} - x_{2r}y_{2r-1}) \,. \qquad (9)$$

Für die schiefsymmetrischen Matrizen mit reellen oder komplexen Elementen ist die einzige Invariante der *Rang* von A; dies ist stets eine *gerade* Zahl $2r$, und die entsprechende „reduzierte Form“ lautet

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \cdots + x_{2r-1}y_{2r} - x_{2r}y_{2r-1} \,. \qquad (10)$$

Außerdem genügt der Pfaffsche Ausdruck Pf(A) einer solchen Matrix (vgl. 2.1.1.) für jede invertierbare quadratische Matrix R der Beziehung

$$\mathrm{Pf}({}^t\mathrm{R} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{R}) = \det(\mathrm{R}) \cdot \mathrm{Pf}(\mathrm{A}) \,. \qquad (11)$$

Nimmt man an, eine Matrix A vom Typ $m \times n$ definiere eine lineare Substitution $x = \mathrm{A} \cdot y$ (in denselben Bezeichnungen) und nicht mehr eine Bilinearform, so lautet die entsprechende Substitution für die durch $x = \mathrm{U}x'$ bzw. $y = \mathrm{V} \cdot y'$ definierten Variablensysteme x', y' jetzt $x' = \mathrm{A}' \cdot y'$ mit

$$\mathrm{A}' = \mathrm{U}^{-1} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{V} \,, \qquad (12)$$

was (bis auf die Bezeichnungen) die gleiche Formel wie (7) für invertierbare Matrizen U und V ist; diese Übereinstimmung wurde erst dann richtig verstanden, als endlich die Dualität der Vektorräume herausgearbeitet war, also erst nach 1930 (vgl. 3.5.). Eine unmittelbare Konsequenz der vorangegangenen allgemeinen Resultate ist der folgende Satz: Hat A den Rang r, so kann man durch passende Wahl von x' und y' die lineare Substitution auf

$$x_1' = y_1', \ldots, x_r' = y_r', \qquad x_j' = 0 \quad \text{für} \quad j \geqq r+1 \qquad (13)$$

reduzieren, Dies klärt schließlich endgültig das Problem der Auflösung linearer Gleichungssysteme mit reellen oder komplexen Koeffizienten, das seit Cramer in der Schwebe geblieben war.

Ebenso lassen sich die Weierstraßschen Ergebnisse deuten, indem man sagt, daß im Fall $m = n$ durch passende Wahl von $\mathrm{U} = \mathrm{V}$ jede lineare Substitution mit *komplexen* Koeffizienten so reduziert werden kann, daß sie eine Matrix besitzt, die sich durch

$$\begin{pmatrix} \mathrm{J}_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{J}_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{J}_p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

beschreiben läßt, wobei jede Matrix J_k vom Typus

$$\mathrm{J}_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \ldots & & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & & \lambda_k & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad (15)$$

ist; J_k wird *Jordansche Matrix* genannt (vgl. 3.3.2.). Dabei sind die λ_k nicht notwendigerweise verschiedene komplexe Zahlen.

Die unmittelbaren Nachfolger von Frobenius fügten seiner Synthese, die in dem Buch [26] recht gut beschrieben ist, nur wenig hinzu; die damals untersuchten Begriffe waren in der linearen Algebra bis etwa 1930 die Hilfsmittel aller Mathematiker.

3.2.3. *Die Invariantentheorie*

Ebenfalls von den Eigenschaften der quadratischen Formen ausgehend, aber in einer anderen Richtung, sollte sich von 1840 an ein anderes Gebiet entwickeln, das in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts außerordentlich günstige Aussichten versprach, die Invariantentheorie. Ausgehend von der Tatsache, daß bei einer linearen Substitution der Variablen einer quadratischen Form die Diskriminante der transformierten Form gleich dem Produkt der Diskriminante der Ausgangsform mit dem Quadrat der Determinante der Substitution ist, stellte G. Boole 1841 [1] das folgende allgemeine Problem: Man betrachtet eine Anzahl p von *n-ären Formen*, d. h. von *homogenen* Polynomen $P_j(x_1, \dots, x_n)$ in n Variablen mit komplexen Koeffizienten ($1 \leqq j \leqq p$), in Zeichen $P_j(x) = \sum_\alpha a_{j\alpha} x^\alpha$.[1]) Es handelt sich nun darum, die bezüglich *jedes* Systems $(a_{j\alpha})$ für $1 \leqq j \leqq p$ homogenen Polynome (eines von j abhängenden Grades) $I((a_{j\alpha}))$ zu bestimmen, welche folgende Eigenschaft besitzen: Für jede lineare Substitution $x = \mathrm{U} \cdot x'$ soll, wenn $P'_j(x') = P_j(\mathrm{U} \cdot x') = \sum_\alpha a'_{j\alpha} x'^\alpha$ gesetzt wird,

$$I((a'_{j\alpha})) = (\det(\mathrm{U}))^g \, I((a_{j\alpha})) \tag{16}$$

gelten, wobei g eine positive oder negative ganze Zahl oder null ist. Dann nennt man I eine *Invariante der Formen P_j vom Gewicht g*. Unabhängig von Boole stellte sich Eisenstein im Jahre 1844 das gleiche Problem. Ihre Idee wurde schnell aufgegriffen, von Cayley und Sylvester in England, von Aronhold, Hesse, dann von Clebsch und Gordan in Deutschland, von Hermite, dann von Jordan in Frankreich. Eine detaillierte Untersuchung der zahllosen Arbeiten, die während eines halben Jahrhunderts zu diesem Thema publiziert wurden, wäre ermüdend, so daß wir

---

[1]) Das Symbol α bezeichnet einen *Multiindex*, d. h. ein System $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ von n nichtnegativen ganzen Zahlen. Setzt man

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!$$

und

$$\mathrm{D}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

so läßt sich die Taylorsche Formel für die Polynome abgekürzt in der Gestalt

$$P(x + y) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^\alpha P(x) \, y^\alpha$$

schreiben.

uns damit begnügen wollen, einige wesentliche Ergebnisse der Theorie kurz zu skizzieren (für weitere Einzelheiten siehe [7], [18], [28], [46]).

a) Schon vor 1850 wurde der Begriff der Invariante erweitert. In denselben Bezeichnungen betrachtete man jetzt Polynome $C\big((a_{j\alpha}), x^{(1)}, \ldots, x^{(q)}\big)$, die bezüglich jedes Systems $(a_{j\alpha})$ und jedes Systems von n Koordinaten einer bestimmten Anzahl von Vektoren $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ für $1 \leqq k \leqq q$ homogen sind. Man forderte, daß für $x^{(k)} = \mathrm{U} \cdot x'^{(k)}$ $(1 \leqq k \leqq q)$ die Beziehung

$$C\big((a'_{j\alpha}), x'^{(1)}, \ldots, x'^{(q)}\big) = \big(\det(\mathrm{U})\big)^g\, C\big((a_{j\alpha}), x^{(1)}, \ldots, x^{(q)}\big) \tag{17}$$

gilt, und nannte C eine *Kovariante* (oder eine *Konkomitante*) vom Gewicht g der p Formen P_j und der q Vektoren $x^{(k)}$. Betrachtet man beispielsweise zwei binäre quadratische Formen

$$\begin{aligned} f(x) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \\ g(x) &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2, \end{aligned} \tag{18}$$

so ist die quadratische Form

$$\begin{aligned} h(x) = (a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})\, x_1^2 &+ (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})\, x_1x_2 \\ &+ (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})\, x_2^2 \end{aligned} \tag{19}$$

eine Kovariante vom Gewicht 0 der Formen f, g und des Vektors $x = (x_1, x_2)$. Das Interesse an der Einführung dieser Kovarianten rührte von ihren Beziehungen zur algebraischen Geometrie her: Daß eine Kovariante mehrerer Formen P_j und mehrerer Vektoren $x^{(k)}$ null wird, bringt eine Eigenschaft der Punkte von $\boldsymbol{P}_{n-1}(\boldsymbol{C})$ mit den homogenen Koordinaten $(x_i^{(k)})_{1\leqq i\leqq n}$ und der algebraischen Mannigfaltigkeiten mit den homogenen Gleichungen $P_j(x) = 0$ $(1 \leqq j \leqq p,\ 1 \leqq k \leqq q)$ zum Ausdruck, eine Eigenschaft, die von der Wahl der Koordinaten unabhängig ist, also geometrische Bedeutung hat. Sind beispielsweise A und B (bzw. C und D) in den Bezeichnungen von (18) und (19) die beiden Punkte der projektiven Geraden $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$, deren homogene Koordinaten der Gleichung $f(x) = 0$ (bzw. $g(x) = 0$) genügen, so sind die beiden Punkte E und F, deren homogene Koordinaten die Gleichung $h(x) = 0$ erfüllen, diejenigen Punkte, die sowohl bezüglich A und B als auch bezüglich C und D konjugiert harmonisch sind. Definitionsgemäß ist jede n-äre Form $P(x)$ eine Kovariante von P und x vom Gewicht 0.

b) Seit den Anfängen der Theorie wird die Bestimmung der Invarianten und Kovarianten auf *multilineare* Probleme zurückgeführt. Nehmen wir beispielsweise an, es handele sich darum, die Kovarianten einer einzigen n-ären Form P vom Grade r in $x_1, \ldots, x_n$ und eines einzigen Vektors $x = (x_1, \ldots, x_n)$ zu bestimmen. Ist $P(x) = \sum\limits_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ mit $|\alpha| = r$, so sind also diese Kovarianten Polynome $C\big((a_\alpha), x\big)$, die einerseits bezüglich der a_α, andererseits bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ homogen sind. Man betrachtet diejenigen, deren Grad p bezüglich der a_α und deren Grad q bezüglich der $x_1, \ldots, x_n$ *festgelegt* ist. Auf solche Kovarianten führt das folgende Verfahren: Statt der Form P allein und des Vektors x allein betrachtet man ein System von *p Formen* $P^{(h)}(x) = \sum\limits_{\alpha} a_\alpha^{(h)} x^\alpha$ vom Grade r und ein System von *q Vektoren* $x^{(k)}$

$= (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. Man nimmt an, man kenne eine Kovariante dieser p Formen und dieser q Vektoren, die in jedem der $(a_\alpha^{(h)})$ und jedem der $x^{(k)}$ *linear* ist; das ist dann eine Summe von Monomen der Gestalt

$$c a_{\alpha_1}^{(1)} a_{\alpha_2}^{(2)} \dots a_{\alpha_p}^{(p)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_q}^{(q)} .$$

Ersetzt man in jedem dieser Monome jedes $a_{\alpha_h}^{(h)}$ durch a_{α_h} und jedes der $x_{i_k}^{(k)}$ durch x_{i_k} (mit anderen Worten, läßt man die oberen Indizes weg), so ist klar, daß die Summe der so erhaltenen Monome eine *Kovariante* $C((a_\alpha), x)$ von P und x vom Grade p in (a_α) und vom Grade q in x ist. Das entscheidende ist, daß man so *alle* Kovarianten erhält, die diese festen Grade haben. Dies läßt sich sofort auf beliebig viele n-äre Formen und Vektoren verallgemeinern: Jede Form (bzw. jeder Vektor) wird durch ein System von Formen gleichen Grades (bzw. von Vektoren) ersetzt, deren Anzahl mit dem Grad der gesuchten Kovarianten bezüglich ihrer Koeffizienten (bzw. ihrer Komponenten) übereinstimmt; dann geht man von einer *multilinearen* Kovarianten dieser Formen und dieser Vektoren zu einer Kovariante des gesuchten Typus über, indem man darin die Hilfsformen (bzw. Hilfsvektoren) *identifiziert*, die durch „Übertragung" aus ein und derselben Form (bzw. ein und demselben Vektor) hervorgegangen sind.

c) Wir behalten die Voraussetzungen und Bezeichnungen von b) bei, betrachten aber statt der p Formen $P^{(h)}$ $(1 \leqq h \leqq p)$ vom Grade r jetzt *pr Linearformen*

$$L^{(h,l)}(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i^{(h,l)} x_i \qquad (1 \leqq h \leqq p\,,\ 1 \leqq l \leqq r)\,.$$

Wir nehmen an, es sei eine *multilineare* Kovariante dieser pr Formen und der q Vektoren $x^{(k)}$ $(1 \leqq k \leqq q)$ bekannt; das ist also eine Summe von Monomen der Gestalt

$$c \left(\prod_{h=1}^{p} \left(u_{s_{h,1}}^{(h,1)} u_{s_{h,2}}^{(h,2)} \dots u_{s_{h,r}}^{(h,r)} \right) \right) x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_q}^{(q)} ; \tag{20}$$

dabei sind die $s_{h,l}$ und die i_k beliebige Indizes zwischen 1 und n. Für die *spezielle* Form vom Grade r,

$$P^{(h)}(x) = \prod_{l=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{(h,l)} x_i \right) = \sum_{\alpha} a_\alpha^{(h)} x^\alpha ,$$

gilt

$$u_{s_{h,1}}^{(h,1)} u_{s_{h,2}}^{(h,2)} \dots u_{s_{h,r}}^{(h,r)} = \frac{\alpha!}{r!} a_\alpha^{(h)} ; \tag{21}$$

dabei ist der Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (mit $|\alpha| = r$) auf folgende Weise definiert: Für jedes k mit $1 \leqq k \leqq n$ ist α_k die *Anzahl der $s_{h,l}$, die gleich k sind.* Dann ist folgendes leicht einzusehen. Ersetzt man in jedem Monom (20) die in dem Produkt auftretenden Faktoren durch (21), so ist die so entstehende Summe der Monome eine *multilineare Kovariante* der $P^{(h)}$ und der $x^{(k)}$. Auch hier ist wesentlich, daß man auf diese Weise *alle* multilinearen Kovarianten der $P^{(h)}$ und der $x^{(k)}$ erhält.

d) Die Bestimmung der Kovarianten *gegebener* Grade einer gewissen Anzahl n-ärer Formen und Vektoren wird also auf den Spezialfall zurückgeführt, daß man nur multilineare Kovarianten sucht und die n-ären Formen sämtlich *linear* sind.

Diese Reduktion ist deshalb interessant, weil man *explizit* alle Kovarianten dieser Art kennt. Das ist der Inhalt des *Ersten Fundamentalsatzes der Invariantentheorie*: Für n Vektoren $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ in C^n setzt man

$$[x^{(1)}x^{(2)} \cdots x^{(n)}] = \det (x_i^{(j)}) \tag{22}$$

und für n Linearformen $L^{(h)}(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i^{(h)} x_i$ in n Variablen

$$[L^{(1)}L^{(2)} \cdots L^{(n)}] = \det (u_i^{(j)}) . \tag{23}$$

Dann betrachtet man n-äre Linearformen $L^{(1)}, \dots, L^{(p)}$ und q Vektoren $x^{(1)}, \dots, x^{(q)}$; es gibt nur dann nichtverschwindende multilineare Kovarianten der $L^{(h)}$ und der $x^{(k)}$, wenn $q - p$ ein *Vielfaches von* n ist. Ist dies der Fall, so erhält man die Kovarianten dieses Typs in folgender Weise:

1° Man wählt eine s-elementige Teilmenge H von $[1, p]$, eine s-elementige Teilmenge K von $[1, q]$ mit $p - s = p_0 n$ und $q - s = q_0 n$, ferner eine bijektive Abbildung φ von H auf K und s Polynome $L^{(h)}(x^{(k)})$ für $h \in H$ und $k = \varphi(h)$;

2° man wählt eine Zerlegung der zu H komplementären Menge $[1, p] \setminus H$ in p_0 Teilmengen $H_1, \dots, H_{p_0}$ zu je n Elementen und die p_0 Polynome $[L^{(h_1)}L^{(h_2)} \cdots L^{(h_n)}]$, wobei $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ gleich einer der p_0 Mengen H_j ist,

3° man wählt eine Zerlegung der zu K komplementären Menge $[1, q] \setminus K$ in q_0 Teilmengen $K_1, \dots, K_{q_0}$ zu je n Elementen und die q_0 Polynome $[x^{(k_1)}x^{(k_2)} \cdots x^{(k_n)}]$, wobei $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ gleich einer der q_0 Mengen K_j ist;

4° man bildet schließlich das Produkt der $s + p_0 + q_0$ so erhaltenen Polynome. Das ergibt eine multilineare Kovariante vom Gewicht g derart, daß $g = q_0 - p_0$ (also $gn = q - p$) ist. *Jede* multilineare Kovariante von $L^{(h)}$ und der $x^{(k)}$ ist eine Linearkombination der so konstruierten Kovarianten [12].

e) Diese Methode zur Konstruktion von Kovarianten wird *symbolische Methode* genannt; die in d) konstruierte multilineare Kovariante wird als der *symbolische Ausdruck* der Kovariante bezeichnet, die man daraus nacheinander mittels der in c) und b) beschriebenen Operationen herleiten kann. An Stelle von $[L^{(1)}L^{(2)} \cdots L^{(n)}]$ schreibt man meistens $[u^{(1)}u^{(2)} \cdots u^{(n)}]$ und statt $L^{(i)}(x^{(j)})$ kurz $\langle u^{(i)}, x^{(j)} \rangle$. In diesen Bezeichnungen hat beispielsweise die Diskriminante einer n-ären quadratischen Form bis auf einen konstanten Faktor den symbolischen Ausdruck

$$[u^{(1,1)}u^{(1,2)} \dots u^{(1,n)}] \cdot [u^{(2,1)}u^{(2,2)} \dots u^{(2,n)}] ,$$

abgekürzt $[u^{(1)}u^{(2)} \cdots u^{(n)}]^2$. Dies ist eine Invariante vom Gewicht -2. Eine n-äre Form r-ten Grades, welche Kovariante vom Gewicht 0 von sich selbst und einem Vektor x ist, hat als symbolischen Ausdruck

$$\langle u^{(1,1)}, x^{(1)} \rangle \langle u^{(1,2)}, x^{(2)} \rangle \cdots \langle u^{(1,r)}, x^{(r)} \rangle ,$$

abgekürzt $\langle u, x \rangle^r$. Die Funktionaldeterminante zweier binärer Formen f und g vom Grade r bzw. s (beispielsweise ist die Form h in (19) die Funktionaldeterminante der quadratischen Formen f und g von (18)) hat bis auf einen konstanten Faktor den symbolischen Ausdruck

$$[u^{(1)}u^{(2)}] \langle u^{(1)}, x \rangle^{r-1} \langle u^{(2)}, x \rangle^{s-1} .$$

Nimmt man Quotienten von Kovarianten gleichen Gewichts, so erhält man *rationale* Kovarianten vom Gewicht 0 (auch *absolute Invarianten* genannt): Beispielsweise ist die absolute Invariante von vier Vektoren in $\boldsymbol{C}^2$

$$[x^{(1)}x^{(3)}] \cdot [x^{(2)}x^{(4)}]/[x^{(2)}x^{(3)}] \cdot [x^{(1)}x^{(4)}]$$

nichts anderes als das *Doppelverhältnis* der entsprechenden Punkte auf der projektiven Geraden $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ (vgl. 2.4.4.).

f) Die symbolische Methode liefert für ein gegebenes System von n-ären Formen und Vektoren in $\boldsymbol{C}^n$ offenbar unendlich viele Kovarianten, und die tatsächliche Berechnung dieser Kovarianten ist nur in einer kleinen Anzahl von Fällen durchgeführt worden, vor allem für $n = 2$ und $n = 3$. Man hat sehr schnell bemerkt, daß für $n = 2$ ein „vollständiges" System endlich vieler Kovarianten existiert mit der Eigenschaft, daß alle anderen Kovarianten *Polynome* in den Kovarianten dieses Systems (mit komplexen Koeffizienten) sind (Satz von Gordan). Beispielsweise gibt es für die binären quadratischen Formen f und g aus (18) und einen Vektor x ein vollständiges System von sechs Kovarianten, die aus f, g, der Funktionaldeterminante h (19) und den drei Invarianten

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2\,, \qquad b_{11}b_{22} - b_{12}^2\,, \qquad a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12} + a_{22}b_{11}$$

bestehen. Doch wird selbst die Berechnung eines vollständigen Systems sehr schnell äußerst mühsam: Für die binären Formen f vom Grade 5 braucht man, selbst wenn man sich nur auf die Kovarianten von f und eines einziges Vektors x beschränkt, um ein vollständiges System zu erhalten, 26 Kovarianten, von denen eine bezüglich der a_α vom Grade 18 ist, und für die binären Formen höheren als achten Grades ist die Berechnung niemals vollständig durchgeführt worden [18].

Natürlich sind die Kovarianten C_k $(1 \leqq k \leqq m)$ eines vollständigen Systems, da ihre Anzahl im allgemeinen größer ist als die Anzahl der Variablen (beispielsweise gibt es nur sechs nichthomogene Variablen für die Kovarianten einer binären Form vom Grade 5 und einen Vektor aus $\boldsymbol{C}^2$), durch Relationen der Gestalt $S_j(C_1, C_2, \ldots, C_m) = 0$ verknüpft, die traditionell (nach Sylvester natürlich) *Syzygien* genannt werden; dabei sind die S_j Polynome mit komplexen Koeffizienten. Die explizite Bestimmung der Syzygien ist jedoch noch komplizierter als die eines vollständigen Systems von Kovarianten und wurde nur in ganz wenigen Fällen durchgeführt (nämlich für die multilinearen Kovarianten eines beliebigen Systems von Linearformen und Vektoren; dies ist der Inhalt des sogenannten *Zweiten Fundamentalsatzes der Invariantentheorie* ([46], S. 70)).

g) Der Höhepunkt der Theorie wurde in den Jahren 1890–1893 von Hilbert erreicht, in zwei Abhandlungen, die ihn sofort berühmt machten und die darüber hinaus die Theorie der Polynomideale begründeten [40]. In der ersten Arbeit verallgemeinerte Hilbert zunächst den Gordanschen Satz auf ein beliebiges endlichen System Σ von n-ären Formen und Vektoren aus $\boldsymbol{C}^n$, für beliebiges ganzzahliges n: Es gibt stets ein „vollständiges System" mit *endlich* vielen Kovarianten C_k von Σ derart, daß jede andere Kovariante von Σ ein Polynom in den C_k mit komplexen Koeffizienten ist. Ferner gibt es unter allen polynomialen Relationen $S^{(1)}(C_1, C_2, \ldots, C_m) = 0$ zwischen den C_k („Syzygien erster Art") *endlich* viele $S_j^{(1)}$

$(1 \leqq j \leqq m_1)$ derart, daß jede andere Relation die Gestalt

$$S^{(1)} = F_1 S_1^{(1)} + F_2 S_2^{(1)} + \cdots + F_{m_1} S_{m_1}^{(1)} \tag{24}$$

hat; dabei sind die F_j Kovarianten von Σ. Die Polynome $S_j^{(1)}$ sind jedoch nicht unabhängig voneinander; im allgemeinen genügen sie Relationen

$$X_1 S_1^{(1)} + \cdots + X_{m_1} S_{m_1}^{(1)} = 0\,, \tag{25}$$

in denen die X_j nicht sämtlich verschwindende Kovarianten von Σ sind. Diese Relationen werden „Syzygien zweiter Art" genannt. Die Hilbertschen Methoden zeigen, daß es auch *endlich* viele Systeme von Kovarianten $S_i^{(2)} = (X_1^{(i)}, \ldots, X_{m_1}^{(i)})$ $(1 \leqq i \leqq m_2)$ gibt derart, daß jedes andere System $X = (X_1, \ldots, X_{m_1})$ von Kovarianten, das (25) genügt, eine Linearkombination der $S_i^{(2)}$ ist, deren Koeffizienten Kovarianten von Σ sind. Dann existieren im allgemeinen lineare Beziehungen zwischen den $S_i^{(2)}$, deren Koeffizienten Kovarianten von Σ sind. Dies sind die „Syzygien dritter Art", mit denen man das gleiche Verfahren wiederholen könnte. Der letzte Hilbertsche Satz aber besagt, daß dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten (höchstens so vielen, wie Σ Elemente hat) *abbricht*. (Der Satz ist jetzt in die homologische Algebra (vgl. Kapitel 10) eingegliedert; er ist das historisch erste Beispiel eines Satzes dieser Theorie [3].)

h) Wir haben schon in a) darauf aufmerksam gemacht, daß die Invariantentheorie für die algebraische Geometrie (in komplexen projektiven Räumen) von Interesse ist. Insbesondere liefert sie ein Klassifikationsprinzip für algebraische Kurven (bzw. algebraische Flächen) in $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C})$ (bzw. $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$): Sieht man, den Ideen Poncelets folgend, zwei algebraische Kurven als zur gleichen Klasse gehörend an, wenn ihre Gleichungen durch eine homogene Koordinatentransformation auseinander hervorgehen, so *stimmen* die absoluten Invarianten vom Grade 0 des auf der linken Seite der Gleichung stehenden homogenen Polynoms für alle Kurven ein und derselben Klasse *überein*. Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht, und zwar aus folgendem Grunde: Es kann vorkommen, daß die ternären Terme eines gegebenen Grades, deren Invarianten *sämtlich* null sind, sehr wohl Kurven definieren können, die nicht projektiv äquivalent sind. Beispielsweise können die irreduziblen Kurven fünfter Ordnung, die einen Vierfachpunkt besitzen, durch den Invariantenkalkül nicht von jenen unterschieden werden, die einen Dreifachpunkt mit einer einzigen Tangente haben. Die zweite große Abhandlung Hilberts über Invarianten ist der Untersuchung dieser „Nullformen" gewidmet, die er durch ein Kriterium charakterisieren konnte, das bei modernen Untersuchungen sehr wichtig geworden ist ([12], [29]). Außerdem benutzte er diese Resultate, um seinen Endlichkeitssatz zu vervollkommnen, indem er zeigte, wie man immer (wenigstens theoretisch) ein vollständiges System von Kovarianten mit einer explizit ausrechenbaren Anzahl von Operationen bestimmen kann.

3.2.4. *Quaternionen und hyperkomplexe Systeme*

Wie viele andere vor ihm hatte W. R. Hamilton sich seit 1833 bemüht, unte Beachtung des Permanenzprinzips einen „Kalkül" auf den dreidimensionale

Raum zu übertragen (d. h. — in moderner Terminologie — ein Verfahren, das über $\boldsymbol{R}^3$ die Struktur einer $\boldsymbol{R}$-Algebra definiert, die ein kommutativer Körper sein sollte; dabei sollte $\boldsymbol{R}^3$ die gewöhnliche Vektorraumstruktur haben). Es handelte sich also darum, entsprechend dem Modell, das er selbst für die komplexen Zahlen entwickelt hatte, eine geeignete Multiplikation für Tripel (x, y, z) reeller Zahlen zu definieren. Um für eine solche Multiplikation die Existenz eines Inversen zu sichern, hatte Hamilton die Idee, eine Multiplikation

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = (X, Y, Z)$$

zu suchen, wobei X, Y, Z lineare Polynome in x, y, z und in x', y', z' sein sollten; außerdem sollte Identität der „Normen"

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x'^2 + y'^2 + z'^2) = X^2 + Y^2 + Z^2 \tag{26}$$

bestehen, analog der für die Produkte in $\boldsymbol{R}$ bzw. in $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}^2$ gültigen. Nun erhielt man zwar für das Produkt auf der linken Seite von (26) eine solche Identität, jedoch mit *vier* Quadraten auf der rechten Seite (vgl. 2.1.5.). Dies sollte Hamilton dazu führen, einen Kalkül mit Quadrupeln (s, x, y, z) reeller Zahlen aufzubauen oder (was auf das gleiche hinausläuft) mit Linearkombinationen $s + xi + yj + zk$ mit $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ und $k = (0, 0, 0, 1)$. Die zu (26) analoge Formel gilt dann jedoch nur für eine *nichtkommutative* Multiplikation, wodurch Hamilton lange Zeit nicht weiterkommen sollte. Den entscheidenden Schritt konnte er schließlich 1843 tun, indem er die *Quaternionen* durch die Multiplikationstabelle

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = -1\,, \qquad ij = -ji = k\,, \qquad jk = -kj = i\,, \\ &ki = -ik = j \end{aligned} \tag{27}$$

definierte. Bis auf die Kommutativität bleiben alle Eigenschaften der Multiplikation erhalten (einschließlich der Existenz des Inversen für $(s, x, y, z) \neq 0$).

Diese Entdeckung sollte großen Widerhall finden, insbesondere in England, wo sich um Hamilton eine ganze Schule von „Quaternionisten" bildete, die sich die Anwendung der Quaternionen in allen Teilen der Mathematik zum Ziel setzte. Ihre viel unmittelbarere Wirkung sollte jedoch, indem sie das Tabu des „Permanenzprinzips" zerstörte, darin bestehen, daß sie eine ganze Reihe von Untersuchungen über Kalküle auslöste, die in den Räumen $\boldsymbol{R}^n$ möglich sind. Der zeitlich früheste war der Kalkül mit *Oktonionen* (oder „Oktaven"), die schon 1844 von Graves entdeckt (und unabhängig von Cayley 1845 wiederentdeckt) worden waren: Für die Quaternionen definiert man eine „Konjugation" $q \mapsto \bar{q}$ derart, daß für

$$q = s + xi + yi + zk$$

$\bar{q} = s - xi - yj - zk$ gilt, so daß $q\bar{q} = \bar{q}q = s^2 + x^2 + y^2 + z^2$ ist; das ist eine nichtnegative Zahl, die mit $N(q)$ bezeichnet und „Norm" von q genannt wird; dann gilt $N(q_1q_2) = N(q_1)\,N(q_2)$ für je zwei Quaternionen q_1, q_2. Dies ermöglicht es, die Inverse einer Quaternion $q \neq 0$ in der Gestalt $q^{-1} = \bar{q}/N(q)$ zu schreiben. Die Oktonionen können dann als Quaternionenpaare $r = (q_1, q_2)$ mit der Multiplikationsregel

$$(q_1, q_2)\,(q_1', q_2') = (q_1q_1' - \bar{q}_2'q_2, q_2\bar{q}_1' + q_2'q_1)$$

definiert werden. Jetzt gibt es weder Kommutativität noch Assoziativität; es gelten nur die schwächeren Eigenschaften $r_1^2 r_2 = r_1(r_1 r_2)$ und $r_1 r_2^2 = (r_1 r_2) r_2$ für je zwei beliebige Oktonionen. Für $r = (q_1, q_2)$ definiert man durch $\bar{r} = (\bar{q}_1, -q_2)$ wieder eine Konjugation $r \to \bar{r}$ derart, daß $r\bar{r} = \bar{r}r$ eine nichtnegative Zahl ist, die man wieder als Norm $N(r)$ bezeichnet und für welche $N(r) = N(q_1) + N(q_2)$ gilt. Für je zwei beliebige Oktonionen gilt wieder die Identität $N(r_1 r_2) = N(r_1)\, N(r_2)$, so daß jede Oktonion $r \neq 0$ eine Inverse $\bar{r}/N(r)$ hat [32].

Dennoch wurden diese Eigenschaften schnell als außergewöhnlich nachgewiesen. Hurwitz hatte 1898 gezeigt, daß nur dann eine Identität der Gestalt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right) = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \tag{28}$$

zwischen reellen Zahlen x_j, y_j und den in x_k, y_k bilinearen Polynomen X_j mit reellen Koeffizienten bestehen kann, wenn $n = 1, 2, 4$ oder 8 ist. Frobenius und (unabhängig von ihm) C. S. Peirce bewiesen andererseits (in moderner Terminologie), daß der Körper der Quaternionen der *einzige* nichtkommutative Körper ist, der eine $\boldsymbol{R}$-Algebra endlicher Dimension ist. Die Verwendung der Quaternionen bzw. Oktonionen in der Algebra mußte also viel stärker eingeschränkt bleiben, als Hamilton und seine Schüler gehofft hatten; ihre gegenwärtige Bedeutung ergibt sich vor allem aus ihrem Zusammenhang mit der Theorie der Lieschen Gruppen und der Differentialtopologie ([32], ([D], Kapitel 21)).

Von 1850 an orientierten sich die Arbeiten vor allem auf die Untersuchung von „Kalkülen", die in den Räumen $\boldsymbol{R}^n$ möglich sind, wobei man weiterhin die *Assoziativität* der Multiplikation (und selbstverständlich ihre Distributivität bezüglich der Addition von Vektoren) forderte, aber auf die Existenz eines Inversen für von 0 verschiedene Elemente *verzichtete*. Eines der ersten Beispiele ist das Rechnen mit quadratischen Matrizen, wobei selbst dann $\mathrm{XY} = 0$ (bzw. $\mathrm{X}^k = 0$) sein kann, wenn $\mathrm{X} \neq 0$ und $\mathrm{Y} \neq 0$ ist. Man spricht dann von *Nullteilern* (bzw. von *nilpotenten* Elementen).

Ein anderes Beispiel liefern die jetzt als *Cliffordsche Algebren* bezeichneten Kalküle, welche die Quaternionen verallgemeinern und eng mit den orthogonalen Transformationen verknüpft sind. Eine der Vorstellungen, welche Hamilton leiteten, bestand darin, mit Hilfe eines „Kalküls" über den Vektoren im $\boldsymbol{R}^3$ eine Interpretation der Drehung zu gewinnen, welche der Interpretation der Drehung im $\boldsymbol{R}^2$ als Multiplikation $z \mapsto \omega z$ mit einer komplexen Zahl ω vom Absolutbetrag 1 analog sein sollte. Tatsächlich erhielten Hamilton und Cayley unabhängig voneinander solche Interpretationen, und zwar in folgender Weise: Man identifiziert die Vektoren des $\boldsymbol{R}^3$ mit den durch die Relation $\bar{u} = -u$ charakterisierten Quaternionen $u = xi + yj + zk$, die man *reine* Quaternionen nennt. Jede Drehung im $\boldsymbol{R}^3$ kann dann in der Gestalt $u \mapsto quq^{-1}$ mit einer bis auf einen von 0 verschiedenen skalaren Faktor wohlbestimmten Quaternion q geschrieben werden. Ebenso erhält man die orthogonalen Transformationen im $\boldsymbol{R}^4$, wenn man die Vektoren des $\boldsymbol{R}^4$ mit den Quaternionen identifiziert und die Abbildungen $q \mapsto aqb$ betrachtet, wobei a und b zwei Quaternionen mit $N(a)\,N(b) = 1$ sind. Die „Cliffordschen Zahlen", die W. Clifford [8] im Jahre 1878 definierte (und die unabhängig von ihm vier Jahre

später von Lipschitz erneut entdeckt wurden), sind Vektoren des $\boldsymbol{R}^{2^n}$. Dabei schrieb man die 2^n Einheitsvektoren, welche die kanonische Basis bilden, in der Gestalt e_H, wobei H irgendeine der 2^n Teilmengen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ ist; die Multiplikation ist durch die Bedingungen $e_\emptyset = 1$, $e_j^2 = -1$ für $1 \leqq j \leqq n$ (man schreibt e_j statt $e_{\{j\}}$), $e_j e_k = -e_k e_j$ für $1 \leqq j < k \leqq n$ und schließlich

$$e_H = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_h}$$

definiert, wenn H aus den wachsend geordneten ganzen Zahlen $i_1 < i_2 < \cdots < i_h$ besteht. Man zeigt, daß diese Bedingungen zusammen mit der Assoziativität die Multiplikation vollständig bestimmen und daß, wenn die Vektoren des $\boldsymbol{R}^n$ mit Linearkombinationen der $e_1, e_2, \dots, e_n$ identifiziert werden, jede Drehung im $\boldsymbol{R}^n$ in der Gestalt $u \mapsto sus^{-1}$ mit einer invertierbaren „Cliffordschen Zahl" s geschrieben werden kann. Ebeno wie bei den Quaternionen spielen auf Grund dieser Beziehungen mit den orthogonalen Transformationen die Clifford-Algebren heute eine wichtige Rolle in der Theorie der Lieschen Gruppen und in der Differentialtopologie.

Allgemein genügt es, um einen assoziativen „Kalkül" über den Vektoren des $\boldsymbol{R}^n$ (oder, wie man nach Frobenius sagt, ein *hyperkomplexes System*) zu definieren, die „Produkte" $e_j e_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk} e_i$ von je zwei Vektoren der kanonischen Basis des $\boldsymbol{R}^n$ zu kennen (man spricht von der „Multiplikationstabelle" dieser Basis für das betrachtete hyperkomplexe System), wobei die Koeffizienten c_{ijk} natürlich Bedingungen unterworfen werden, die ausdrücken, daß $(e_j e_k)\, e_l = e_j (e_k e_l)$ für alle Indizes j, k, l gilt. Dieser Gesichtspunkt war schon für Hamilton klar, und ab 1870 begann auf Anregung von B. und C. S. Peirce die Suche nach möglichen Multiplikationstabellen: Selbstverständlich wurde nicht zwischen zwei *isomorphen* hyperkomplexen Systemen unterschieden, d. h. zwischen Systemen, die durch eine invertierbare lineare Transformation ineinander übergehen. Diese Versuche gingen tatsächlich kaum über die Dimension $n = 5$ hinaus, denn man wurde sich der großen Vielfalt der möglichen Fälle schnell bewußt; außerdem orientierte man sich seit etwa 1889 (vor allem unter den Schülern S. Lies) stärker auf das Studium hyperkomplexer Systeme, welche einschränkenderen Bedingungen unterworfen sind, die mit „inneren" Eigenschaften verknüpft sind und nicht mehr von der Wahl einer speziellen Basis abhängen.

Einer der ersten allgemeinen Begriffe, die sich bei diesen Untersuchungen (vielleicht angeregt durch die zeitgenössische Theorie der Lieschen Gruppen) herausschälten, ist der des *zweiseitigen* Ideals eines hyperkomplexen Systems A, d. h. eines „Teilsystems" $\mathfrak{a}$ derart, daß das Produkt (von links oder von rechts) eines Elements aus $\mathfrak{a}$ und eines Elements aus A ebenfalls zu $\mathfrak{a}$ gehört. Ein hyperkomplexes System wird *einfach* genannt, wenn es außer sich selbst und dem Ideal $\{0\}$ kein anderes zweiseitiges Ideal enthält. Das grundlegende Ergebnis in dieser Richtung, das zum Teil von T. Molien im Jahre 1893 erzielt und im Jahre 1897 von E. Cartan vervollständigt wurde, besagt, daß die einfachen Systeme aus den quadratischen Matrizen der Ordnung n bestehen, deren Elemente entweder reelle Zahlen (Systeme der Dimension n^2) oder komplexe Zahlen (Systeme der Dimen-

sion $2n^2$) oder schließlich Quaternionen (Systeme der Dimension $4n^2$) sind. Molien und Cartan bestimmten auch die hyperkomplexen Systeme *ohne Radikal*, d. h. die Systeme, in denen es kein von 0 verschiedenes, aus nilpotenten Elementen bestehendes zweiseitiges Ideal gibt: Diese Systeme sind die Produkte[1]) endlich vieler einfacher Systeme; sie werden auch *halbeinfach* genannt.

Die weitere Entwicklung wurde von neuen Ideen beherrscht, die aus der allgemeinen Theorie der Körper und der Ringe (vgl. 3.3. und 3.5.) bzw. aus der Theorie der Gruppen und ihrer linearen Darstellungen (vgl. 3.4.2.) stammen.

3.2.5. *Die äußere Algebra*

Was wir heute die Graßmannsche *äußere Algebra* nennen, ist ebenfalls ein hyperkomplexes System, das aber aus mehreren Gründen lange außerhalb der allgemeinen Theorie dieser Systeme geblieben ist. Erstens ist, wie wir in 3.2.1. festgestellt haben, Graßmanns Standpunkt wesentlich geometrisch: Für ihn handelte es sich darum, das Rechnen mit Vektoren auf „extensive Größen", die nicht mehr eindimensional sind, sondern beliebige Dimension haben, auszudehnen. Da bei der Dimension 1 die „Größe" eines Vektors eine Länge ist, muß die entsprechende „Größe" für die Dimension 2 ein (allerdings orientierter) „Flächeninhalt" sein. Der einfachste Typus eines Flächeninhalts ist ein über zwei Vektoren a, b konstruiertes Parallelogramm; es war Graßmanns völlig neuartige Idee, diesen Flächeninhalt als ein „äußeres" *Produkt* $[ab]$ der beiden Vektoren aufzufassen (wir schreiben dafür jetzt $a \wedge b$), wobei sich die Orientierung in der Übereinkunft $[ba] = -[ab]$ manifestierte. Das Produkt mit einem Skalar α wird durch $\alpha(a \wedge b) = (\alpha a) \wedge b = a \wedge (\alpha b)$ definiert, und Graßmanns Idee bestand nun darin, daß das Produkt $a \wedge b$ „bis auf einen skalaren Faktor" in den Rechnungen als Repräsentant der durch die Vektoren a und b definierten Ebene auftritt, ähnlich wie ein Vektor „bis auf einen skalaren Faktor" die Gerade, auf der er liegt, repräsentiert. Von diesen „Bivektoren" $a \wedge b$ geht er in natürlicher Weise zu „Trivektoren" $a \wedge b \wedge c$ über, dann zu beliebigen „p-Vektoren" $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_p$, die man geometrisch als „orientiertes p-dimensionales Volumen" des über $a_1, a_2, \ldots, a_p$ konstruierten „Parallelotops" interpretiert. Als er die p-Vektoren addieren wollte, stieß er jedoch auf Schwierigkeiten; denn in einem vierdimensionalen Raum hat beispielsweise die Summe $a \wedge b + c \wedge d$ von vier linear unabhängigen Vektoren a, b, c, d nicht die Gestalt $x \wedge y$, die einzige, die er definiert hatte. Er war also gezwungen, von einer „formalen" Summe zu sprechen, und in der ersten Auflage seiner „Ausdehnungslehre" sucht man vergeblich nach einer tatsächlichen Definition seiner äußeren Algebra.

In der zweiten, 1862 veröffentlichten (völlig überarbeiteten) Auflage stellte er sich auf den Standpunkt Hamiltons, indem er von einer Basis (e_j) des $\boldsymbol{R}^n$ ausging

---

[1]) Das Produkt zweier hyperkomplexer Systeme E und F ist die Menge der Paare (x, y) mit $x \in E$, $y \in F$, für welche $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ und $(x, y)\,(x', y') = (xx', yy')$ gilt. Entsprechend wird das Produkt endlich vieler hyperkomplexer Systeme definiert.

und die „äußeren Produkte" zuerst für die e_j und dann mittels Linearität so definierte, daß er tatsächlich ein hyperkomplexes System erhielt. Seine Beschreibung war noch immer nicht sehr genau, aber im Grunde erhielt er eine Basis (e_H) aus 2^n Elementen, wobei H das System der Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ durchläuft, und wenn das System H aus den ganzen Zahlen $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ besteht, ist $e_H = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$.

Dabei blieb er aber nicht stehen. Sind V und W zwei Vektorteilräume von $\boldsymbol{R}^n$, die von p Vektoren $a_1, \ldots, a_p$ bzw. von q Vektoren $b_1, \ldots, b_q$ erzeugt werden, und sind die $p + q$ Vektoren $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ linear unabhängig (das läuft darauf hinaus, daß $V \cap W = \{0\}$ ist), so entspricht der Teilraum $V + W$ dem $(p + q)$-Vektor $(a_1 \wedge \cdots \wedge a_p) \wedge (b_1 \wedge \cdots \wedge b_q)$. Ist aber $V \cap W \neq \{0\}$, so wollte Graßmann durch einen Kalkül ebenfalls einen Multivektor erhalten, der diesem Durchschnitt entspricht, von dem p-Vektor $v = a_1 \wedge \cdots \wedge a_p$ und dem q-Vektor $w = b_1 \wedge \cdots \wedge b_q$ ausgehend, was ihn auf die Definition eines anderen, des sogenannten „regressiven" oder „angewandten" Produkts führte. Diese Definition ist in der Ausgabe von 1844 ziemlich unklar, doch in der Auflage von 1862 begann Graßmann damit, zu jedem p-Vektor seiner Basis e_H einen $(n - p)$-Vektor $\varphi(e_H) = \pm e_{H'}$ zu definieren, wobei H' die Komplementärmenge von H in $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist und das Vorzeichen so gewählt wird, daß $\pm e_H \wedge e_{H'} = e_{\{1,2,\ldots,n\}}$ gilt. Die Abbildung φ wird dann durch Linearität für alle Multivektoren definiert, und das „regressive Produkt" $x \vee y$ zweier Multivektoren wird als $\varphi^{-1}(\varphi(x) \wedge \varphi(y))$ definiert. Dieser Begriff und der des „inneren Produkts", der daraus auf ziemlich komplizierte Weise hergeleitet wird, wurden erst geklärt, als man die Dualität in Vektorräumen (vgl. 3.5.) verstanden hatte. Ihre Einführung hat jedoch die ursprüngliche Idee Graßmanns sehr schwer verständlich gemacht und zweifellos dazu beigetragen, daß die Zeitgenossen sie nicht aufnahmen, trotz der einfachen und überraschenden Anwendungen seines Kalküls, der den alten Leibnizschen Traum vom „geometrischen Kalkül" verwirklichte. Die äußere Algebra wurde erst dann allmählich der Vergessenheit entrissen, als H. Poincaré und besonders E. Cartan ihre grundsätzliche Bedeutung in der Differentialgeometrie (vgl. 9.6.) zeigten, und erst nach 1930, als man das Werk E. Cartans zu verstehen begann, nahm auch Graßmanns Werk wieder den zentralen Platz ein, der ihm in allen Anwendungen der linearen und der multilinearen Algebra zukommt.

3.3. Körper, Ringe, Ideale und Moduln

3.3.1. *„Klassische" Körper und Ringe*

Wie wir in 2.2.2. gesehen haben, war die Vorstellung, daß ein *Element* einem Gebilde, das wir jetzt einen Teilkörper des Körpers der komplexen Zahlen nennen, *angehört*, bei Abel und noch deutlicher bei Galois ziemlich ausgeprägt; beide verfügten aber noch nicht über einen Terminus, um die Menge dieser Elemente zu bezeichnen. In den Arbeiten von Kronecker und Dedekind begannen seit 1855

Wörter „mengentheoretischer" Natur vorzukommen wie „Gebiet", „System", „Inbegriff", um eine Menge von Elementen mit einer gemeinsamen Eigenschaft zu bezeichnen.

Im X. Supplement zu Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, in dem Dedekind erstmals seine Untersuchungen über die algebraischen Zahlen veröffentlichte (1871), führte er die Begriffe Körper und Modul ein, wobei er darunter das verstand, was wir jetzt einen Teilkörper bzw. einen $\mathbf{Z}$-Untermodul (oder eine additive Untergruppe) von $\mathbf{C}$ nennen. Das war für ihn nicht einfach eine bequeme Sprechweise; denn das Wesen seiner Methode bestand darin, Körper und Moduln als Objekte zu betrachten, mit denen er *rechnete* (wie es Gauß schon mit den Klassen binärer quadratischer Formen getan hatte), sowohl mit mengentheoretischen Operationen wie der Durchschnittsbildung als auch mit algebraischen Operationen (Summe und Produkt von Moduln). Bekanntlich (vgl. 5.5.3.) führte er in diesem Werk auch die Menge $\mathfrak{o}$ der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers K ein (noch ohne sie mit einem besonderen Terminus zu belegen), definierte dort die *Ideale* von $\mathfrak{o}$ als in $\mathfrak{o}$ enthaltene Moduln, die gegenüber der Multiplikation mit einem beliebigen Element von $\mathfrak{o}$ invariant sind, und bewies den Fundamentalsatz über die eindeutige Zerlegung jedes Ideals in ein Produkt von Primidealen. Etwas später ([9], Bd. I, S. 105—158) betrachtete er allgemeiner die von ihm *Ordnungen* genannten Unterringe von $\mathfrak{o}$, welche (in heutiger Terminologie) eine Basis von K über $\mathbf{Q}$ enthalten. Für eine solche Ordnung $\mathfrak{o}'$ definierte und untersuchte er die Ideale von $\mathfrak{o}'$ (für die der Satz über die Zerlegung in Primideale nicht mehr gilt).

Eine der wichtigsten Eigenschaften der „Moduln" im Sinne von Dedekind besteht darin, daß die von *endlich vielen* Elementen erzeugten Moduln eine *Basis* über $\mathbf{Z}$ besitzen; dieses Ergebnis ist im wesentlichen einem Spezialfall des Satzes von H. J. Smith über die invarianten Faktoren (vgl. 3.2.2.) äquivalent. Die Ideale in den „Ordnungen" eines Körpers K sind Moduln eines speziellen Typus, denn eine Basis eines solchen Moduls über $\mathbf{Z}$ ist auch eine Basis von K (als Vektorraum über $\mathbf{Q}$); man nennt sie *Gitter*, und diese Definition läßt sich auf alle endlichdimensionalen Vektorräume über $\mathbf{Q}$ ausdehnen.

Der Begriff *Ring* wurde erst 1897 durch Hilbert eingeführt; doch war zu jener Zeit dieser Begriff schon über den Rahmen der Theorie der Dedekindschen „Ordnungen" hinausgewachsen. Im Jahre 1882 leitete Kronecker die Untersuchung der algebraischen Geometrie mit Hilfe der Methode von *Polynomidealen* ein. Man hatte sich schon seit langem daran gestoßen, daß eine Raumkurve in $\mathbf{C}^3$ nicht durch zwei invariant mit der Kurve verknüpfte Gleichungen definiert wird; denn sind $P = 0$ und $Q = 0$ zwei die Kurve definierende Gleichungen, so kann man sie durch Linearkombinationen ersetzen, ohne die Kurve zu ändern. Natürlich tritt dieses Phänomen im $\mathbf{C}^n$ für alle von Hyperflächen verschiedenen algebraischen Mannigfaltigkeiten wieder auf, und das einzige algebraische Objekt, das in natürlicher Weise mit einer algebraischen Mannigfaltigkeit $V \subset \mathbf{C}^n$ verknüpft ist, ist die Menge *aller* Polynome aus $\mathbf{C}[T_1, T_2, \dots, T_n]$, die auf V null werden. Diese Menge ist offenbar ein Ideal in $\mathbf{C}[T_1, \dots, T_n]$ (in naheliegender Übertragung der Dedekindschen Definition für die Ideale in „Ordnungen"; Kronecker verwendet den Terminus „Modulsystem"). Das Kroneckersche Programm besteht, umgekehrt, darin,

für ein gegebenes Ideal die Menge der Punkte von C^n zu untersuchen, in denen alle Polynome des Ideals null werden („Nullstellen" des Ideals).

Es scheint, daß es Kroneckers Idee war, die für zwei bzw. drei Dimensionen bekannten Beispiele zu verallgemeinern, und zwar durch den Beweis, daß die so mit einem Ideal verknüpfte Menge die Vereinigung endlich vieler „irreduzibler Mannigfaltigkeiten" ist, deren „Dimension" die Werte von 0 bis n annehmen kann. Er erfüllte dieses Programm jedoch nur zum kleineren Teil, und sogar ohne daß er die verwendeten Begriffe klar definierte ([24], Bd. II, S. 237—387). Die ersten herausragenden Resultate in der Theorie der Polynomideale wurden von Hilbert in seinen Abhandlungen zur Invariantentheorie (vgl. 3.2.3.) erzielt. Er bewies zunächst, daß jedes Ideal in $C[T_1, \dots, T_n]$ durch *endlich* viele Polynome erzeugt wird; dies zeigte schon, daß die Menge der „Nullstellen" eines Ideals der Durchschnitt endlich vieler algebraischer Hyperflächen ist. Das umgekehrte Problem war in Spezialfällen schon betrachtet worden: Es handelte sich darum festzustellen, welches bei vorgegebenen k Polynomen $P_1, \dots, P_k$ diejenigen Polynome sind, die in den Punkten der durch die Gleichungen $P_1 = 0, \dots, P_k = 0$ definierten Mannigfaltigkeit V verschwinden. In dem einfachen Fall $n = 2$ und $k = 2$ hatte M. Noether im Jahre 1873 bewiesen, daß es im allgemeinen noch *andere* Polynome als die der Gestalt $A_1P_1 + A_2P_2$ (das sind die Polynome des von P_1 und P_2 erzeugten Ideals $\mathfrak{a}$) gibt, die auf V verschwinden, und er hatte hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß dieses Phänomen nicht eintritt. Im Jahre 1883 zeigte E. Netto, daß, ebenfalls für den Fall $n = 2$, $k = 2$, zu jedem auf V verschwindenden Polynom P eine ganze Zahl h existiert derart, daß P^h zu $\mathfrak{a}$ gehört; dieses (unter dem Namen „Nullstellensatz" bekannte) Ergebnis wurde von Hilbert im Jahre 1893 auf beliebige n und k verallgemeinert.

Das Kroneckersche Programm konnte nun präzisiert werden; der Begriff des *Primideals* $\mathfrak{p}$ in $C[T_1, \dots, T_n]$ läßt sich definieren, indem man die von Dedekind für die „Ordnungen" gegebenen Definitionen umformuliert. Gehört für zwei Polynome P und Q das Produkt PQ zu $\mathfrak{p}$, so gehört eines von ihnen zu $\mathfrak{p}$. Ist V die Mannigfaltigkeit der Nullstellen von $\mathfrak{p}$, so sind die einzigen Polynome, die auf V null werden, die Polynome aus $\mathfrak{p}$. Die Nullstellenmannigfaltigkeiten der Primideale werden *irreduzibel* genannt, und eine Antwort auf das Kroneckersche Problem lautet: Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ist die Menge der Polynome P mit $P^h \in \mathfrak{a}$ für ein (von P abhängendes) passendes ganzzahliges $h > 0$ der Durchschnitt endlich vieler Primideale $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$, so daß die Mannigfaltigkeit V, die Menge der Nullstellen von $\mathfrak{a}$, die Vereinigung der irreduziblen Mannigfaltigkeiten V_j (der sogenannten *irreduziblen Komponenten* von V) ist, wobei V_j die Menge der Nullstellen von $\mathfrak{p}_j$ $(1 \leqq j \leqq m)$ ist. Dieses Ergebnis wurde 1905 von Lasker erzielt und 1913 von Macaulay verschärft; dabei mußte man aber die Zerlegung in ein Produkt von Primidealen, die in algebraischen Zahlkörpern gilt, durch ein viel komplizierteres und weniger breit anwendbares Resultat ([2], Kap. IV) ersetzen. Was den Dimensionsbegriff betrifft, so sollte er erst dann invariant definiert werden, nachdem Steinitz die allgemeine Theorie der Körper entwickelt hatte (vgl. 3.5.).

Offenbar gelten alle Resultate der linearen und der multilinearen Algebra über dem Körper der komplexen Zahlen, die wir in 3.2. beschrieben haben, auch über

einem Körper im Dedekindschen Sinne — mit Ausnahme der Probleme, in denen die Eigenwerte einer quadratischen Matrix auftreten (da die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit Koeffizienten in einem Körper $K \subset \boldsymbol{C}$ nicht sämtlich in K zu liegen brauchen). Entsprechend bleibt die Definition eines hyperkomplexen Systems durch die „Multiplikationstabelle" einer Basis (vgl. 3.2.4.) ungeändert, wenn man voraussetzt, daß die Koeffizienten c_{ijk} in dieser Tabelle einem Körper $K \subset \boldsymbol{C}$ angehören und man $\boldsymbol{R}^n$ durch K^n ersetzt. So erhält man die allgemeine Definition eines hyperkomplexen Systems über dem „Grundkörper" (Basiskörper) K, und tatsächlich faßte Dedekind die algebraischen Zahlkörper als hyperkomplexe Systeme über dem Körper $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen auf. Für eine Multiplikationstabelle mit Koeffizienten in K kann man aber ein hyperkomplexes System über einem Grundkörper $K' \supset K$ definieren, indem man die Linearkombinationen $\sum_j x_j e_j$ mit $x_j \in K'$ nimmt, und die Eigenschaften dieses neuen Systems (von dem man sagt, es sei durch „Erweiterung" des Grundkörpers K zu K' gewonnen worden) können von denen des Ausgangssystems sehr verschieden sein. Dies hatte schon Hamilton für die Quaternionen beobachtet, als er den Grundkörper $\boldsymbol{R}$ zu $\boldsymbol{C}$ erweiterte. Er hatte auf diese Weise seine sogenannten „Biquaternionen" erhalten und festgestellt, daß dabei Nullteiler auftraten (etwas später sollten Cayley und die beiden Peirce zeigen, daß dieses System nichts anderes ist als das System der Matrizen der Ordnung 2 über $\boldsymbol{C}$). Dedekind verallgemeinerte dieses Resultat, indem er eine notwendige und hinreichende Bedingung für die c_{ijk} angab, welche sicherstellt, daß das durch Erweiterung von K zu $\boldsymbol{C}$ erhaltene System ein Produkt von Körpern ist, die zu $\boldsymbol{C}$ isomorph sind ([9], Bd. II, S. 21—24); dies ist in diesem Fall damit äquivalent, daß es kein von 0 verschiedenes nilpotentes Element enthält.

3.3.2. *Das Rechnen mit Äquivalenzklassen und in nichtklassischen Körpern*

Wie wir in 2.1.2. gesehen haben, zögerte Gauß bei den verschiedenen Äquivalenzrelationen, auf die er stieß, zwar manchmal nicht, mit den Äquivalenzklassen zu rechnen, indem er sie als neue Objekte ansah, rechnete aber gelegentlich auch mit Repräsentanten dieser Klassen modulo der Äquivalenzrelation (so wie bei seinen Rechnungen mit Kongruenzen; vgl. 5.3.). Als Dedekind 1857 die Gaußschen Resultate über Kongruenzen modulo einer Primzahl darlegte (vgl. 3.1.), stellte er sich auf dessen Standpunkt (obgleich er Galois zitierte) und hielt in der Folgezeit daran fest. Obwohl er ständig mit Äquivalenzrelationen $x - y \in \mathfrak{m}$ (die er in der Gestalt $x \equiv y(\mathfrak{m})$ schrieb) zu tun hatte, wobei $\mathfrak{m}$ ein $\boldsymbol{Z}$-Modul oder ein Modul über dem Polynomring $\boldsymbol{Q}[X]$ ist, führte er niemals den Begriff ein, den wir die entsprechende Quotientenmenge nennen.

Dagegen benutzte Jordan in seinen Arbeiten über die linearen Gruppen die „Galoisschen Imaginären" ohne Einschränkung, wobei er jedoch die Bezeichnungen der Kongruenz beibehielt, und als er die „Jordan-Matrizen" (vgl. 3.2.2.) einführte, handelte es sich um die Reduktion linearer Transformationen über den ganzen Zahlen modulo p, deren Eigenwerte Galoissche Imaginären sind ([21], S. 114—125).

Zum anderen bemerkte Cauchy im Jahre 1847, als er die Einführung der komplexen Zahlen diskutierte, daß man sie als Äquivalenzklassen im Polynomring $\mathbf{R}[X]$ modulo des Polynoms $X^2 + 1$ ansehen kann ([5], (1), Bd. X, S. 312 und 351). Diese Idee wurde von Kronecker wieder aufgegriffen und im Rahmen des Programms verallgemeinert, das er seit 1882 entwickelte und das zum Ziel hatte, die reellen Zahlen aus der Algebra zu eliminieren: Er bemerkte, daß jedes kommutative hyperkomplexe System über dem Grundkörper $\mathbf{Q}$ als Menge von Kongruenzklassen in $\mathbf{Q}[T_1, T_2, \ldots, T_n]$ modulo eines Ideals dieses Ringes angesehen werden kann. Dies ist insbesondere bei algebraischen Zahlkörpern und bei den sogenannten Körpern „algebraischer Funktionen", algebraischen Erweiterungen des Körpers der rationalen Funktionen $\mathbf{Q}(T_1, \ldots, T_n)$, der Fall. Tatsächlich ist es nicht möglich, diese angeblichen Funktionen, die notwendigerweise „mehrdeutig" sind — was jeden vernünftigen algebraischen Kalkül über ihren angeblichen „Werten" völlig ausschließt —, auf korrekte Art in anderer Weise zu definieren. In ihrer großen, im Jahre 1882 veröffentlichten Abhandlung über die „algebraischen Funktionen" einer Veränderlichen ([9], Bd. I, S. 238—350) hüteten sich übrigens Dedekind und H. Weber sehr wohl davor, eine solche „Funktion" θ anders als durch die Tatsache zu definieren, daß sie einer irreduziblen Gleichung $F(\theta, z) = 0$ genügt, wobei F ein irreduzibles Polynom in zwei Veränderlichen mit komplexen Koeffizienten ist (was dem Kroneckerschen Standpunkt äquivalent ist, aber wörtlich genommen nicht korrekter ist, als es der Begriff der „imaginären Wurzeln" einer Gleichung einer Veränderlichen im achtzehnten Jahrhundert war (vgl. 2.2.1.)).

Es dauerte noch zehn Jahre, bis sich H. Weber endlich im Jahre 1893 entschloß, dem Wort *Körper* (im kommutativen Fall) den gleichen allgemeinen Sinn zu geben, den es heute hat, und davon auszugehen, daß die „Galoisschen Imaginären" einen *endlichen* Körper bilden [41]. Etwas später bemerkte E. H. Moore, daß es tatsächlich keine anderen endlichen kommutativen Körper gibt. Dann folgte der Verzicht auf die Kommutativität der Multiplikation, was es ermöglichte, auch die Quaternionen als Elemente eines Körpers anzusehen (im englisch-amerikanischen Sprachgebrauch zieht man im nichtkommutativen Fall den Terminus „Divisionsalgebra" vor).

Man kann noch leicht feststellen, daß die elementaren Begriffe und Eigenschaften der linearen Algebra (Linearkombination, Basis, Dimension) erhalten bleiben, wenn der „Grundkörper" beliebig ist (unter der Bedingung, daß im nichtkommutativen Fall die Multiplikation mit Skalaren stets von derselben Seite ausgeführt wird). Dadurch wird es dann möglich, (elementare und projektive) „Geometrien" mit mehr oder weniger seltsamen Eigenschaften (mit Hilfe von Koordinaten) zu definieren. Von dieser Möglichkeit machten Hilbert und seine Schüler während der allgemeinen Durchmusterung der geometrischen Axiome am Ende des Jahrhunderts Gebrauch (vgl. 13.1.8.). Beispielsweise ergibt sich eine „Geometrie", die nur endlich viele Punkte hat, wenn der „Grundkörper" endlich ist.

Von 1907 an nahm Wedderburn die Untersuchung der hyperkomplexen Systeme wieder auf, wobei er als Grundkörper einen beliebigen kommutativen Körper K wählte. Mittels eines durch die ersten Arbeiten von B. Peirce angeregten Verfahrens gelang es ihm, den Satz von Molien-Cartan zu verallgemeinern (vgl. 3.2.4.): Ein

einfaches hyperkomplexes System über K besteht aus den Matrizen, deren Elemente einem nicht notwendig kommutativen Körper D angehören, dessen Zentrum den Körper K enthält [44]; er selbst und Dickson gaben 1914 die ersten Beispiele für solche nichtkommutativen Körper D, die von dem Quaternionenkörper verschieden sind und im Fall $K = \mathbf{Q}$ eine beliebig große Dimension über K haben. Dagegen hatte Wedderburn kurz vorher bewiesen, daß ein endlicher Körper (der a priori nicht als kommutativ vorausgesetzt wird) tatsächlich kommutativ *sein muß* — zweifellos das bemerkenswerteste Resultat dieser Untersuchungen [43]. Er bewies ferner, daß die hyperkomplexen Systeme ohne Radikal wieder die halbeinfachen Systeme sind, und zwar Produkte endlich vieler einfacher Systeme.

Körper eines ganz anderen Typus tauchen ebenfalls in den letzten Jahren des neunzehnten Jahrhunderts auf: Erstens bilden die formalen Reihen $a_h X^h + a_{h+1} X^{h+1} + \cdots$ mit Koeffizienten aus einem kommutativen Körper K (mit positiv oder negativ ganzzahligem h; vgl. 1.2.) einen Körper (unendlicher Dimension über K); Hilbert bemerkte sogar, daß man diesen Körper nichtkommutativ machen kann, wenn man vorschreibt, daß die Multiplikation für jedes $a \in K$ der Bedingung $Xa = a^\sigma X$ genügt, wobei $a \mapsto a^\sigma$ ein von der Identität verschiedener Automorphismus des Körpers K ist. Andere Körper eines ähnlichen Typus wurden von Hensel in seiner Theorie der *p-adischen Zahlen* (vgl. 5.5.9.) eingeführt — erste Beispiele der allgemeinen Theorie der *bewerteten Körper*, die im zwanzigsten Jahrhundert eine große Rolle in der kommutativen Algebra und der Zahlentheorie spielen sollten (vgl. 5.5.9.).

3.4. Gruppen, Operationen von Gruppen, Geometrie

3.4.1. *Die Anfänge der Theorie der endlichen Gruppen*

Die Untersuchungen in der Gruppentheorie begannen sich etwa 1845 zu entwickeln: Cauchy nahm in dieser Zeit seine seit 30 Jahren liegengelassenen Arbeiten wieder auf, Liouville publizierte 1846 die bis dahin unveröffentlicht gebliebenen Manuskripte von Galois, und in den folgenden 15 Jahren zog das Gebiet solche Mathematiker wie Cayley, Dedekind und Kronecker an. Vom Jahre 1861 an begannen die Arbeiten Jordans, die während der nächsten 20 Jahre die Szene beherrschen sollten und von denen ein beträchtlicher Teil in seinem großen *Traité des substitutions* Aufnahme fand, der für mehrere Generationen zur „Bibel" der Spezialisten der Gruppentheorie wurde [21]. Die wesentlichsten der in dieser Periode erzielten Ergebnisse sind die folgenden:

a) Verhältnismäßig lange war nur von Permutationsgruppen einer endlichen Menge die Rede (häufig sogar nur von der Menge der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, selbst wenn es sich um Fragen der reinen Gruppentheorie handelte). Im Jahre 1854 definierte Cayley in allgemeiner Weise eine „abstrakte" endliche Gruppe als eine endliche Menge, die mit einer Verknüpfungsvorschrift ausgestattet ist (von der nur verlangt wird, daß sie assoziativ ist), ein neutrales Element besitzt

und daß sämtliche Abbildungen $x \mapsto ax$ und $x \mapsto xa$ surjektiv sind (daraus folgt in diesem Fall die Existenz eines inversen Elements) ([58], Bd. II, S. 123 und 131). Die Erweiterung dieser Definition auf beliebige (nicht notwendig endliche) Gruppen scheint vor H. Webers *Lehrbuch der Algebra* von 1899 [42] nicht korrekt formuliert worden zu sein, obwohl auch schon vorher zahlreiche unendliche Gruppen betrachtet und untersucht worden waren; die ersten sind zweifellos die Gruppe der Bewegungen im euklidischen Raum $\boldsymbol{R}^3$ und ihre abgeschlossenen Untergruppen, die von Jordan im Jahre 1868 bestimmt wurden ([20], Bd. IV, S. 231—302).

b) Zu den schon von Cauchy und Galois herausgearbeiteten allgemeinen Begriffen gesellten sich die des Isomorphismus und des surjektiven Homomorphismus (die von Jordan „*isomorphisme holoédrique*" bzw. „*isomorphisme mériédrique*" genannt wurden): Von 1873 an führte Jordan explizit den Begriff der Faktorgruppe ein (bis dahin schloß er „modulo eines Normalteilers"). Die Galoistheorie (vgl. 2.2.2.) liefert für eine endliche Gruppe G in natürlicher Weise den Begriff der *einfachen* Gruppe (die außer G und $\{e\}$ keine Normalteiler hat) und den der *Kompositionsreihe* $G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_m = \{e\}$, in der jedes G_{j+1} Normalteiler von G_j und jede Faktorgruppe G_j/G_{j+1} einfach ist. Im allgemeinen gibt es für ein und dieselbe Gruppe mehrere Kompositionsreihen; Jordan bewies aber, daß diese Reihen stets die gleiche Anzahl von Elementen haben und daß die Ordnungen der Faktorgruppen G_j/G_{j+1} in zwei verschiedenen Reihen bis auf die Reihenfolge übereinstimmen. Hölder verschärfte 1899 dieses Ergebnis, indem er zeigte, daß tatsächlich die Gruppen G_j/G_{j+1} selbst (bis auf die Reihenfolge und bis auf Isomorphie) in diesen Kompositionsreihen übereinstimmen.

c) In seinen Untersuchungen über algebraische Gleichungen vom Primzahlpotenzgrad war Galois dazu geführt worden, die Gruppe der Gleichung mit einer Untergruppe der linearen Gruppe $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{F}_q)$ der invertierbaren Matrizen über einem endlichen Körper $\boldsymbol{F}_q$ zu identifizieren. Jordan beschränkte sich meist auf den Fall, daß $q = p$ eine Primzahl ist, und bestimmte so eine Kompositionsreihe dieser Gruppe sowie der symplektischen Gruppe $\boldsymbol{Sp}(2n, \boldsymbol{F}_p)$ und der orthogonalen Gruppen über dem Körper $\boldsymbol{F}_2$ (deren Existenz er entdeckte und die er „hypoabelsche" Gruppen nannte). Dickson sollte um 1900 diese Ergebnisse vervollständigen, indem er sie auf alle „klassischen" linearen Gruppen über einem endlichen Körper übertrug [10].

d) In dieser Weise erhielt man mehrere unendliche Folgen von endlichen *einfachen* (nichtkommutativen) Gruppen, die sich aus den „klassischen" Gruppen ergaben, zu denen man noch die Folge der alternierenden Gruppen $\mathfrak{A}_n$ für $n \geqq 5$ hinzunehmen muß. E. Mathieu hatte im Jahre 1860 außerdem fünf endliche einfache Gruppen entdeckt, die nicht in diesen Folgen enthalten sind. Nach 1955 haben es die Arbeiten Chevalleys, welche die Theorie der Lieschen Algebren mit gewissen endlichen Gruppen verknüpften, ermöglicht, neue Folgen von einfachen Gruppen zu erhalten [4]; ferner fand man außer den Mathieuschen Gruppen etwa zwanzig Gruppen, die sich nicht in den Rahmen einer allgemeinen Theorie einfügen lassen und die man „sporadische" Gruppen taufte. Das Problem der Bestimmung aller endlichen einfachen Gruppen ist jedoch noch offen [39].

e) Die arithmetischen Eigenschaften der Ordnung einer endlichen Gruppe hängen mit ihrer Struktur zusammen. Schon Cauchy hatte bewiesen, daß eine Gruppe G, deren Ordnung von einer Primzahl p geteilt wird, ein Element der Ordnung p enthält. Sylow zeigte 1872 folgendes: Ist p^ν die höchste Potenz von p, welche die Ordnung von G teilt, so gibt es in G eine Untergruppe (die man „Sylow-Gruppe" nennt) der Ordnung p^ν, und alle diese Untergruppen sind konjugiert (daß es solche Untergruppen gibt, findet sich ohne Beweis in den Manuskripten von Galois ([16], S. 72)). Frobenius bewies, daß eine Gruppe G auflösbar ist, wenn ihre Ordnung nicht durch eine Quadratzahl teilbar ist, und Burnside zeigte, daß eine Gruppe auflösbar ist, wenn diese Ordnung nicht durch mehr als zwei Primzahlen teilbar ist. Das tiefliegendste Ergebnis dieses Problemkreises wurde kürzlich (1963) durch einen höchst komplizierten indirekten Beweis erzielt, der sämtliche Methoden der Gruppentheorie heranzieht. Es ist der Satz von Feit-Thompson, der aussagt: Jede endliche Gruppe *ungerader* Ordnung ist auflösbar [14].

f) Die Struktur der endlichen *kommutativen* Gruppen wurde schon sehr frühzeitig aufgeklärt. Bei der Herausgabe der Werke von Gauß, dabei durch dessen Ideen angeregt, bewies Schering im Jahre 1868, daß die Gruppe der Klassen binärer quadratischer Formen mit vorgegebener Diskriminante direkte Summe von zyklischen Gruppen ist, ein Ergebnis, das Kronecker zwei Jahre später auf alle endlichen kommutativen Gruppen erweiterte ([24], Bd. I, S. 273–282). Die Struktur einer beliebigen unendlichen kommutativen Gruppe ist viel komplizierter und noch nicht vollständig beschrieben. Handelt es sich aber um eine von *endlich* vielen Elementen erzeugte kommutative Gruppe G, so ist sie einem Produkt endlicher zyklischer Gruppen und zu $\mathbf{Z}$ isomorpher Gruppen isomorph. Frobenius und Stickelberger bewiesen 1879, daß sich dieses Resultat leicht aus der Theorie der invarianten Faktoren (vgl. 3.2.2.) mittels einer Methode herleiten läßt, die auf folgender Bemerkung beruht: G ist einer Faktorgruppe M/N isomorph, wobei M einer Gruppe $\mathbf{Z}^n$ isomorph und N eine Untergruppe von M ist ([15], Bd. I, S. 545 bis 590).

3.4.2. *Charaktere und lineare Darstellungen*

Bei seinem Beweis, daß in einer arithmetischen Folge $(an + b)$ mit zueinander teilerfremden Zahlen a und b unendlich viele Primzahlen existieren (vgl. 5.6.), hatte Dirichlet für eine ganze Zahl $k > 1$ Funktionen χ eingeführt, die auf der multiplikativen Gruppe G der Restklassen mod k der zu k teilerfremden ganzen Zahlen definiert sind, deren Werte in $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ liegen und für welche $\chi(x, y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$ für $x, y \in G$ gilt. Im Jahre 1886 betrachtete H. Weber ganz allgemein die Homomorphismen einer beliebigen endlichen kommutativen Gruppe G in die multiplikative Gruppe $\mathbf{C}^*$, die er die *Charaktere* von G nannte. Offenbar sind die Werte eines Charakters in Wirklichkeit die n-ten Einheitswurzeln, wobei n die Ordnung von G ist. Außerdem sind, wenn χ_1, χ_2 zwei Charaktere von G sind, offenbar auch $\chi_1\chi_2$ und χ_2^{-1} Charaktere, so daß die Charaktere von G ihrerseits eine *kommutative Gruppe* $\hat{G}$ bilden. Geht man mit Hilfe des Struktursatzes der kommutativen

Gruppen (vgl. 3.4.1.f)) zu zyklischen Gruppen über, so sieht man mühelos, daß die Gruppe $\hat{G}$ zu G *isomorph* ist; es gibt aber keinen bevorzugten Isomorphismus von G auf $\hat{G}$.

Von 1896 an entwickelte Frobenius eine weitreichende Verallgemeinerung der Weberschen Charaktere, welche beachtliche Auswirkungen haben sollte ([15], Bd. III). Er ging diesmal von einer *beliebigen* endlichen Gruppe G aus und kam in Verbindung mit früheren Versuchen (für spezielle Gruppen), die ihm Dedekind mitgeteilt hatte, rasch auf das allgemeine Problem, das darin besteht, die Homomorphismen von G in eine *lineare Gruppe* $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{C})$ der invertierbaren Matrizen der Ordnung n mit komplexen Elementen zu untersuchen. Diese Homomorphismen werden *lineare Darstellungen vom Grade n* genannt. Für einen solchen Homomorphismus $s \mapsto \mathrm{U}(s)$ zeigte Frobenius, daß es eine invertierbare Matrix P der Ordnung n gibt derart, daß der Homomorphismus $s \mapsto \mathrm{PU}(s)\,\mathrm{P}^{-1}$ von G in $\boldsymbol{GL}(n, \boldsymbol{C})$ in der Gestalt

$$s \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{U}_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{U}_2(s) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{U}_r(s) \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann, wobei kein Homomorphismus $s \mapsto \mathrm{U}_j(s)$ eine weitere solche Reduktion zuläßt und jeder eine sogenannte *irreduzible* lineare Darstellung bildet. Die Abbildung $s \mapsto Tr(\mathrm{U}_j(s))$ nannte Frobenius den der irreduziblen Darstellung $s \mapsto \mathrm{U}_j(s)$ entsprechenden *Charakter* von G. Ist G kommutativ, so haben alle Matrizen $\mathrm{U}_j(s)$ die Ordnung 1, so daß man wieder auf die Webersche Definition kommt. Die Bedeutung der Charaktere besteht darin, daß zwei lineare irreduzible Darstellungen $s \mapsto \mathrm{U}(s)$ und $s \mapsto \mathrm{V}(s)$ genau dann *äquivalent* sind (d. h., daß $\mathrm{V}(s) = \mathrm{P}\,\mathrm{U}(s)\,\mathrm{P}^{-1}$ für eine von $s \in G$ unabhängige Matrix P gilt), wenn sie den *gleichen Charakter* haben.

Einige Jahre später erkannte Frobenius die engen Beziehungen zwischen seiner Theorie und der Theorie der hyperkomplexen Systeme von Molien-Cartan (vgl. 3.2.4.). Cayley hatte schon im Jahre 1854 bemerkt, daß man zu einer endlichen Gruppe G ein hyperkomplexes System $\boldsymbol{C}[G]$ definieren kann, dessen Basis $(e_s)_{s\in G}$ durch G indiziert wird und das die Multiplikationstafel $e_s e_t = e_{st}$ besitzt (es wird heute als *Algebra der Gruppe G über dem Körper* $\boldsymbol{C}$ bezeichnet), ohne übrigens weitere Schlüsse daraus zu ziehen. Der obige Satz über die „Reduzierbarkeit" einer linearen Darstellung ist aber der Tatsache, daß $\boldsymbol{C}[G]$ ein *halbeinfaches* hyperkomplexes System ist, und der Anwendung des Satzes von Molien-Cartan äquivalent.

Die Theorie der linearen Darstellungen von Gruppen läßt sich in mehreren Richtungen verallgemeinern; einerseits kann man die Homomorphismen einer endlichen Gruppe G in eine lineare Gruppe $\boldsymbol{GL}(n, K)$ mit einem *beliebigen* Körper K betrachten [35]. Andererseits läßt sich die ursprüngliche Definition auch für eine nicht notwendig endliche Gruppe G anwenden; um aber wesentliche Resultate zu erhalten, muß man sich dann auf Gruppen beschränken, die mit einer zusätzlichen topologischen oder algebraischen Struktur versehen sind ([D, Kap. 21 und 22], [12]).

Frobenius selbst hatte schon darauf hingewiesen, wie wichtig die Theorie der Charaktere für die Untersuchung der endlichen Gruppen ist; jeder bei diesen Untersuchungen seither erzielte Fortschritt hat den Wert dieses Hilfsmittels, das neben den Sylowschen Sätzen zweifellos das wichtigste in der Gruppentheorie ist, nur noch deutlicher hervortreten lassen [35].

3.4.3. *Operationen von Gruppen und Geometrien*

Wie wir in 2.4.2. gesehen haben, hatte schon Poncelet versucht, die „euklidischen" Begriffe Abstand und Winkel in die projektive Geometrie einzuordnen, was ihm aber nur auf umständliche Weise gelang. Erst 1853 bewies Laguerre (noch als Schüler an der Ecole Polytechnique) folgendes: Bilden zwei Geraden in der Ebene den Winkel α, so ist $e^{-2i\alpha}$ das Doppelverhältnis dieser Geraden und der beiden isotropen Geraden ([25], Bd. II, S. 13). Mit anderen Worten, der Winkel zweier Geraden kann als projektive Invariante, nicht der beiden unendlich fernen Punkte dieser Geraden, sondern des aus diesen Punkten und den beiden Kreispunkten bestehenden Systems von *vier* unendlich fernen Punkten angesehen werden. Dieser Standpunkt wurde von Cayley verallgemeinert, der im Jahre 1858 das Poncelet-sche Problem vollständig löste: Die „metrischen" Eigenschaften einer ebenen Figur sind nichts anderes als die „projektiven" Eigenschaften der um die Kreispunkte erweiterten Figur ([6], Bd. II, S. 561–592, und 13.1.5.).

Dieses Ergebnis läßt sich in anderer Weise ausdrücken: Die „metrischen" Eigenschaften sind diejenigen, die bei jeder projektiven Transformation, welche die Kreispunkte invariant läßt, erhalten bleiben, und man sieht leicht, daß diese Transformationen nichts anderes sind als die klassischen euklidischen *Ähnlichkeiten*. Bekanntlich wies Cayley in derselben Arbeit auf eine Verallgemeinerung dieses Standpunktes hin, indem er an Stelle der Ähnlichkeiten die projektiven Transformationen untersuchte, welche einen nicht entarteten Kegelschnitt (global) invariant lassen, ohne daß er sich übrigens darüber klar wurde, daß die von ihm auf diese Weise definierten „Pseudo-Abstände" und „Pseudo-Winkel" nichts anderes sind als diejenigen, welche in der nichteuklidischen Geometrie Lobačevskijs auftreten (vgl. 13.1.5.).

Bei Cayley handelt es sich noch nicht um Gruppen; als aber F. Klein im Jahre 1871 Cayleys Ergebnisse als ein „Modell der nichteuklidischen Geometrie" interpretierte, tat er es unter dem Einfluß der Vorstellungen von Jordan und Lie über die Transformationsgruppen und ihre „Orbits"[1]). Während ihres gemeinsamen Aufenthalts in Paris im Jahre 1870 hatten Klein und Lie, als sie den von Jordan in seiner Abhandlung über die Bewegungsgruppen (vgl. 3.4.1.) eröffneten Weg weiter verfolgten, die kommutativen Untergruppen der projektiven Gruppe $\boldsymbol{PGL}(3, \boldsymbol{C})$ der Ebene und ihre Orbits (unter der Bezeichnung „W-Kurven")

[1]) Der Terminus „Orbit" tritt in der zitierten Arbeit nicht auf. Es handelt sich um „Kurven", welche durch einfach unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen (in deutschsprachigen Arbeiten von F. Klein als W-Kurven (statt V-Kurven im Französischen) bezeichnet. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

untersucht und in dieser Weise durch eine einheitliche Methode die geometrischen Eigenschaften verschiedenartiger algebraischer oder transzendenter Kurven wie $y = cx^m$ bzw. der logarithmischen Spiralen erhalten ([22], Bd. I, S. 416–420).

Als F. Klein im Jahre 1872 in seiner Antrittsvorlesung an der Universität Erlangen ein „Programm" unter dem Titel *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [23][1] vorlegte, waren es diese Ideen, welche ihm als Leitfaden dienten und das Gerüst seiner Vorstellung von den „Geometrien" bildeten, die er darin entwickelte und die nach mehr als einem Jahrhundert die unseren geblieben sind. Das grundlegend Neue ist, daß für Klein das, was eine „Geometrie" charakterisiert, nicht mehr ein mit gewissen Eigenschaften versehener Raum ist, sondern eine *Gruppe* Γ *von eineindeutigen Abbildungen* einer Menge (oder, wie Klein sagte, einer „Mannigfaltigkeit") E, und der Gegenstand der so definierten „Geometrie" ist „*die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften* (*zu*) *untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden*" ([23][1], S. 34). Ist E ein projektiver Raum und Γ die projektive Gruppe oder eine ihrer Untergruppen, so präzisierte Klein diese etwas vage Vorstellung: Es handelt sich darum (wenigstens für das, was man als den „elementaren" Teil der betrachteten „Geometrie" ansehen kann), „die auf die Gruppe Γ bezügliche Invariantentheorie" zu entwickeln ([23][1], S. 35), wobei das Wort „Invariante" im oben betrachteten algebraischen Sinne (vgl. 3.2.3.) zu verstehen ist. Genauer gesagt handelt es sich um die Kovarianten einer bestimmten Anzahl von Vektoren und Formen, wobei die Definition (17) der „Kovarianten" auf die zu Γ gehörenden Transformationen U *eingeschränkt* wird.[1]) In dem Fall, daß (wie bei Cayley) die Gruppe Γ selbst als gewisse Vektoren und gewisse Formen invariant lassende Untergruppe der projektiven Gruppe definiert ist, bemerkte Klein, daß sich die Bestimmung der Kovarianten für Γ auf die klassische Theorie zurückführen läßt, indem man, wie Cayley es getan hatte, die Elemente, deren Invarianz Γ definiert, zu den Vektoren und Formen, deren Kovarianten man sucht, „adjungiert" und die Kovarianten dieses erweiterten Systems *im klassischen Sinne*, d. h. für die ganze projektive Gruppe betrachtet.

Insbesondere hob Klein folgendes hervor (ebenda, S. 42): Wenn zwei durch die Paare (Γ, E) bzw. (Γ', E') definierte „Geometrien" mittels einer eineindeutigen Abbildung φ von E auf E', die Γ in Γ' transformiert, auseinander hergeleitet werden können, dann sollen sie als äquivalent angesehen werden in dem Sinne, daß man aus jedem Satz der einen Geometrie mittels φ sofort einen Satz der anderen folgern kann. Das ist zweifellos eine der ersten Manifestationen der modernen Vorstellung der „Strukturübertragung".

Klein gab dafür eine ganze Reihe frappierender Beispiele, die auf den kanonischen Isomorphismen der „klassischen Gruppen" beruhen [10] (von denen er übrigens die meisten selbst entdeckte). Das interessanteste ist jenes, das dem

[1]) Ein Satz von Gram (Math. Ann. 7 (1874)) lehrt, daß jedes System algebraischer Relationen zwischen Formen und Vektoren, das gegenüber den Transformationen aus Γ invariant ist, einem System äquivalent ist, das man erhält, wenn man eine gewisse Anzahl von Kovarianten der gegebenen Formen und Vektoren sowie eine gewisse Anzahl von Hilfsvektoren null setzt ([46], S. 240).

kanonischen Isomorphismus der projektiven Gruppe $\boldsymbol{PSL}(4, \boldsymbol{C})$ auf die orthogonale Gruppe $\boldsymbol{PO}(6, \boldsymbol{C})$ entspricht; es tauchte bei der Entwicklung eines Gedankenkreises auf, der sich gegen 1860 in der projektiven Geometrie durchsetzte: Dank der Vertrautheit mit der projektiven Dualität, die dazu führte, daß man mit Hyperebenen umging, als seien es *Elemente* einer Menge, und sie dabei nicht mehr als Teilmengen des Raumes ansah, kam man zweifellos auf den Gedanken, andere geometrische Objekte, die als ,,Punkte" eines neuen Raumes aufgefaßt wurden, zu behandeln. Dies gerade ermöglichte es, die geometrischen Begriffe auf beliebige Dimensionen zu übertragen. Beispielsweise können die ebenen algebraischen Kurven n-ten Grades, die von $n(n+3)/2$ inhomogenen Parametern abhängen, als ,,Punkte" eines $n(n+3)/2$-dimensionalen projektiven Raumes aufgefaßt werden: Die erste wichtige Weiterentwicklung dieser Idee ist die ,,Liniengeometrie", die man Plücker und Cayley (unabhängig voneinander) verdankt. Einer durch zwei Punkte von $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$ mit den homogenen Koordinaten

$$\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix}$$

hindurchgehenden Geraden ordneten sie die sechs Determinanten zweiter Ordnung $p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$ $(0 \leqq i < j \leqq 3)$ dieser Matrix zu, die sie die ,,Linienkoordinaten"[1]) der Geraden nannten; diese Zahlen sind durch die Relation

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0 \tag{29}$$

verknüpft; umgekehrt bestimmen sechs nicht sämtlich verschwindende Zahlen, die (29) genügen, eindeutig eine Gerade in $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$, und alle Systeme (p_{ij}), die ein und derselben Geraden entsprechen, sind einander proportional. Die Untersuchung der Geradenscharen (Regelflächen, ,,Kongruenzen" und ,,Komplexe") kann mit Hilfe dieser (Linien-)Koordinaten auf elegante Art durchgeführt werden. Klein ging jedoch noch weiter, indem er die Gleichung (29) als Definition einer Quadrik im fünfdimensionalen projektiven Raum $\boldsymbol{P}_5(\boldsymbol{C})$ auffaßte und annahm, in dieser Weise werde eine eineindeutige Abbildung φ der Menge E der Geraden von $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$ auf diese Quadrik E' definiert; der projektiven Gruppe Γ in $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$, die er als *auf* E *operierend* ansah, entspricht die Untergruppe Γ' der projektiven Gruppe von $\boldsymbol{P}_5(\boldsymbol{C})$, welche E' global invariant läßt und als *auf* E' *wirkend* angesehen wird. Die ganze Theorie der Geradensysteme im $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{C})$ ist also von der allgemeinen Theorie der Quadriken ausgehend zu verstehen.

Die gleiche Logik des Vorgehens führte Klein in natürlicher Weise dazu, den Rahmen der projektiven Geometrie zu überschreiten und andere Gruppen zu betrachten — wie die Gruppen der birationalen Transformationen der Ebene oder der Homöomorphismen eines topologischen Raumes usw. Vor kurzem hat man sich von der Notwendigkeit befreit, ausschließlich Gruppen Γ zu betrachten, die als Gruppen von eineindeutigen Abbildungen einer Menge E *vorgegeben* sind: Für eine *beliebige* Gruppe Γ genügt es, einen Homomorphismus von Γ in die Gruppe der

[1]) Dies sind natürlich die Komponenten des Bivektors $x \wedge y$ mit $x = (x_j)$ und $y = (y_j)$, aber weder Cayley noch Plücker zitierten Graßmann.

eineindeutigen Abbildungen von E zu haben, um dadurch schon Γ auf E „*operieren*“ zu lassen, eine Idee, die jetzt in allen Gebieten der modernen Mathematik eine herausragende Rolle spielt (siehe [23], Vorwort).

3.5. Die Geburt der modernen Algebra

Zu Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts verfügte man über alle Elemente, welche die heutige Algebra bilden; mit den mengentheoretischen Vorstellungen war man vertraut geworden, und der Begriff einer auf die Elemente einer beliebigen Menge anzuwendenden Verknüpfungsvorschrift war längst bekannt. Was zu tun blieb, war die Synthese all dessen. Sie vollzog sich in Windeseile.[1])

Von 1910 an erarbeitete E. Steinitz die allgemeine Theorie der kommutativen Körper, und in einer klassisch gewordenen Abhandlung [37] beleuchtete bzw. entdeckte er eine ganze Reihe von Begriffen und Erscheinungen, auf die man bis dahin nicht gestoßen war bzw. die nur in Spezialfällen bekannt geworden waren: Separabilität, algebraische Abschließung, Transzendenzbasis, unvollkommene Körper usw. Er arbeitete die Begriffe algebraische Erweiterung und rein transzendente Erweiterung klar heraus und bewies, daß jede Erweiterung E eines Körpers K algebraische Erweiterung einer rein transzendenten Erweiterung L von K ist und daß die Anzahl der Elemente einer Transzendenzbasis von L über K (der *Transzendenzgrad*) nicht von der Wahl des Körpers abhängt. Dies definiert in invarianter Weise den Begriff der *Dimension* einer irreduziblen Mannigfaltigkeit $V \subset \boldsymbol{C}^n$ (vgl. 3.3.1.): Die Einschränkungen der als Funktionen auf $\boldsymbol{C}^n$ aufgefaßten Polynome aus $\boldsymbol{C}[T_1, T_2, \ldots, T_n]$ auf V bilden einen Integritätsbereich, und die Dimension von V ist der Transzendenzgrad über $\boldsymbol{C}$ des Quotientenkörpers dieses Ringes. Die Steinitzsche Theorie gestattet es auch, die Galoistheorie für einen beliebigen Körper so darzustellen, wie es schon Dedekind für die algebraischen Zahlkörper getan hatte, wobei die Galoisgruppe nicht mehr eine Permutationsgruppe von Wurzeln ist, sondern eine Automorphismengruppe eines Körpers.

Steinitz behandelte die lineare Algebra über einem kommutativen Körper noch wie im neunzehnten Jahrhundert mittels Determinanten. Von 1920 an sollte sich aber das, was unter linearer Algebra verstanden wurde, unter dem Einfluß der Theorie der hyperkomplexen Systeme (der Terminus wird ab 1930 durch das Wort „Algebra“ verdrängt) und der Theorie der linearen Darstellungen von Gruppen beträchtlich verbreitern. Ist $s \mapsto \mathrm{U}(s)$ eine lineare Darstellung n-ten Grades einer Gruppe G, so kann man sich auf den Standpunkt stellen, G *operiere* gemäß der Vorschrift $(s, x) \mapsto \mathrm{U}(s) \cdot x$ auf $\boldsymbol{C}^n$. Zum zentralen Begriff der linearen Algebra entwickelte sich eindeutig der Begriff der (kommutativen) *Gruppe mit Operatoren*, d. h. eine additiv geschriebene kommutative Gruppe Γ, die mit einer Abbildung $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ von $A \times \Gamma$ in Γ versehen ist, wobei A (der Operatorenbereich) eine beliebige Menge ist und die „Wirkung“ von A auf Γ der Bedingung

[1]) Bezüglich der Begriffe der modernen Algebra, von denen in diesem Abschnitt die Rede ist, siehe [G], [L] oder [D, Anhang].

$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ genügt. Dieser Begriff umfaßt den des Vektorraumes, des „Moduls" im Sinne von Dedekind, des Linksideals bzw. des Rechtsideals eines Ringes[1]) usw. Der wichtigste Fall ist der, daß A ein Ring ist und $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$ sowie $(\alpha\beta)\, x = \alpha(\beta x)$ gilt, Bedingungen, die Γ als A-(Links)*Modul* definieren. Von 1920 an war die Untersuchung der (nicht notwendig kommutativen) Ringe eng mit dem Studium der Moduln über Ringen verknüpft, und diese „Linearisierung" der Algebra verstärkte sich noch, als sich nach 1942 die homologische Algebra entwickelte (vgl. 10.9.3.). Natürlich verdrängten diese Vorstellungen die Determinanten fast völlig; dies ist einer der deutlichsten Züge, die das im Jahre 1930 erschienene Buch van der Waerdens, *Moderne Algebra* [40], von seinen Vorgängern unterscheidet; es sollte, da es in vorbildlicher Klarheit die Ergebnisse des vorangegangenen halben Jahrhunderts zu einem gut durchdachten Ganzen zusammenfaßte, weiteren Entwicklungen als Ausgangsbasis dienen.

Auf diese neueren Entwicklungen können wir, was die „vordersten" Teilgebiete der heutigen Algebra und ihre beiden Hauptzweige betrifft, die eng mit der algebraischen Geometrie zusammenhängende kommutative Algebra und die homologische Algebra, die einen großen Teil der Mathematik durchdringt, nicht eingehen; als Einführung in das erste Gebiet möge der Leser die Werke [33] bzw. [2], für das zweite die Werke [H], [3] bzw. [27] heranziehen. In van der Waerdens Buch wurden aber zwei Theorien nicht behandelt, die in dem folgenden Jahrzehnt in einer zweiten Etappe den „elementaren" Teil der heutigen Algebra vollendet haben, nämlich die Dualität von Vektorräumen und die multilineare Algebra.

Ein Algebraiker des neunzehnten Jahrhunderts würde eine n-äre Linearform als Funktion

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$$

auf $\boldsymbol{C}^n$ ansehen; da sie durch die Angabe der n komplexen Zahlen w_j charakterisiert ist, läßt sie sich auch als „Vektor" $(w_1, \dots, w_n)$ auffassen. Jedenfalls hat, wenn man die Variablen x einer linearen Substitution $x = \mathrm{U} \cdot x'$ unterwirft, die transformierte lineare Form Koeffizienten w_i', die mit den ursprünglichen durch die davon verschiedene Relation $w = {}^t\mathrm{U}^{-1} \cdot w'$ verknüpft sind. Die symbolische Methode der Invariantentheorie (vgl. 3.2.3.) wurde also dahingebracht, sich in dem gleichen Raum $\boldsymbol{C}^n$ mit zwei Arten von „Vektoren" zu befassen, je nachdem, ob sie auf die eine oder die andere Art durch eine lineare Substitution transformiert wurden, und die man dadurch unterschied, daß sie „kontragredient" bzw. „kogredient" genannt wurden.

Die Auffassung änderte sich um 1930 unter dem Einfluß der Theorie der komplexen normierten Räume, in der die „Linearformen" über einem solchen (im allgemeinen unendlichdimensionalen) Raum E als $\boldsymbol{C}$-lineare Abbildungen (die im allgemeinen gewissen Stetigkeitsforderungen unterliegen) von E in $\boldsymbol{C}$ aufgefaßt werden müssen, ohne daß sie sich im allgemeinen mit Elementen aus E identifizieren lassen. Will man sich von diesem Standpunkt aus in der linearen Algebra

---

[1]) Die Begriffe Links- bzw. Rechtsideal traten erstmals 1903 in einer Abhandlung H. Poincarés über die Integration linearer Differentialgleichungen auf ([31], Bd. III, S. 140–149).

orientieren, so muß man zunächst auf die Graßmann-Peanosche Vorstellung (vgl. 3.2.1.) eines *endlich*dimensionalen Vektorraumes E über einem *kommutativen* Körper k zurückgreifen, wobei *nicht vorausgesetzt* wird, es sei eine spezielle Basis gewählt worden. Die Linearformen über E sind dann die k-linearen Abbildungen $u: E \to k$; die Menge dieser Abbildungen $\mathrm{Hom}\,(E, k)$ ist ein k-Vektorraum, der sogenannte *zu E duale Raum*, der allgemein mit E^* bezeichnet wird. Für $x^* \in E^*$ schreibt man oft $\langle x, x^* \rangle$ statt $x^*(x)$. Jeder Basis $(e_j)_{1 \leqq j \leqq n}$ von E entspricht eine eindeutig bestimmte Basis $(e_j^*)_{1 \leqq j \leqq n}$ von E^*, welche durch $\langle e_j, e_k^* \rangle = \delta_{jk}$ (Kroneckersymbol) charakterisiert und die zu (e_j) *duale Basis* genannt wird. E und E^* haben also die gleiche Dimension, doch hüte man sich sehr davor, sie zu identifizieren. Ordnet man dagegen einem $x \in E$ die Linearform $\tilde{x}: x^* \mapsto \langle x, x^* \rangle$ *auf* E^* zu, so wird dadurch ein *kanonischer* Isomorphismus $x \mapsto \tilde{x}$ von E auf E^{**} definiert, der es erlaubt, diese beiden Räume zu identifizieren.

Die Anwendung der gleichen Idee auf *Bilinearformen* führt in natürlicher Weise zu den Begriffen *Tensorprodukt* und *Tensor*. Man geht von zwei Vektorräumen E und F über k der endlichen Dimension m bzw. n aus und betrachtet die Menge der k-Bilinearformen $u: E \times F \to k$. Unter diesen Formen kommen die speziellen Formen $(x, y) \mapsto \langle x, x^* \rangle \langle y, y^* \rangle$ für beliebige $x^* \in E^*$ und $y^* \in F^*$ vor; man bezeichnet diese Bilinearform mit $x^* \otimes y^*$ und nennt sie das *Tensorprodukt* von x^* und y^*. Ist (e_j^*) eine Basis von E^* und (f_k^*) eine Basis von F^*, so stellt man fest, daß die Formen $e_j^* \otimes f_k^*$ eine Basis des Vektorraumes der Bilinearformen auf $E \times F$ bilden, den man folglich mit $E^* \times F^*$ bezeichnet und das *Tensorprodukt* von E^* und F^* nennt. Dies läßt sich sofort auf Multilinearformen verallgemeinern und liefert so eine Definition des Tensorprodukts $E_1^* \otimes E_2^* \otimes \cdots \otimes E_r^*$ von beliebig vielen dualen Räumen endlichdimensionaler Räume über k. Da aber jeder endlichdimensionale Raum E über k als ein dualer Raum $(E^*)^*$ angesehen werden kann, erkennt man leicht, daß man damit den Begriff des Tensorprodukts einer beliebigen endlichen Anzahl solcher Räume definiert hat.

Sind zwei k-lineare Abbildungen $u_1: E_1 \to F_1$ und $u_2: E_2 \to F_2$ gegeben, so ergibt sich daraus eine eindeutig bestimmte k-lineare Abbildung[1])

$$u_1 \otimes u_2: E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$$

mit der Eigenschaft $(u_1 \otimes u_2)\,(x_1 \otimes x_2) = u_1(x_1) \otimes u_2(x_2)$. Dies definiert einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}\,(E_1, F_1) \otimes \mathrm{Hom}\,(E_2, F_2) \to \mathrm{Hom}\,(E_1 \otimes E_2, F_1 \otimes F_2)\,.$$

---

[1]) Kronecker hatte in seinen Vorlesungen das Äquivalent von $u_1 \otimes u_2$ in der Sprache der Matrizen eingeführt, als er das „Kroneckerprodukt zweier Matrizen" $\mathrm{U} = (u_{ij})$ und $\mathrm{V} = (v_{hk})$ als Schema von Matrizen $(u_{ij}\mathrm{V})$ definierte. Zum anderen hatte W. Clifford (bis auf die Terminologie) festgestellt, daß man aus zwei hyperkomplexen Systemen mit den Basen (e_j) und (f_k) ein drittes, das Tensorprodukt der ersten beiden, mit der Basis $(e_j \otimes f_k)$ und der Multiplikationstafel $(e_j \otimes f_k)\,(e_h \otimes f_l) = (e_j e_h) \otimes (f_k f_l)$ herleiten kann, wobei man auf der rechten Seite $e_j e_h$ und $f_k f_l$ durch die Ausdrücke ersetzen muß, die man aus der Multiplikationstafel der (e_j) bzw. (f_k) erhält. Er hatte diesen Begriff benutzt, um die Cliffordschen Algebren als Tensorprodukte des Körpers der komplexen Zahlen, des Quaternionenkörpers und von Matrizenalgebren schreiben zu können [8].

Wählt man $F_1 = F_2 = k$, so erhält man als Spezialfall den kanonischen Isomorphismus

$$E_1^* \otimes E_2^* \simeq (E_1 \otimes E_2)^* , \tag{30}$$

und wählt man $F_1 = E_2 = k$, so ergibt sich der kanonische Isomorphismus[1])

$$E^* \otimes F \simeq \mathrm{Hom}\,(E, F) . \tag{31}$$

Ist ein endlichdimensionaler k-Vektorraum E gegeben, so wird das Tensorprodukt von r Vektorräumen, die sämtlich gleich E sind, mit $E^{\otimes r}$ bezeichnet und die r-te *tensorielle Potenz* von E genannt. Mit $T_s^r(E)$ bezeichnet man das Tensorprodukt $(E^*)^{\otimes s} \otimes (E^{\otimes r})$; die Elemente dieses Raumes sind die *gemischten r-fach kontravarianten und s-fach kovarianten Tensoren* über E (die Elemente von $T_0^r(E) = E^{\otimes r}$ werden kurz *r-fach kontravariante Tensoren*, die Elemente von $T_s^0(E) = (E^*)^{\otimes s}$ kurz *s-fach kovariante Tensoren* genannt). Derartige Objekte hatten sich mit der Entwicklung der Theorie der Riemannschen Räume und ihrer Verallgemeinerung (vgl. 9.7.) in natürlicher Weise in der Differentialgeometrie eingestellt, wobei als Raum E der Tangentialraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in einem Punkt fungierte.

Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_r$ operiert in natürlicher Weise auf einer tensoriellen Potenz $E^{\otimes r}$, so daß für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_r$

$$\sigma \cdot (x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_r) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes x_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(r)}$$

gilt. Dies ermöglicht es, die *symmetrischen* Tensoren $z \in E^{\otimes r}$ durch die Bedingung $\sigma \cdot z = z$ für jedes $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ und die *antisymmetrischen* Tensoren durch die Bedingung $\sigma \cdot z = \varepsilon_\sigma z$ für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ zu definieren, wobei ε_σ die Signatur von σ ist. Die *symmetrischen r-fach kovarianten* Tensoren lassen sich mit den *n-ären Formen r-ten Grades* identifizieren, wenn E die Dimension n hat. Die *antisymmetrischen r-fach kontravarianten* Tensoren lassen sich mit den *r-Vektoren* der äußeren Algebra über E (vgl. 3.2.5.) identifizieren; den Vektorraum dieser r-Vektoren bezeichnet man mit $\bigwedge^r E$.

Zwischen den Vektorräumen $\bigwedge^r E$ und $\bigwedge^r(E^*)$ existiert eine natürliche *Dualität*, die durch die Formel

$$\langle x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_r, x_1^* \wedge x_2^* \wedge \cdots \wedge x_r^* \rangle = \det\,(\langle x_j, x_k^* \rangle) \tag{32}$$

gegeben wird.

Diese Dualität ermöglicht es, auf invariante und natürliche Weise die verschiedenen von Graßmann eingeführten Produkte darzustellen, deren Kompliziertheit die Verbreitung seiner Ideen beeinträchtigt hatte. Hat E die Dimension n und ist $p + q \leqq n$, so hat die Abbildung $v_p \mapsto v_p \wedge z_q$ von $\bigwedge^p E$ ind $\bigwedge^{p+q} E$ für jedes Element $z_q \in \bigwedge^q E$ eine *Transponierte*, die gemäß der oben angegebenen Dualität mit einer linearen Abbildung von $\bigwedge^{p+q} E^*$ in $\bigwedge^p E^*$ identifiziert werden kann, die man

---

[1]) Die Existenz dieses Isomorphismus „erklärt", wieso die Matrizen in natürlicher Weise in die Theorie der Bilinearformen hereinkommen (vgl. 3.2.2.).

mit

$$u^*_{p+q} \mapsto z_q \lrcorner\, u^*_{p+q} \tag{33}$$

bezeichnet und *inneres Produkt* mit z_q nennt. Für jeden n-Vektor e^* über E^* ist die Abbildung $\varphi: z \mapsto z \lrcorner\, e^*$ eine bis auf einen skalaren Faktor wohldefinierte *eineindeutige Abbildung* von $\bigwedge^p E$ auf $\bigwedge^{n-p} E^*$. Die Existenz dieser Abbildung macht die von Graßmann eingeführten „regressiven" Produkte überflüssig, da diese sich auf gewöhnliche äußere Produkte, aber in der *dualen äußeren Algebra* über E^*, zurückführen lassen.

Daß die p-Vektoren in der Geometrie von Bedeutung sind, rührt, wie wir gesehen haben, vor allem daher, daß ein nichtverschwindender *zerlegbarer* (oder *reiner*) p-Vektor der Gestalt $z = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_p$ (mit $x_j \in E$) (bis auf einen skalaren Faktor) eineindeutig einem von den x_j erzeugten Teilraum V_z entspricht. Ist z zerlegbar, so auch $\varphi(z)$, und $V_{\varphi(z)}$ ist nichts anderes als der zu V_z *orthogonale* $(n-p)$-dimensionale Teilraum von E^*.

Die inneren Produkte ermöglichen es außerdem, die zerlegbaren p-Vektoren im Raum aller p-Vektoren über E zu *charakterisieren*. Man kann nämlich, indem man die Rollen von E und E^* vertauscht, die inneren Produkte $u^*_q \lrcorner\, z_{p+q}$ definieren. Ein p-Vektor z_p ist genau dann zerlegbar, wenn

$$z_p \wedge (u^*_{p-1} \lrcorner\, z_p) = 0 \tag{34}$$

für *jeden* $(p-1)$-Vektor u^*_{p-1} über E^* ist. (Für $n = 4$ und $p = 2$ liefert dies wieder Formel (29).) Sind $z_p \in \bigwedge^p E$ und $z'_q \in \bigwedge^q E$ (mit $p < q$) zerlegbar, dann läßt sich auch die Bedingung dafür, daß $V_{z_p} \subset V_{z'_q}$ gilt, sehr leicht angeben: Notwendig und hinreichend dafür ist, daß

$$z'_q \wedge (u^*_{p-1} \lrcorner\, z_p) = 0 \tag{35}$$

für *jeden* $(p-1)$-Vektor u^*_{p-1} über E^* gilt.

Die Tensoren und die äußere Algebra, die ursprünglich vor allem in der Differentialgeometrie benutzt wurden, sind in zahlreichen Teilen der Algebra zu wichtigen Werkzeugen geworden. Sie ermöglichten es beispielsweise, die klassische Invariantentheorie (vgl. 3.2.3.) zu verallgemeinern, die zu einem Teilgebiet der allgemeinen Theorie der linearen Darstellungen von Gruppen (vgl. 3.4.2.) wurde: Ist nämlich E ein n-dimensionaler Vektorraum über k, so operiert die lineare Gruppe $\boldsymbol{GL}(E)$ in kanonischer Weise linear auf E und E^*, daher auch über das Tensorprodukt auf jedem Tensorraum $T^r_s(E)$; mit anderen Worten, man hat eine kanonische *lineare Darstellung* von $\boldsymbol{GL}(E)$ in den Raum $T^r_s(E)$, und man kann sagen, ein Tensor $z \in T^r_s(E)$ sei *kovariant*, wenn er bei der Anwendung jedes Operators aus $\boldsymbol{GL}(E)$ mit einem Skalar multipliziert wird. Der klassische Fall der n-ären Formen r-ten Grades ist derjenige, bei dem man sich auf die symmetrischen Tensoren in $T^0_r(E)$ beschränkt [12].

Wir weisen schließlich darauf hin, daß diese Begriffe der multilinearen Algebra auf Moduln über einem beliebigen kommutativen Ring verallgemeinert werden können und dann eine wichtige Rolle in der homologischen Algebra spielen ([3] und [27]).

3.6. Literatur

[D] J. Dieudonné, Grundzüge der modernen Analysis, Bd. 1—8, Friedr. Vieweg + Sohn (Braunschweig), Wiesbaden/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971—1983. (Übersetzung aus dem Französischen).

[G] R. Godement, Cours d'Algèbre, Hermann, Paris 1963.

[G—H] H. Griffiths and P. Hilton, A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics: A Contemporary Interpretation, Van Nostrand — Reinhold, London 1970. Nachdruck: Springer-Verlag, New York 1978. Deutsche Übersetzung: Klassische Mathematik in zeitgenössischer Darstellung, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1976—1978 (in 3 Bänden).

[H] S. T. Hu, Introduction to Homological Algebra, Holden Day, 1968.

[L] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1965 (*Russisch*: Moskau 1968).

[1] G. Boole, Exposition of a general theory of linear transformations, Cambridge Math. J. *3* (1841), 1—20 und 106—119.

[2] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Kap. I—VII, Hermann, Paris 1961—1965.

[3] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton Univ. Press 1956.

[4] R. Carter, Simple groups of Lie type, Wiley, New York 1972.

[5] A. L. Cauchy, Oeuvres complètes, 27 Bde. (2 Reihen), Gauthier-Villars, Paris 1882—1974.

[6] A. Cayley, Collected Mathematical Papers, 13 Bde., University Press, Cambridge 1889—1898.

[7] A. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Teubner, Leipzig 1872.

[8] W. K. Clifford, Mathematical Papers, Macmillan, London 1882.

[9] R. Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, 3 Bde., Vieweg, Braunschweig 1932.

[10] J. Dieudonné, La Géométrie des groupes classiques, 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[11] J. Dieudonné, Sur la réduction canonique des couples de matrices, Bull. Soc. Math. de France *74* (1946), 130—146.

[12] J. Dieudonné and J. Carrell, Invariant theory, old and new, Academic Press, New York 1971.

[13] G. Eisenstein, Mathematische Werke, Chelsea, New York 1975.

[14] W. Feit and J. Thompson, Solvability of groups of odd order, Pacific J. Math. *13* (1963), 775—1029.

[15] G. Frobenius, Gesammelte Abhandlungen (Hrsg. J. P. Serre), 3 Bde., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1968.

[16] E. Galois, Ecrits et mémoires mathématiques, Hrsg. R. Bourgne und J. P. Azra, Gauthier-Villars, Paris 1962.

[17] C. F. Gauß, Werke, 12 Bde., Göttingen 1870—1927.

[18] J. Grace and A. Young, The algebra of invariants, 1903, Nachdruck Chelsea, New York (ohne Datum).

[19] H. Graßmann, Gesammelte Werke, 3 Bde., Teubner, Leipzig 1894—1911.

[20] C. Jordan, Oeuvres, 4 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1961—1964.

[21] C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, 2. Aufl., Gauthier-Villars u. A. Blanchard, Paris 1957.

*[21 bis] N. F. Kanunov, Fedor (= Theodor) Eduardovič Molin (= Molien) 1861—1941 (russ.), Nauka, Moskva 1983.

[22] F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, 3 Bde., Springer, Berlin 1921—23.

[23] F. Klein, Le programme d'Erlangen, Nachdruck, Gauthier-Villars, Paris 1974.

*[23][1] F. Klein, Das Erlanger Programm, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 253, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1974.

[24] L. Kronecker, Werke, 5 Bde., Teubner, Leipzig 1895—1930.

[25] E. Laguerre, Oeuvres, 2 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1898—1905.

[26] C. MacDuffee, The theory of matrices, Chelsea, New York (ohne Datum).

[27] S. MacLane, Homology, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.

[28] W. F. Meyer, Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie, Jahresber. der DMV *1* (1890—1891), 79—292.

[29] D. Mumford, Geometric Invariant Theory, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1965.

*[29 bis] O. Neumann und W. Purkert, Richard Dedekind zum 150. Geburtstag, Mitteil. Math. Ges. DDR (1981), H. 2/4, 84—110.

[30] G. Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva, Torino 1888.

[31] H. Poincaré, Oeuvres, 11 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1916—1956.

[32] I. Porteous, Topological Geometry, Van Nostrand-Reinhold, London 1969.

[33] P. Samuel and O. Zariski, Commutative Algebra, 2 Bde., Van Nostrand, Toronto-New York-London 1958.

*[33 bis] W. Scharlau, Unveröffentlichte algebraische Arbeiten Richard Dedekinds aus seiner Göttinger Zeit 1855 bis 1858, Archive Hist. Exact. Sci. *27* (1982), 335—367. Vgl. auch 6.11., *[89 bis], mit der Erstveröffentlichung von Dedekinds Manuskript einer Vorlesung über Algebra.

[34] L. Schläfli, Gesammelte mathematische Abhandlungen, 3 Bde., Birkhäuser, Basel 1950—1956.

[35] J. P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris 1967.

[36] H. J. S. Smith, Collected Mathematical Papers, 2 Bde., Oxford 1894.

[37] E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Hrsg. Hasse-Baer, de Gruyter, Berlin-Leipzig 1930.

[38] J. Sylvester, Collected Mathematical Papers, 4 Bde., Cambridge 1904—1911.

[39] J. Tits, Groupes finis sporadiques, Sém. Bourbaki 1969/70, Exposé 375, Lecture Notes in Math., Nr. 180, S. 187—211, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[40] B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, 2 Bde., Springer, Berlin 1930—1931.

[41] H. Weber, Untersuchungen über die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie, Math. Ann. *43* (1893), 521—544.

[42] H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 3 Bde., Nachdruck Chelsea, New York (ohne Datum).

[43] J. Maclagan Wedderburn, A theorem on finite algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), 349—352.

[44] J. Maclagan Wedderburn, On hypercomplex numbers, Proc. Lond. Math. Soc. (2) *6* (1908), 77—118.

[45] K. Weierstrass, Mathematische Werke, 7 Bde., Mayer und Müller, Berlin 1894—1927.

[46] H. Weyl, The classical groups, Princeton University Press 1946.

4. Die analytischen Funktionen

von Jean-Luc Verley

4.0. Einführung

„Die Einführung der complexen Grössen in die Mathematik hat ihren Ursprung und nächsten Zweck in der Theorie einfacher[1]) durch Grössenoperationen ausgedrückter Abhängigkeitsgesetze zwischen veränderlichen Grössen. Wendet man nämlich diese Abhängigkeitsgesetze in einem erweiterten Umfange an, indem man den veränderlichen Grössen, auf welche sie sich beziehen, complexe Werthe giebt, so tritt eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmäßigkeit hervor." (B. Riemann, *Inauguraldissertation*, 1851; [21], S. 37—38.)

„Die moderne Theorie der analytischen Funktionen hat vier Begründer, Gauß, Cauchy, Riemann und Weierstraß."

„Gauß hat zu seinen Lebzeiten nichts publiziert; er hatte gewissermaßen niemandem etwas mitgeteilt, und seine Manuskripte sind erst lange nach seinem Tode wiedergefunden worden. Er hat also keinerlei Einfluß ausgeübt."

„Die drei anderen Geometer, die zur Schaffung des neuen Begriffs der Funktion beigetragen haben, sind sehr unterschiedliche Wege gegangen."

„Cauchy ist den beiden anderen vorangegangen und hat ihnen den Weg gewiesen; dennoch bleiben die drei Konzeptionen unterschiedlich, und das ist sehr vorteilhaft; denn so haben wir drei Werkzeuge, zwischen denen wir wählen und deren Wirkung wir oft kombinieren können."

„Bei Cauchy behält die Definition einer Funktion noch etwas von den Unklarheiten, die sie bei seinen Vorgängern hatte. Er schreibt für die analytischen Funktionen nur einige einschränkende Bedingungen vor, beispielsweise, daß sie eine

[1]) „Wir betrachten hier als Elementaroperationen Addition und Subtraction, Multiplication und Division, Integration und Differentiation, und ein Abhängigkeitsgesetz als desto einfacher, durch je weniger Elementaroperationen die Abhängigkeit bedingt wird. In der That lassen sich durch eine endliche Anzahl dieser Operationen alle bis jetzt in der Analysis benutzten Functionen definieren" (B. Riemann, Inauguraldissertation, 1851) [21, S. 27—38]. Aus dem Original übernommen; im französischen Text ist die Fußnote nicht enthalten. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

stetige Ableitung besitzen. Alles stützt sich auf einen sehr einfachen Satz bezüglich der komplexen Integrale und auf den Begriff des Residuums. Jede Funktion kann durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden, so daß sie für den Analytiker verwendbar wird, wie unklar definiert sie anfangs auch gewesen sein mag ..."

„Die Cauchysche Theorie enthält im Keim zugleich die geometrische Konzeption Riemanns und die arithmetische Konzeption von Weierstraß, und es ist leicht zu verstehen, in welcher Weise sie bei ihrer Entwicklung in zwei verschiedenen Richtungen sowohl die eine als auch die andere hervorbrachte."

„Bei Riemann spielen geometrische Vorstellungen die dominierende Rolle; eine Funktion ist nur eine der Regeln, nach denen die Flächen transformiert werden können. Man versucht, diese Transformationen darzustellen und nicht, sie zu analysieren; daß diese Darstellung überhaupt möglich ist, wird nur durch eine Plausibilitätsbetrachtung begründet, der man nur um den Preis tiefgreifender Modifikationen und komplizierter Umwege erst viel später die nötige Strenge verleihen konnte."

„Weierstraß nimmt eine ganz entgegengesetzte Position ein; Ausgangspunkt ist die Potenzreihe, das *Funktionselement*, das auf einen Konvergenzkreis eingeschränkt ist. Um die Funktion ins Äußere dieses Kreises fortzusetzen, steht uns das Verfahren der analytischen Fortsetzung zur Verfügung. Auf diese Weise wird alles aus der Reihenlehre hergeleitet, und diese Theorie ist ihrerseits auf eine feste, arithmetische Basis gegründet. Wir sind sowohl der Zweifel enthoben, von denen die Gelehrten im vorigen Jahrhundert und in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts in bezug auf die Prinzipien der Infinitesimalrechnung vielfach befallen waren, als auch derjenigen, welche Lagranges Theorie der analytischen Funktionen durch ihre Lücken hervorrufen konnte ..." (Henri Poincaré, *L'oeuvre mathématique de Weierstrass*, Acta mathematica *22* (1899), 1—18).

4.1. Die elementaren Funktionen

4.1.1. Die algebraische Analysis

Eingeführt von den italienischen Algebraikern der Renaissance, um die reellen Lösungen algebraischer Gleichungen mit Hilfe von Lösungsformeln, die im reellen Gebiet nicht anwendbar sind, herauszubekommen (vgl. 2.2.2.), wurden die komplexen Zahlen während des ganzen neunzehnten Jahrhunderts mit wachsendem Vertrauen benutzt. Diese Zahlen wurden damals nur als Zwischenglieder beim Rechnen angesehen, es war ausgeschlossen, daß sie in einem numerischen Ergebnis vorkamen; genauer gesagt, wenn das Endergebnis bei einem Problem eine komplexe Größe war, die sich nicht auf eine reelle Größe zurückführen ließ, so galt dieses Problem als unlösbar.

Einer der überzeugtesten Verfechter dieser „unmöglichen Zahlen" war Albert Girard, der in *L'invention nouvelle en algèbre* (1629) das Permanenzprinzip formulierte, nach dem man auf die komplexen Zahlen alle im Reellen erhaltenen Identitäten anwenden könne. Girard war auch der erste, der den Fundamentalsatz der Algebra vorausahnte, nach welchem jede algebraische Gleichung n-ten Grades

genau n reelle oder komplexe Wurzeln hat (vgl. 2.2.1.). Wir begegnen dieser Berufung „auf Gründe, die sich aus der Allgemeinheit der Algebra ergeben", während des ganzen achtzehnten Jahrhunderts immer wieder; Lagrange bezog sich darauf, als er mit Reihen wie mit algebraischen Objekten umging. In seinem *Cours d'Analyse* von 1821 ([10], (2), Bd. 3), in dem er die Analysis auf eine feste Basis zu stellen unternahm (vgl. 6.1.3.), kritisierte Cauchy diese Argumentation: „Obwohl Beziehungen dieser Art sehr häufig angenommen werden, so vor allem bei dem Übergang von den convergenten zu den divergenten Reihen, bei dem von den reellen Zahlgrössen zu den imaginären Ausdrücken, so scheint es mir, dass derartige Induktionen, wenn man auch durch dieselben häufig zu richtigen Resultaten geführt wird, dennoch wenig verträglich mit der so arg gerühmten Strenge der mathematischen Wissenschaften sind" ([10][1], S. V—VI).

Die Verfahren, nach denen die Algebraiker rechneten, benutzten ausschließlich die Körperstruktur der Menge der komplexen Zahlen, und man kann in dieser Auffassung von der „Allgemeingültigkeit der Algebra" die implizite Erkenntnis dieser den reellen und den komplexen Zahlen gemeinsamen Körperstruktur sehen.

In der zweiten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts tauchten die ersten Reihenentwicklungen der elementaren Funktionen auf: die Reihenentwicklung von $\log(1 + x)$, welche Newton (1665) und Mercator (1668) unabhängig voneinander fanden, von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{Arcsin} x$, e^x (Newton in *De Analysi* 1669, Leibniz 1673), während Taylor die Interpolationsformel von Gregory-Newton benutzte, um im Jahre 1712 die nach ihm benannte Formel für die Entwicklung einer „beliebigen" Funktion in eine Reihe zu erhalten. Bezüglich einer Untersuchung über die Gültigkeit dieser verschiedenen Ergebnisse verweisen wir auf 1.2. und gehen hier im wesentlichen auf den algebraischen Aspekt (im Ring der formalen Reihen) ein: Die Eigenschaften der elementaren Funktionen ergeben sich durch algebraische Verfahren, und die Differentiations- und Integrationsregeln der Infinitesimalrechnung tragen — in moderner Terminologie — im Ring der betrachteten formalen Reihen formalen Charakter. Diese unter der Bezeichnung *algebraische Analysis* bekannte Untersuchung der keinerlei Einschränkungen unterworfenen Algorithmen mit reellen oder komplexen Zahlen und das Studium der speziellen Methoden, die es ermöglichen, die elementaren Funktionen mit Hilfe solcher Algorithmen darzustellen, bildeten das Kernstück der Forschungen der Analytiker des achtzehnten Jahrhunderts. Bekanntlich versuchte Lagrange in seiner *Théorie des fonctions analytiques* die Untersuchung der Funktionen gerade auf einen rein algebraischen Zugang zu reduzieren; doch sollte dieses Programm nicht vor Weierstraß (vgl. 4.6.) realisiert werden. Schließlich weisen wir darauf hin, daß die Bezeichnung *algebraische Analysis* von Cauchy als Titel des (einzig erschienenen) ersten Bandes seines *Cours d'analyse* gewählt wurde, eines wichtigen Marksteins in der Entwicklung der Strenge (vgl. 6.1.3.).

Diese von jeder Sorge um Konvergenz freie algebraische Behandlung führte die komplexen Zahlen systematisch in die Untersuchung der elementaren Funktionen ein: Da man wußte, daß für reelles x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gilt, wurde unter e^z für komplexes z *die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

verstanden. So schrieb Leibniz (als er zeigen wollte, daß log (—1) nicht reell sein kann; vgl. 4.1.2.), die Reihe, welche $\log(1 + x)$ für $x = -2$ ergibt, sei

$$\log(-1) = -2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \cdots;$$

daraus, daß die Reihe divergent ist, also keine reelle Summe haben kann, schloß Leibniz ganz selbstverständlich, daß sie eine imaginäre Zahl darstelle. Im achtzehnten Jahrhundert waren es die Analytiker gewöhnt, mit reellen oder komplexen Argumenten unterschiedslos umzugehen, und zwar nicht nur in den rationalen Ausdrücken, sondern auch in den trigonometrischen Funktionen und den Exponentialfunktionen. Zu Anfang des Jahrhunderts arbeitete de Moivre durch systematische Benutzung trigonometrischer Formeln die Zusammenhänge zwischen der Bestimmung der Wurzeln komplexer Zahlen und der Teilung eines Kreisbogens in gleiche Teile heraus. Die ganze erste Hälfte des Jahrhunderts wird durch diese bemerkenswerten Formeln gekennzeichnet, in denen der Übergang zu komplexen Argumenten tiefe Analogien zwischen den verschiedenen elementaren Funktionen hervortreten läßt; die berühmteste unter ihnen ist vielleicht die von Euler in seiner *Introductio in analysin infinitorum* (Lausanne 1748; [12], (1), Bd. VIII—IX) angegebene Formel

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) . \tag{1}$$

Dieses Werk enthält auch zahlreiche im komplexen Gebiet geltende Entwicklungen der bekannten Funktionen in unendliche Produkte.

4.1.2. *Die Kontroverse um die Logarithmen*

Die Ausdehnung der Logarithmusfunktion auf den komplexen Fall hatte erstmals ein Phänomen in Erscheinung treten lassen, das verborgen geblieben war, solange das Argument reell war, nämlich das der „mehrdeutigen" Funktionen. Sucht man eine komplexe Zahl $Z = X + iY$, für welche $e^{X+iY} = x + iy$ für $z = x + iy \neq 0$ gilt, so ergibt sich unmittelbar aus der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion, daß mit Z_0 für jedes (positive oder negative) ganzzahlige k auch die komplexe Zahl $Z = Z_0 + 2k\pi i$ eine Lösung ist. Genauer, ist $z = |z| (\cos t + i \sin t)$, so hat man die allgemeine Lösung

$$Z = \log |z| + it + 2k\pi i ,$$

wobei $\log |z|$ der natürliche Logarithmus der positiven Zahl $|z|$ ist. Vereinbart man, jede dieser Zahlen Z als Logarithmus von z zu bezeichnen, so ist die Funktionalgleichung $\log zz' = \log z + \log z'$ nur dann richtig, wenn diese Logarithmen passend gewählt werden.

Da man auch beim Übergang vom Reellen zum Komplexen am Permanenzprinzip festhielt, zog man nicht in Zweifel, daß *eine* durch $e^{\log z} = z$ definierte (und zwar eindeutige) *Funktion* $\log z$ *existiere*, die der Funktionalgleichung des Logarithmus und der Differentialgleichung

$$d \log z = \frac{dz}{z}$$

genügen sollte. In dieser Weise führte die von Leibniz und Johann Bernoulli häufig benutzte Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen auf „Differentiale imaginärer Logarithmen" der Gestalt

$$\frac{dx}{x + a + bi}.$$

In einem Brief aus dem Jahre 1702 führte Johann Bernoulli die „Quadratur des Kreises" (d. h. die Integration der den Kreisbogen beschreibenden Funktion) auf die imaginären Logarithmen zurück: Er setzte

$$\frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{1 + iz} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dz}{1 - iz},$$

machte in diesem Ausdruck die imaginäre Variablensubstitution

$$z = i\,\frac{t - 1}{t + 1},$$

erhielt so

$$\frac{dz}{1 + z^2} = \frac{i}{2} \cdot \frac{dt}{t}$$

und hieraus durch Integration die bemerkenswerte Beziehung $\log i = \frac{1}{2}\pi i$.

In diesem Zusammenhang führte die Bestimmung der „Werte" der Logarithmen von -1 und von i zu unlösbaren Widersprüchen und war der Anlaß zu einer denkwürdigen Kontroverse zwischen Leibniz und Johann Bernoulli während der Jahre 1700 bis 1716.

Bernoulli behauptete, es sei $\log(-x) = \log x$ (insbesondere also $\log(-1) = 0$), wobei er sich darauf berief, daß diese Funktionen die gleichen Differentiale

$$\frac{-dx}{-x} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x}$$

haben, oder auch darauf, daß wegen $(-x)^2 = x^2$ ja $2 \log(-x) = 2 \log x$ sein müsse, woraus dann durch Halbierung die Behauptung folge. Leibniz seinerseits beharrte darauf, daß die Logarithmen aller negativen Zahlen und „umso mehr die der imaginären Zahlen" imaginär seien. Eines seiner Argumente beruht, in moderner Terminologie, auf der vermeintlichen Injektivität des komplexen Logarithmus (die er nach dem „Permanenzprinzip" aus der Injektivität des reellen Logarithmus erschließen zu können glaubte): Da alle reellen Zahlen Logarithmen von positiven reellen Zahlen sind, müssen die Logarithmen von negativen und von imaginären

Zahlen notwendigerweise imaginär sein. Wir haben oben ein anderes Leibnizsches Argument kennengelernt, das er aus der Divergenz der Reihe für log (-1) schöpfte. Eines der Leibnizschen Argumente ist für uns annehmbar, denn es beruht auf der stets konvergenten Entwicklung von e^x: Ist der Logarithmus von x gleich y, so muß

$$x = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots$$

sein; es kann also nicht $y = 0$ für $x = -1$ gelten, da dies zu dem Widerspruch $-1 = +1$ führen würde.

Diese Meinungsverschiedenheit über einen wichtigen Punkt der reinen Mathematik zwischen zwei Giganten der Epoche hatte bei den Zeitgenossen ein großes Unbehagen geschaffen, dem Euler folgendermaßen Ausdruck verlieh (1749): „Da die Lehre von den Logarithmen unwidersprochen zur reinen Mathematik gehört, kann man nur mit großem Erstaunen zur Kenntnis nehmen, daß sie bisher derart verwirrenden Auseinandersetzungen unterworfen gewesen ist, daß man, für welche Seite man sich auch entscheidet, stets in Widersprüche gerät, die absolut nicht zu beheben zu sein scheinen. Da sich jedoch die Wahrheit überall durchsetzen muß, besteht kein Zweifel daran, daß alle diese Widersprüche, wie offen sie auch zutage treten mögen, nur scheinbar sein können, und daß es nicht an Mitteln fehlen dürfte, die Wahrheit zu retten, obwohl wir keinesfalls wissen, aus welcher Ecke wir diese Mittel hernehmen sollen" ([12], (1), Bd. XVII, S. 195–196).

Euler brachte also sehr klar zum Ausdruck, daß das Permanenzprinzip durchbrochen werden muß, daß die Leibnizschen Vorstellungen erkenntnistheoretisch überwunden werden müssen. Mit genialer Klarheit machte Euler deutlich, daß man die Eindeutigkeit des Logarithmusbegriffs aufgeben muß: „Man verbindet üblicherweise diese Vorstellung [vom Logarithmus] mit einem Umstand, der ihm gar nicht angemessen ist. Er besteht darin, daß man normalerweise, fast ohne sich darüber klar zu werden, annimmt, jeder Zahl entspreche nur ein einziger Logarithmus, und wenn man auch nur ein wenig darüber nachdenkt, wird man feststellen, daß alle Schwierigkeiten und Widersprüche, welche die Lehre von den Logarithmen belastet zu haben scheinen, nur insofern weiterbestehen, als man annimmt, jeder Zahl entspreche nur ein einziger Logarithmus. Ich behaupte also, und damit werden alle diese Schwierigkeiten und Widersprüche aus dem Wege geräumt, daß sogar gemäß der gegebenen Definition jeder Zahl unendlich viele Logarithmen entsprechen ..."[1]) (ebenda, S. 210). Euler erläuterte dann sehr klar, in welcher Weise jede positive reelle Zahl unendlich viele komplexe Logarithmen hat, von denen ein einziger reell ist: Es ist der Übergang zum Komplexen, der die allgemeine Situation hervortreten läßt. Diese Eulersche Abhandlung ist auch die erste, in welcher der allgemeine Begriff des bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π definierten Winkelmaßes auftaucht.

In moderner Gestalt besteht der Eulersche Gedankengang zur Bestimmung der Logarithmen von $x = \cos t + i \sin t$, d. h. der Lösungen von $e^y = x$ bei gegebenem

[1]) Euler-Zitate aus dem Französischen übersetzt. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

x, darin, daß zunächst die „Näherungsgleichung"

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \cos t + i \sin t$$

gelöst wird, welche die n Lösungen

$$y_{k,n} = n\left[\cos\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right] + in \sin\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right),$$

$k = 0, 1, \ldots, n - 1$, besitzt. Für festes k läßt er dann n gegen unendlich streben; unter Benutzung der klassischen Rechenregeln für unendlich kleine bzw. unendlich große Größen ergeben sich dann die Lösungen

$$y_k = i(t + 2k\pi)\,.$$

Obwohl die Eulersche Abhandlung für uns von bemerkenswerter Klarheit ist, konnte sie keineswegs alle Zeitgenossen überzeugen, insbesondere d'Alembert nicht, der sich nicht zum Verständnis der Mehrdeutigkeit der Logarithmen durchringen konnte und die Bernoullischen Argumente wieder aufgriff ([1], sechste Abhandlung, S. 198), die er um eigene, auf die Entsprechungen zwischen arithmetischen und geometrischen Folgen gestützte Überlegungen bereicherte, um zu beweisen, daß man die Logarithmen negativer Größen nach Belieben als reell oder imaginär annehmen könne. Alles hinge ausschließlich vom gewählten Logarithmensystem ab.

In der Eulerschen Abhandlung wird auch gezeigt, daß der Ausdruck u^v, der definitionsgemäß gleich $e^{v \log u}$ ist, für komplexe u und v im allgemeinen unendlich viele Werte annimmt. Mangels geeigneter Bezeichnungen waren die mehrdeutigen Funktionen noch während des ganzen achtzehnten Jahrhunderts das Objekt höchst verworrener Erwägungen.

4.2. Berechnung reeller bestimmter Integrale

Verschiedene von Euler erhaltene Formeln zeigen, daß es oft möglich ist, zwei reelle Gleichungen in Gestalt einer einzigen komplexen Gleichung zweier elementarer Funktionen einer komplexen Veränderlichen zu vereinigen. Eine mit diesem vereinfachten Ausdruck durchgeführte Rechnung liefert dann durch Trennung von Real- und Imaginärteil wieder reelle Gleichungen, die man auf direkte Weise schwer hätte erhalten können.

In einer Reihe seit 1776 geschriebener und nach seinem Tode veröffentlichter Abhandlungen benutzte Euler die komplexen Zahlen, um aus schon bekannten reellen Integralen andere herzuleiten. So ging er in *De integrationibus maxime memorabilis ex calculo imaginariorum oriundis* ([12], (1), Bd. XIX, S. 98) von einer reellwertigen Funktion f einer reellen Veränderlichen aus, welche eine Stammfunktion F hat, die eine Kombination von elementaren Funktionen ist. Dann erteilte

er der Variablen einen komplexen Wert und setzte

$$f(x+iy) = M(x,y) + iN(x,y)\,, \qquad F(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)\,;$$

hieraus erhielt er durch Trennung von Real- und Imaginärteil unter stillschweigender Benutzung der Tatsache, daß $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ und $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$ ist, die Beziehungen

$$dP = M\,dx - N\,dy\,, \qquad dQ = N\,dx + M\,dy\,. \tag{2}$$

Durch diese Bedingungen werden reelle Funktionen M und N der reellen Variablen x, y eingeführt, für welche $M\,dx - N\,dy$ und $N\,dx + M\,dy$ totale Differentiale sind; M und N genügen also den Gleichungen

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}\,, \tag{3}$$

die von Euler angegeben wurden, traditionell aber als Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen bezeichnet werden. Solche Funktionen, die sich in der Mechanik bei der Untersuchung der ebenen Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit ergeben, waren von d'Alembert in seinem *Essai sur une nouvelle théorie de la résistance des fluides* ([2], S. 60—61) untersucht worden. Er hatte die Gleichungen (3) für die Funktionen P und Q aufgeschrieben und aus (2) gefolgert, daß

$$(M+iN)\,(dx - i\,dy) = (M+iN)\,d(x-iy)\,,$$
$$(M-iN)\,(dx + i\,dy) = (M-iN)\,d(x+iy)$$

„vollständige Differentiale" sind. Daraus ergibt sich, daß $M + iN$ eine Funktion von $x - iy$ und $M - iN$ eine Funktion von $x + iy$ ist; hieraus erhält man M und N. Dies ist die erste Beschreibung (mit einer Vorzeichenänderung) der *konjugierten* harmonischen Funktionen, die Riemann in seiner Inauguraldissertation von 1851 als Ausgangspunkt seiner Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen wählte. Dieser Gebrauch der komplexen Zahlen in der Mechanik der Flüssigkeiten wurde von Lagrange systematisch weiterentwickelt ([14], Bd. I, S. 498).

Kommen wir nochmals zu Euler zurück. In der zitierten Abhandlung wendete er seine Methode auf Funktionen der Gestalt $f(z) = z^m/(1 \pm z^n)$ an und erhielt verschiedene bemerkenswerte Integrale, indem er Variablentransformationen der Gestalt $z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit konstantem φ ausführte; dies läuft für uns auf eine Integration längs vom Ursprung ausgehender Strahlen in der komplexen Ebene hinaus. Man muß auch die Abhandlung *De insigni usu calculi imaginariorum in calculi integrali* ([12], (1), Bd. XIX, S. 345) erwähnen: Euler führte komplexe Variablentransformationen durch, die zeigen, daß man mit Hilfe der komplexen Zahlen Formeln der Integralrechnung, die sich insbesondere auf Logarithmen und den Arcustangens beziehen, zusammenfassen bzw. auseinander herleiten kann; diese Formeln sehen nämlich im Reellen völlig verschieden aus. Eulers Zeitgenossen nahmen diese Phänomene, die zur Verbreitung des Gebrauchs der komplexen Zahlen in der Analysis beitrugen, aufmerksam zur Kenntnis.

Unabhängig von Euler, etwa zur gleichen Zeit, verwendete Laplace ganz ähnliche Berechnungsmethoden zur Untersuchung der bestimmten Integrale, die bei der

Approximation von Formeln auftreten, welche Funktionen sehr großer Zahlen sind. (Die Abhandlungen wurden der [Pariser] Akademie der Wissenschaften im Jahre 1778 und dann 1782 vorgelegt.) Ausgehend von dem Wert

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

dehnte Laplace das Resultat „auf Grund der Allgemeinheit der Analysis" auf den Fall aus, daß t komplex ist. In dem Integral

$$\int_0^\infty e^{-(ax-(ri/2a))^2}\,dx$$

substituierte er die komplexe Variable $t = ax - (ri/2a)$ und kam so auf

$$\frac{1}{a}\int e^{-t^2}\,dt\,,$$

wobei, wie er sagte, „das Integral bezüglich t von $t = -ri/2a$ bis t gleich unendlich genommen werden muß". Daraus leitete er die Beziehung

$$\int_0^\infty \cos rx\, e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\,e^{-r^2/4a^2}$$

her und schloß mit den Worten: „Die Analyse, die uns soeben zu diesem Resultat geführt hat, beruht auf dem Übergang vom Reellen zum Komplexen; denn wir behandeln dabei die Integrale bezüglich t zwischen zwei Grenzen, von denen die eine imaginär und die andere unendlich ist, so als ob diese beiden Grenzen beide reell wären" ([15], Bd. VII, S. 106).

Immerhin sahen weder Euler noch Laplace diese Methoden als völlig streng an; in ihren Schriften spürt man ständig das Bestreben, die so erhaltenen Resultate durch direkte Rechnung zu begründen. „Diese Übergänge vom Reellen zum Imaginären, ..., haben mir die Bestimmung der Werte vieler bestimmter Integrale ermöglicht, welche etwas Bemerkenswertes aufweisen, das nämlich, daß sie zugleich von zwei Transzendenten abhängen, dem Verhältnis von Kreisumfang zum Durchmesser und von der Zahl, deren hyperbolischer (= natürlicher, d. Ü.) Logarithmus die Einheit ist. Man kann daher diese Übergänge als Hilfsmittel der Entdeckung ansehen, ähnlich der Induktion, von der die Geometer seit langem Gebrauch machen. Doch lassen diese Mittel, mit so viel Vorsicht und Zurückhaltung man sie auch anwendet, in den Beweisen ihrer Resultate stets etwas zu wünschen übrig" ([15], Bd. VII, S. 96).

Die letzte Variante dieser Rechenverfahren kommt in dem *Mémoire sur les intégrales définies* oder vielmehr in dem *Nachtrag* zu dieser Abhandlung zum Ausdruck, den Poisson im *Journal de l'Ecole polytechnique* (Bd. XI (1820), S. 295–341) veröffentlichte. Ausgehend von der Relation

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

mit einer Stammfunktion F von f versuchte Poisson, die Verbindung mit der Leibnizschen Definition des Integrals als „die Summe der Werte des Differentials" herzustellen, und stieß auf Widersprüche, als es zwischen a und b eine Unstetigkeit gab. „In dem von $x = -1$ bis $x = +1$ erstreckten Integral $\int \frac{dx}{x}$ gehen die Elemente von positiven zu negativen Werten über, und die unendlich kleinen Teile können sich aufheben; dann könnte es aber scheinen, daß das Integral Null sein müßte; dagegen ist es aber gleich der imaginären Größe $-\log(-1)$: dieser Logarithmus hat, wie man weiß, unendlich viele Werte, die sich in der Gestalt $(2n + 1)\pi i$ mit positiv oder negativ ganzzahligem n darstellen lassen ...; nun versteht man zunächst nicht, wie die Summe der Elemente $\frac{dx}{x}$, die sämtlich reell sind, mehrere Werte haben kann, und noch weniger, wieso diese Werte imaginär sind ... Wir werden jetzt gleich sehen, daß man auch diese Ausnahmefälle auf den normalen Begriff des als Summe seiner Elemente angesehenen Integrals zurückführen kann; dies wird dann die Art der Anomalie, die sie zeigen, zum Verschwinden bringen."

„Dazu genügt es, so vorzugehen, daß die Veränderliche x von der Grenze a zur Grenze b eine Reihe von imaginären Werten durchläuft; dann wird $f(x)$ für keinen dieser Zwischenwerte mehr unendlich werden und das bestimmte Integral seine gewöhnliche Bedeutung wieder annehmen: So setze ich im Integral $\int \frac{dx}{x}$ von $x = -1$ bis $x = +1$

$$x = -(\cos z + i \sin z)$$

und integriere nach z von $z = 0$ bis $z = (2n + 1)\pi$, wobei n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist ..." Poisson erhielt dann

$$dx = -i(\cos z + i \sin z)\, dz$$

und daraus für das bestimmte Integral

$$\int \frac{dx}{x} = -(2n + 1)\pi i\,.$$

In der gleichen Abhandlung machte Poisson jene fundamentale Bemerkung, daß das Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

„nur dann immer denselben Wert hat, wenn die Veränderliche von $x = a$ nach $x = b$ eine Folge reeller Werte durchläuft oder wenn sie von der einen Grenze zur anderen eine Reihe imaginärer Werte durchläuft, die durch $\varphi(t)$ gegeben ist", und führte als Beispiel die Variablentransformation $x = t + ik$ in dem Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{b^2 + x^2}\, dx$$

an. Diese liefert für $k > b$ den Wert

$$\frac{\pi}{2b}(e^{-ab} - e^{ab})$$

und für $0 \leqq k < b$ den Wert

$$\frac{\pi}{b} e^{-ab} .$$

Obwohl der Begriff des Kurvenintegrals in dem Begriff der von a nach b gemäß einer „Vorschrift" $\varphi(t)$ laufenden Variablen klar vorhanden ist, machte das Fehlen einer geometrischen Darstellung jede Interpretation des erkannten Phänomens, ob im *Streifen* $0 \leqq \operatorname{Im} z < k$ der Pol $x = ib$ vorhanden ist oder nicht, unmöglich. Damit die Theorie die Art des Widerspruchs, in den sie geraten war, überwinden konnte, mußte ein neuartiger konzeptioneller Beitrag geleistet werden, und dies sollte die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen sein.

4.3. Die geometrische Darstellung

Am Ende des achtzehnten Jahrhunderts hatten die Mathematiker im Umgang mit komplexen Größen große Meisterschaft erlangt; obgleich aber eine komplexe Gleichung zwei reellen Gleichungen äquivalent ist und wie solche behandelt wurde, verband man den Begriff einer komplexen Zahl nicht mit dem des aus ihrem Real- und ihrem Imaginärteil bestehenden (geordneten) *Paares*, was es ermöglicht hätte, ihr den entsprechenden Punkt der kartesischen Ebene zuzuordnen. Als Euler im Jahre 1777 in einer Abhandlung zur Geometrie (*De projectione geographica superficiei sphaericae*; [12], (1), Bd. XXVII, S. 276; deutsch in Ostwald's Klassiker Nr. 93, Leipzig 1898) eine konforme Abbildung (Transformation) in der Gestalt

$$X + iY = \frac{a + bz}{c + dz}$$

mit komplexem z ansetzte, sah er darin nur eine bequeme Art des Rechnens, um zwei reelle Gleichungen zu einer einzigen zusammenzufassen, ohne den Begriff der Zuordnung zwischen den komplexen Zahlen und den Punkten der untersuchten Ebenen zu haben. Dagegen findet man diese Zuordnung implizit in der Inauguraldissertation von Gauß aus dem Jahre 1799 ([13], Bd. III, S. 2), die den Versuch eines Beweises des Fundamentalsatzes der Algebra enthält: Zum Nachweis der Existenz einer komplexen Nullstelle $z_0 = x_0 + iy_0$ eines Polynoms P benutzte Gauß anschauliche Überlegungen über die Deformationen von Kurven, um die Existenz eines *Schnittpunktes* (x_0, y_0) der Kurven $\operatorname{Re} P(x, y) = 0$ und $\operatorname{Im} P(x, y) = 0$ zu beweisen; das ist auch das erste Beispiel einer topologischen Argumentation im Beweis eines algebraischen Satzes (vgl. 2.2.1.).

Die geometrische Darstellung im eigentlichen Sinne erschien im gleichen Jahr in der Arbeit *Sur la représentation analytique d'une direction* von C. Wessel [24];

er ordnete jeder komplexen Zahl einen vom Nullpunkt ausgehenden Vektor zu und deutete die elementaren Operationen mit komplexen Zahlen als Operationen mit diesen Vektoren. Diese Veröffentlichung wurde jedoch von der mathematischen Welt der Epoche überhaupt nicht zur Kenntnis genommen. Ebenso ging im Grunde die 1806 in Paris veröffentlichte Broschüre *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires* von R. Argand [3] unter: Die rein imaginäre Zahl i wurde hier als eine Drehung um den Nullpunkt um einen rechten Winkel dargestellt, und Argand interpretierte die Operationen mit komplexen Zahlen geometrisch. Diese Vorstellungen verbreiteten sich im Zuge einer Polemik über diesen Gegenstand, die in den Jahren 1813 bis 1814 in den *Annales de Gergonne* geführt wurde, und dienten der Präzisierung des Begriffs der „Interpretation" in der Mathematik (vgl. Kapitel 13).

Die Vorstellungen von Gauß über die geometrische Darstellung und über das, was in den Händen Cauchys die künftige Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen werden sollte, waren schon im Jahre 1811 von bemerkenswerter Klarheit; damals schrieb er in einem berühmten Brief an Bessel: „... Was soll man sich nun bei $\int \varphi(x)\,dx$ für $x = a + bi$ denken? Offenbar, wenn man von klaren Begriffen ausgehen will, muß man annehmen, daß x durch unendlich kleine Incremente (jedes von der Form $\alpha + \beta i$) von demjenigen Werthe, für welchen das Integral 0 sein soll, bis zu $x = a + bi$ übergeht und dann alle $\varphi(x)\,dx$ summirt. So ist der Sinn vollkommen festgesetzt. Nun aber kann der Übergang auf unendlich viele Arten geschehen: so wie man sich das ganze Reich aller reellen Grössen durch eine unendliche gerade Linien denken kann, so kann man das ganze Reich aller Grössen, reeller und imaginärer Grössen sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abscisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Grösse $a + bi$ gleichsam repräsentirt. Der stetige Übergang von einem Werthe von x zu einem andern $a + bi$ geschieht demnach durch eine Linie und ist mithin auf unendlich viele Arten möglich. Ich behaupte nun, dass das Integral $\int \varphi(x)\,dx$ nach zweien verschiednen Übergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi(x) = \infty$ wird. ..." ([13], Bd. VIII, S. 90–91).

Somit war Gauß im Jahre 1811 nicht nur im Besitz der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen, sondern auch des Begriffs des Kurvenintegrals, des Cauchyschen Integralsatzes und, wie der weitere Text des Briefes beweist, der ersten Vorstellungen über die Perioden der Integrale. Dennoch legte er seine Vorstellungen vor 1831 nicht der Öffentlichkeit vor. Cauchy seinerseits benutzte den geometrischen Zugang nicht vor 1825, und noch in seinem *Cours d'analyse* (1821) behandelte er die komplexen Zahlen „als bloße symbolische Ausdrücke", mit denen „sich ebenso wie mit den reellen Zahlgrössen die verschiedenen algebraischen Operationen vornehmen" lassen ([10][1], S. 120). Diese Art der Behandlung befriedigte ihn jedoch nicht, und er hielt es für notwendig, in einer Abhandlung in den *Comptes Rendus* aus dem Jahre 1847 (C. R. *24* (1847), 1120; [10], (1), Bd. X, S. 312–323) eine Definition zu geben, mit der es gelingt, „die imaginären Ausdrücke und den Buchstaben i selbst darauf zu reduzieren, nichts anderes zu sein als reelle Größen". Unter Verwendung des Begriffs der Äquivalenz (mit einem aus-

drücklichen Hinweis auf die Gaußschen Arbeiten zur Untersuchung der Klassen quadratischer Formen; vgl. 5.4.) interpretierte er das Rechnen mit komplexen Zahlen als ein Rechnen modulo des Polynoms $X^2 + 1$ im Ring der Polynome mit reellen Koeffizienten. Cauchy selbst gab zahlentheoretische Anwendungen dieser Theorie der Äquivalenzen modulo eines irreduziblen Polynoms, verknüpfte diese Ergebnisse mit den Kummerschen Arbeiten und öffnete so den Weg zu den Arbeiten Kroneckers über die algebraischen Erweiterungen (vgl. 3.3.2.).

Dieses Problem des „Status" der komplexen Zahlen ist auch ein Anreiz für die Untersuchungen der englischen algebraischen Schule gewesen: Gerade in dem Bestreben, die Definition einer komplexen Zahl $a + bi$ als *Paar* (a, b) zweier reeller Zahlen mit vorgeschriebenen Rechenregeln zu verallgemeinern, hatten Hamilton, Cayley und andere Mathematiker „hyperkomplexe Systeme" wie die Quaternionen und die Oktonionen (vgl. 3.2.4.) eingeführt und untersucht.

4.4. Cauchy und die französische Schule in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts

Wie wir gesehen haben, brachten die komplexen Variablentransformationen die Notwendigkeit mit sich, den Begriff des bestimmten Integrals zu erweitern, indem man die Veränderliche eine Folge komplexer Werte durchlaufen ließ. Gauß hatte, wie sein Brief an Bessel beweist, in dieser Hinsicht seit 1811 sehr klare Vorstellungen, zu diesem Gegenstand aber nichts veröffentlicht. Bei E. Picard heißt es dazu (*Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences*, Paris 1905, S. 79): „Man kann kaum annehmen, daß er [Gauß] die große Bedeutung nicht begriffen hätte; getreu seiner Devise *pauca sed matura* wollte er zweifellos warten, bis er sich einer längeren Abhandlung hätte zuwenden können, als Cauchy seine Entdeckungen bekannt werden ließ. Man hat somit Cauchy als den tatsächlichen Begründer der so zukunftsträchtigen Theorie anzusehen, wenn er sie auch sicherlich nicht lehrbuchgerecht dargelegt hat." Und es ist wirklich der Name Cauchys, der mit jedem wichtigen Resultat dieser Epoche verknüpft zu sein scheint.

4.4.1. Die Konvergenz von Potenzreihen

In seinem schon zitierten *Cours d'analyse* unternahm Cauchy eine sehr genaue Untersuchung der Konvergenz einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Er wies die Existenz des Konvergenzradius R einer solchen Reihe nach (wobei eventuell $R = 0$ oder $R = +\infty$ sein kann), der so beschaffen ist, daß die Reihe „convergent oder divergent [ist], je nachdem, ob der Modul des imaginären Ausdrucks z kleiner oder größer" als R ist ([10][1], S. 193), und charakterisierte $1/R$ als „die grösste der Grenzen, welcher sich die n-te Wurzel aus dem numerischen Werte von a_n nähert, wenn n beliebig wächst" ([10][1], S. 193). Zehn Jahre später studierte Cauchy die Um-

kehrung dieses Problems, d. h. ob es möglich ist, eine holomorphe Funktion lokal in eine Potenzreihe zu entwickeln, wobei der Konvergenzradius der Abstand zur nächstgelegenen Singularität ist (vgl. 4.4.4.).

4.4.2. *Das Kurvenintegral*

Man kann Cauchys meisterhafte Abhandlung *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* (1825) ([10], (2), Bd. XV, S. 41–89) als den tatsächlichen Ausgangspunkt der uns hier beschäftigenden Theorie ansehen.

In Fortsetzung einer grundlegenden Arbeit, die er 1822 mit der Definition des reellen Integrals begonnen hatte (vgl. 6.3.1.), präzisierte Cauchy die Bedeutung, die man dem Ausdruck

$$\int_{x_0+iy_0}^{X+iY} f(z)\,dz$$

beilegen muß. Er betrachtete ein Paar von Funktionen φ, ψ (die er, dabei den Zwängen des reellen Falls folgend, als monoton voraussetzte), die auf einem Intervall (t_0, T) definiert sind und eine Parameterdarstellung einer Kurve liefern, welche die Bilder der Punkte $z_0 = x_0 + iy_0$ und $Z = X + iY$ verbindet, und definierte dann das Integral als Grenzwert von Summen der Gestalt

$$\sum_k f(z_k)\,(z_{k+1} - z_k)$$

für $z_k = \varphi(t_k) + i\psi(t_k)$; die t_k sollen irgendeine monoton wachsende Teilmenge von Punkten des Intervalls (t_0, T) bilden. Er zeigte, daß dieses Integral mit

$$\int_{t_0}^{T} f(\varphi(t) + i\psi(t))\,(\varphi'(t) + i\psi'(t))\,dt$$

übereinstimmt.

Dann bewies Cauchy, daß der Wert dieses Integrals vom gewählten Weg unabhängig ist (mit den angegebenen Einschränkungen für die Funktionen φ und ψ), sofern nur „die Function $f(x + iy)$ endlich und stetig" bleibe, „solange x zwischen den Grenzen x_0 und X und y zwischen den Grenzen y_0 und Y eingeschlossen bleibt" ([10][2], S. 7), d. h. in dem Rechteck mit achsenparallelen Seiten und den Ecken z_0 und Z. Der Beweis stützt sich auf die Tatsache, daß für eine „benachbarte" Kurve mit der Parameterdarstellung $x = \varphi(t) + \varepsilon u(t)$, $y = \psi(t) + \varepsilon v(t)$ die Variation des Integrals nach der Taylorschen Formel unendlich klein von mindestens zweiter Ordnung in ε ist; nach einem klassischen Prinzip der Variationsrechnung (vgl. 1.8.) schloß Cauchy daraus, daß das Integral konstant sein muß. Der Begriff der „stetigen Variation" von Kurven, den Cauchy hier benutzte, ist nichts anderes als die Homotopie (vgl. Kapitel 10). Schon 1814 hatte Cauchy in seinem *Mémoire sur les integrales définies* ([10], (1), Bd. I, S. 311–506), das sich mit der Möglichkeit befaßt, in gewissen Doppelintegralen die Reihenfolge der Integrationen umzukehren, den sogenannten Cauchyschen Satz für ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten gefunden; da aber die geometrische Darstellung fehlte, besagte dieses Er-

gebnis nur, daß gewisse Integrale übereinstimmten. Cauchy kam in dem Maße, wie seine Vorstellungen über das Kurvenintegral geometrischer wurden, mehrmals auf diesen Satz zurück. Im Jahre 1846 gab er, in einer Note in den *Comptes Rendus* ([10], (1), Bd. X, S. 70–74), zusammen mit einer allgemeineren Aussage, einen neuen Beweis dieses Satzes, der auf den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen beruht: Ist $f = u + iv$, so ist die Gleichung $\int_C f(z)\,dz = 0$ nichts anderes als die Zusammenfassung der beiden reellen Gleichungen

$$\int_C u\,dy + v\,dx = \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = 0\,,$$

$$\int_C -u\,dx + v\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy = 0\,,$$

wobei C der orientierte Rand von A ist; diese Gleichungen findet man in der Mechanik der Flüssigkeiten seit dem achtzehnten Jahrhundert.

4.4.3. *Der Residuenkalkül*

In der schon zitierten Abhandlung aus dem Jahre 1814 hatte Cauchy den Wert des Korrekturgliedes, das auftritt, wenn in gewissen Doppelintegralen die Integrationsreihenfolge nicht umkehrbar ist, in Gestalt von Grenzwerten angegeben. In der fundamentalen Abhandlung von 1825 untersuchte er den Fall, daß die Funktion f in gewissen Punkten $a + bi$ des achsenparallelen Rechtecks mit den Ecken z_0 und Z „unendlich wird" (Bezeichnungen wie in 4.4.2.). Wir weisen sofort darauf hin, daß Cauchy bis gegen 1850 nur Singularitäten betrachtete, welche *Pole* von f, d. h., wie er formulierte, Nullstellen von $1/f(x)$ sind. Er setzte voraus, daß es ein ganzzahliges m gibt derart, daß $\lim_{z \to a+ib} (z - a - ib)^m f(z)$ existiert und endlich ist. Dann zeigte er, daß der Wert der Differenz

$$\int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz\,, \tag{*}$$

wobei C_1 und C_2 zwei z_0 und Z verbindende Kurven sind, „Summe von Gliedern der Gestalt $\pm 2\pi i\alpha$ ist", von denen jedes einer von den beiden Kurven eingeschlossenen Singularität entspricht. Cauchys Beweis basiert auf dem Hauptwert eines divergenten bestimmten Integrals, einem Begriff, den er in seiner Abhandlung aus dem Jahre 1814 eingeführt hatte: Wird eine Funktion f der reellen Veränderlichen $x \in [a, b]$ für einen im Innern des Intervalls $[a, b]$ gelegenen Wert x_0 unendlich, dann ist der Hauptwert definitionsgemäß (in moderner Terminologie)

$$\mathrm{HW} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right).$$

Zur Berechnung des Ausdrucks (*) führte Cauchy einen Weg C ein, der durch den Pol $a + ib$ verläuft. Das entsprechende Kurvenintegral konvergiert nicht; unter

der Voraussetzung, daß es einen Hauptwert hat, betrachtete Cauchy dann eine benachbarte Kurve und zeigte, daß man sich, um die Differenz der Integrale zu erhalten, auf die unmittelbare Umgebung von $a + ib$ beschränken kann; dann stützte er sich auf den Nachweis, daß nur das zu $1/(z - a - bi)$ gehörige Glied der Reihenentwicklung einen Beitrag liefert.

In der Arbeit *Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal* (*Exercises de mathématiques* 1826) ([10], (2), Bd. VI, S. 23—37) untersuchte Cauchy diesen mit jeder Singularität verknüpften Koeffizienten systematisch: „Wenn man einer unabhängigen Variablen einen unendlich kleinen Zuwachs ε erteilt, so erhält eine Funktion $f(x)$ dieser Variablen im allgemeinen selbst einen unendlich kleinen Zuwachs, dessen erstes Glied zu ε proportional ist, und der endliche Koeffizient von ε in dem Zuwachs der Funktion ist das, was man den *Differentialkoeffizienten* nennt. Dieser Koeffizient ist für jedes x vorhanden und kann nur dann identisch verschwinden, wenn die Funktion f sich auf eine konstante Größe reduziert. Das ist bei einem anderen Koeffizienten, von dem sogleich die Rede ist, ganz anders; dieser ist im allgemeinen Null, abgesehen von speziellen Werten der Variablen x. Hat man die x-Werte, für welche die Funktion $f(x)$ unendlich wird, bestimmt, so addiert man zu einem dieser Werte x_1 die unendlich kleine Größe ε und entwickelt $f(x_1 + \varepsilon)$ nach wachsenden Potenzen dieser Größe. Die ersten Glieder der Entwicklung enthalten negative Potenzen von ε, und einer von ihnen ist das Produkt von $1/\varepsilon$ mit einem endlichen Koeffizienten, den wir das *Residuum* der Funktion $f(x)$ bezüglich des speziellen Wertes x_1 der Variablen x nennen."

Für $f(z) = g(z)/(z - z_0)^n$ mit endlichem, nichtverschwindendem $g(z_0)$ präzisierte Cauchy, wie man dieses Residuum $\operatorname{Res}(f, z_0)$ berechnet. Er begann mit einem einfachen Pol, in dem diese Zahl nichts anderes ist als $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0) f(z) = g(z_0)$, und ging dann zum allgemeinen Fall eines mehrfachen Pols der Ordnung n über, in dem

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0)$$

gilt. In einer nachfolgenden, ebenfalls in den gleichen *Exercises de mathématiques* veröffentlichten Note ([10], (2), Bd. VI, S. 112—123) formulierte Cauchy den Residuensatz für ein Rechteck: Das Integral von f längs der Rechtecksseiten ist gleich der mit $2\pi i$ multiplizierten Summe der Residuen von f in diesem Rechteck. Schließlich übertrug er diesen Satz auf allgemeinere Kurven. Im Verlaufe von etwa zwanzig Jahren erschienen in den Cauchyschen Veröffentlichungen unzählige Anwendungen dieses „Residuenkalküls" zur Berechnung bestimmter Integrale, zur Summation von Reihen und zur Entwicklung von Funktionen in Reihen sowie zur Lösung von Differentialgleichungen.

Die Formulierung des Residuensatzes für eine beliebige geschlossene Kurve ([11], S. 239) erforderte einen neuen geometrischen Begriff, der widerspiegelt, wie oft sich eine Kurve um jede Singularität herumwindet. Diese (algebraische) Anzahl ist der Index eines Punktes in bezug auf eine Kurve, von dem der im Jahre 1855

von Cauchy eingeführte Begriff des *compteur logarithmique* ein Spezialfall ist ([10], (1), Bd. XII, S. 285—292). Alle diese Begriffe wurden vor Jordan in einer Weise benutzt, welche auf unmittelbarer Anschauung beruht.

4.4.4. *Cauchysche Integralformel und Reihenentwicklungen*

Im Zusammenhang mit einer 1831 in Turin veröffentlichten Abhandlung zur Himmelsmechanik, auf die er im Jahre 1841 in den *Exercises d'analyse et de physique mathématique* ([10], (2), Bd. XII, S. 58—64) zurückkommt, entwickelte Cauchy unter der Bezeichnung „calcul des limites" sein heute unter dem Namen *Majorantenmethode* bekanntes Verfahren, das „nicht nur dazu dient, Regeln bezüglich der Konvergenz der Reihen zu liefern, welche die Entwicklungen expliziter Funktionen einer oder mehrerer Veränderlicher darstellen, sondern darüber hinaus dazu, obere Schranken für die Fehler zu fixieren, die man begeht, wenn man eine Reihe nach einer gewissen Anzahl von Gliedern abbricht". Hinsichtlich der Anwendungen auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen verweisen wir auf 8.1.1.; hier beschränken wir uns auf die Reihenentwicklungen holomorpher Funktionen.

Für eine in eine Maclaurinsche Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für} \quad |z| < R$$

entwickelbare Funktion f gewann Cauchy die als Cauchysche Integralformel bekannte Beziehung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\varphi \quad \text{mit} \quad \zeta = \varrho\, e^{i\varphi} \quad \text{und} \quad \varrho < R\,, \tag{3}$$

die man auch in der Gestalt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

schreiben kann, wobei C_ϱ die positiv orientierte Kreislinie um 0 mit dem Radius ϱ bezeichnet. Indem er

$$\frac{\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{1 - (z/\zeta)}$$

in eine geometrische Reihe entwickelte und dann gliedweise integrierte, erhielt Cauchy die Beziehung

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta^n}\, d\varphi\,,$$

aus der er die *Cauchyschen Ungleichungen*

$$|a_n| \leqq \frac{M(\varrho)}{\varrho^n} \tag{4}$$

herleitete, wobei $M(\varrho)$ das Maximum von $|f(z)|$ auf $|z| = \varrho$ bezeichnet.

Mit Hilfe einer Majorisierung des Restgliedes der Maclaurinschen Reihe durch eine geometrische Reihe schloß Cauchy hieraus, daß $f(z)$ „mit Hilfe der Maclaurinschen Formel in eine konvergente Reihe nach wachsenden Potenzen von z entwickelbar ist, wenn der Betrag der reellen oder imaginären Veränderlichen z kleiner bleibt als der Wert, für den die Funktion (oder ihre erste Ableitung) nicht mehr endlich oder stetig ist". Mit anderen Worten, der Konvergenzradius der $f(z)$ darstellenden Potenzreihe ist genau der Abstand zwischen dem Ursprung und der nächstgelegenen Singularität von f.

Aus den Ungleichungen (4) ergibt sich sofort der in den Untersuchungen ganzer Funktionen wesentliche Satz von Liouville: Eine auf der ganzen Ebene holomorphe und beschränkte Funktion ist notwendigerweise konstant; dann kann man nämlich für jedes $n \geqq 1$ die Zahl ϱ gegen unendlich streben lassen, und so erhält man $a_n = 0$ für jedes $n \geqq 1$. Dieser Satz, der in Wirklichkeit von Cauchy stammt, war von ihm im Jahre 1844 mit Hilfe des Residuenkalküls aufgestellt worden ([10], (1), Bd. VIII, S. 378–385). Die Bemerkung, daß der Satz unmittelbar aus den Cauchyschen Ungleichungen folgt, verdankt man Jordan (vgl. seinen *Cours d'analyse*).

Von P. A. Laurent stammt eine wichtige Erweiterung dieser Ergebnisse (1843). Er zeigte: Ist f eine auf dem Kreisring $R_1 < |z| < R_2$ holomorphe Funktion, so gilt für $R_1 < \varrho_1 < |z| < \varrho_2 < R_2$ die Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int\limits_{C_{\varrho_1}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \int\limits_{C_{\varrho_2}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\right];$$

durch gliedweise Integration der geometrischen Reihen schloß er wie oben, daß

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

ist, wobei diese Reihen für $|z| > R_1$ bzw. $|z| < R_2$ konvergieren. Dieser Satz, der Weierstraß bereits 1841 bekannt war, ist der Ausgangspunkt der Untersuchung der wesentlich singulären Punkte (vgl. 4.6.). Weierstraß lenkte die Aufmerksamkeit auch auf die Entwicklungen nach $1/z$, welche es ermöglichen, den Begriff der im Unendlichen holomorphen Funktion zu definieren.

4.4.5. *Die synectischen Funktionen*

So seltsam es auch scheinen mag, bis zum Jahre 1850 hatte Cauchy keine genaue Charakterisierung der Funktionenklasse gegeben, auf die seine Theorie anwendbar ist. „Die Theorie der Funktionen komplexer Veränderlicher wirft heikle Fragen auf, deren Lösung wichtig ist und welche die Geometer oft in Verlegenheit gebracht haben ..." ([10], (1), Bd. XI, S. 301–304). Wir zitieren die Cauchyschen Defini-

tionen nach dem Werk von Briot und Bouquet ([6][1], S. 5): „Denkt man sich einen vollständig begrenzten Raum der Ebene, dem der Punct z beständig angehören soll; nimmt man ferner an, daß hier die Function u in demselben Puncte stets denselben Werth erhält, welchen Weg jener auch immer zurücklegen mag, ohne jedoch den in Betracht gezogenen Raum zu verlassen — in diesem Falle nennt Cauchy die Function *monodrom* für den betrachteten Theil der Ebene — ..." (heute sagt man eindeutig bzw. einwertig); „Hieraus ergibt sich nun, dass die Ableitung im Allgemeinen von der Größe $\frac{dy}{dx}$, d. h. von der Richtung der dem Puncte z gegebenen unendlich kleinen Verschiebung abhängt, ... Eine Function, welche für jeden Punct nur eine Ableitung zulässt, deren Werth also von der Verschiebungsrichtung durchaus unabhängig ist, hatte Cauchy *monogen* genannt" (ebenda, S. 11). Schließlich nannte Cauchy eine Funktion *synectisch*, die auf einem Teil der Ebene endlich, stetig, monodrom und monogen ist. Er zeigte, daß die komplexe Differenzierbarkeit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen äquivalent ist, und betonte besonders „die Notwendigkeit, die Ableitung einer Funktion von z in dem Satz anzuführen, der die Bedingungen angibt, unter denen diese Funktion in eine gewöhnliche Reihe — nach wachsenden Potenzen von z entwickelt werden kann" ([10], (1), Bd. XI, S. 301—304). In einer späteren Auflage ihres Werkes ersetzten Briot und Bouquet das Wort „synectisch" durch das Wort *holomorph*, das sich bis heute erhalten hat.

4.4.6. *Puiseux und die algebraischen Funktionen*

Cauchy hatte „mehrdeutige Funktionen", welche in jedem Punkt mehrere Werte annehmen, die durch stetige Fortsetzung längs einer geschlossenen Kurve ineinander übergehen, nur gelegentlich betrachtet. Der tatsächliche Ausgangspunkt der Arbeiten über die algebraischen Funktionen, die das Kernstück des Riemannschen Werkes und der algebraischen Geometrie bilden (vgl. 7.2.5.), ist die grundlegende Abhandlung von Puiseux: *Recherches sur les fonctions algébriques* (Journal de Mathématiques (1) *15* (1850), 365—480).

Es sei u eine algebraische Funktion von z (mit anderen Worten, u genüge einer Gleichung $f(u, z) = 0$, wobei f ein Polynom in u und z ist), die im Punkt c den Wert b annimmt; Puiseux studierte die Werte, welche von u in c angenommen werden, indem er die Werte von u längs geschlossener Kurven untersuchte. Einen Punkt, in dem u unendlich wird oder der Relation

$$\frac{\partial f}{\partial z}(u, z) = 0$$

genügt (d. h. gleich einer mehrfachen Nullstelle des Polynoms wird), nannte er *Hauptpunkt* (man spricht auch von einem kritischen Punkt). Er beschrieb dann das Verhalten von u in der Umgebung eines solchen Punktes z_0 sowie die Art und Weise, in der die Werte ineinander übergehen, wenn der Punkt z eine unendlich kleine geschlossene Kontur um z_0 beschreibt: Die verschiedenen Funktionen

$u_1, \dots, u_n$, die $f(u, z) = 0$ genügen, können bezüglich des Punktes z_0 stets in eine gewisse Anzahl von *zyklischen Systemen* eingeteilt werden, die in Wirklichkeit die Orbits von Untergruppen der Galoisgruppe der Gleichung in u sind. Ist q die Ordnung des zyklischen Systems, dem die betrachtete Funktion u angehört, so bewies Puiseux die Existenz einer Entwicklung

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n/q} \qquad (*)$$

in der Umgebung des Punktes z_0, wobei m eine (vorzeichenbehaftete) ganze Zahl ist. Dieser Satz beschreibt das Wesen der Verzweigungspunkte einer algebraischen Funktion und ist für die Parametrisierung einer Riemannschen Fläche in einem solchen Punkt von grundlegender Bedeutung (vgl. 4.5.). Wir erinnern daran, daß es Newton war, der die erste Vorstellung einer Entwicklung des Typs (*) gehabt hatte; er hatte sie benutzt, als er die „Zweige" einer reellen algebraischen Kurve $F(x, y) = 0$ in der Umgebung eines singulären Punktes untersuchte. Ihm verdankt man auch das graphische Verfahren, das durch Konstruktion eines konvexen Polygonzuges (des Newtonschen Polygons) die Exponenten m/q zu bestimmen gestattet (vgl. 2.3.1. und [11], S. 106).

In seiner Abhandlung fuhr Puiseux dann mit der Untersuchung der Integrale $\int_C u(z)\, dz$ fort. Er charakterisierte die Perioden eines solchen Integrals als Integrale längs geschlosssener Kurven, untersuchte, ob jede Periode zu allen Werten des Integrals gehört oder nur zu einem Teil von ihnen, und bestimmte die Werte des Integrals, die verschieden bleiben, wenn man von den ganzzahligen Vielfachen der Perioden abstrahiert. In diesen Resultaten zeichnete sich schon die Theorie der Abelschen Funktionen ab, die einige Jahre später (1857) von Riemann in einem größeren Rahmen entwickelt wurde (vgl. 7.2.5.).

4.4.7. Das Buch von Briot und Bouquet

Cauchy hatte niemals einen Gesamtüberblick über seine Theorie gegeben, die, wie wir gesehen haben, nach und nach in den *Exercises de mathématiques* (Paris 1826 bis 1829), den *Résumés analytiques* (Turin 1831), den *Exercises d'analyse et de physique mathématique* (1840 bis 1847) und in zahlreichen Noten in den *Comptes Rendus de l'Académie des sciences* entwickelt wurde. Jedenfalls begann von 1844 an Liouville in seinen Vorlesungen über doppeltperiodische Funktionen am Collège de France mit einem Versuch, die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen systematisch darzulegen. Diese Vorlesungen wurden nicht publiziert (was zu einem Prioritätsstreit zwischen Liouville und Cauchy wegen des heute nach Liouville benannten Satzes Anlaß gab, der besagt, daß eine beschränkte ganze Funktion konstant ist); sie liegen jedoch der ersten allgemeinen Darlegung der Theorie durch Briot und Bouquet zugrunde (*Recherches sur la théorie des fonctions*, Journal de l'Ecole Polytechnique, 1856). Dieser Text wurde ohne Änderungen in den Anfang des Buches *Théorie des fonctions doublement périodiques* derselben Autoren übernommen [6][1]. Man muß die historische Bedeutung dieses

Werkes hervorheben: Briot und Bouquet waren die ersten, welche die durch ihren Satz 3 charakterisierten Pole (im Endlichen oder im Unendlichen) erkannten: „Wenn eine monodrome und monogene Function $f(z)$ für $z = a$ unendlich wird, welchen Weg der Punct z auch zurückgelegt haben mag, so kann man ihr die Form

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \psi(z)$$

geben, wo $\psi(z)$ eine monodrome und monogene Function bezeichnet, die für $z = a$ nicht unendlich wird" ([6][1], S. 47).[1]) Als Gegenbeispiel nannten sie die Funktion $e^{1/z}$: „Die Function $e^{1/z}$ wird unendlich, wenn der Punct z sich von der rechten Seite der y-Axe her zum Anfangspuncte bewegt, und gleich Null, wenn er von der linken Seite her kommt. Ebenso wird die Function e^z für unendliche Werthe von z bald Null, bald unendlich" ([6][1], S. 49). Man findet dort auch eine inkorrekte Aussage über den Gegenstand des später nach Picard benannten Satzes (vgl. 4.6.) und eine systematische und vereinfachte Darlegung der Cauchyschen Ergebnisse über die Lösungen von (komplexen) Differentialgleichungen (vgl. 8.1.1.). Die Beweise sind meist unvollständig und benutzen anschauliche topologische Begriffe, die erst von Weierstraß scharf definiert wurden. Die deutsche Übersetzung [6][1] des Buches von Briot und Bouquet war ein wichtiges Ereignis, das die deutsche Schule mit den Arbeiten Cauchys bekannt machte (vgl. Dugac, *Archive for History of Exact Sciences 10*, Nr. 1/2 (1973), 56—59).

4.5. Riemann und die geometrische Funktionentheorie

Riemanns erste Veröffentlichung ist seine Inauguraldissertation *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (Göttingen 1851) ([21], S. 3—48). Seine wichtigsten Ergebnisse gab er in klarerer Form, aber ohne auch nur zu versuchen, Andeutungen von Beweisen zu machen, in der Einleitung zu seiner *Theorie der Abel'schen Functionen* wieder (*Crelles Journal*, 1857; [21], S. 88—144). Wie er selbst sagte, sind Beweise oft unvollständig oder fehlen überhaupt; ihre Lücken konnten erst in jüngerer Zeit durch die Schaffung neuer mathematischer Gebilde und Theorien ausgefüllt werden: Als F. Klein zahlreiche Punkte der Riemannschen Arbeiten weiterentwickelte, konnte er aus Mangel an geeigneten Begriffen nicht über das Stadium anschaulicher Betrachtungen hinaus gelangen. Die erste vollständige Darlegung der Riemannschen Arbeiten zur Funktionentheorie — mit den eigentlichen Riemannschen Methoden — verdanken wir Hermann Weyl (*Die Idee der Riemannschen Fläche*, Teubner, Leipzig 1913; 3. Aufl. Stuttgart 1955); dort werden Begriffe wie analytische Mannigfaltigkeiten, Homologie (vgl. 10.3.) und die harmonischen Formen benutzt. Wie

[1]) Nach der deutschen Ausgabe zitiert. Im Original wird aus dem Beweis übernommen, daß „das Produkt dieser Funktion mit $(z - a)^n$ für ein ganzzahliges n einen unendlichen Wert besitzt". — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

wir im folgenden an Hand einiger Zitate sehen werden, *beschrieb* Riemann mit Sehergabe mathematische Gebilde, die im Raum der klassischen Geometrie nicht konkret realisierbar (er mußte im $\boldsymbol{R}^4$ argumentieren, um beim Durchschneiden der „Blätter" nicht auf topologische Unmöglichkeiten zu stoßen), aber der Anschauung entlehnt sind: Es ist beeindruckend zu sehen, daß die geometrischen Darstellungen, die er zur *Veranschaulichung* der bei den mehrdeutigen Funktionen auftretenden Phänomene eingeführt hat und die seinen Vorstellungen über den allgemeinen Raumbegriff zugrunde liegen (vgl. 9.5.), mit einer geeigneten Axiomatisierung tatsächlich das „geometrische Gerüst" der modernen Physik und Mathematik geworden sind.

4.5.1. *Die Prinzipien*

Riemann stellte sich von Anfang an auf einen geometrischen Standpunkt und deutete die Größen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ als Punkte zweier Ebenen A und B; er schrieb: „Entspricht jedem Werthe von z ein bestimmter mit z stetig sich ändernder Werth von w, mit anderen Worten, sind u und v stetige Functionen von x, y, so wird jedem Punkte der Ebene A ein Punkt der Ebene B, jeder Linie, allgemein zu reden, eine Linie, jedem zusammenhängenden Flächenstücke ein zusammenhängendes Flächenstück entsprechen. Man wird sich also diese Abhängigkeit der Größe w von z vorstellen können als eine Abbildung der Ebene A auf der Ebene B" ([21], S. 5). Riemann zeigte dann: Wenn w eine im komplexen Sinne differenzierbare Funktion von z ist, „mit anderen Worten, wenn $\frac{dw}{dz}$ von dz unabhängig ist" ([21], S. 5), findet „zwischen zwei einander entsprechenden unendlich kleinen Dreiecken ... der Ebene A und ihres Bildes auf der Ebene B Ähnlichkeit Statt" ([21], S. 6). Das beweist, daß die im komplexen Sinne differenzierbaren Abbildungen genau diejenigen sind, welche von Euler und dann von Gauß untersucht wurden und die *konform* sind, d. h. das folgende Problem lösen: „*Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*" (Kurzfassung des Titels einer Abhandlung von Gauß; [13], Bd. IV, S. 189). Diese Bedingungen bedeuten, daß u und v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen. Riemann folgerte daraus sofort, daß u und v harmonische Funktionen sind, d. h. Funktionen, für welche Δu und Δv null sind (vgl. 8.5.2.), d. h., daß die Beziehungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

gelten, „welche für die Untersuchung der Eigenschaften, die Einem Gliede einer solchen Function einzeln betrachtet zukommen, die Grundlage bilden" ([21], S. 7). Riemann nahm sie als Ausgangspunkt. Zunächst schlug er die Einführung einer neuen Darstellung vor, die es ermöglicht, die von den mehrdeutigen (algebraischen) Funktionen aufgeworfenen Probleme zu behandeln.

4.5.2. *Die Riemannschen Flächen*

Riemanns grundlegende Idee zur Untersuchung einer „mehrdeutigen" Funktion besteht darin, die Eindeutigkeit der Funktion dadurch herzustellen, daß man, falls notwendig, die Werte der Veränderlichen aufspaltet.

Kurz, er erweiterte den Variationsbereich der Größe z, „... indem wir ... nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten", und fuhr fort: „Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von auf einander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, daß der Ort des Punktes O (mit den Koordinaten x, y) über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke" ([21], S. 7). Es folgt eine makellose Beschreibung der geometrischen Eigenschaften der „Blätter" einer solchen Fläche und der Art, wie diese Blätter in der Umgebung von Verzweigungspunkten *ineinander übergehen*. In den Vorbemerkungen zu seiner *Theorie der Abel'schen Functionen* griff Riemann diese Beschreibung aus physikalischer Sicht wieder auf: „Für manche Untersuchungen, namentlich für die Untersuchung algebraischer und Abel'scher Functionen ist es vortheilhaft, die Verzweigungsart einer mehrwerthigen Function in folgender Weise geometrisch darzustellen. Man denke sich in der (x, y)-Ebene eine andere mit ihr zusammenfallende Fläche (oder auf der Ebene einen unendlich dünnen Körper) ausgebreitet, welche sich so weit und nur so weit erstreckt, als die Function gegeben ist. Bei Fortsetzung dieser Function wird also diese Fläche ebenfalls weiter ausgedehnt werden. In einem Theile der Ebene, für welchen zwei oder mehrere Fortsetzungen der Function vorhanden sind, wird die Fläche doppelt oder mehrfach sein; sie wird dort aus zwei oder mehreren Blättern bestehen, deren jedes einen Zweig der Function vertritt. Um einen Verzweigungspunkt der Function herum wird sich ein Blatt der Fläche in ein anderes fortsetzen, so dass in der Umgebung eines solchen Punktes die Fläche als eine Schraubenfläche mit einer in diesem Punkte auf der (x, y)-Ebene senkrechten Axe und unendlich kleiner Höhe des Schraubenganges betrachtet werden kann. Wenn die Function nach mehreren Umläufen des z um den Verzweigungswerth ihren vorigen Werth wieder erhält (wie z.B. $(z - a)^{m/n}$, wenn m, n relative Primzahlen sind, nach n Umläufen von z um a), muss man dann freilich annehmen, dass sich das oberste Blatt der Fläche durch die übrigen hindurch in das unterste fortsetzt" ([21], S. 90 bis 91).

Die moderne Formalisierung dieses Begriffs benutzt direkt die dem Riemannschen Text unterliegenden Anforderungen.

Zunächst „fällt" diese Fläche „mit der Ebene zusammen", was ihr lokal die gleiche Struktur verleiht, wie die komplexe Ebene sie besitzt. In moderner Terminologie sagt man, dies sei eine *analytische Mannigfaltigkeit* der komplexen Dimension 1: Die Fläche T ist mit einer (hausdorffschen) Topologie versehen, und jeder Punkt z von T hat eine Umgebung U mit einem Homöomorphismus (einer bijektiven und in beiden Richtungen stetigen Abbildung) φ von U auf eine offene Menge $\varphi(U)$ der komplexen Ebene; um „invariante", d. h. von der Wahl der „Karten" (U, φ) unabhängige Eigenschaften der Funktionen auf T zu erhalten, fordert man folgendes: Sind (U, φ) und (V, ψ) zwei solche Karten, dann soll die

Einschränkung von $\psi \circ \varphi^{-1}$ auf $\varphi(U \cap V)$ holomorph sein. Die lokalen Eigenschaften einer auf T definierten Funktion f sind definitionsgemäß die Eigenschaften der Funktion $f|_U \circ \varphi^{-1}$ auf jeder Karte (U, φ) (vgl. 9.5.); man kann auf T sämtliche Begriffe definieren, die bei holomorphen Abbildungen erhalten bleiben, wie etwa den Winkel zwischen zwei Kurven oder die Eigenschaft einer Funktion, harmonisch zu sein.

Der zweite wesentliche zugrundeliegende Begriff ist, daß die Fläche T *über der Ebene liegt*, was sich so formalisieren läßt: Es gibt eine projizierende Abbildung p: $T \to C$, welche holomorph ist. Die Riemannsche Fläche ist dann das aus der analytischen Mannigfaltigkeit T (der komplexen Dimension 1) und der Abbildung p bestehende Paar (T, p).

Für jede algebraische Funktion w von z, d. h. für eine Funktion w, welche einer Gleichung

$$f(w, z) = 0$$

mit einem Polynom f genügt (dessen partielle Ableitungen nicht zugleich verschwinden), kann man die Menge der Paare $(w(z), z)$ mit einer solchen Struktur der Riemannschen Fläche versehen, bei der die Projektion durch die Abbildung $(w, z) \mapsto z$ gegeben wird: Die *Verzweigungspunkte* sind dann die „über" den Hauptpunkten im Sinne von Puiseux gelegenen Punkte (vgl. 4.4.6.). Bei Riemann heißt es dazu: „Die mehrwerthige Function hat für jeden Punkt einer solchen ihre Verzweigungsart darstellenden Fläche nur *einen* bestimmten Werth und kann daher als eine völlig bestimmte Function des Orts in dieser Fläche angesehen werden" ([21], S. 91).

Für das Studium der algebraischen Funktionen ist es tatsächlich angebracht, den „unendlich fernen Punkt" einzubeziehen, der unmittelbar durch die rationale Variablentransformation $z \mapsto 1/z$ eingeführt wird, d. h. (kompakte) Riemannsche Flächen zu betrachten, die über der Riemannschen (Zahlen-) Kugel liegen (d. h. über der durch einen unendlich fernen Punkt vervollständigten, mit der trivialen Struktur einer analytischen Mannigfaltigkeit versehenen komplexen Ebene, wobei der unendlich ferne Punkt mit Hilfe der Abbildung $z \mapsto 1/z$ genau untersucht werden kann). Zitieren wir wieder Riemann: „Eine unbegrenzte Fläche kann entweder als eine Fläche mit unendlich weit entfernter Begrenzung oder als eine geschlossene angesehen werden, und Letzteres soll bei der Fläche T geschehen, so dass dem Werthe $z = \infty$ in jedem der n Blätter der Fläche Ein Punkt entspricht, wenn nicht etwa für $z = \infty$ eine Verzweigung stattfindet" ([21], S. 102).

Die Sätze von Puiseux legen die Vermutung nahe, daß man in der Umgebung jedes Punktes stets eine Karte finden kann, in der sich die Projektionsabbildung p in der Gestalt $z \to z^q$ ansetzen läßt; die Verzweigungspunkte, die isoliert liegen, entsprechen $q > 1$, und „das Ineinanderübergehen der Blätter" reduziert sich (lokal) auf diejenigen der Funktion q-te Wurzel. Riemann (der Puiseux nicht zitiert) nahm diese Tatsache ohne Beweis an und benutzte sie bei seinen „geometrischen" Beweisen; es ist der Satz über die Parametrisierung.

Die Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion „stellt die Art der Verzweigung" dieser Funktion „dar". Riemann erklärte, wie die Klassen algebraischer

Funktionen und die Perioden ihrer Integrale durch genau eine „topologische" Invariante ihrer Riemannschen Flächen (über der Riemannschen Zahlenkugel) — die durch Eigenschaften der Kurvensysteme auf T definierte *Zusammenhangszahl* — charakterisiert werden. Es handelt sich dabei, wie Riemann sagte, um einen der *analysis situs* angehörenden Begriff, „welcher die Grössen nicht als unabhängig von der Lage existirend und durch einander messbar betrachtet, sondern von den Massverhältnissen ganz absehend, nur ihre Orts- und Gebietsverhältnisse der Untersuchung unterwirft" ([21], S. 91) (vgl. Kapitel 10). Einfach zusammenhängend (Zusammenhangszahl 1) bedeutet, daß jede Kurve auf T durch stetige Deformation auf einen Punkt (von T) zusammengezogen werden kann.

4.5.3. *Die Methoden*

Riemann benutzte systematisch die Theorie der harmonischen Funktionen, die es ihm ermöglichte, wichtige Eigenschaften zu entdecken und zu beweisen.

Zunächst führten ihn differentialgeometrische Betrachtungen dazu, die Greensche Formel (vgl. 8.5.2.) auf Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Dies ist die berühmte Riemannsche Formel

$$\int_A (\operatorname{div} \vec{u})\, dx\, dy + \int_{\partial A} (\vec{u} \cdot \vec{n})\, ds = 0\,,$$

wobei A ein durch die differenzierbare Kurve ∂A begrenztes Gebiet, $\vec{u}$ ein Vektorfeld und $\vec{n}$ die „nach innen gerichtete Normale zu ∂A" ist (vgl. 8.5.2.). Riemann stellte dann fest, daß der Cauchysche Integralsatz für eine beliebige geschlossene Kurve auf einer Riemannschen Fläche nicht mehr richtig ist, da er nur lokalen Charakter hat. Aus seiner Formel leitete er Fortsetzungssätze für die harmonischen Funktionen, das Maximumprinzip (das besagt, daß eine nicht konstante reelle harmonische Funktion auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet[1]) kein lokales Maximum annehmen kann) sowie das Prinzip der analytischen Fortsetzung her: „... in Folge des allgemeinen Charakters einer Function einer veränderlichen complexen Grösse, ... ein Theil der Bestimmungsstücke eine Folge der übrigen ist, und zwar ist der Umfang der Bestimmungsstücke auf die zur Bestimmung nothwendigen zurückgeführt worden. Dies vereinfacht die Behandlung derselben wesentlich. Um z.B. die Gleichheit zweier Ausdrücke derselben Function zu beweisen, musste man sonst den einen in den anderen transformiren, d. h. zeigen, dass beide für jeden Werth der veränderlichen Grösse übereinstimmen; jetzt genügt der Nachweis ihrer Uebereinstimmung in einem weit geringern Umfange" ([21], S. 38). In seiner Abhandlung über die Zetafunktion wendete er dieses Prinzip an.

Eines der Grundanliegen Riemanns in seiner Abhandlung aus dem Jahre 1851 besteht darin, die Funktionen „durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen" zu charakterisieren ([21], S. 96, S. 35—37). Zu diesem Zweck benutzte Riemann den folgenden Satz, dem er den Namen *Dirichlet'sches Princip* gab: Es sei A ein

[1]) Dem deutschen Sprachgebrauch entsprechend ist „Gebiet" stets eine offene Menge. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet und u eine auf dem Rand ∂A von A stetige Funktion; dann gibt es unter allen auf der Vereinigung von A und ∂A stetigen oder in isolierten Punkten unstetigen Funktionen, die u fortsetzen und deren Gradient auf A quadratisch integrierbar ist, eine und nur eine Funktion, die das Integral des Quadrats des Gradienten zu einem Minimum macht, und diese Funktion ist auf A harmonisch. Wie Weierstraß bemerkte, hatte Riemann in Wirklichkeit nur bewiesen, daß eine Lösung eindeutig bestimmt und harmonisch ist, wenn sie existiert; diese Existenz nahm Riemann aber an. In der obigen Formulierung ist der Satz übrigens falsch, und die Untersuchung der Bedingungen, unter denen das Dirichletsche Prinzip angewandt werden kann, hat in der Potentialtheorie einen hervorragenden Platz eingenommen. Es braucht keine Fortsetzung zu existieren, bei der das Quadrat des Gradienten quadratisch integrierbar ist (Hadamard, 1906), oder der Rand ∂A kann zu irregulär sein (Lebesguescher Dorn). Die ganze Theorie der Abelschen Funktionen, die Riemann auf dem Dirichletschen Prinzip aufbaute, blieb solange hypothetisch, bis dieses Prinzip durch exakte Beweise begründet worden war (Arbeiten von C. Neumann, 1877; „Principe du balayage" („Fegemethode") von Poincaré, 1887; vgl. 8.5.2.).

Riemann beendete seine Abhandlung von 1851 mit einer meisterhaften Anwendung des Dirichletschen Prinzips: Zwei einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen (gleichen Typs) können stets konform aufeinander abgebildet werden (vgl. [7], S. 197).

4.6. Die Weierstraßsche Funktionentheorie

Nach Weierstraß' eigenem Bekenntnis war schon 1840 die Untersuchung der elliptischen und der Abelschen Funktionen (vgl. 7.2.4., 7.2.6.) seine Hauptmotivation, und in diesem Zusammenhang sah er sich veranlaßt, zunächst die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen gründlich zu erforschen. Tatsächlich hat er einen neuen Zugang zu dieser Theorie entwickelt — ihre erste strenge Darlegung, die von jeder Berufung auf die geometrische Anschauung unabhängig ist. Diese Sorge um die Grundlagen ist das Wesen der Weierstraßschen Strenge.

Will man die Weierstraßschen Ergebnisse darlegen, so steht man vor sehr schwierigen Problemen der Datierung, wenn man ihre Entwicklungsgeschichte verfolgen will, denn er hat nur sehr wenig und dies mit beträchtlicher Verspätung veröffentlicht. So sind seine sämtlichen ersten Arbeiten, die zwischen 1840 und 1842 entstanden, erstmals im Jahre 1894, im ersten Band seiner gesammelten Werke erschienen; den Zeitgenossen waren sie völlig unbekannt geblieben. Schon im Jahre 1841 war er im Besitz der Entwicklung in eine Laurentreihe (vgl. 4.4.4.) und konnte mit Hilfe der Einführung des grundlegenden Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz beweisen, daß ein in der Umgebung jedes Punktes gleichmäßiger Limes holomorpher Funktionen ebenfalls holomorph ist; im Jahre 1842 bewies er mit Hilfe des Majorantenverfahrens den im gleichen Jahr von Cauchy

veröffentlichten Satz über die analytischen Lösungen eines Differentialgleichungssystems und skizzierte die Theorie der analytischen Fortsetzung und die Untersuchung der singulären Punkte.

Nach dem Erscheinen seiner Abhandlung *Zur Theorie der Abel'schen Functionen* in Crelles Journal ([23], Bd. I, S. 137—152) im Jahre 1854 wurde Weierstraß mit einem Schlag berühmt; im Jahre 1857 hielt er an der Berliner Universität eine Vorlesung über „Allgemeine Lehrsätze betreffend die Darstellung analytischer Functionen durch convergente Reihen". Im Verlaufe seiner Vorlesungen von 1857 bis 1887, die er nicht veröffentlichte und die nur durch die Ausarbeitungen seiner Studenten (unter denen keine geringeren waren als H. A. Schwarz und A. Hurwitz; die bekannteste Ausarbeitung, auf die gewöhnlich Bezug genommen wird, verdankt man S. Pincherle) bekannt wurden, errichtete Weierstraß nach und nach sein „Gebäude der Mathematik", ein umfassendes Werk, das — ausgehend von einer korrekten Theorie der reellen Zahlen (vgl. Kapitel 6) — zu einer allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen (einer und mehrerer Veränderlicher) und zur Theorie der elliptischen und der Abelschen Funktionen (vgl. Kapitel 7) führt.

4.6.1. *Der Weierstraßsche Standpunkt*

Der Ausgangspunkt des Weierstraßschen Aufbaus ist der Begriff der analytischen Funktion: Eine auf einer offenen Menge U der komplexen Ebene definierte Funktion f wird *analytisch* (oder holomorph) auf U genannt, wenn sie auf der Umgebung jedes Punktes von U in eine Potenzreihe entwickelbar ist, d. h., wenn zu jedem $a \in U$ eine Potenzreihe um a existiert, deren Summe auf einer Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt a gleich $f(z)$ ist:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n . \qquad (*)$$

Eine solche Funktion ist im komplexen Sinne differenzierbar; die Ableitung ergibt sich durch gliedweises Differenzieren der Reihe, was wieder auf eine Reihe mit dem gleichen Konvergenzradius führt. Umgekehrt ist jede (im komplexen Sinne) differenzierbare Funktion, deren Ableitung stetig ist (Goursat hat 1900 gezeigt, daß diese Voraussetzung weggelassen werden kann) analytisch; damit ist die Äquivalenz des Weierstraßschen Standpunkts und des Cauchyschen bezüglich der monogenen Funktionen nachgewiesen.

Diese lokale Darstellung einer analytischen Funktion läßt erkennen, daß eine solche Funktion zahlreiche Eigenschaften besitzt, die denen eines Polynoms analog sind. Beispielsweise existiert, wenn a eine Nullstelle von f ist und die Funktion auf einer Umgebung von a nicht identisch verschwindet, eine ganze Zahl n derart, daß $f(z) = (z-a)^n g(z)$ mit $g(a) \neq 0$ ist; daher kann man von der Vielfachheit n der Nullstelle a sprechen. Daraus ergibt sich, daß die Nullstellen isoliert liegen, und daraus wiederum ergibt sich das Prinzip der analytischen Fortsetzung (das von Weierstraß in seiner Vorlesung von 1874, *Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen*, mit Hilfe des topologischen Begriffs des Zusammenhangs

globalisiert wurde): Stimmen zwei auf einem zusammenhängenden Gebiet U analytische Funktionen auf einer Menge überein, die in U einen Häufungspunkt besitzt, so stimmen sie auf ganz U überein.

Ist f auf einer punktierten Kreisscheibe (d. h. einer Kreisscheibe ohne ihren Mittelpunkt) um den Mittelpunkt a analytisch, so läßt sich f nach dem Satz von Weierstraß-Laurent auf dieser punktierten Kreisscheibe in der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

darstellen; die erste dieser Summen, der sogenannte Hauptteil der Funktion f in a läßt den Unterschied zwischen den *Polen*, für welche nur endlich viele der a_{-n} $n \geqq 1$, von null verschieden sind (dann hat $f(z)$ die Gestalt $h(z)/(z-a)^m$, wobei h auf einer Umgebung von a analytisch ist), und den *wesentlich singulären* Punkten, für welche unendlich viele Koeffizienten a_{-n} nicht verschwinden, erkennen (ein einfaches Beispiel dafür liefert die Funktion $e^{1/z}$ im Ursprung; vgl. 4.4.7.). In seiner Abhandlung *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (1874 geschrieben und 1876 veröffentlicht; [23], Bd. II, S. 77—124) bewies Weierstraß, daß in jeder punktierten Kreisscheibe um einen wesentlich singulären Punkt der Funktion f die Menge der von dieser Funktion angenommenen Werte in der komplexen Ebene dicht ist. Dieser Satz wurde von E. Picard vervollständigt, der im Jahre 1879 bewies, daß die Menge der auf einer solchen punktierten Kreisscheibe angenommenen Werte sich um höchstens einen Punkt von der Menge der Punkte der komplexen Ebene unterscheidet.

4.6.2. *Die analytische Fortsetzung*

Der Begriff der analytischen Funktion in der Weierstraßschen Fassung wurde zu einem sehr geschmeidigen Werkzeug bei der Untersuchung der Fortsetzungen einer solchen Funktion. Ist eine Funktion f auf einer offenen Kreisscheibe D mit dem Mittelpunkt a und dem Radius r analytisch, so ist sie in jedem Punkt $b \in D$ in eine Potenzreihe um b entwickelbar. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist mindestens gleich $r - |b - a|$, kann aber echt größer sein: Die Reihe um b konvergiert dann auf einer Kreisscheibe Δ mit dem Mittelpunkt b, die über die Kreisscheibe D „hinausreicht", und das Prinzip der analytischen Fortsetzung ermöglicht es, f auf $D \cup \Delta$ fortzusetzen. Dies gestattet es, auf dem Rand des Konvergenzkreises einer Reihe zwischen den *regulären* Punkten, in deren Umgebung man die Funktion, welche Summe der Potenzreihe ist, fortsetzen kann, und den *singulären* Punkten, in deren Umgebung dies nicht möglich ist, zu unterscheiden. Hat die Kreisscheibe D, auf welcher eine Potenzreihe mit der Summe f konvergiert, einen endlichen Radius, so existiert mindestens ein singulärer Punkt; die im Jahre 1880 von Weierstraß angegebene Reihe

$$\sum_{n \geqq 0} b^n z^{a^n}$$

mit $0 < b < 1$, ganzzahligem $a \geqq 2$ und $ab \geqq 10$ liefert ein Beispiel dafür, daß *sämtliche* Randpunkte von D singuläre Punkte sein können. Der Konvergenzkreis ist dann das natürliche Existenzgebiet der Funktion, da man sie in diesem Fall nicht zu einer auf einem größeren zusammenhängenden Gebiet analytischen Funktion fortsetzen kann.

Führt man mit Hilfe von Ketten von Kreisen, die nach dem obigen Prinzip konstruiert wurden, nacheinander analytische Fortsetzungen aus, so kann es vorkommen, daß man in ein und demselben Punkt der komplexen Ebene mehrere verschiedene Werte erhält: Hier stößt man auf das Problem der mehrdeutigen Funktionen. Um diese Situation zu untersuchen, hatte Weierstraß in seiner Vorlesung den Begriff des „Funktionselements" eingeführt (Vorlesung von 1884 bis 1885).

Unter einem „Element einer analytischen Funktion" oder, abgekürzt, unter einem *analytischen Element* (*Funktionselement*) *mit dem Mittelpunkt a*, verstehen wir das Paar (a, S) aus einer komplexen Zahl a und einer Potenzreihe S um den Punkt a. Man sagt, zwei analytische Elemente (a, S) und (b, T) seien *direkte* analytische Fortsetzungen voneinander, wenn sich die Konvergenzkreise von S und T schneiden und die Summen von S und T auf diesem Durchschnitt übereinstimmen. Man kann dann versuchen, ein analytisches Element (a, S) fortzusetzen, in dem man „Ketten" $(a, S), (a_1, S_1), \ldots, (a_n, S_n)$ konstruiert derart, daß zwei aufeinanderfolgende analytische Elemente direkte Fortsetzungen voneinander sind. Die Menge der so erhaltenen analytischen Elemente bildet die *analytische Funktion*, die, ausgehend von einem beliebigen (a, S) ihrer analytischen Elemente, vollständig definiert ist. Ist die Funktion „mehrdeutig", so gibt es mehrere analytische Elemente mit demselben Mittelpunkt. Diese Menge kann in natürlicher Weise auf einer Riemannschen Fläche (mit abzählbar vielen Blättern) angeordnet werden, die über dem Komplement der Menge der Verzweigungspunkte im natürlichen Existenzgebiet *nicht* verzweigt ist (vgl. [19]).

4.6.3. *Primärfaktoren*

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra kann jedes Polynom in der Gestalt eines endlichen Produkts

$$P(z) = A(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$$

dargestellt werden, welche die Nullstellen des Polynoms unmittelbar erkennen läßt. Gauß hatte eine zu

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z \log((1+n)/n)}\right\}$$

äquivalente Formel erhalten, welche die Reziproke zur Eulerschen Gammafunktion als unendliches Produkt darstellt, wobei die Nullstellen dieser Funktion unmittelbar ersichtlich sind ([13], Bd. III, S. 144—146). Von Weierstraß stammt ein allgemeiner Satz (aus der schon zitierten Abhandlung von 1876) über die Darstell-

barkeit jeder ganzen Funktion durch ein unendliches Produkt, das die Nullstellen dieser Funktion einschließlich ihrer Vielfachheit unmittelbar erkennen läßt.

Wir betrachten die als *Primärfaktoren* bezeichneten Funktionen

$$E_0(z) = 1 - z\,, \qquad E_p(z) = (1 - z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right);$$

dies sind ganze Funktionen mit der einzigen (einfachen) Nullstelle $z = 1$. Die Weierstraßsche Formel besagt dann: Ist 0 eine Nullstelle der Vielfachheit k einer ganzen Funktion f und sind $z_1, z_2, \ldots$ alle von null verschiedenen Nullstellen von f, wobei jede so oft auftritt, wie ihre Vielfachheit beträgt, so kann man eine Folge ganzer Zahlen (p_n) finden derart, daß

$$f(z) = z^k\, e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

gilt, wobei g eine ganze Funktion (also e^g eine nichtverschwindende ganze Funktion) ist.

Diese Formel ermöglicht es umgekehrt, ganze Funktionen mit vorgegebenen Nullstellen vorgegebener Vielfachheit zu konstruieren. Wie Weierstraß bemerkte, folgt daraus, daß jede auf der ganzen komplexen Ebene meromorphe Funktion (d. h. jede Funktion, die keine anderen Singularitäten besitzt als Pole) als Quotient zweier ganzer Funktionen dargestellt werden kann.

Im Jahre 1877 fand G. Mittag-Leffler einen analogen Satz über die Darstellung einer meromorphen Funktion als Summe einer (auf jeder keine Pole enthaltenden kompakten Menge gleichmäßig konvergenten) Reihe von rationalen Funktionen, deren Nenner die Gestalt $(z - a)^{m(a)}$ haben, wobei a die Polstellen durchläuft und $m(a)$ die Vielfachheit des Pols a bezeichnet.

4.7. Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher

Die Untersuchung der Beziehungen zwischen mehreren komplexen Größen oder der komplexen Differentialgleichungen führt in natürlicher Weise auf Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. Schon der Übergang von einer zu zwei Veränderlichen läßt völlig neue Erscheinungen auftreten, die zeigen, daß die Theorie notwendigerweise viel komplizierter ist als im Fall einer einzigen Variablen.

Das erste Werk, das sich ausführlich mit diesem Gegenstand befaßt, ist die 1934 erschienene erste Auflage des Buches von H. Behnke und P. Thullen [4], das eine historisch bedeutende Rolle gespielt hat. Mit der im Jahre 1936 beginnenden Veröffentlichung der bemerkenswert tiefgründigen, ihrem Charakter nach aber oft sehr anschaulichen und nur in Umrissen ausgeführten Arbeiten von K. Oka tauchten die grundlegenden Begriffe der Theorie auf; es dauerte aber bis in die fünfziger Jahre, ehe eine „in sich geschlossene" Theorie vorlag, in einem Zusammenhang, der völlig neue Hilfsmittel benutzt. Es ist die *analytische Geometrie,* wie man sie in Analogie zur algebraischen Geometrie nannte, mit der sie zahlreiche Ver-

fahren gemeinsam hat; es ist eines der höchst fruchtbaren Gebiete der modernen Mathematik, das mit den meisten anderen Zweigen der algebraischen Geometrie zusammenhängt.

4.7.1. *Die Erweiterung der Cauchyschen Theorie*

Die Erweiterung der grundlegenden Definitionen auf mehrere Veränderliche liegt auf der Hand und ist schon von Cauchy vorgenommen worden. Eine Funktion f zweier komplexer Veränderlicher (wir bleiben bei zwei, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben) ist auf einem Gebiet des $\mathbf{C}^2$ holomorph, wenn sie in der Umgebung des Punktes $a = (a_1, a_2)$ als Summe einer Potenzreihe

$$f(z_1, z_2) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \alpha_{pq}(z_1 - a_1)^p (z_2 - a_2)^q$$

in zwei Veränderlichen darstellbar ist, die in dem Polyzylinder $|z_1 - a_1| < R_1$, $|z_2 - a_2| < R_2$ (dem Äquivalent des Konvergenzkreises für zwei Veränderliche) konvergiert, oder wenn sie stetige partielle Ableitungen nach den vier reellen Veränderlichen x_1, y_1, x_2, y_2 besitzt, welche den (Cauchy-Riemannschen) Differentialgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + i\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} + i\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$$

genügen.

Die Verallgemeinerung der Hilfsmittel der Cauchyschen Theorie auf mehrere Veränderliche dagegen wirft schon verwickelte technische und begriffliche Probleme auf: Die Integraldarstellung, die für einen Polyzylinder trivial ist, wurde von A. Weil (1935), E. Martinelli (1938) verallgemeinert und dann schließlich von J. Leray in einer Weise definiert, welche diese beiden Definitionen als Spezialfälle umfaßt. Der Begriff des Residuums wurde im Falle mehrerer Veränderlicher im Jahre 1887 von H. Poincaré untersucht und von J. Leray im Jahre 1959 in eine allgemeine Theorie einbezogen [16].

4.7.2. *Der Vorbereitungssatz*

Historisch ist der erste tiefliegende Satz der Theorie algebraischer Natur: Es ist der berühmte „Vorbereitungssatz“, den Weierstraß seit 1860 in seinen Vorlesungen vortrug ([23], Bd. II, S. 135—188) und 1879 veröffentlichte; dieser Satz beschreibt das Verhalten einer holomorphen Funktion in der Umgebung eines Punktes, in dem sie null wird. In der Formulierung von Weierstraß lautet er: Es sei $F(z, z_1, \ldots, z_n)$ eine auf der Umgebung des Ursprungs holomorphe Funktion, für welche $F(0, 0, \ldots, 0) = 0$ und $F(z, 0, \ldots, 0) = z^p f(z)$ mit $f(0) \neq 0$ gilt. Dann existieren ein „ausgezeichnetes Polynom“

$$G(z, z_1, \ldots, z_n) = z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a_p$$

(wobei die a_i auf der Umgebung von $(0, \ldots, 0)$ holomorphe Funktionen der $z_1, \ldots, z_n$ sind) und eine auf der Umgebung des Ursprungs holomorphe, nicht verschwindende Funktion $H(z, z_1, \ldots, z_n)$ derart, daß auf einer Umgebung des Ursprungs $F = GH$ gilt.

Dieser Satz spielt eine wesentliche Rolle bei jedem algebraischen Zugang zur lokalen Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlicher (vgl. [9]). Insbesondere ermöglicht er es, im Ring $A = \boldsymbol{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ der Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten, die in einem nicht auf den Ursprung reduzierten Polyzylinder konvergieren, einen Divisionsalgorithmus zu konstruieren (H. Späth, 1929) sowie die beiden grundlegenden algebraischen Eigenschaften dieses Ringes zu beweisen (welche Lasker schon 1905 formuliert hatte): Jedes Ideal dieses Ringes besitzt endlich viele Erzeugende (einen solchen Ring nennt man heute einen *Noetherschen Ring*); jedes von Null verschiedene Hauptideal (d. h. von einem einzigen, von Null verschiedenen Element erzeugte Ideal) läßt sich auf genau eine Weise als Produkt von primen Hauptidealen darstellen. Man nennt den Ring *faktoriell.*

Der Vorbereitungssatz ermöglicht die lokale Untersuchung der analytischen Teilmengen des $\boldsymbol{C}^n$, d. h. der Mengen, die in der Umgebung jedes ihrer Punkte z die Menge der gemeinsamen Nullstellen von p analytischen Funktionen sind. (Achtung, a priori hängt die ganze Zahl p von z ab!) Von Weierstraß selbst begonnen, wurde die vollständige Untersuchung 1933 von Rückert durchgeführt: Eine solche Menge ist lokal in genau einer Weise Vereinigung endlich vieler „irreduzibler" analytischer Mengen, die man geometrisch charakterisieren kann.

4.7.3. *Holomorphiegebiete*

Ist Ω eine beliebige zusammenhängende offene Menge der komplexen Ebene $\boldsymbol{C}$ so existieren (nach Weierstraß) auf Ω holomorphe Funktionen, die sich in *keinen* Punkt des Randes von Ω analytisch fortsetzen lassen, d. h., die sich nicht zu einer auf einer größeren offenen Menge holomorphen Funktion fortsetzen lassen: Die offene Menge Ω ist das „natürliche Existenzgebiet" dieser Funktion.

Ist die komplexe Dimension mindestens 2, so ist die Situation völlig anders.

Hartogs hat im Jahre 1906 gezeigt, daß im Raum $\boldsymbol{C}^2$ offene Mengen Ω existieren derart, daß jede auf Ω holomorphe Funktion zu einer auf einer umfassenderen offenen Menge holomorphen Funktion fortgesetzt werden kann: Beispielsweise läßt sich jede auf der zwischen zwei Hypersphären liegenden „Schale" $r^2 < |z_1|^2 + |z_2|^2 < R^2$ holomorphe Funktion zu einer auf der ganzen Kugel $|z_1|^2 + |z_2|^2 < R^2$ holomorphen Funktion fortsetzen.

Diese Situation führt zu den beiden folgenden, durch Thullen 1932 geprägten wichtigen Begriffen: Ist Ω eine zusammenhängende offene Menge des $\boldsymbol{C}^n$, so nennt man das größte zusammenhängende Gebiet $\mathscr{H}(\Omega)$, auf das sich jede auf Ω holomorphe Funktion fortsetzen läßt, die *Holomorphiehülle* von Ω; man nennt Ω ein *Holomorphiegebiet,* wenn $\Omega = \mathscr{H}(\Omega)$ ist: Es existiert dann mindestens eine auf Ω holomorphe Funktion, die sich nicht auf ein größeres Gebiet fortsetzen läßt. Thullens Hauptsatz besagt, daß die Holomorphiehülle ein Holomorphiegebiet ist.

Man stellte natürlich schnell fest, daß $\mathcal{H}(\Omega)$ im allgemeinen nicht als Teilraum des $\boldsymbol{C}^n$ realisierbar ist und daß es notwendig ist, eine Theorie zu entwickeln (ähnlich jener, die H. Weyl zur Formalisierung der Riemannschen Flächen entwickelte), die es ermöglicht, $\mathcal{H}(\Omega)$ als ein „ausgebreitetes Gebiet" (K. Oka) über dem Zahlenraum $\boldsymbol{C}^n$ zu realisieren.

Die Holomorphiegebiete sind von Oka ausführlich untersucht worden, der die fundamentale Rolle herausarbeitete, die sie in allen Problemen des Übergangs vom Lokalen zum Globalen spielen; sie werden durch „Konvexitätseigenschaften" unterschiedlicher Art charakterisiert, von denen wir zwei Beispiele zitieren, die einen vorderen Platz in der späteren Entwicklung der Theorie einnehmen.

Das *Levische Problem*, von E. E. Levi in zwei Arbeiten von 1909 und 1911 aufgeworfen ([17], Bd. I, S. 187—236), fordert die Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch lokale Eigenschaften ihrer Ränder. Ist Ω lokal durch eine Ungleichung $\varphi(z_1, z_2) < 0$ mit einer (zweimal differenzierbaren, um einen elementaren Satz formulieren zu können) reellwertigen Funktion φ definiert, so lautet die Levische Bedingung, daß die quadratische Form

$$Q(w_1, w_2) = \sum_{i,j=1,2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \, \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j$$

positiv definit ist. Die Umkehrung stammt von Oka (im Jahre 1942 für zwei Variable und 1954 für den allgemeinen Fall). Okas Beweis läßt die Rolle einer Klasse reellwertiger Funktionen erkennen, die gleichzeitig 1942 von P. Lelong unter dem Namen *plurisubharmonische Funktionen* eingeführt wurden und die es später ermöglichten, tiefliegende Resultate der Analysis zu erhalten.

Die im Jahre 1931 von H. Cartan herausgearbeitete *holomorphe Konvexität* (die Umkehrung ist für den allgemeinen Fall 1932 von P. Thullen gezeigt worden) ist die folgende Eigenschaft, die ein Holomorphiegebiet charakterisiert: Für jede kompakte Teilmenge K eines solchen Gebietes ist die Menge $\hat{K}$ der Punkte z aus diesem Gebiet, für welche für jede auf dieser offenen Menge holomorphe Funktion f

$$|f(z)| \leqq \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|$$

gilt, kompakt. Dieser Begriff liegt der Cartan-Serreschen Theorie und dem Begriff der Steinschen Mannigfaltigkeit zugrunde (vgl. 4.7.4.).

4.7.4. Die Cousinschen Probleme

Die Probleme des Übergangs vom Lokalen zum Globalen treten auf, wenn man die Sätze von Weierstraß und Mittag-Leffler (vgl. 4.6.3.) über die Existenz von Funktionen, welche auf vorgegebenen Mengen Nullstellen bzw. „Pole" besitzen, auf den Fall mehrerer Veränderlicher übertragen will. Die Menge der Nullstellen (bzw. der Singularitäten) ist jetzt eine analytische Menge, und man muß die Formulierung der Probleme modifizieren.

Eine Funktion F von mehreren Veränderlichen wird *meromorph* genannt, wenn sie sich *lokal* als Quotient zweier holomorpher Funktionen, $F = G/H$, schreiben

läßt, d. h., wenn HF holomorph ist. Schon im Jahre 1883 hatte H. Poincaré in einem Beweis, welcher Methoden der Potentialtheorie benutzte, bewiesen, daß sich eine auf dem Raum $\boldsymbol{C}^2$ meromorphe Funktion als Quotient zweier auf dem ganzen Raum holomorpher Funktionen schreiben läßt: Die analoge Fragestellung für ein Gebiet des $\boldsymbol{C}^n$ ist das *Poincarésche Problem* für dieses Gebiet. In einer Abhandlung aus dem Jahre 1895 hat Cousin die beiden folgenden Probleme für einen Polyzylinder U positiv entschieden:

Erstes Cousinsches Problem (additives Problem oder Verallgemeinerung des Satzes von Mittag-Leffler): Existiert, wenn für jeden Punkt z von U eine auf einer Umgebung U_z von z meromorphe Funktion f_z gegeben ist mit der Eigenschaft, daß $f_z - f_{z'}$ auf $U_z \cap U_{z'}$ holomorph ist, eine auf U meromorphe Funktion F derart, daß $F - f_z$ für jedes $z \in U$ auf der Umgebung von z holomorph ist?

Zweites Cousinsches Problem (multiplikatives Problem oder Verallgemeinerung des Satzes von Weierstraß): Existiert, wenn für jeden Punkt z von U eine auf einer Umgebung U_z von z holomorphe Funktion f_z mit der Eigenschaft gegeben ist, daß $f_z/f_{z'}$ auf $U_z \cap U_{z'}$ holomorph ist und nicht verschwindet, eine auf U holomorphe Funktion F derart, daß F/f_z für jedes z auf U_z holomorph ist und nicht verschwindet?

Wie im Falle einer Veränderlichen zieht eine positive Lösung des additiven Problems eine positive Lösung des Poincaréschen Problems nach sich. Im Jahre 1937 hat K. Oka bewiesen, daß das additive Cousinsche Problem in einem Holomorphiegebiet stets eine Lösung hat, doch konnte trotz einzelner im Jahre 1940 von K. Stein erhaltener Ergebnisse das Problem erst dann vollständig geklärt werden, als H. Cartan und J. P. Serre die kohomologische Formulierung angegeben hatten. Das Gerüst der Theorie von Cartan-Serre bilden die (von Stein 1951 eingeführten) Steinschen Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich um komplexe analytische Mannigfaltigkeiten (das sind topologische Räume, die dem Zahlenraum $\boldsymbol{C}^n$ lokal homöomorph sind, mit holomorphen „Kartentransformationen"; vgl. 4.5.), welche die folgenden Eigenschaften besitzen (die nach dem Satz von Cartan-Thullen die Holomorphiegebiete unter den Gebieten des $\boldsymbol{C}^n$ charakterisieren; die Bedingungen (1) und (2) sind in diesem Fall trivial):

(1) Sind z und z' zwei verschiedene Punkte einer solchen Mannigfaltigkeit V, dann existiert eine auf V holomorphe Funktion f mit $f(z) \neq f(z')$ (Trennungsbedingung).

(2) Zu jedem Punkt z von V existiert eine durch auf der ganzen Mannigfaltigkeit V holomorphe Funktionen gegebene Karte $\{f_1, \ldots, f_n\}$.

(3) Für jede kompakte Menge K ist die oben in der Aussage des Satzes von Cartan-Thullen definierte Menge $\hat{K}$ kompakt.

Seine berühmten Sätze A und B hat H. Cartan in der Sprache der dann von J. Leray in die Topologie eingeführten Theorie der Garben formuliert. Aus diesen Sätzen folgt, daß die Cousinschen Probleme auf einer Steinschen Mannigfaltigkeit stets eine Lösung haben (vgl. [8], [22]). Es ist hier nicht möglich, auch nur eine Vorstellung von diesen Sätzen zu vermitteln; eine elementare Aussage, die aus

ihnen folgt, können wir immerhin erwähnen: In einem Holomorphiegebiet Ω ist jede analytische Menge (vgl. oben) *global* die Menge der gemeinsamen Nullstellen endlich vieler auf ganz Ω holomorpher Funktionen $f_1, \dots, f_p$. Man sieht hier deutlich, welche Rolle die Holomorphiegebiete beim Übergang vom Lokalen zum Globalen spielen.

4.7.5. *Die konforme Abbildung*

Die natürliche Verallgemeinerung der Theorie der konformen Abbildung von Gebieten von $\boldsymbol{C}$ (vgl. 4.3. und 4.5.) ist der Begriff der *Isomorphie* zweier Gebiete Ω_1 und Ω_2 des $\boldsymbol{C}^n$. Darunter ist zu verstehen, daß eine *bijektive* Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n)$ von Ω_1 auf Ω_2 existiert, wobei die f_j holomorph sind; die Umkehrabbildung f^{-1} hat dann die gleiche Eigenschaft. Auch hier hat man festgestellt, daß die Situation für $n = 1$ von der für $n \geqq 2$ völlig verschieden ist: Während Riemann bewiesen hatte, daß in $\boldsymbol{C}$ zwei einfach zusammenhängende, von ganz $\boldsymbol{C}$ verschiedene Gebiete Ω_1, Ω_2 stets isomorph sind (vgl. 4.5.), bemerkte Poincaré bereits 1907, daß es keine Isomorphie zwischen der Kugel $|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1$ und dem „Dizylinder" $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ in $\boldsymbol{C}^2$ gibt ([20], Bd. IV, S. 244—289). Dieses Problem hängt mit der Struktur der Automorphismengruppe eines Gebiets in $\boldsymbol{C}^n$ zusammen; in diesem Fall kannte man die Automorphismengruppen der beiden betrachteten Gebiete explizit und wußte, daß sie nicht isomorph sind. Außer der Untersuchung einiger Spezialfälle gab es jedoch noch keine allgemeine Theorie der Isomorphismen von Gebieten der Räume $\boldsymbol{C}^n$.

4.7.6. *Allgemeine analytische Räume*

Etwa seit 1950 hat man erkannt, daß es zur Entwicklung einer zur Riemannschen Theorie analogen geometrischen Theorie der analytischen Fortsetzung im Falle mehrerer Veränderlicher bzw. bei der Untersuchung der analytischen Mengen notwendig ist, den Begriff der analytischen Mannigfaltigkeit (der beispielsweise schon zur Untersuchung einer so einfachen Funktion wie $\sqrt{z_1 z_2}$ nicht ausreicht) zu verallgemeinern. Von der klassischen Situation ausgehend, die es ermöglicht, jedem Gebiet U den Ring $A(U)$ der auf U holomorphen Funktionen (mit Einschränkungsabbildungen und Verträglichkeitsbedingungen) zuzuordnen, hat H. Cartan in seinem Seminar von 1953 bis 1954 den allgemeinen Begriff des *geringten Raumes* eingeführt; dies ist ein topologischer Raum, in dem man jedem Gebiet U einen Ring $A(U)$ (mit einem geeigneten Axiomensystem) zuordnet; dieser Begriff hat sich sowohl in der analytischen als auch in der algebraischen Geometrie als fundamental erwiesen. In diesem Rahmen ist dann der allgemeine Begriff des *analytischen Raumes* erarbeitet worden, der von Serre, Remmert, Grauert und Grothendieck weiter verallgemeinert und popularisiert wurde. (Für eine historische Analyse dieser Entwicklung verweisen wir auf [4] und [5].)

4.8. Literatur

[1] J. d'Alembert, Opuscules mathématiques, Bd. 1, Paris 1761.

[2] J. d'Alembert, Essai sur une nouvelle théorie de la résistance des fluides. Paris 1752.

[3] R. Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, Paris 1806; 2. Aufl., Gauthier-Villars, Paris 1874; Neue Auflage, A. Blanchard, Paris 1971.

[4] H. Behnke und H. Grauert, Analysis in non compact spaces, in: Analytic functions, Princeton math. Series, Princeton Univ. Press 1966.

[5] H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher, 2. Aufl. (mit zusätzlichen Anhängen), Springer, Berlin-Heidelberg 1970 (1. Aufl. als Bd. 3, Nr. 3, der Ergebn. der Math., Springer, Berlin 1934).

[6] M. Briot et M. Bouquet, Théorie des fonctions doublement periodiques, Paris 1859.

[6]' Briot und Bouquet's Theorie der doppelt-periodischen Functionen und insbesondere der elliptischen Transcendenten mit Benutzung darin einschlagender Arbeiten deutscher Mathematiker, von H. Fischer, Halle 1862.

[7] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, Paris 1961.

[8] H. Cartan, Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, S. 41—55, Bruxelles 1953, Centre belge de Rech. Math., Masson, Paris 1953.

[9] H. Cartan, Sur le théorème de préparation de Weierstrass, in: Festschrift Gedächtnisfeier Weierstrass, S. 155—168, Westdeutscher Verlag, Köln und Opladen 1966.

[10] A. Cauchy, Oeuvres complètes, 27 Bde. (2 Reihen), Gauthier-Villars, Paris 1882—1974.

[10]' A. Cauchy, Algebraische Analysis (ins Deutsche übertragen von C. Itzigsohn), Springer, Berlin 1885.

[10]² A. Cauchy, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 112, Wilhelm Eugelmann, Leipzig 1900.

[11] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris 1968.

[12] L. Euler, Opera omnia, 62 Bände (bisher erschienen), (3-Reihen) Teubner und O. Füssli, Leipzig-Berlin-Zürich 1911—1976.

[13] C. F. Gauß, Werke, 12 Bde., Göttingen 1870—1927.

[14] J. L. Lagrange, Oeuvres, 14 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1867—1892.

[15] P. S. Laplace, Oeuvres, 14 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1878—1912.

[16] J. Leray, Le calcul différential et intégral sur une variété analytique complexe, Bull. Soc. math. de France, Bd. 87 (1959), S. 81—180.

[17] E. E. Levi, Opere, 2 Bde., Cremonese, Roma 1959—1960.

[18] A. Martineau, Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, in: Encyclopaedia universalis, Bd. 7, Paris S. 132—134.

[19] R. Nevanlinna, Uniformisierung, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[20] H. Poincaré, Oeuvres, 11 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1916—1956.

[21] B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlaß, 2. Aufl., und Nachträge Teubner, Leipzig 1892—1902 (Nachdruck Dover, New York 1953).

[22] J. P. Serre, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétes de Stein, in: Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, S. 57—68, Bruxelles 1953, Centre belge de Rech. Math., Masson, Paris 1953.

[23] K. Weierstraß, Mathematische Werke, 7 Bde., Mayer und Müller, Berlin 1894—1927.

[24] C. Wessel, Essai sur la représentation de la direction, T. N. Thiele, Kopenhagen 1897 (Übersetzung der 1799 erschienenen Arbeit *Om direktionens analytiske Betegnung* in Danske selsk. skr. Bd. 5.)

Zusätze bei der deutschen Ausgabe:

[25] C. Andreian Cazacu, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975 (Übersetzung aus dem Rumänischen).

[26] G. M. Golusin, Geometrische Funktionentheorie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957 (Übersetzung aus dem Russischen).

[27] A. I. Markuschewitsch, Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).

[28] I. I. Priwalow, Randeigenschaften analytischer Funktionen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956 (Übersetzung aus dem Russischen).

A. I. Markuschewitsch, Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).

5. Zahlentheorie

von William J. und Fern Ellison

5.0. Vorbemerkung

Die Zahlentheorie ist ein so ausgedehntes Gebiet, daß es unmöglich ist, in diesem Kapitel eine vollständige Darlegung der Geschichte aller ihrer Zweige zu geben. In der Auswahl der behandelten Probleme haben wir uns auf diejenigen beschränkt, welche die Hauptströmungen der Theorie repräsentieren.

Bis etwa 1835 war die Zahlentheorie eine Anhäufung von einzelnen Problemen, von denen jedes durch eine ad-hoc-Methode gelöst wurde. Es gab jedoch eine Ausnahme, nämlich die Theorie der binären quadratischen Formen. Diese Theorie entstand um die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts und wurde als autonomer Teil der Zahlentheorie betrieben. Nach den dreißiger Jahren des neunzehnten Jahrhunderts tauchten neuartige Probleme auf, welche neue Zweige der Zahlentheorie hervorbrachten; von den ersten, welche auftraten, muß man vor allem die Theorie der algebraischen Zahlen und die Theorie der Primzahlen erwähnen; andere folgten schnell nach. Aus diesen Gründen haben wir uns entschlossen, die Geschichte der Zahlentheorie bis 1830 als ein Ganzes darzustellen, mit Ausnahme der Theorie der binären quadratischen Formen; im Gegensatz dazu wird für die Periode, die um 1830 beginnt, die Geschichte jedes großen Zweiges der Theorie gesondert abgehandelt.

5.1. Eine kurze Geschichte der Anfänge der Zahlentheorie

Im ganzen Verlauf seiner Geschichte ist der Mensch von den Zahlen fasziniert worden, und jede Zivilisation hat Zahlentheoretiker hervorgebracht, obgleich diese ursprünglich Geometer, Berechner von Kalendern, Priester oder Zauberer waren. Den Babyloniern verdanken wir das älteste erhaltengebliebene Dokument der Zahlentheorie, das auf etwa 1900 v. u. Z. zu datieren ist. Der Text gibt ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ an, d. h., er bezieht sich auf Pythagoreische

Tripel. Nach der chinesischen Mythologie zu urteilen geht das Interesse für die Zahlen bis auf 3000 Jahre v. u. Z. zurück, doch ist uns kein Zeugnis dieses Zeitalters überliefert. Von den Hindus besitzen wir das Bakhshali-Manuskript aus dem vierten Jahrhundert u. Z., in dem zum erstenmal die Null und die negativen Zahlen auftauchten, und Brahmagupta, geboren 598 u. Z., kannte Regeln zur Bestimmung ganzzahliger Lösungen der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$, wobei A eine gegebene positive ganze Zahl ist. Die Entwicklung der Zahlentheorie in Europa setzte mit der griechischen Tradition ein, die ihren Höhepunkt mit Diophant(os) von Alexandria (vermutlich im dritten/vierten Jahrhundert u. Z.) erreichte. Seine *Arithmetica* — eine der ersten ausschließlich der Algebra und der Zahlentheorie gewidmeten Sammlungen — blieb ein grundlegender Text im Verlaufe von mehr als vierzehn Jahrhunderten einer langsamen Entwicklung [19][1].

In seinem 1798 erstmals publizierten klassischen Werk *Théorie des nombres* [29] hat Legendre die Entwicklung der Zahlentheorie bis zum letzten Viertel des achtzehnten Jahrhunderts beschrieben. Wir können nichts Besseres tun, als das Vorwort von Legendre zu zitieren (hier nach [29][1] — d. Ü.):

„Nach den verschiedenen Bruchstücken zu urteilen, die auf uns gekommen und von denen einige im Euclid angeführt sind, scheinen die alten Philosophen ziemlich ausgedehnte Untersuchungen über die Eigenschaften der Zahlen angestellt zu haben. Zur gründlicheren Erforschung dieser Wissenschaft fehlten ihnen indessen zwei Hülfsmittel: die ziffernmässige Darstellung, welche dazu dient die Zahlen mit grosser Leichtigkeit auszudrücken, und die Algebra, welche die Resultate verallgemeinert und in gleicher Weise mit bekannten und unbekannten Grössen rechnet. Die Erfindung dieser beiden Künste musste daher auf die weitere Entwicklung der Wissenschaft von den Zahlen bedeutenden Einfluss üben. So sieht man denn, dass das ganze Werk des Diophant von Alexandria, der, soweit bekannt, der älteste Autor ist, welcher über Algebra geschrieben, von den Eigenschaften der Zahlen handelt und schwierige Aufgaben enthält, die mit grosser Geschicklichkeit und vielem Scharfsinn gelöst sind.

Von Diophant bis zur Zeit Vieta's und Bachet's fuhren die Mathematiker zwar fort, sich mit den Zahlen zu beschäftigen, jedoch ohne grossen Erfolg, und ohne die Wissenschaft merklich zu fördern.

Vieta, welcher die Algebra weiter vervollkommnete, löste mehrere schwierige, auf die Zahlen bezügliche Probleme. Bachet gab in seinem Werke: „Problèmes plaisans et délectables" eine allgemeine und sehr geistreiche Methode für die Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades. Demselben Gelehrten verdanken wir einen ausgezeichneten Commentar zum Diophant, welcher später durch Randbemerkungen von Fermat bereichert wurde.

Fermat, einer der Geometer, durch deren Arbeiten die Entdeckung der neuen Rechnungsarten am meisten beschleunigt wurde, beschäftigte sich sehr erfolgreich mit der Wissenschaft der Zahlen und brach derselben neue Bahnen. Wir verdanken ihm eine grosse Menge von merkwürdigen Sätzen, die er jedoch fast alle ohne Beweis gelassen hat. Es lag im Geiste der Zeit, sich gegenseitig Aufgaben zu stellen; man verheimlichte dabei meistens seine eigene Auflösungsmethode, um sich und seiner Nation neue Triumphe vorzubehalten. Eine solche Rivalität bestand be-

sonders zwischen den französischen und englischen Mathematikern. Daher ist es gekommen, dass die meisten Beweise Fermat's verloren gegangen sind; die wenigen, die auf uns gekommen sind, lassen uns umsomehr die uns fehlenden vermissen.

Von Fermat bis auf Euler gaben sich die Mathematiker, vollständig mit der Entdeckung oder Anwendung der neuen Rechnungsarten beschäftigt, nicht mit der Theorie der Zahlen ab. Euler nahm sich zuerst wieder dieses Teils der mathematischen Wissenschaften an. Die zahlreichen Abhandlungen, die er hierüber in den Abhandlungen der Petersburger Akademie und in andern Werken veröffentlicht hat, liefern den Beweis, wie sehr es ihm am Herzen lag, der Wissenschaft der Zahlen dieselbe Förderung angedeihen zu lassen, welche die meisten andern Teile der Mathematik ihm verdanken. Ja man kann sagen, dass Euler einen besonderen Gefallen an derartigen Untersuchungen hatte und sich ihnen mit einer gewissen Leidenschaft hingab, wie es fast bei allen der Fall ist, die sich mit der Zahlentheorie beschäftigen. Wie dem auch sein möge, seine Untersuchungen führten ihn zum Beweise zweier Hauptsätze Fermat's, nämlich 1) dass, wenn a eine Primzahl und x eine beliebige, durch a nicht teilbare Zahl ist, die Formel $x^{a-1} - 1$ stets durch a sich teilen lässt, 2) dass jede Primzahl von der Form $4n + 1$ die Summe zweier Quadrate ist.

Eine Menge anderer wichtiger Entdeckungen sind in den Abhandlungen Euler's enthalten. Man findet darin die Theorie der Teiler der Grösse $a^n \pm b^n$; die Abhandlung über die Zerlegung der Zahlen in Teile, welche auch in seine ‚Einleitung in die Analysis des Unendlichen' aufgenommen ist; die Anwendung der imaginären und irrationalen Faktoren bei der Auflösung der unbestimmten Gleichungen; die allgemeine Auflösung der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades unter der Voraussetzung, dass man eine specielle Lösung kenne, den Beweis vieler Sätze über die Potenzen der Zahlen, und besonders den zweier von Fermat angegebenen Sätze, dass die Summe oder Differenz zweier Kuben kein Kubus, und die Summe oder Differenz zweier Biquadrate kein Quadrat sein kann. Endlich findet man in diesen Schriften eine grosse Menge unbestimmter Aufgaben, welche durch sehr geistreiche analytische Kunstgriffe gelöst sind.

Euler ist lange Zeit hindurch fast der einzige Mathematiker gewesen, der sich mit der Zahlentheorie beschäftigte. Endlich trat Lagrange auch auf dieses Gebiet über; seine ersten Schritte waren von Erfolgen begleitet, gleich denen, welche er bei Untersuchungen höherer Art errungen hatte. Eine allgemeine Methode, die unbestimmten Gleichungen zweiten Grades aufzulösen, und was noch schwieriger war, eine Methode, sie in ganzen Zahlen aufzulösen, war der erste Versuch dieses berühmten Gelehrten. Bald darauf wandte er die Kettenbrüche auf diesen Zweig der Analysis an; er bewies zuerst, dass der Kettenbruch, welcher gleich der Wurzel einer rationalen Gleichung zweiten Grades ist, periodisch sein muss, und schloss daraus, dass das auf die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ bezügliche Fermat'sche Problem immer lösbar ist, ein Satz, der bis dahin noch nicht in strenger Weise begründet war, obwohl mehrere Mathematiker Methoden für die Auflösung dieser Gleichung gegeben hatten.

Derselbe Gelehrte bewies in seinen weiteren Untersuchungen, welche in den Abhandlungen der Berliner Akademie niedergelegt sind, zuerst den Satz, dass jede ganze Zahl die Summe von vier Quadraten ist; . . ."

5.2. Das Ende des achtzehnten Jahrhunderts

Wir werden uns jetzt mit einigen der Hauptentwicklungen der Zahlentheorie im achtzehnten Jahrhundert eingehend beschäftigen. Sowohl um den Geschmack der damaligen Zeit zu treffen als auch um den Kontrast mit der Ausdrucksweise, die zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts auftauchte, deutlich zu machen, werden wir die Ergebnisse der damaligen Zahlentheorie mit den Worten Legendres wiedergeben. Die recht ungeschickte Art, in der einige dieser Sätze formuliert wurden, verschwand, sobald sich eine neue Sprache herausbildete, welche die tiefere mathematische Struktur zu beschreiben in der Lage war.

In der Zahlentheorie waren die beiden Hauptgebiete der Forschung diejenigen Probleme, die mit den Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen und mit der Theorie der Gleichungen zweiten Grades verknüpft waren. Selbstverständlich hat man auch andere arithmetische Probleme studiert, von denen wir einige in 5.2.3. diskutieren werden.

5.2.1. *Teilbarkeitsprobleme*

Der Prototyp der Probleme, die damals untersucht wurden, war eng verknüpft mit der Lösung von Gleichungen der Gestalt

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = py$$

in ganzen Zahlen x und y, wobei die a_i gegebene ganze Zahlen und p eine gegebene Primzahl sind. Schon im Jahre 1624 hatte Bachet eine Lösung der Gleichung $ax + 1 = py$ veröffentlicht; dabei benutzte er Kettenbrüche. Die Methode wurde später von Euler und Lagrange wiederentdeckt.

Das für die spätere Entwicklung der Theorie wichtigste Ergebnis ist die folgende im Jahre 1640 von Fermat ausgesprochene Behauptung: *Für jede ganze Zahl N, die nicht durch eine gegebene Primzahl c teilbar ist, ist $(N^{c-1} - 1)/c$ ganzzahlig.*

Der erste Beweis der Fermatschen Behauptung wurde 1736 von Euler gegeben, der auch Untersuchungen über zahlreiche verwandte Fragen durchgeführt hat. In den Jahren 1768 und 1771 hat Lagrange das Werk Eulers im Detail studiert. Unter den von ihm erzielten Resultaten kommt folgender Satz vor: *Es sei p eine Primzahl und $F(x)$ ein Polynom vom Grad m mit ganzzahligen Koeffizienten; dann gibt es höchstens m Werte von x zwischen $-p/2$ und $p/2$, für die $F(x)$ durch p teilbar ist.* Wir kommen auf das Werk von Euler und Lagrange in 5.3. zurück, wo wir ihre Resultate in völliger formaler Klarheit darlegen können.

Gerade im Verlauf seiner Untersuchungen über die Konsequenzen der Fermatschen Behauptung entdeckte Legendre 1785 die Beziehung, die er das *quadratische Reziprozitätsgesetz* nannte.[2] Dieser Satz, der aussagt, wann zu zwei ungeraden Primzahlen m und n eine ganze Zahl x existiert bzw. nicht existiert, für welche die Gleichungen $x^2 + m = ny_1$ und $x^2 + n = my_2$ lösbar sind, war eines der wichtigsten allgemeinen Resultate, die nach Fermat entdeckt wurden. Wie wir später sehen werden, waren der Beweis dieses Satzes und das Bestreben, ihn zu verallgemeinern, von beträchtlichem Einfluß auf die weitere Entwicklung der Zahlentheorie.

Um zu seinem Reziprozitätsgesetz zu gelangen, bewies Legendre den folgenden sich auf eine einzige Kongruenz beziehenden Satz: „Ist die Primzahl c ein Teiler von $x^2 + N$, wo N eine gegebene positive oder negative Zahl bedeutet, so muß die Grösse $(-N)^{(c-1)/2} - 1$ durch c teilbar sein. Umgekehrt wird es, wenn diese Bedingung erfüllt ist, eine Zahl x (kleiner als $\frac{1}{2}c$) von der Beschaffenheit geben, dass sich $x^2 + N$ durch c teilen lässt. (Ausgenommen wird der Fall $c = 2$, sowie der, wo N durch c teilbar ist.)" Legendre fuhr dann in folgender Weise fort: „Bemerkung. Wir haben bewiesen, dass, wenn N eine beliebige Zahl und c eine Primzahl ist, welche nicht in N aufgeht, die Grösse $N^{c-1} - 1$ stets durch c teilbar ist; diese Grösse ist das Produkt der beiden Faktoren $N^{(c-1)/2} + 1$ und $N^{(c-1)/2} - 1$. Es muss daher entweder der eine oder der andere von diesen beiden Faktoren durch c teilbar sein. Daraus geht hervor, dass die Grösse $N^{(c-1)/2}$ bei der Division durch c jederzeit den Rest $+1$ oder den Rest -1 lässt. Da derartige Grössen wie $N^{(c-1)/2}$ sehr häufig im Verlaufe unserer Untersuchungen auftreten werden, so werden wir uns des abgekürzten Zeichens $\left(\frac{N}{c}\right)$ bedienen, um den Rest, welchen $N^{(c-1)/2}$ bei der Division durch c ergiebt, auszudrücken. Dieser Rest kann, wie wir soeben gesehen haben, nur entweder gleich $+1$ oder gleich -1 sein. Wenn $\left(\frac{N}{c}\right) = +1$ ist, so sagt man, N sei ein quadratischer Rest von c, weil alsdann $N^{(c-1)/2}$ bei der Division durch c den Rest $+1$ lässt, und dies die notwendige Bedingung dafür ist, dass c in $x^2 - N$ aufgeht. Ist dagegen $\left(\frac{N}{c}\right) = -1$, so sagt man, N sei ein quadratischer Nichtrest von c."

Legendre konnte dann sein quadratisches Reziprozitätsgesetz folgendermaßen formulieren: „Welches auch die Primzahlen m und n sein mögen, man erhält stets, falls sie nicht alle beide von der Form $4x + 3$ sind: $\left(\frac{n}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$. Sind sie aber alle beide von der Form $4x + 3$, so hat man $\left(\frac{n}{m}\right) = -\left(\frac{m}{n}\right)$. Diese beiden allgemeinen Fälle sind in die Formel zusammengefasst: $\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right)$." (Zitiert nach [29][1], S. 197f., 229f.)

Legendre gab einen Beweis seines „Gesetzes", in dessen Verlauf er gezwungen war, ohne Beweis anzunehmen, daß man immer eine Primzahl q der Gestalt $4k + 3$ mit $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ finden kann, wenn p eine gegebene Primzahl der Gestalt $4n + 1$ ist. Er war sich dieser Schwierigkeit sehr wohl bewußt, fand aber keinen Weg, sie zu überwinden. Tatsächlich ist der Satz richtig; denn er ist eine Folgerung aus einem Satz über die Verteilung von Primzahlen in arithmetischen Progressionen (vgl. 5.6.), der 1837 von Dirichlet bewiesen wurde.

Es scheint, daß Euler das Reziprozitätsgesetz kannte; in seinen *Opuscula Analytica* zumindest sprach er einen allgemeinen Satz aus, aus dem das quadratische

Reziprozitätsgesetz unmittelbar abzuleiten ist und der seinerseits eine Folgerung aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz ist. Euler sagte aber ausdrücklich, daß er diesen Satz nicht beweisen könne.[2a]

5.2.2. *Quadratische Gleichungen*

Wir wenden uns nun einem anderen Gegenstand zu, der für die Arithmetiker des achtzehnten Jahrhunderts wichtig gewesen ist, nämlich der Lösung der allgemeinen binären quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten in ganzen Zahlen:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\,.$$

Im Jahre 1767 löste Lagrange als erster das Problem vollständig. Euler hatte es angegriffen, aber nur Methoden angegeben, um neue Lösungen aufzufinden, wenn man von einer als bekannt vorausgesetzten Lösung ausgeht; er hat aber niemals gesagt, unter welchen Bedingungen die Ausgangslösung existiert.

Man hatte bemerkt, daß die Lösung der allgemeinen binären quadratischen Gleichung vom Problem der Darstellung einer gegebenen ganzen Zahl durch eine binäre quadratische Form abhängt, d. h. von der Lösung der Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 = n$. Auf diese Weise wurden Euler und Lagrange darauf geführt, eine Theorie der binären quadratischen Formen zu entwickeln.

Bei quadratischen Formen stellen sich folgende Fragen: „Welche ganzen Zahlen stellt diese Form dar?" und „Kann man alle Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl finden?" Ist eine quadratische Gleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 = n$$

gegeben, so scheint es vernünftig zu versuchen, sie durch eine Variablentransformation $X = \alpha x + \beta y$, $Y = \gamma x + \delta y$ in eine „einfachere" Gleichung $AX^2 + BXY + CY^2 = n$ überzuführen, die man vielleicht lösen kann. Nehmen wir beispielsweise an, es sollen alle ganzzahligen Lösungen von $15x^2 + 43xy + 32y^2 = 223$ gefunden werden; die Transformation $X = 30x + 43y$, $Y = y$ verwandelt diese Gleichung in $X^2 + 71Y^2 = 13380$, und eine einfache Rechnung zeigt, daß deren einzige Lösungen $X = \pm 94$, $Y = \pm 8$ sind. Wir stoßen jedoch auf eine bestimmte Schwierigkeit, wenn wir versuchen, durch eine Transformation auf unsere Ausgangsgleichung zurückzukommen; denn es ist $x = \frac{1}{30}(X - 43Y)$, $y = Y$, und die ganzzahligen Lösungen von $X^2 + 71Y^2 = 13380$ liefern keine ganzzahligen Lösungen der Ausgangsgleichung. Dieses Problem führte Lagrange und andere zur Betrachtung von umkehrbaren Transformationen zwischen den Formen, d. h. von Transformationen mit $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$. Für solche Transformationen ist klar, daß jede Information über den Wertevorrat der einen Form auch eine Information über den Wertevorrat der anderen Form liefert. Lagrange hat den Grundstein zu einer Klassifikation der quadratischen Formen mit Hilfe dieser Idee gelegt, und er selbst und Legendre haben dies im Detail untersucht. Wir werden ihre Ergebnisse und die ihrer Nachfolger in 5.4. darlegen.

§ 2.3. *Verschiedene Probleme*

Neben der Untersuchung der Teilbarkeit und der quadratischen Formen haben sich die ersten Zahlentheoretiker für zahlreiche andere Probleme interessiert. Wir diskutieren nachstehend einige davon.

Darstellung ganzer Zahlen als Summe von vier Quadraten

In seinem Kommentar zur *Arithmetica* des Diophant bemerkte Bachet, daß Diophant zu wiederholten Malen die Vermutung geäußert habe, jede positive ganze Zahl könne als Summe von höchstens vier Quadraten ganzer Zahlen dargestellt werden. Er fügte hinzu, er habe diese Behauptung für alle ganzen Zahlen bis 325 verifiziert; er konnte diesen Satz jedoch nicht allgemein beweisen. Auch Descartes wagte sich an dieses Problem, brach aber die Beschäftigung damit ab, mit der Bemerkung, es sei so schwierig, daß er keinen Weg zu einer Lösung sehe. In einer seiner zahlreichen Randbemerkungen in seinem Exemplar der Bachetschen Übersetzung des Diophant behauptete Fermat, er habe einen allgemeinen Satz bewiesen, der die Wahrheit der Vermutung von Bachet impliziere. Er versprach, die Details später zu publizieren, was er aber leider niemals tat. In einem Brief an Pascal vom Jahre 1654 schrieb er, zum Beweis dieses allgemeinen Satzes müsse folgendes gezeigt werden:

(1) Jede Primzahl der Gestalt $4n + 1$ ist die Summe der Quadrate zweier ganzer Zahlen;

(2) für eine gegebene Primzahl der Gestalt $4n + 1$ kann man durch eine allgemeine Methode die beiden Quadrate bestimmen, deren Summe sie ist;

(3) jede Primzahl der Gestalt $3n + 1$ kann in der Gestalt $x^2 + 3y^2$ dargestellt werden;

(4) jede Primzahl der Gestalt $8n + 1$ oder $8n + 3$ kann in der Gestalt $x^2 + 2y^2$ dargestellt werden;

(5) es gibt kein rechtwinkliges Dreieck mit rationalen Seitenlängen, dessen Flächeninhalt eine Quadratzahl ist.

Die Versuche, diese Behauptungen Fermats zu beweisen, waren ein starkes Stimulans in den Arbeiten von Euler und Lagrange über quadratische Formen. Im Jahre 1754 gelang es Euler, die erste Behauptung über die Primzahlen der Gestalt $4n + 1$ zu beweisen[3], doch war er nicht in der Lage, das Problem der Darstellbarkeit als Summe von vier Quadraten vollständig zu lösen. Lagrange setzte Eulers Untersuchungen fort und bewies schließlich den Vier-Quadrate-Satz im Jahre 1770. Nur wenig später vereinfachte Euler den Lagrangeschen Beweis in beträchtlichem Maße, und Legendre bewies 1785 — was eine letzte Verfeinerung darstellte —, daß jede ganze Zahl, die *nicht* die Gestalt $4^r(8n + 7)$ besitzt, sogar als Summe von höchstens drei Quadraten dargestellt werden kann.

Die Fermatsche Vermutung (in der Literatur auch *Der große Fermatsche Satz*)

Dabei handelt es sich um eine andere Randbemerkung von Fermat: Für $n > 2$ besitze die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine nichttrivialen ganzzahligen Lösungen. Da jedes ganzzahlige $n > 2$ mindestens durch 4 oder durch eine ungerade Primzahl p teilbar ist, kann die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ immer in der Gestalt $(x^r)^4 + (y^r)^4 = (z^r)^4$ oder in der Gestalt $(x^r)^p + (y^r)^p = (z^r)^p$ geschrieben werden. Zum Beweis der Fermatschen Vermutung genügt es also zu zeigen, daß die Gleichungen $x^4 + y^4 = z^4$ und $x^p + y^p = z^p$ (für $p \neq 2$) keine nichttrivialen ganzzahligen Lösungen besitzen.

Fermat selbst hat in einem der wenigen Beweise, die er wirklich aufgeschrieben hat, den Fall $n = 4$ erledigt, und Euler hat einen leicht lückenhaften Beweis für den Fall $n = 3$ angegeben(4). Die Arbeit von Euler ist indessen wichtig; denn sie benutzt die elementaren arithmetischen Eigenschaften von Zahlen der Gestalt $a + b\sqrt{-3}$, wobei a und b ganze Zahlen sind. Vor der Kummerschen Arbeit aus dem Jahre 1847 gab es keinen weiteren ernsthaften Fortschritt bei der Lösung dieses Problems. Die wirkliche Bedeutung der Fermatschen Vermutung besteht darin, daß sie die Anstrengungen von Kummer „polarisiert" und zur Theorie der algebraischen Zahlen geführt hat(5).

Diophantische Gleichungen

Die Mathematiker haben nicht nur die Fermatsche Vermutung, sondern auch andere ähnliche diophantische Gleichungen untersucht. Euler war während des achtzehnten Jahrhunderts der große Spezialist dieses Gebiets. Seine Schriften enthalten Hunderte von Beispielen für Lösungen solcher Gleichungen.

Beispielsweise fand Euler von Parametern abhängende Formeln, welche ganzzahlige Lösungen von solchen Gleichungen wie $x^3 + y^3 = w^3 + z^3$ und $x^4 + y^4 = w^4 + z^4$ liefern. Er hat auch alle ganzzahligen Lösungen von solchen Gleichungen wie $x^3 + by^3 = a$ und $y^2 = x^3 + k$ für verschiedene Werte von a, b und k gefunden. Überdies hat Euler zahlreiche von Diophant gestellte Probleme studiert, etwa: Man bestimme alle rationalen Zahlen x, y, z, für welche $xy + x + y$, $xz + x + z$ und $yz + y + z$ sämtlich Quadratzahlen sind.

Dieses Gebiet führte somit zu einem Sammelsurium von Einzelergebnissen, und die Situation änderte sich bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts in keiner Weise.

Partitionen

Eine Partition einer ganzen Zahl n ist eine Darstellung von n als Summe von ganzen positiven (nichtnegativen) Zahlen. Beispielsweise sind die Partitionen von 5 die folgenden:

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 .$$

Die Bestimmung der Anzahl der möglichen Partitionen einer ganzen Zahl n ist ein Problem, das Euler faszinierte. Bezeichnen wir die Anzahl der Partitionen von n mit $p(n)$, so ist $p(5) = 7$. Dank der Entfaltung seiner gewohnten Virtuosität im Umformen von Beziehungen entdeckte Euler eine Menge bemerkenswerter Identitäten, welche verschiedene Werte von $p(n)$ miteinander verknüpfen. Beispielsweise bewies er die Relation

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)\, x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}.$$

Später fand er als Folgerung aus einer ähnlichen Formel sogar eine Rekursionsformel für die $p(n)$, die es ihm gestattete, die aufeinanderfolgenden Werte von $p(n)$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} &p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + \cdots \\ &\quad + (-1)^k p\left(n - \frac{1}{2}k(3k-1)\right) \\ &\quad + (-1)^k p\left(n - \frac{1}{2}k(3k+1)\right) + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der ersten der Eulerschen Identitäten fanden Hardy und Ramanujan im Jahre 1918 eine asymptotische Formel für $p(n)$. Ihre unter dem Namen *Kreismethode* bekannte Technik war, wie wir in 5.11. sehen werden, der Ausgangspunkt, von dem aus ein sehr wichtiges Werkzeug in der Zahlentheorie erarbeitet wurde.

Im Zusammenhang mit seinen Arbeiten über Partitionen entdeckte Euler zahlreiche Identitäten des Typs

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} \\ &= 1 + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^4}{(1-x^2)(1-x^2)^2} + \frac{x^9}{(1-x)^2(1-x^2)^2(1-x^3)^2} + \cdots, \end{aligned}$$

doch gehört die Diskussion dieser Resultate im Grunde in die Theorie der elliptischen Funktionen; daher verweisen wir den Leser auf 7.1.15.

5.2.4. *Vermutungen*

Es gibt noch zahlreiche andere erwähnenswerte Probleme, über welche die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts nachgedacht haben, zu deren Lösung sie aber nicht imstande sein konnten. Doch haben sie umfangreiche Zahlentabellen über diese Fragen zusammengestellt.

(a) *Die Goldbachsche Vermutung: Jedes geradzahlige $n > 4$ ist Summe zweier ungerader Primzahlen. Jedes ungeradzahlige $n \geqq 9$ ist Summe dreier ungerader Primzahlen.*

Diese Probleme legte Goldbach im Jahre 1742 Euler vor. Das erste ist noch immer nicht gelöst; für weitere Informationen vergleiche man 5.11. Das zweite hat Vino-

gradov im Jahre 1937 teilweise gelöst, indem er zeigte, daß jede hinreichend große ungerade Zahl Summe von drei ungeraden Primzahlen ist. Er machte dabei von einem Verfahren Gebrauch, das von Hardy und Littlewood in den zwanziger Jahren entwickelt worden war und das in 5.11. zu diskutieren sein wird.

(b) *Das Waringsche Problem: Zu jeder ganzen Zahl k gibt es eine ganze Zahl $g(k)$ derart, daß jede positive ganze Zahl als Summe von höchstens $g(k)$ Potenzen positiver ganzer Zahlen mit dem Exponenten k dargestellt werden kann.*

Waring hat dieses Problem 1770 gestellt und behauptet, es sei $g(2) = 4$, $g(3) = 9$, $g(4) = 19$. Es ist sicher, daß er keine Vorstellung davon hatte, wie diese Behauptungen, die sich vermutlich auf numerische Beobachtungen stützten, zu beweisen sind. Die Lösung des Waringschen Problems bildet einen Teil der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts und wird in 5.11. diskutiert werden.

(c) *Primzahlverteilung*: Es gab zahlreiche Probleme, welche Eigenschaften der Primzahlen betreffen. Beispielsweise vermutete Legendre, zu jedem ganzzahligen $n > 1$ gebe es eine Primzahl zwischen n^2 und $(n + 1)^2$. Die Antwort ist noch unbekannt. Legendre und andere haben auch einen großen Teil ihrer Zeit dem Ziel gewidmet, eine Formel zu finden, welche die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen ganzen Zahl x angenähert darstellen würde. Bezeichnet $\pi(x)$ die Anzahl dieser Primzahlen, so schwebte ihnen

$$\pi(x) \sim \frac{x}{A \log x + B}$$

vor, mit gewissen Konstanten A und B. Schließlich vermuteten Euler und Legendre, daß für zueinander teilerfremde ganze Zahlen k und l die Folge $\{kn + l\}_{n=0,1,2,\ldots}$ unendlich viele Primzahlen enthält (vgl. 5.4.4.2.).

5.3. Die Anfänge im neunzehnten Jahrhundert

Etwa während des ersten Drittels des neunzehnten Jahrhunderts wurde die Zahlentheorie völlig durch Gauß beherrscht. Ganz wie die Zahlentheoretiker des achtzehnten Jahrhunderts interessierte sich Gauß vor allem für die Theorie der Teilbarkeit und die Arithmetik der binären quadratischen Formen. Im Jahre 1801 publizierte er seine *Disquisitiones Arithmeticae*. Obwohl die Grundprobleme die gleichen blieben wie im achtzehnten Jahrhundert, war die Sprache, die er zu ihrer Formulierung benutzte, völlig neu. Die Gaußsche Formulierung der Ergebnisse von Euler und Lagrange über die Teilbarkeit, die wir in 5.2. angegeben haben, illustriert diese Veränderung gut. Wir werden die Beiträge von Gauß zur quadratischen Reziprozität und das Werk von Jacobi, Eisenstein und Dirichlet über die Kongruenzen höheren Grades kurz diskutieren. Anschließend werden wir wegen ihrer Bedeutung für die späteren Untersuchungen auf die Gaußschen Untersuchungen zur Konstruktion der regelmäßigen Vielecke und ihre Beziehungen zur Gleichung $x^p - 1 = 0$ eingehen. Mehr als die Hälfte der *Disquisitiones Arithmeticae* ist der Theorie der quadratischen Formen gewidmet, die wir in 5.4. behandeln werden.

5.3.1. *Kongruenzen*

Der erste Abschnitt der *Disquisitiones Arithmeticae*, der den Fragen der Teilbarkeit gewidmet ist, beginnt mit folgender Definition: Wenn eine Zahl a die Differenz zweier Zahlen b und c teilt, dann sagen wir, b sei *kongruent* zu c modulo a. Diese Relation bezeichnen wir mit $b \equiv c \pmod{a}$.

Die Menge der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, a-1$ (oder jede Menge aus a Zahlen, die modulo a jeweils diesen Zahlen kongruent sind) wird ein *voll[ständig]es Restsystem* für den Modul a genannt. Unter einem *reduzierten Restsystem* verstehen wir ein volles Restsystem, aus dem jeder Rest gestrichen ist, der mit a einen gemeinsamen Faktor besitzt.

Die Sprache der Kongruenzen liefert eine gedrängte und suggestive Bezeichnungsweise. Ist beispielsweise p eine *Primzahl*, so ergeben sich aus den Kongruenzen $a \equiv b \pmod{p}$ und $c \equiv d \pmod{p}$ die weiteren Kongruenzen $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{p}$ und $ac \equiv bd \pmod{p}$; überdies folgt im Fall $c \not\equiv 0 \pmod{p}$ aus $ac \equiv bc \pmod{p}$ die Kongruenz $a \equiv b \pmod{p}$, und zu jedem $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ gibt es ein a' mit $aa' \equiv 1 \pmod{p}$. Man kann also mit Kongruenzen modulo p genau so rechnen, wie man mit den rationalen Zahlen rechnet.

Formuliert man den Fermatschen Satz in der Sprache der Kongruenzen, so lautet er:

Für jede Primzahl p besitzt die Kongruenz $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ genau $p-1$ zueinander inkongruente Lösungen.

Man kann also das Polynom $x^{p-1} - 1$ modulo p in Faktoren zerlegen und erhält

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-p+1) \pmod{p}\,.$$

Der ebenfalls in 5.2.1. formulierte Satz von Lagrange lautet jetzt: Ist $f(x)$ ein Polynom vom Grade m mit ganzzahligen Koeffizienten und p eine Primzahl, so besitzt die Kongruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ höchstens m inkongruente Lösungen.

Wir hatten in 5.2. auf das Werk von Euler im Zusammenhang mit dem Fermatschen Satz angespielt. Jetzt können wir gewisse dieser Resultate mit Hilfe von Kongruenzen ausdrücken. Beispielsweise gab Euler eine direkte Verallgemeinerung dieses Satzes für Nichtprimzahlmoduln an:

Bezeichnet $\varphi(m)$ die Anzahl der zu m teilerfremden ganzen Zahlen zwischen 1 und $m-1$, so ist die Anzahl der inkongruenten Lösungen der Kongruenz $x^{\varphi(m)} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$ gleich $\varphi(m)$.

Euler hat auch folgendes bemerkt, was in gewisser Hinsicht noch wichtiger ist. Ist p eine Primzahl und setzt man $p - 1 = ef$, so hat die Kongruenz $x^f - 1 \equiv \equiv 0 \pmod{p}$ stets genau f inkongruente Lösungen. Er wies jedoch ausdrücklich darauf hin, daß es immer Reste modulo p gibt, die keiner Kongruenz $x^f - 1 \equiv \equiv 0 \pmod{p}$ mit $f < p - 1$ genügen. Diese Reste nannte er *Primitivwurzeln* der Kongruenz $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Wenn g eine solche Primitivwurzel ist, durchläuft g^r für $r = 0, 1, \ldots, p-1$ ein volles Restsystem modulo p. Euler gelang es nicht, einen vollständigen Beweis dafür zu geben, daß es zu jeder Primzahl p immer Primitivwurzeln gibt. Gauß vervollständigte den Beweis von Euler und untersuchte zahlreiche Eigenschaften dieser Primitivwurzeln.

5.3.2. *Quadratische Reziprozität*

Die quadratische Reziprozität ist ein Problem, mit dem sich Gauß im Verlaufe zahlreicher Jahre vorwiegend beschäftigt hat. In 5.2. haben wir mitgeteilt, wie Legendre dieses Gesetz gefunden und gegen 1785 einen unvollständigen Beweis gegeben hatte. Seit dieser Zeit war es niemandem gelungen, die Lücken im Legendreschen Beweis zu schließen oder einen anderen Beweis zu finden. Gauß war überzeugt, die Annahme Legendres könne nicht ohne Benutzung des Reziprozitätsgesetzes selbst bewiesen werden. Jedoch ist, wie wir schon bemerkt haben, diese Annahme eine Folgerung aus dem Dirichletschen Satz über die Primzahlen in arithmetischen Progressionen (vgl. 5.4.4.2.); die Bemerkungen von Gauß waren tatsächlich schlecht begründet.

In den *Disquisitiones Arithmeticae* gab Gauß zwei völlig verschiedene Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. Der erste besteht in einem Induktionsschluß, von dem das mindeste, was man sagen kann, ist, daß er sogar für den gewissenhaftesten Leser unlesbar ist.[6] Der zweite Beweis, der verständlicher ist, stützt sich auf die Theorie der quadratischen Formen. Im Jahre 1808 veröffentlichte dann Gauß zwei neue Beweise, neun Jahre später zwei weitere. Der vierte und der sechste Beweis sind wichtiger als die anderen, denn ihre Technik wurde durch andere Mathematiker weiterentwickelt. Es ist sehr wahrscheinlich, daß die wiederholte Suche von Gauß nach neuen Beweisen durch seinen Wunsch motiviert war, eine Verallgemeinerung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes auf Kongruenzen höheren Grades zu finden und zu beweisen (vgl. [131] — *d. Übers.*).

5.3.3. *Biquadratische und kubische Reziprozität*

Die Grundprobleme der Theorie der biquadratischen Reste sind die folgenden:

> *Was kann man, wenn eine ganze Zahl k und eine Primzahl p gegeben sind, über die Lösbarkeit der Kongruenz $x^4 \equiv k \pmod{p}$ sagen?*[7]

und

> *Gibt es eine „Reziprozitäts"-Beziehung zwischen der Lösbarkeit und der Nichtlösbarkeit der Kongruenzen $x^4 \equiv p \pmod{q}$ und $x^4 \equiv q \pmod{p}$, wobei p und q Primzahlen sind?*

Die erste, im Jahre 1828 publizierte Abhandlung von Gauß über diesen Gegenstand enthält eine Untersuchung über den biquadratischen Charakter von 2 bezüglich einer Primzahl p der Gestalt $4n + 1$. In seiner zweiten Abhandlung, die rund vier Jahre später erschien, bestimmte er den biquadratischen Charakter für jeden Rest modulo p. In diesem Zusammenhang wurde Gauß, um ein vernünftiges Analogon des Reziprozitätsgesetzes von Legendre formulieren zu können, darauf geführt, Primzahlen der Gestalt $4n + 1$ zu betrachten, also Primzahlen, die, wie wir wissen, in der Gestalt $p = a^2 + b^2$, also $p = (a + ib)(a - ib)$ geschrieben werden können.[8] Er betrachtete also p in gewissem Sinne nicht mehr als Primzahl. Die Interpretation erforderte die Konstruktion einer arithmetischen Theorie der komplexen Zahlen der Gestalt $x + iy$ für $x, y \in \mathbf{Z}$. Diese Zahlen sind unter dem

Namen *Gaußsche ganze Zahlen* bekanntgeworden. (Es kann sein, daß Gauß ursprünglich durch seine Untersuchungen über die elliptischen Funktionen auf das Studium dieser Zahlen geführt wurde (vgl. Kapitel 7)).

In der Theorie der Gaußschen ganzen Zahlen gibt es vier *Einheiten*, d. h. ganze Zahlen, die jede andere ganze Zahl teilen, nämlich $+1$, -1, $+i$ und $-i$. Deshalb nannte Gauß die Zahlen $a + ib$, $-a - ib$, $ia - b$, $-ia + b$, die sich voneinander jeweils nur um einen Einheitenfaktor unterscheiden, zueinander *assoziierte* Zahlen. Er nannte die Größe $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ die *Norm* von $a + ib$ und bezeichnete sie mit $N(a + ib)$. Die Gaußschen Primzahlen verteilen sich auf drei verschiedene Klassen: die reellen Primzahlen der Gestalt $4n + 3$; die komplexen Zahlen, deren Normen reelle Primzahlen der Gestalt $4n + 1$ sind; die Zahl $1 + i$, deren Norm gleich 2 ist.

Die Tatsache, daß 2 im Bereich der Gaußschen ganzen Zahlen zerlegbar ist, bereitet eine kleine Schwierigkeit bei der Verallgemeinerung des Begriffs der geraden bzw. der ungeraden Zahl. Eine Gaußsche ganze Zahl ist ungerade, wenn sie nicht durch $1 + i$ teilbar ist, halbgerade, wenn sie durch $1 + i$, aber nicht durch $(1 + i)^2$ teilbar ist, und gerade, wenn sie durch $(1 + i)^2$ teilbar ist. Man kann zeigen, daß unter vier ungeraden assoziierten Zahlen genau eine existiert, deren Imaginärteil gerade ist und bei der die Summe von Real- und Imaginärteil kongruent 1 modulo 4 ist. Diese Zahlen werden *Primärzahlen* genannt. Dies ist einfach eine bestimmte Auswahl einer der vier assoziierten Zahlen, und dies vereinfacht die Formulierung bestimmter Sätze. Beispielsweise lautet der Satz von der eindeutigen Zerlegung in Primfaktoren:

Jede komplexe ganze Zahl kann in eindeutiger Weise durch $i^m(1 + i)^n A_2^{\alpha_1} \cdots A_r^{\alpha_r}$ *dargestellt werden, wobei* m, n, α_i *in* $\mathbf{N}$ *liegen und die* A_i *komplexe Primärzahlen sind.*(9)

In seiner Arbeit von 1832 hat Gauß das Reziprozitätsgesetz in der folgenden Form formuliert, jedoch nicht bewiesen. Es sei p eine komplexe Primzahl und k eine nicht durch p teilbare Gaußsche ganze Zahl. Wir bezeichnen mit $\left(\frac{k}{p}\right)_4$ die Größe i^r, wobei i^r der Kongruenz $k^{(N(p)-1)/4} \equiv i^r \pmod{p}$ genügt. Man kann zeigen, daß dann und nur dann $\left(\frac{k}{p}\right)_4 = 1$ gilt, wenn k eine vierte Potenz modulo der komplexen Primzahl p ist. Dann lautet das Reziprozitätsgesetz: Sind α und β zwei ungerade primäre(10) Primzahlen, dann ist

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 = (-1)^{(N(\alpha)-1)(N(\beta)-1)/16} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_4 .$$

Die Analogie zur Definition des Legendre-Symbols und zum quadratischen Reziprozitätsgesetz ist offensichtlich. Der erste Beweis des Gesetzes wurde rund zehn Jahre später von Eisenstein veröffentlicht, doch hatten es andere Mathematiker wie Jacobi tatsächlich schon früher bewiesen.

Gauß sah die Arithmetik der komplexen Zahlen als einfache Verallgemeinerung der gewöhnlichen Arithmetik an, und gegen 1830 waren Jacobi, Eisenstein (ab 1843/44) und Dirichlet seinem Beispiel gefolgt. Insbesondere haben sie die Analoga

des Euklidischen Algorithmus, des Fermatschen Satzes, die Existenz von Primitivwurzeln und das quadratische Reziprozitätsgesetz für den Ring der Gaußschen ganzen Zahlen bewiesen.

Jacobi und Eisenstein gingen zur Untersuchung der kubischen Reziprozität über, d. h. der Lösbarkeit der Kongruenz $x^3 \equiv k \pmod{p}$. Sie entdeckten, daß die Theorie der kubischen Reste eine Untersuchung der komplexen Zahlen der Gestalt $x + \varrho y$ und $x + \varrho^2 y$ ins Spiel brachte, wobei x und y in $\boldsymbol{Z}$ liegen und ϱ eine (primitive) dritte Einheitswurzel ist.(11) Die arithmetischen Eigenschaften dieser Zahlen wurden bald erforscht, und wie bei den Gaußschen ganzen Zahlen erwies sich die Theorie als eine direkte und einfache Verallgemeinerung der Arithmetik der rationalen Zahlen. Nach diesen Erfolgen mit der kubischen Reziprozität nahmen Jacobi und Eisenstein einige Kongruenzen höheren Grades in Angriff, doch waren ihre Resultate weitaus weniger vollständig. Dies ist nicht überraschend, da die der Arithmetik der komplexen Zahlen (in heutiger Terminologie: der algebraischen Zahlen) innewohnenden Schwierigkeiten nicht vor den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts zutage traten. Wir werden diese Schwierigkeiten in 5.5. diskutieren.

5.3.4. *Die Gleichung $x^n - 1 = 0$*

Wie wir in 5.5.2. sehen werden, spielte die von Kummer in den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts unternommene Untersuchung der Eigenschaften der Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ eine entscheidende Rolle in der Entwicklung der Theorie der algebraischen Zahlen. Wir möchten hier keine detaillierte Geschichte der Arbeiten von Kummers Vorgängern bringen, doch scheinen uns angesichts ihrer Wichtigkeit einige Andeutungen angebracht.(12) Bekanntlich war Vandermonde der erste, der eine Methode zur Lösung der Gleichung $x^n - 1 = 0$ „in Radikalen" für ungerade Primzahlen n angab (vgl. 2.2.2.); er führte zu diesem Zweck explizite Berechnungen in Spezialfällen an und begnügte sich ferner damit, zu sagen, der allgemeine Fall ließe sich auf gleiche Weise behandeln; das ist eine Form der mathematischen Darlegung, die in der damaligen Zeit häufig war. Insbesondere hat er solche Gleichungen wie $x^5 - 1 = 0$, $x^7 - 1 = 0$ und $x^{11} - 1 = 0$ gelöst und behauptet, $x^p - 1 = 0$ mit einer Primzahl $p > 11$ könne man ebenso behandeln. Die von Lebesgue unternommene, postum in *L'Enseignement mathématique* (1955) veröffentlichte [112 bis] sehr sorgfältige Untersuchung des Werkes von Vandermonde zeigt, daß Vandermonde von der Lösung dieser Gleichungen zwar richtige Vorstellungen hatte, aber nicht in der Lage war, sie allgemein zu formulieren.(13) Diese Formulierung wurde von Gauß im letzten Abschnitt der *Disquisitiones Arithmeticae* gegeben. Durch systematische Verwendung der Existenz von Primitivwurzeln (die bei Vandermonde nicht vorkommen) und der Lagrangeschen Resolventen zeigte er, daß die Methode von Vandermonde immer zum Ziele führt. Wir werden später die Vandermondesche Methode kurz skizzieren.

Es ist möglich, daß Gauß gegen 1796, nachdem er die Arbeit von Vandermonde gelesen hatte, den Fall $x^{17} - 1 = 0$ erledigte(14), also einen Fall, der — wie wir sehen werden — auf die sukzessive Lösung von Gleichungen zweiten Grades

zurückgeführt werden kann. Mit der Lösung dieser Gleichung entdeckte Gauß eine geometrische Kuriosität: Man kann ein regelmäßiges 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Beziehung zwischen dem Problem der Konstruktion eines regelmäßigen n-Ecks und der Gleichung $x^n - 1 = 0$ wird klarer, wenn man die Wurzeln der Gleichung in der komplexen Ebene darstellt. Sie sind in gleichen Abständen über den Einheitskreis verteilt, d. h., sie bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks; daher stammt der Name „Kreisteilungsgleichung", mit dem man die Gleichung $x^n - 1 = 0$ oft belegt. Es würde uns zu weit führen, wenn wir hier mehr über die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sagen würden. Wir erwähnen nur, daß sich aus der von Gauß angestellten Untersuchung der Gleichung ergibt, daß man ein regelmäßiges n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren kann, wenn n ein Produkt von verschiedenen Primzahlen der Gestalt $2^r + 1$ (die einzigen bekannten Primzahlen dieser Gestalt sind 3, 5, 17, 257 und 65537) und eventuell einer Potenz von 2 ist. Das Umgekehrte ist auch richtig, aber Gauß hat dafür niemals einen Beweis veröffentlicht.

Wir werden jetzt angeben, worin die Vandermondesche Methode der Lösung von $x^p - 1 = 0$ bestand, und dann im Detail die Gaußsche Methode für die Gleichung $x^{17} - 1 = 0$ diskutieren. Letztere ist verhältnismäßig einfach und beleuchtet gut alle wesentlichen Punkte, die im allgemeinen Fall eine Rolle spielen. Zum Abschluß werden wir sehr kurz den allgemeinen Fall des Gaußschen Beweises erörtern und damit den Boden für unsere Analyse des Werkes von Kummer in 5.5.2. vorbereiten.

Das Verfahren von Vandermonde zur Lösung einer Gleichung $x^p - 1 = 0$ ist das folgende. Bezeichnen $1, r, \ldots, r^{p-1}$ die Wurzeln der Gleichung, so ist $1 + r + \cdots + r^{p-1} = 0$. Der Gedanke von Vandermonde besteht darin, disjunkte „Untersummen" $\eta_1, \ldots, \eta_e$ $(e < p)$ der Summe der Nullstellen zu finden derart, daß die symmetrischen Funktionen der η_i sämtlich rational sind. Dies zieht nach sich, daß die η_i Wurzeln einer Gleichung vom Grade $e < p$ mit rationalen Koeffizienten sind. Man sieht nun die Wurzeln dieser Gleichung, etwa $\eta_1, \ldots, \eta_e$, als bekannt an, und man versucht, disjunkte „Untersummen" $\mu_1, \ldots, \mu_{e'}$ von gewissen (aber nicht notwendig allen) Summen η_i zu finden, deren symmetrische Funktionen als rationale Funktionen der $\eta_1, \ldots, \eta_e$ ausgedrückt werden können und einer Gleichung vom Grade $e' < p$ genügen, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $\eta_1, \ldots, \eta_e$ sind. Nun wird man von hier an die Wurzeln dieser Gleichung als bekannt ansehen. Durch Wiederholung dieses Verfahrens hofft man, eventuell zu „Untersummen" ω_i zu gelangen, die aus einem einzigen Term bestehen (d. h. welche Wurzeln der Ausgangsgleichung wären), wobei die ω_i Wurzeln einer Gleichung eines Grades sind, der kleiner als p ist, und deren Koeffizienten rationale Funktionen der „vorangehenden" Untersummen wären.

Vandermonde dürfte für spezielle Werte von p von zahlreichen mehr oder weniger systematischen Versuchen ausgehend zu den sukzessiven Aufteilungen in Untersummen gelangt sein. Im Gegensatz dazu benutzte Gauß die Existenz von *Primitivwurzeln modulo p*, um in systematischer und allgemeiner Weise die sukzessiven Einteilungen in immer kleinere Untersummen auszuführen. Es ist wahrscheinlich, daß Gauß dieses Verfahren entdeckte, als er die Auflösung der Gleichung $x^{17} - 1 = 0$ im einzelnen untersuchte, die wir jetzt darlegen werden.

Ist $r = e^{2\pi i/17}$, so ist r eine Wurzel von $x^{17} - 1 = 0$, und die anderen Wurzeln werden durch $1, r, r^2, \ldots, r^{16}$ gegeben; dabei ist $1 + r + \cdots + r^{16} = 0$. Es sei g eine Primitivwurzel modulo 17, und wir setzen

$$\eta_1 = r^{g^0} + r^{g^2} + \cdots + r^{g^{14}}, \qquad \eta_2 = r^{g^1} + r^{g^3} + \cdots + r^{g^{15}}.$$

In diesem Spezialfall kann man $g = 3$ nehmen; wie man leicht sieht, ist

$$\eta_1 + \eta_2 = -1 \quad \text{und} \quad \eta_1\eta_2 = -4.$$

Somit sind η_1 und η_2 Wurzeln der Gleichung $x^2 + x - 4 = 0$. Eine trigonometrische Überlegung, die wir dem Leser überlassen, liefert $\eta_1 > \eta_2$, also

$$\eta_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \qquad \eta_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

Wir wenden jetzt die gleiche Überlegung auf η_1 und η_2 an. Setzen wir

$$\mu_1 = r^{3^0} + r^{3^4} + r^{3^8} + r^{3^{12}}, \qquad \mu_2 = r^{3^2} + r^{3^6} + r^{3^{10}} + r^{3^{14}},$$

$$\mu_3 = r^{3^1} + r^{3^5} + r^{3^9} + r^{3^{13}}, \qquad \mu_4 = r^{3^3} + r^{3^7} + r^{3^{11}} + r^{3^{15}},$$

so ergibt sich $\mu_1 + \mu_2 = \eta_1$ und $\mu_1\mu_2 = -1$, so daß μ_1 und μ_2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 - \eta_1 x - 1 = 0$ sind. Analog genügen μ_3 und μ_4 der Gleichung $x^2 - \eta_2 x - 1 = 0$. Man kann zeigen, daß $\mu_1 > \mu_2$ und $\mu_3 > \mu_4$, also

$$\mu_1 = \frac{\eta_1 + \sqrt{\eta_1^2 + 4}}{2}, \qquad \mu_3 = \frac{\eta_2 + \sqrt{\eta_2^2 + 4}}{2}$$

ist. Zerlegen wir μ_1 in Untersummen $\beta_1 = r^{3^0} + r^{3^8}$, $\beta_2 = r^{3^4} + r^{3^{12}}$, so finden wir

$$\beta_1 + \beta_2 = \mu_1, \qquad \beta_1\beta_2 = \mu_3, \qquad \beta_1 > \beta_2.$$

Somit sind β_1 und β_2 die Wurzeln von $x^2 - \mu_1 x - \mu_3 = 0$. Schließlich sind r^{3^0} und r^{3^8} Wurzeln der Gleichung $x^2 - \beta_1 x + 1 = 0$, und da $r^{3^0} = r = e^{2\pi i/17}$ positiven Imaginärteil hat, kann man erkennen, welche der beiden Wurzeln mit r übereinstimmt. Auf diese Weise kann man durch sukzessives Auflösen von drei Gleichungen zweiten Grades $r = e^{2\pi i/17}$ durch übereinandergeschachtelte Quadratwurzeln ausdrücken. Wir überlassen die Rechnungen dem Leser, der eine sehr umfassende Erläuterung der Konstruktion des 17-Ecks in *Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* von Felix Klein finden kann.

Gauß untersuchte den allgemeinen Fall $x^p - 1 = 0$ für eine Primzahl p in den *Disquisitiones Arithmeticae*. Mit $p - 1 = ef$ und einer Primitivwurzel g modulo p sowie einer komplexen Wurzel r von $x^p - 1 = 0$ definierte Gauß die *e Perioden zu je f Wurzeln* in folgender Weise:

$$\eta_0 = r^{g^0} + r^{g^e} + r^{g^{2e}} + \cdots + r^{g^{(f-1)e}},$$
$$\eta_1 = r^{g^1} + r^{g^{e+1}} + \cdots + r^{g^{(f-1)e+1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{e-1} = r^{g^{e-1}} + r^{g^{2e-1}} + \cdots + r^{g^{fe-1}}.$$

Er zeigte, daß diese Perioden die Wurzeln einer über Q irreduziblen Gleichung vom Grade e mit ganzzahligen Koeffizienten, etwa

$$F(y) = y^e + A_1 y^{e-1} + \cdots + A_e = 0\,,$$

sind. Zum Beispiel erfüllen für $p = 17$, $e = 4$ die Perioden die Gleichung

$$(x^2 - \eta_1 x - 1)\,(x^2 - \eta_2 x - 1) = x^4 + x^3 - 6x^2 - x + 1 = 0\,.$$

Gauß entdeckte eine andere sehr interessante Eigenschaft der Perioden, die eine wichtige Rolle in den Arbeiten von Kummer spielen sollte, nämlich, daß jede der e Perioden eine rationale Funktion jeder anderen ist: Es gibt eine rationale Funktion $\varphi(x)$ mit rationalzahligen Koeffizienten derart, daß

$$\eta_1 = \varphi(\eta_0)\,,\ \eta_2 = \varphi(\eta_1),\ \ldots\,,\ \eta_0 = \varphi(\eta_{e-1})$$

gilt. Die Gleichungen, deren Wurzeln einer solchen Bedingung genügen, waren schon von Lagrange studiert worden. Es sind Spezialfälle der im Gefolge der Arbeiten von Abel (vgl. 2.2.2.) als *abelsch* bezeichneten Gleichungen, nämlich der Gleichungen, deren Galoisgruppe *abelsch* ist.

5.4. Binäre quadratische Formen

5.4.1. *Grundbegriffe*

Wie wir oben gesehen haben, waren die quadratischen Formen eines der hauptsächlichen Interessengebiete von Euler, Lagrange und Legendre. Sie haben zwar zahlreiche Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt, jedoch niemals die ihm adäquate Sprache entwickelt. Ebenso wie im Fall der Kongruenzen war es schließlich Gauß, der in seinen *Disquisitiones Arithmeticae* die dafür notwendige Terminologie einführte. In diesem Werk hat er auch zahlreiche neue Ergebnisse mitgeteilt, aber in einer so dunklen Form, daß sie erst verständlich wurden, als Dirichlet sie neu formulierte. Dirichlet selbst bereicherte die Theorie der quadratischen Formen um wesentliche Resultate, insbesondere durch seine Klassenzahlformel. Später setzten Dedekind und Hilbert den Schlußstein bei der Untersuchung der binären quadratischen Formen, indem sie die ganze Theorie in der Terminologie der quadratischen Zahlkörper interpretierten.(15)

Wir erinnern daran (vgl. 5.2.2.), daß die beiden Hauptprobleme der Theorie der quadratischen Formen darin bestanden, zunächst herauszufinden, unter welchen Bedingungen die Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 = n$ ganzzahlige Lösungen besitzt, und sodann alle ihre Lösungen zu bestimmen. Ehe wir die Beiträge von Lagrange, Legendre und Gauß zu diesen Problemen darlegen, müssen wir einige Bezeichnungen einführen.

Wir bezeichnen die quadratische Form $ax^2 + bxy + cy^2$ mit dem Symbol (a, b, c). Zwar haben sowohl Gauß als auch Dirichlet Formen des Typs $ax^2 + 2bxy + cy^2$ betrachtet, doch ziehen es die meisten modernen Autoren vor, Formen vom Typ $ax^2 + bxy + cy^2$ zu untersuchen, wie es Lagrange getan hatte; daher haben wir uns entschlossen, alle Resultate in der Bezeichnung von Lagrange darzulegen.

Diejenigen Formen, für die a, b, c zueinander teilerfremd sind, werden als *primitiv* bezeichnet. Jede nicht primitive Form ist Vielfaches einer primitiven Form; daher genügt es, bei allen Problemen, die sich auf die Darstellung von Zahlen durch Formen beziehen, primitive Formen zu betrachten.

Wir nehmen an, die beiden quadratischen Formen $f(x, y)$ und $g(X, Y)$ seien durch eine lineare Transformation $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \gamma X + \delta Y$, d. h. durch

$$f(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y) = g(X, Y)$$

miteinander verknüpft, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen mit $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ sind; dann stellen f und g genau die gleichen ganzen Zahlen dar. Solche Formen werden *äquivalent* genannt. Besitzt die Transformation die Determinante $+1$, so werden die Formen *eigentlich äquivalent* genannt; ist die Determinante -1, so nennt man sie *uneigentlich äquivalent*. Wir sagen, daß diejenigen Formen, die einer Form eigentlich äquivalent sind, zu ein und derselben *Klasse* gehören und daß zwei Formen, die uneigentlich äquivalent sind, zu *entgegengesetzten* Klassen gehören (eine Klasse kann übrigens mit der ihr entgegengesetzten Klasse übereinstimmen).

Die Natur einer quadratischen Form (a, b, c) hängt zum großen Teil von der Größe $D = b^2 - 4ac$ ab, der sogenannten *Diskriminante* der Form. Alle Formen ein und derselben Klasse haben die gleiche Diskriminante, und Formen aus entgegengesetzten Klassen besitzen ebenfalls gleiche Diskriminanten. Ist $D = 0$ oder gleich einem positiven Quadrat, so reduziert sich die quadratische Form auf ein Produkt zweier Linearformen mit rationalen Koeffizienten; diesen Fall schließen wir aus unseren Betrachtungen aus. Ist $D < 0$, so sind die durch (a, b, c) dargestellten Zahlen entweder sämtlich negativ oder sämtlich positiv. Wenn (a, b, c) eine negative Diskriminante hat und nur negative Zahlen darstellt, so besitzt die Form $(-a, -b, -c)$ die gleiche Diskriminante und stellt nur positive Zahlen dar. Daher braucht man im Fall $D < 0$ nur die Formen zu betrachten, welche positive Zahlen darstellen.

Da $D = b^2 - 4ac$ ist, gilt entweder $D \equiv 0 \pmod 4$ oder $D \equiv 1 \pmod 4$. Zu einer gegebenen Diskriminante D gibt es somit wenigstens eine Form, welche diese Diskriminante besitzt, nämlich die *Hauptform*

$$x^2 - \frac{1}{4} D y^2, \quad \text{falls} \quad D \equiv 0 \pmod 4,$$

und

$$x^2 + xy - \frac{1}{4}(D - 1)\, y^2, \quad \text{falls} \quad D \equiv 1 \pmod 4$$

ist. Tatsächlich können zu gegebenem D mehrere Klassen von inäquivalenten Formen existieren. Eine Menge von Formen, die zu einem gegebenen D ein Element aus jeder Klasse enthält, wird ein Repräsentantensystem von Formen bezüglich D genannt.

Lagrange hatte um 1767 gezeigt, daß zu einem gegebenen D jede Klasse mindestens eine Form (a, b, c) enthält, deren Koeffizienten den Bedingungen

$$|b| \leqq |a| \leqq c, \qquad b^2 - 4ac = D$$

genügen. Daraus folgt leicht, daß die Anzahl dieser Formen, also auch die Anzahl der Klassen für ein gegebenes D endlich ist. Üblicherweise wird die Anzahl der Klassen der Formen mit der Diskriminante D mit $h(D)$ bezeichnet.

5.4.2. *Das Darstellungsproblem*

Lagrange gelang es nicht, das allgemeine Problem zu lösen, wie auf einfache Weise diejenigen ganzen Zahlen zu kennzeichnen sind, die durch eine bestimmte Form mit der Diskriminante D dargestellt werden. Das beste Ergebnis, das er erhielt, ist das folgende: „Wenn für jede Primzahl p, die $2n$, aber nicht D teilt, $\left(\frac{-D}{p}\right) = +1$ gilt, so gibt es eine Form mit der Diskriminante D, die n darstellt."

Wie wir sehen werden, wurde dieser Satz durch Gauß etwas verbessert, doch ist das allgemeine Problem noch immer ungelöst.

Übrigens hat Lagrange das Problem, die *Anzahl* der Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl durch eine Form zu bestimmen, falls die Zahl überhaupt darstellbar ist, vollständig gelöst, und er hat auch, wie wir noch sehen werden, eine Formel für die Gesamtzahl der Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl durch ein Repräsentantensystem von Formen mit der Diskriminante D gefunden.

Lagrange hat auch gezeigt, daß die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl aufs engste mit der Bestimmung aller Transformationen der Form (a, b, c) in sich verknüpft ist, d. h. mit der Bestimmung aller ihrer Automorphismen. Wenn man eine Darstellung $at^2 + btu + cu^2 = n$ und einen Automorphismus $x = \alpha X + \beta Y$, $y = \gamma X + \delta Y$ von (a, b, c) hat, kann man nämlich daraus eine andere Darstellung von n herleiten, indem man $t_1 = \alpha t + \beta u$, $u_1 = \gamma t + \delta u$ setzt. Umgekehrt kann man mit zwei Darstellungen von n durch (a, b, c) einen Automorphismus der Form verknüpfen.

Es gibt immer zwei triviale Automorphismen, nämlich die identische Transformation $x = X$, $y = Y$ und die entgegengesetzte Transformation $x = -X$, $y = -Y$. Ist $D < 0$, so gibt es im allgemeinen keine weiteren Automorphismen bis auf die beiden Ausnahmefälle $D = -3$ und $D = -4$. In diesen beiden Fällen gibt es nur eine Formenklasse, die durch die Hauptform repräsentiert wird. Ist $D = -3$, so ist $x^2 + xy + y^2$ die Hauptform, und es gibt die beiden zusätzlichen Automorphismen $x = -Y$, $y = X + Y$ und $x = X + Y$, $y = -Y$ und ihre entgegengesetzten Automorphismen. Ist $D = -4$, so ist $x^2 + y^2$ die Hauptform, und es gibt den zusätzlichen Automorphismus $x = Y$, $y = -X$ und die entgegengesetzte Transformation. Wir bezeichnen die Anzahl der Automorphismen einer binären quadratischen Form mit der Diskriminante $D < 0$ mit ω, also

$$\omega = \begin{cases} 2\,, & \text{falls} \quad D < -4\,, \\ 4\,, & \text{falls} \quad D = -4\,, \\ 6\,, & \text{falls} \quad D = -3 \end{cases}$$

ist. (Eine andere Deutung von ω ist, daß ω gleich der Anzahl der Einheitswurzeln in der Ordnung $\mathbf{Z}[(D + \sqrt{D})/2]$ ist.)

Was die Automorphismen betrifft, so ist für $D > 0$ die Situation völlig anders. Lagrange hat bewiesen, daß jede Form unendlich viele Automorphismen besitzt und daß sie alle explizit bestimmt werden können durch die Auflösung einer „Pellschen Gleichung" $t^2 - Du^2 = 4$. Dies bedeutet, daß eine ganze Zahl, wenn sie auf eine Weise durch eine Form mit einer Diskriminante $D > 0$ darstellbar ist, auf unendlich viele Weisen darstellbar ist. Doch hat Lagrange gezeigt, daß es *endlich* viele Lösungen von $f(x, y) = n$ gibt, welche die *primären* Darstellungen genannt werden, mit der Eigenschaft, daß sich jede Darstellung von n durch die Form dadurch ergibt, daß ein gewisser Automorphismus auf eine der primären Darstellungen angewandt wird.

Wir gehen nun zum Problem der Gesamtanzahl der Darstellungen einer positiven Zahl n durch ein Repräsentantensystem von Formen mit der Diskriminante D über. Ist $D < 0$, so bezeichnen wir die Gesamtanzahl der Darstellungen von n durch die Formen eines Repräsentantensystems mit $R(n)$. Ist $D > 0$, so bezeichne $R(n)$ die Gesamtanzahl der primären Darstellungen durch ein Repräsentantensystem von Formen. Das von Lagrange bewiesene grundlegende Ergebnis besteht in folgendem. *Ist* $n > 0$ *und* $(n, D) = 1$, *so ist*

$$R(n) = \omega \sum_{m|n} \left(\frac{D}{m}\right),$$

wobei ω im Fall $D < 0$ wie oben definiert ist, $\omega = 1$ für $D > 0$ gilt und $\left(\frac{D}{m}\right)$ das unter dem Namen Jacobi-Symbol bekannte verallgemeinerte Legendre-Symbol bedeutet.

5.4.3. *Komposition der Formen und Geschlechter*

Lagrange stieß auf folgendes Problem: Angenommen, n_1 sei durch eine Form der Klasse Γ_1 und n_2 durch eine Form der Klasse Γ_2 dargestellt; kann man, ausgehend von Γ_1 und Γ_2, eine Klasse Γ_3 finden, deren Formen die Zahl $n_1 n_2$ darstellen? Er zeigte, daß es in gewissen Fällen möglich ist, für die Klassen eine kommutative Komposition zu definieren, welche die angeführte Eigenschaft besitzt. In den *Disquisitiones Arithmeticae* hat Gauß das gewünschte Kompositionsgesetz vollständig definiert und gezeigt, daß die Klassen eine abelsche Gruppe bilden, obwohl er dies selbstverständlich nicht so formuliert hat.

Die Gaußsche Definition der Komposition ist zu kompliziert, als daß wir sie hier anführen könnten. Später hat Dirichlet eine klarere und einfachere Definition angegeben, die aber auch noch recht viele Begriffe heranzieht. Als Dedekind 1871 seine Interpretation der Theorie der quadratischen Formen mit Hilfe der quadratischen Zahlkörper publizierte, stellte sich heraus, daß die Komposition von Klassen quadratischer Formen mit der Diskriminante $D = D_1 f^2$ mit quadratfreiem D_1 genau der Multiplikation der eingeschränkten Idealklassen in der Hauptordnung von $\mathbf{Q}(\sqrt{D_1})$ äquivalent ist. Wir verweisen den Leser auf 5.5.3. für die Definition dieser Begriffe und für weitere Details über diese Entsprechung.[16]

Der Satz von Lagrange über die Darstellung einer ganzen Zahl durch eine Form mit der Diskriminante D wurde von Gauß verfeinert. Es lag nahe, sich zu fragen, ob man das Ergebnis von Lagrange deuten könne, indem man eine Einteilung der Menge der Klassen in disjunkte Teilmengen vornimmt derart, daß für jede ganze Zahl n alle diejenigen Klassen, die n darstellen, in die gleiche Untermenge fallen. Gauß hat gezeigt, daß eine solche Unterteilung möglich ist; ein großer Teil der *Disquisitiones Arithmeticae* ist der Untersuchung dieses bemerkenswerten Ergebnisse gewidmet.

Tatsächlich hat Gauß zugleich die Menge der ganzen Zahlen, die durch eine Form mit der Diskriminante D dargestellt werden, und die Menge der Formenklassen mit der Diskriminante D in disjunkte Teilmengen unterteilt. Die aus Formenklassen bestehenden Teilmengen werden *Geschlechter* genannt. Eine gegebene ganze Zahl n, die durch eine gewisse Form mit der Diskriminante D dargestellt wird, wird durch eine gewisse Klasse von Formen dargestellt, die in einem bestimmten Geschlecht G liegen. Wird n durch eine andere Formenklasse dargestellt, so liegt diese Klasse ebenfalls in G. Selbstverständlich will dies nicht besagen, daß alle Klassen ein und desselben Geschlechts die gleichen ganzen Zahlen darstellen.

Gauß hat das Geschlecht mit Hilfe von sehr komplizierten Kongruenzbedingungen definiert, in welchen das Legendre-Symbol auftritt. Wir versuchen hier nicht, seine Definition wiederzugeben. Es stellt sich heraus, daß zwei Formen dann und nur dann im gleichen Geschlecht liegen, wenn sie rational äquivalent sind; der Begriff der rationalen Äquivalenz wurde jedoch vor den zwanziger Jahren unseres Jahrhunderts kaum benutzt, so daß Gauß die Geschlechter nicht auf diese Weise definieren konnte. Wir haben uns dafür entschieden, die Hilbertsche Formulierung der Gaußschen Definition der Geschlechter in dem Umfang zu bringen, wie sie den von Hilbert erarbeiteten Verallgemeinerungen (die wir in 5.5. darlegen werden) zugrundeliegen.

Es seien a und b rationale Zahlen, p eine Primzahl. Wir setzen

$$\left(\frac{a,b}{p}\right) = \begin{cases} +1, & \text{falls } a \equiv x^2 + by^2 \pmod{p^e} \text{ für jedes } e \geqq 1 \\ & \text{lösbar ist;} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um eine bequeme Bezeichnungsweise, deren Bedeutung in 5.5. klar hervortreten wird, zu haben, setzen wir außerdem

$$\left(\frac{a,b}{\infty}\right) = \begin{cases} +1, & \text{falls } a = x^2 + by^2 \text{ in } \boldsymbol{R} \text{ lösbar ist;} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann dann den Satz von Lagrange in folgender Weise formulieren:

Die ganze Zahl n ist genau dann durch wenigstens eine Form mit der Diskriminante D darstellbar, wenn $\left(\frac{n,D}{p}\right) = 1$ für jedes $p \nmid D$ und für $p = \infty$ gilt.

Jetzt sind wir in der Lage, das Geschlecht zu definieren. Ist D eine feste Diskriminante und p eine feste Primzahl, so kann man zeigen, daß die Werte von $\left(\frac{n,D}{p}\right)$

für alle ganzen Zahlen n, die durch eine gegebene Form f dargestellt werden, übereinstimmen. Da alle Formen ein und derselben Klasse die gleichen ganzen Zahlen darstellen, ergibt sich hieraus, daß wir für eine gegebene Klasse Γ eine Funktion

$$e_p(\Gamma) = \left(\frac{n, D}{p}\right)$$

definieren können, wobei n eine durch eine Form aus Γ dargestellte ganze Zahl ist. Auf diese Weise haben wir für jede Klasse Γ eine unendliche Folge $\{e_p(\Gamma), p = \infty, 2, 3, \ldots\}$ definiert, die das *System der Charaktere* von Γ (vgl. 3.4.2.) genannt wird. Man kann zeigen, daß für eine rationale Primzahl p, welche kein Teiler von D ist, $e_p(\Gamma) = +1$ gilt, also nur endlich viele Glieder eines Charakterensystems von $+1$ verschieden sind.

Nun definiert man, daß zwei Klassen zum gleichen Geschlecht gehören, wenn sie dasselbe Charakterensystem besitzen.

Auf diese Weise werden die Klassen binärer quadratischer Formen mit der Diskriminante D in disjunkte Teilmengen, die *Geschlechter*, eingeteilt. Ist G ein Geschlecht, so kann man $e_p(G) = e_p(\Gamma)$ für $\Gamma \in G$ definieren.

Eines der beherrschenden Themen in den *Disquisitiones Arithmeticae* ist die Bestimmung aller möglichen Geschlechter, die einer gegebenen Diskriminante D zugeordnet sind. Wir werden jetzt beschreiben, wie Gauß vorgegangen ist. Zunächst bemerken wir, daß nach dem Satz von Lagrange die einzigen ganzen Zahlen n, die dargestellt werden, diejenigen sind, für die aus $p \nmid D$ die Beziehung $\left(\frac{n, D}{p}\right) = 1$ folgt. Daher sind die einzig interessanten Primzahlen diejenigen, welche Teiler von D sind. Wir nehmen an, D habe r verschiedene Primfaktoren; für jedes $p \mid D$ gibt es zwei mögliche Werte von $e_p(G)$, so daß es höchstens 2^r mögliche Charakterensysteme gibt. Allerdings entspricht nicht jedes dieser möglichen Charakterensysteme unbedingt einem Geschlecht. Gauß hat den folgenden Satz aufgestellt, der als *Existenzsatz für die Geschlechter* bekannt ist:

Für jedes $p \mid D$ sei ε_p eine der beiden Zahlen $+1$ und -1; dann besteht eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Geschlechts G mit $e_p(G) = \varepsilon_p$ für jedes $p \mid D$ darin, daß $\prod_{p \mid D} \varepsilon_p = 1$ ist. Daher ist die Anzahl der Geschlechter gleich 2^{r-1}.

Ferner hat Gauß den folgenden Satz bewiesen:

Jedes Geschlecht enthält die gleiche Anzahl von Klassen, etwa g, und hieraus folgt $h(D) = 2^{r-1}g$.

Die Einteilung der Klassen in Geschlechter führt auf folgende Verfeinerung des Satzes von Lagrange:

Die ganze Zahl n wird genau dann durch eine gewisse Form des Geschlechts G dargestellt, wenn $\left(\frac{n, D}{p}\right) = e_p(G)$ für $p = \infty, 2, 3, \ldots$ gilt.

Wenn jedes Geschlecht nur eine einzige Klasse enthält, beantwortet dieser Satz die Frage nach der Darstellung der ganzen Zahlen durch Formen mit der Diskri-

minante D vollständig. Gewöhnlich gibt es aber in einem Geschlecht mehr als eine Klasse, und in diesem Fall löst der Satz das Problem nur teilweise.

Dieser Satz ist dadurch interessant, daß die Darstellbarkeit einer ganzen Zahl n durch eine gewisse Form des Geschlechts G nur von den Restklassen von n modulo den Primteilern von D abhängt. Die Frage liegt nahe, ob man ein Geschlecht weiter in disjunkte Teilmengen unterteilen kann derart, daß man die bei dieser feineren Einteilung auftretenden Klassen durch zusätzliche Kongruenzbedingungen herausheben kann. Es hat sich gezeigt, daß dies nicht möglich ist. Im Jahre 1951 zeigte H. Hasse unter Benutzung der Klassenkörpertheorie folgendes (vgl. 5.5.10.): Greift man eine Menge S von Formenklassen heraus, die nicht Vereinigung gewisser Geschlechter ist, so gibt es keinen Modul m derart, daß die Darstellung einer ganzen Zahl durch eine Form aus der Menge S ausschließlich von der Restklasse dieser ganzen Zahl modulo m abhängen würde.

5.4.4. *Dirichlet und die Klassenzahlformel*

Zwischen 1837 und 1839 publizierte Dirichlet seine große Arbeit *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, mit der er dadurch, daß er die Verfahren der Analysis in die Zahlentheorie einführte, diese Disziplin wahrhaft revolutionierte. In dieser Arbeit wandte Dirichlet seine Methoden zur Lösung zahlreicher aktueller Probleme an, von denen wir hier anführen:

a) Es ist eine Formel aufzustellen, welche die Klassenzahl der binären quadratischen Formen mit der Diskriminante D angibt; ein Spezialfall einer solchen Formel war 1832 von Jacobi als Vermutung angegeben worden.

b) Es ist die Vermutung Legendres zu beweisen, daß unter der Voraussetzung $(a, q) = 1$ die Folge $\{qn + a; n = 1, 2, \dots\}$ unendliche viele Primzahlen enthält.

Wir wollen jetzt einen Überblick über einige der wichtigen Ideen geben, die mit der Lösung dieser beiden Probleme verknüpft sind.

5.4.4.1. Die Klassenzahlformel

Dirichlets Formel für die Klassenzahl erwuchs vermutlich aus folgendem einfachen Problem:

Zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem (großen) Radius $\sqrt{N}$ bestimme man die Anzahl der darin enthaltenen Gitterpunkte, d. h. der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten.

Bezeichnet $A(N)$ die Anzahl dieser Punkte, so ist offenbar

$$A(N) = \sum_{\substack{x,y \\ x^2+y^2 \leqq N}} 1 .$$

Bedeutet $r(n)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von $n = x^2 + y^2$, so ist

$$A(N) = \sum_{n=1}^{N} r(n) .$$

Jedem Punkt des Gitters der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die in der Scheibe $x^2 + y^2 \leqq N$ liegen, ordnen wir dasjenige Einheitsquadrat des Gitters zu, dessen Südwestecke er ist. Dann erhalten wir eine Fläche des Inhalts $A(N)$, die in der Scheibe $x^2 + y^2 \leqq (\sqrt{N} + \sqrt{2})^2$ eingeschlossen ist. Daher ist

$$\pi(\sqrt{N} - \sqrt{2})^2 < A(N) < \pi(\sqrt{N} + \sqrt{2})^2,$$

woraus sich

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A(N)}{N} = \pi$$

ergibt.

Nach Definition ist $r(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n durch die quadratische Form $x^2 + y^2$ mit der Diskriminante -4, für welche die Klassenzahl gleich 1 ist. Die Annahme ist nicht von der Hand zu weisen, daß sich Dirichlet fragte, ob der obige Limes existiert, wenn man $r(n)$ durch $R(n)$, die Anzahl der Darstellungen von n durch ein Repräsentantensystem von Formen mit der Diskriminante D ersetzt, d. h., ob der Limes

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1\\(n,D)=1}}^{N} R(n)$$

existiert oder nicht.

Dirichlet hat diesen Grenzwert auf zwei verschiedene Weisen berechnet und auf diesem Wege eine bemerkenswerte Formel für die Anzahl $h(D)$ der Klassen von Formen mit der Diskriminante D entdeckt. Die erste Berechnungsweise benutzt den in 5.4.3. diskutierten Satz von Lagrange. Es ist

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1\\(n,D)=1}}^{N} R(n) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1\\(n,D)=1}}^{N} \omega \sum_{m|n} \left(\frac{D}{m}\right).$$

Nach einigen verhältnismäßig elementaren Umformungen zeigte Dirichlet, daß für $N \to \infty$ die rechte Seite dieser Gleichung gegen

$$\omega \frac{\varphi(|D|)}{|D|} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{D}{n}\right)$$

strebt, wobei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion ist.

Die zweite Berechnung stützt sich auf eine geometrische Überlegung bezüglich einer sehr scharfsinnigen Abzählung. Es gibt zwei Fälle: $D < 0$ und $D > 0$. Im ersten Fall zeigte Dirichlet, daß $\sum_{n=1}^{N} R(n)$ gleich der Gesamtzahl der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten in jeder der durch $f_i(x, y) \leqq N$ definierten Ellipsen ist, wobei die f_i ein Repräsentantensystem von Formen mit der Diskriminante D durchlaufen. Er fand die Beziehung

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n=1\\(n,D)=1}} R(n) = \frac{\varphi(|D|)}{|D|} 2\pi \frac{h(D)}{|D|^{1/2}},$$

aus der sich

$$h(D) = \frac{\omega}{2\pi} |D|^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{D}{n}\right)$$

ergibt.

Dirichlet ging noch weiter. Um die Reihe zu summieren, benutzte er die Eigenschaften der Gaußschen Summen und bewies so die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{D}{n}\right) = -\frac{\pi}{|D|^{3/2}} \sum_{n=1}^{|D|} n \left(\frac{D}{n}\right);$$

hieraus folgt die Formel

$$h(D) = -\frac{\omega}{2} \cdot \frac{1}{|D|^{1/2}} \sum_{n=1}^{|D|} n \left(\frac{D}{n}\right).$$

Diese Formel war 1832 von Jacobi auf Grund von Zahlenbeispielen vermutet worden (vgl. [55], Bd. 6, S. 240–244).

Der Fall $D > 0$ ist bei weitem schwieriger. Dirichlet interpretierte die Summe $\sum_{n=1}^{N} R(n)$ geometrisch und fand so den Grenzwert. Die Formel für die Klassenzahl, die er erhielt, lautet

$$h(D) = \frac{D^{1/2}}{\ln \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{D}{n}\right),$$

wobei $\varepsilon = u_0 + v_0 \sqrt{D}$ und (u_0, v_0) eine Lösung von $u^2 - Dv^2 = 4$ mit $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ und *minimalem* u_0 ist. Dirichlet gelang es auch, die unendliche Reihe mit Hilfe von Gaußschen Summen zu summieren. Er bewies die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{D}{n}\right) = -\frac{1}{D^{1/2}} \sum_{n=1}^{D} \left(\frac{D}{n}\right) \log \sin \left(\frac{n\pi}{D}\right).$$

5.4.4.2. Die Legendresche Vermutung

Dirichlet gab seinen Beweis der Legendreschen Vermutung über die Primzahlen in einer arithmetischen Progression zur gleichen Zeit an, in der er seine Arbeiten über die Klassenzahlformel veröffentlichte, und diese Resultate hängen, wie wir noch sehen werden, eng miteinander zusammen.

Den ersten Schritt hatte schon Euler getan, als er die Analysis in die Zahlentheorie einführte, um zu zeigen, daß

$$\lim_{s \to 1+} \sum_{p} \frac{1}{p^s} = \infty$$

ist, ein Ergebnis, das wir in 5.6. diskutieren werden. Dirichlet wollte den Eulerschen Beweis nachvollziehen, um nachzuweisen, daß

$$\lim_{s \to 1+} \sum_{p \equiv a (\mathrm{mod}\, q)} \frac{1}{p^s} = \infty$$

ist, wobei $(a, q) = 1$ ist; er wollte auf diese Weise zeigen, daß in der Folge $\{qk + a; k = 1, 2, \ldots\}$ unendlich viele Primzahlen existieren.

Zu diesem Zweck führte er zahlentheoretische Funktionen ein, die jetzt *Dirichletsche Charaktere* genannt werden. Sie sind für jede positive ganze Zahl q definiert, periodisch mit der Periode q und vollständig multiplikativ (vgl. 3.4.2.). Darüber hinaus besitzen sie die Eigenschaft, daß eine passende ihrer Linearkombinationen, die wir mit c bezeichnen, die Indikatorfunktion der arithmetischen Progression $\{qk + a; k = 1, 2, \ldots\}$ ist; mit anderen Worten,

$$c(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv a \pmod{q}, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Ist q eine Primzahl, so ist die Konstruktion der Dirichletschen Charaktere leicht zu beschreiben. Es sei g eine Primitivwurzel von q und $\nu(n)$ die kleinste positive ganze Zahl mit $g^{\nu(n)} \equiv n \pmod{q}$. Für jede komplexe Zahl ω, die der Bedingung $\omega^{q-1} = 1$ genügt, setzen wir

$$\chi_\omega(n) = \begin{cases} \omega^{\nu(n)}, & \text{falls } (n, q) = 1, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Die Beziehungen

$$\chi_\omega(n + q) = \chi_\omega(n), \qquad \chi_\omega(mn) = \chi_\omega(m) \cdot \chi_\omega(n)$$

und

$$\frac{1}{q-1} \sum_\omega \bar{\chi}_\omega(a)\, \chi(a) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \equiv a \pmod{q}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind leicht zu verifizieren; dabei bezeichnet $\bar{\chi}_\omega(a)$ die zu $\chi_\omega(a)$ konjugiert komplexe Zahl.

Ist q keine Primzahl, so ist die Konstruktion der Dirichlet-Charaktere nach dem Modul q der obigen ähnlich, aber ein wenig komplizierter, so daß wir sie nicht im einzelnen ausführen. Der Charakter χ mit $\chi(n) = 1$ für $(n, q) = 1$ wird *Hauptcharakter* genannt und mit χ_0 bezeichnet.

Im Beweis der Tatsache, daß es in der Progression $\{qk + a\}$ unendlich viele Primzahlen gibt, den wir in 5.6. diskutieren werden, betrachtete Dirichlet die Funktionen

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

wobei χ ein Charakter nach dem Modul q ist. Insbesondere wurde er darauf geführt, zu beweisen, daß $L(1, \chi)$ für jeden Nicht-Hauptcharakter von null verschieden ist. Ist χ eine komplexwertige Funktion, so ist verhältnismäßig leicht zu zeigen, daß $L(1, \chi) \neq 0$ ist. Das große Problem bestand darin, dieses Ergebnis zu sichern, wenn χ eine reellwertige Funktion ist. Dirichlet zeigte, daß dann $\chi(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$ für ein gewisses D gilt, falls χ nur reelle Werte annimmt. Daß $L\left(1, \left(\frac{D}{n}\right)\right) \neq 0$ ist, folgt

dann unmittelbar aus den Beziehungen

$$L\left(1, \left(\frac{D}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{D}{n}\right) = \begin{cases} \dfrac{2\pi h(D)}{\omega\, |D|^{1/2}} & \text{im Fall} \quad D < 0, \\ \log \varepsilon \dfrac{h(D)}{D^{1/2}} & \text{im Fall} \quad D > 0 \end{cases}$$

und $h(D) \geqq 1$, $\varepsilon > 1$.

5.5. Die Theorie der algebraischen Zahlen(17)

Die Theorie der algebraischen Zahlen ist einer der Eckpfeiler der Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts. Aus ihr sind die kommutative Algebra und die algebraische Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen hervorgegangen. Bei diesem zugleich umfangreichen und stark technischen Gebiet ist es völlig unmöglich, eine detaillierte Darlegung seiner Entwicklung zu geben. Wir beschränken uns auf eine teilweise Betrachtung einiger der Hauptsätze. Sogar bei dieser bescheidenen Zielsetzung wird der Leser Eindrücke erhalten, welche es ihm ermöglichen, die Schönheit der erzielten Resultate und ihre faszinierenden Seiten zu würdigen.

Zunächst: Was ist eine *algebraische Zahl*? Die Antwort ist einfach. Eine algebraische Zahl ist eine Zahl, die einer Gleichung $f(x) = 0$ mit $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ genügt. Zahlen wie $\sqrt{2}$, $(3^{1/3} + 5 + \sqrt{-17})^{1/27}$ sind algebraisch, während Zahlen wie e, π, $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ es nicht sind (vgl. 5.7. für einen Abriß über die transzendenten Zahlen).

Die algebraischen Zahlen tauchten in natürlicher Weise auf, als die Mathematiker Polynomgleichungen niedriger Grade lösten, doch scheint die Untersuchung dieser Zahlen an sich (und das Umgehen mit ihnen) erst gegen 1831 mit Gauß zu beginnen. Er benutzte die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen der Gestalt $x + iy$ mit $x, y \in \mathbf{Z}$ bei seiner Untersuchung der biquadratischen Reziprozität (vgl. 5.3.3.) und bei der Untersuchung der elliptischen Funktionen (vgl. Kapitel 7). Gauß und Euler hatten auch Zahlen der Gestalt $x + y\sqrt{-3}$ in einem Beweis der Fermatschen Vermutung für den Exponenten 3 benutzt. Später (1844) benutzte Eisenstein die Zahlen $x + \varrho y$ mit $\varrho^3 = 1$, um die kubische Reziprozität zu studieren.(18)

Für die Ringe $\mathbf{Z}[i]$ und $\mathbf{Z}[\varrho]$ stellte man fest, daß deren Arithmetik derjenigen der ganzrationalen Zahlen ähnlich ist; der einzige Unterschied besteht darin, daß es in den Ringen $\mathbf{Z}[i]$ und $\mathbf{Z}[\varrho]$ von ± 1 verschiedene Zahlen („Einheiten" des Ringes) gibt, die jedes Element des Ringes teilen. Wahrscheinlich liegt es am „braven" Verhalten dieser Ringe, daß lange Zeit niemand bemerkt zu haben scheint, daß es (ganze) algebraische Zahlen θ gibt, für welche sich die Arithmetik des Ringes $\mathbf{Z}[\theta]$ radikal von der Arithmetik der ganzrationalen Zahlen unterscheidet. Tatsächlich haben Lamé und vermutlich Kummer selbst falsche Beweise der Fermatschen Vermutung angegeben, die sich auf die Annahme stützten, die Arithmetik von $\mathbf{Z}[\zeta]$ (für $\zeta^n = 1$) sei derjenigen der ganzrationalen Zahlen ähnlich. Da es fast sicher ist, daß Kummer gerade zur Korrektur dieses Fehlers eine Theorie der algebraischen

Zahlen entwickelt hatte[19], werden wir nachstehend eine Skizze eines typisch falschen Beweises der Fermatschen Vermutung anführen. Es wurde zwar schon vermutet, dies könne der ursprüngliche „Beweis" von Fermat gewesen sein, doch gibt es keinen objektiven Anhaltspunkt für diese Annahme.

Wenn man zeigen möchte, daß $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine ganzzahlige Lösung besitzt, dann genügt es, die Gleichungen $x^p + y^p = z^p$ für ungerade Primzahlen p zu untersuchen. Die erste Etappe des „Beweises" besteht darin, $x^p + y^p$ in Faktoren zu zerlegen:

$$x^p + y^p = \prod_{k=0}^{p-1} (x + \zeta^k y) = z^p,$$

wobei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel, also $\zeta^p = 1$ und $\zeta^r \neq 1$ für $0 < r < p$ ist. Dann untersuchen wir eingehend die Faktoren $(x + \zeta^k y)$ als Elemente von $\boldsymbol{Z}[\zeta]$. (Wir erinnern daran, daß die Elemente dieses Ringes die Gestalt $t_0 + t_1\zeta + \cdots + t_{p-2}\zeta^{p-2}$ mit $t_i \in \boldsymbol{Z}$ haben.) Unter der Voraussetzung, daß die Arithmetik von $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ die gleiche ist wie die Arithmetik der ganzrationalen Zahlen, kann man zeigen, daß die $(x + \zeta^k y)$ in dem Ring $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ paarweise teilerfremd sind. Folglich muß, da $(x + \zeta^k y)$ die Zahl z^p teilt, jeder nicht-umkehrbare unzerlegbare Faktor von $x + \zeta^k y$ mit einem durch p teilbaren Exponenten auftreten, und $x + \zeta^k y$ ist bis auf einen Einheitenfaktor eine p-te Potenz. Durch eine elementare[20], aber recht feine Überlegung kann man zeigen, daß dies auf einen Widerspruch führt.

Es wird erzählt, Kummer habe zwischen 1830 und 1840 geglaubt[21], einen Beweis der Fermatschen Vermutung gefunden zu gaben, der sich auf die obige Überlegung stützte, und ihn Dirichlet zur Überprüfung vorgelegt. Dirichlet habe angeblich die Tatsache herausgearbeitet, daß Kummer implizit voraussetzte, $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ sei ein Ring mit eindeutiger Primzerlegung, eine Annahme, die Dirichlet nicht für bewiesen ansah. Es wird behauptet, Kummer sei von dieser Schwierigkeit geradezu elektrisiert worden und habe im Bestreben, ein Mittel zur Überwindung dieser Schwierigkeit zu finden, die idealen Zahlen geschaffen. Leider ließ sich weder in den Papieren von Kummer noch in denen von Dirichlet irgendeine Spur finden, die diese Annahme, welche anscheinend auf Hensel etwa sechzig Jahre später zurückgeht[22], stützen würde.

Lamé ging so weit, daß er 1847 seinen „Beweis" der Akademie der Wissenschaften zu Paris vorlegte. Hier war es Liouville, der den Fehler entdeckte. Da Lamé seinen Beweis schon veröffentlicht hatte, war die ganze mathematische Welt über das Problem auf dem laufenden, und dies erzeugte eine vorübergehende Zunahme der Aktivität. Neben anderen überschwemmte Cauchy die *Comptes Rendus* mit kurzen Mitteilungen. Er versuchte zuerst zu zeigen, daß für eine primitive p-te Einheitswurzel die Elemente von $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ dem Euklidischen Algorithmus genügen, es also eine eindeutige Faktorzerlegung gibt, bemerkte aber dann, daß es in dem von einer 23-ten Einheitswurzel erzeugten Ring keinen Euklidischen Algorithmus gibt. Tatsächlich zeigte Kummer später, daß es in diesem Ring auch keine eindeutige Faktorzerlegung gibt.[23]

Der Leser möchte ohne Zweifel ein Beispiel sehen für die Nicht-Eindeutigkeit der Faktorzerlegung in dem von einer 23-ten Einheitswurzel erzeugten Ring; leider

sind aber solche Beispiele sehr schwerfällig. Stattdessen werden wir, um das Wesentliche zu zeigen, durch Betrachtung von $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]$ ein Beispiel angeben. In $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]$ ist die Zerlegung in unzerlegbare Elemente nicht eindeutig:

$$9 = 3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5})\,(2 - \sqrt{-5})\,.$$

Wir zeigen zuerst, daß 3 unzerlegbar ist; wäre

$$3 = (x + y\sqrt{-5})\,(z + w\sqrt{-5})\,,$$

so käme man durch Übergang zu den Konjugiert-Komplexen zu

$$3 = (x - y\sqrt{-5})\,(z - w\sqrt{-5})\,,$$

und durch Multiplikation ergäbe sich $9 = (x^2 + 5y^2) \cdot (z^2 + 5w^2)$. Da $3 = u^2 + 5t^2$ keine ganzzahlige Lösung besitzt, muß der eine dieser ganzen Faktoren von 9 gleich 1 und der andere gleich 9 sein, sagen wir $1 = x^2 + 5y^2$, $9 = z^2 + 5w^2$. Dies bedeutet: $x = \pm 1$ und $y = 0$, und da $3 = (x + y\sqrt{-5})\,(z + w\sqrt{-5})$ ist, muß $z = \pm 3$, $w = 0$ gelten. Somit ist 3 in $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]$ unzerlegbar. Man könnte auf die gleiche Weise zeigen, daß $2 + \sqrt{-5}$ und $2 - \sqrt{-5}$ in $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]$ ebenfalls unzerlegbar sind.

Wir weisen darauf hin, daß 3 zwar nicht zerlegbar ist, aber keineswegs alle Eigenschaften von Primzahlen besitzt. Beispielsweise ist 3 Teiler des Produkts $(2 + \sqrt{-5})\,(2 - \sqrt{-5})$, teilt aber keinen der beiden Faktoren. Es ist $3^2 = (2 + \sqrt{-5})\,(2 - \sqrt{-5})$, wobei die beiden Faktoren in $\boldsymbol{Z}[\sqrt{-5}]$ zueinander teilerfremd sind; doch sind diese Faktoren keine Quadrate (auch nicht bis auf Einheiten) in diesem Ring. Daher sind die Annahmen über $\boldsymbol{Z}[\theta]$, die zum „Beweis" der Fermatschen Vermutung benutzt wurden, nicht universell gültig.

Nach dem anfänglichen Scharmützel im Zusammenhang mit der Fermatschen Vermutung und der eindeutigen Faktorzerlegung vollzog sich die Entwicklung einer Theorie der algebraischen Zahlen in mehreren verhältnismäßig wohlbestimmten Etappen. Wir werden sie nachstehend kurz anführen und in den folgenden Abschnitten im Detail diskutieren.

A. Zwischen 1840 und 1846 veröffentlichte Dirichlet eine Reihe von kurzen Mitteilungen über die Ringe der Gestalt $\boldsymbol{Z}[\theta]$, wobei θ eine komplexe Zahl ist, die einer Gleichung der Gestalt $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ mit $a_i \in \boldsymbol{Z}$ genügt. Insbesondere untersuchte er die umkehrbaren Elemente, d. h. die *Einheiten* in diesen Ringen.

B. Von 1847 an wurde Kummer[(24)], angetrieben von dem Wunsch, die Fermatsche Vermutung zu beweisen und die Reziprozitätsgesetze zu verallgemeinern, darauf geführt, den Ring $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ mit $\zeta^p = 1$ bis in einzelne zu untersuchen. Um zu einer brauchbaren Theorie zu gelangen, führte Kummer seine *idealen Zahlen* und die *Idealklassen* ein, welche große Bedeutung erhalten sollten.

C. Abgesehen von Vervollkommnungen der Theorie von $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ geschah bis 1871, als Dedekind in einem Supplement zu den Dirichletschen *Vorlesungen über Zahlentheorie* die Grundlagen der modernen Theorie schuf, nichts Wichtiges.[(25)] Die 1894 publizierte vierte Auflage dieses Buches enthält die endgültige Darlegung der Dedekindschen Theorie.

D. Im Jahre 1882 veröffentlichte Kronecker seine Abhandlung über die Grundlagen der Theorie der algebraischen Zahlen. Leider war sie durch ihre Diktion schwer zugänglich, so daß sie nicht die gleiche Wirkung wie die Dedekindsche Arbeit hatte.(26) Sie enthielt jedoch Ideen und Anregungen, die sowohl die algebraische Geometrie als auch die Keime der Entwicklung, die mit der Untersuchung der Klassenkörpertheorie sprunghaft begann, stark beeinflußten. Dank den Anstrengungen von Kronecker und dem Werk von Weber und Hilbert wurden zwischen 1882 und 1905 die großen Linien des Gebäudes vorgezeichnet, das einmal die allgemeine Klassenkörpertheorie werden sollte.

E. Die Aktivität bei der Untersuchung der algebraischen Zahlen nahm zu, und im Jahre 1897 publizierte Hilbert auf Wunsch der Deutschen Mathematiker-Vereinigung eine meisterhafte Darstellung der Theorie, wie sie damals vorlag. Das Ziel des *Zahlberichts* bestand darin, Werkzeuge zu liefern und weitere Untersuchungen anzuregen. Dieses Ziel wurde gewiß erreicht.

F. Nach der Herausbildung der Primzahltheorie (vgl. 5.6.) begann Weber im Jahre 1896 damit, die gleichen analytischen Verfahren auf die Untersuchung der Verteilung der Primideale in den Idealklassen anzuwenden. Die Bedeutung der Weberschen Arbeiten beruht darauf, daß Weber bei den Beweisen seiner Sätze dazu geführt wurde, die Existenz von gewissen algebraischen Zahlkörpern zu postulieren, die bestimmte sehr spezielle Eigenschaften besitzen. Diese Körper, die man *Klassenkörper* nannte, wurden für die folgenden fünfzig Jahre zum Hauptobjekt der Untersuchungen.

G. Kurz nachdem Weber den Begriff des Klassenkörpers eingeführt hatte, bemerkte Hilbert, daß er ihn zur Untersuchung der Reziprozitätsgesetze, der quadratischen Formen und der Zerlegung der Primideale benötigte. Obwohl es Hilbert nur unter bestimmten recht speziellen Voraussetzungen gelang, die Existenz der Klassenkörper zu beweisen, bildeten seine Ideen die Grundlage späterer Untersuchungen

H. Im Verlaufe des Studiums der Verteilung der Primideale wurde der wichtige Begriff des *Frobenius-Automorphismus* geprägt, der in der Klassenkörpertheorie eine große Rolle spielen sollte.

I. Gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts begann Hensel, seine *p-adischen Zahlen* einzuführen. Zuerst wurden sie einzig und allein als ein formales Verfahren benutzt, doch begann sich um 1913 die Situation zu ändern. Man führte einfache topologische Begriffe in den Körpern der p-adischen Zahlen ein. Diese Vorstellungen liegen einer sehr bequemen und suggestiven Sprache zugrunde, welche die ganze Zahlentheorie erobern sollte.

J. Im Jahrzehnt von 1920 bis 1930 wurden die seinerzeit von Weber und Hilbert vermuteten Hauptergebnisse der Klassenkörpertheorie von Takagi, Artin und Hasse bewiesen.

K. Die komplexe Analysis wurde 1940 von Chevalley aus der Klassenkörpertheorie vertrieben, der für alle Hauptsätze rein algebraische, auf der Theorie der p-adischen Zahlen beruhende Beweise gab.

L. Im Jahre 1943 schlugen Artin und Whaples einen Zugang zur Zahlentheorie im Rahmen von Bewertungen vor.

Die neueste Entwicklung besteht in der Einführung der homologischen Algebra in die Klassenkörpertheorie. Dies führte zu einigen sehr wichtigen Ergebnissen; der Gegenstand ist aber zu technisch, als daß wir hier darauf eingehen könnten (siehe [1]).

5.5.1. *Der Beitrag Dirichlets*

Zwischen 1840 und 1846 veröffentlichte Dirichlet eine Reihe von kurzen Mitteilungen über $\boldsymbol{Z}[\theta]$, wobei θ einer Gleichung der Gestalt

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 , \qquad a_i \in \boldsymbol{Z} ,$$

genügt. Es handelt sich meistens um skizzenhafte Darlegungen; Dirichlet ist niemals in die Einzelheiten gegangen, wahrscheinlich deshalb, weil seine Untersuchungen von der Theorie umfaßt werden, die Kummer etwa um die gleiche Zeit entwickelte. Er hat jedoch einen strengen Beweis eines der wichtigsten Ergebnisse veröffentlicht, das sich auf die Einheiten von $\boldsymbol{Z}[\theta]$ bezieht. Ehe wir es formulieren, müssen wir einige Begriffe einführen.

Angenommen, θ sei Nullstelle des irreduziblen Polynom $f(x)$ vom Grade n. Dann hat f weitere $n-1$ Nullstellen, etwa $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Man sagt, θ und die θ_i seien die *Konjugierten* von θ. Analog sagt man, wenn $\alpha \in \boldsymbol{Z}[\theta]$ und

$$\alpha = a_0 + a_1\theta + \cdots + a_{n-1}\theta^{n-1}$$

ist, α und die Zahlen

$$\alpha_i = a_0 + a_1\theta_i + \cdots + a_{n-1}\theta_i^{n-1}$$

seien die Konjugierten von α. Es stellte sich heraus, daß α genau dann ein umkehrbares Element, d. h. eine Einheit von $\boldsymbol{Z}[\theta]$ ist, wenn

$$\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i = \pm 1$$

gilt, wobei $\alpha_0 = \alpha$ ist. (Die Funktion $N(\alpha) = \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i$ wird die *Norm* genannt; sie wurde von Lagrange in Zusammenhang mit seinen Untersuchungen zur Gleichungstheorie eingeführt (vgl. 2.2.2.).) Dirichlet hat die Gleichung $N(\alpha) = \pm 1$ benutzt, um die Einheiten von $\boldsymbol{Z}[\theta]$ vollständig zu beschreiben. Sein Endergebnis ist das folgende:

Dirichletscher Einheitensatz. Besitzt θ insgesamt r reelle und $2s$ komplexe Konjugierte, so gibt es $t = r + s - 1$ Einheiten in $\boldsymbol{Z}[\theta]$, etwa $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ derart, daß jede Einheit ε in $\boldsymbol{Z}[\theta]$ eine eindeutige Darstellung in der Gestalt

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{n_1} \cdots \varepsilon_t^{n_t}$$

besitzt, wobei $n_i \in \boldsymbol{Z}$ und ζ eine Einheitswurzel in $\boldsymbol{Z}[\theta]$ ist.

Wir sagen, daß die $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ eine *Menge von Grundeinheiten* für $\boldsymbol{Z}[\theta]$ bilden. Obwohl man im Prinzip immer eine Menge von Grundeinheiten konstruieren kann, sind die wirklichen Rechnungen außergewöhnlich lang und mühsam.

5.5.2. *Kummer und die idealen Zahlen*

Wie schon gesagt, war das Ziel Kummers der Beweis der Fermatschen Vermutung. Dies ist nicht alles; angeregt durch die Arbeiten von Gauß, Dirichlet, Jacobi und Eisenstein über die Benutzung der komplexen Zahlen bei der Untersuchung des kubischen und des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes wollte er die allgemeinen Reziprozitätsgesetze für die p-ten Potenzen formulieren und beweisen.[27] Kummer hat diesen beiden Problemen etwa zwanzig seiner besonders schöpferischen Jahre gewidmet, und die Vorstellungen, die er herausarbeitete, haben auf die moderne Mathematik einen gewaltigen Einfluß ausgeübt, dessen Bedeutung bei weitem die von ihm tatsächlich erzielten Ergebnisse übersteigt. Im Laufe seiner Forschungen wurde Kummer dazu angeregt, die „idealen Zahlen" einzuführen. Die Klärung und Verallgemeinerung dieses Begriffs nahm mehrere Jahrzehnte in Anspruch. Dank der Arbeiten von Kronecker, Dedekind und E. Noether zu diesem Problemkreis hat sich das Gesicht der Algebra und der algebraischen Geometrie völlig gewandelt.

Kummer und seine Zeitgenossen hatten sehr verworrene Vorstellungen davon, was die idealen Zahlen „wirklich" waren. In einer seiner Abhandlungen versuchte Kummer, ihre Existenz durch Analogie mit einer chemischen Theorie der Radikale zu begründen, die heutzutage völlig überholt ist; letzten Endes läuft seine Rechtfertigung für ihre Einführung aber darauf hinaus, daß sie nützlich sind und zu aussagekräftigen mathematischen Sätzen führen. Unabhängig vom Nutzen der idealen Zahlen findet man bei den Autoren jener Zeit aus dem Rahmen fallende Sätze wie diesen: „Die idealen Zahlen haben keine quantitative Existenz, aber eine ideale Zahl, erhoben zu einer gewissen Potenz, ist gleich einer wohlbestimmten komplexen Zahl!"

Angesichts seiner historischen Bedeutung werden wir das Werk Kummers im einzelnen diskutieren. Zunächst geben wir eine naive Beschreibung der idealen Zahlen, der wir dann eine mehr technische gründliche Darstellung folgen lassen. Der Leser kann, wenn er will, den technischen Teil überschlagen, ohne den Faden zu verlieren.

5.5.2.1. Ideale Zahlen (I)

Die idealen Zahlen sind keine Zahlen. Was sie sind, wird sich — so hoffen wir — im Verlaufe dieses und des nächsten Abschnitts herausstellen.

Kummer ordnete in bestimmter Weise jeder rationalen *Primzahl* q, die er als Element von $\mathbf{Z}[\zeta]$ für ein gewisses ζ mit $\zeta^n = 1$ ansah, endlich viele Objekte zu, die er *ideale* (Prim-)*Zahlen* nannte, sagen wir $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_e$. Dann ordnet er jedem $\mathfrak{A}_i$ ein System von Kongruenzen zu. Die Multiplikation der idealen Zahlen wird dann mit Hilfe dieser Kongruenzen definiert.

Es sei $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta]$; wir sagen, α sei *durch* $\mathfrak{A}_k$ *teilbar*, wenn α dem $\mathfrak{A}_k$ zugeordneten System von Kongruenzen genügt. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verschiedene ideale Zahlen, die nicht notwendigerweise von der gleichen rationalen Primzahl herrühren, so ist die

ideale Zahl $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ durch ihre Teilbarkeitseigenschaften definiert: $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ teilt α, wenn α durch $\mathfrak{A}$ und durch $\mathfrak{B}$ teilbar ist. Kummer hat bewiesen, daß es für die idealen Zahlen eine eindeutige Faktorzerlegung gibt.

5.5.2.2. Ideale Zahlen (II)

In diesem Abschnitt werden wir auseinandersetzen, in welcher Weise Kummer einer gegebenen Primzahl p ideale Zahlen zuordnete. Leider hatte er gewartet, bis seine Theorie mehr oder weniger vollendet war, ehe er irgendetwas veröffentlichte, so daß wir nicht in der Lage sind, die Entwicklung seiner Ideen genau nachzuzeichnen. Eines ist jedoch klar: Kummer hatte eine beträchtliche Menge von Berechnungen durchgeführt, ehe er zu seiner Theorie der idealen Zahlen gelangte. Beispielsweise berechnete er in den Ringen $\mathbf{Z}[\zeta]$, wobei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel für $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ und 23 war, lange Tabellen von Faktoren der Primzahlen. Tatsächlich besitzen alle Ringe für $p < 23$ eine eindeutige Faktorzerlegung. Als er zu $p = 23$ kam, beherrschte er seine Rechentechnik völlig, so daß er in der Lage war, sie so zu verallgemeinern, daß auch dieser Fall erfaßt wurde. Im Laufe seiner Rechnungen bemerkte Kummer, daß es eine enge Beziehung zwischen den Faktoren von q und den irreduziblen Faktoren von gewissen Polynomkongruenzen gab. Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt der allgemeinen Theorie. Ehe wir diese Beziehung angeben, erinnern wir an einige Definitionen.

Im Zusammenhang mit dem Aufbau einer Kreisteilungstheorie hatte Gauß Größen eingeführt, welche *Perioden* genannt werden. Wir haben in 5.3.4. gesehen, daß sie in folgender Weise definiert sind.

Es sei p eine Primzahl und ζ eine primitive Wurzel der Gleichung $x^p - 1 = 0$. (Alle Wurzeln der Gleichung sind dann durch ζ^r mit $0 \leqq r \leqq p - 1$ gegeben.) Es sei γ eine Primitivwurzel von $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Setzen wir $p - 1 = ef$, so können wir die e Perioden zu je f Gliedern $\eta_0, \ldots, \eta_{e-1}$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= \zeta^{\gamma^0} + \zeta^{\gamma^e} + \zeta^{\gamma^{2e}} + \cdots + \zeta^{\gamma^{(f-1)e}}, \\
\eta_1 &= \zeta^{\gamma^1} + \zeta^{\gamma^{e+1}} + \cdots + \zeta^{\gamma^{(f-1)e+1}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\eta_{e-1} &= \zeta^{\gamma^{e-1}} + \zeta^{\gamma^{2e-1}} + \cdots + \zeta^{\gamma^{(f-1)e+e-1}}
\end{aligned}$$

definieren. Die Zahlen $\eta_0, \ldots, \eta_{e-1}$ sind die Wurzeln einer Gleichung

$$F_e(y) = y^e + A_1 y^{e-1} + \cdots + A_e,$$

wobei die A_i in $\mathbf{Z}$ liegen.

Kummer fand, daß sich im Fall $p < 23$ das Polynom $F_e(y)$ modulo q vollständig zerlegen läßt, wenn $q^f \equiv 1 \pmod{p}$ und $q^n \not\equiv 1 \pmod{p}$ für $0 < n < f$ gilt. Wir setzen

$$F_e(y) \equiv (y - u_0)(y - u_1) \cdots (y - u_{e-1}) \pmod{q},$$

wobei man zeigen kann, daß die u_i paarweise verschieden sind. Darüber hinaus zerfällt q selbst in e in $\mathbf{Z}[\eta]$ unzerlegbare Faktoren, wobei η eine der Perioden ist, und

diese e Faktoren können immer in der Gestalt

$$\alpha_i(\eta - u_i) + \beta_i q\,, \qquad i = 0, \dots, e-1\,,$$

mit $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{Z}[\eta]$ geschrieben werden. Man kann sogar zeigen, daß diese Faktorzerlegung (bis auf die Reihenfolge und Einheiten) von der Wahl der Zahl η unabhängig ist, daß dies die einzigen Faktoren von q in $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ sind und daß bis auf Einheiten und Reihenfolge die Zerlegung eindeutig ist. Diese Faktoren wollen wir mit $\mathfrak{q}_0, \dots, \mathfrak{q}_{e-1}$ bezeichnen.

Danach wollte Kummer die Teilbarkeitseigenschaften der $\mathfrak{q}_k$ im Ring $\boldsymbol{Z}[\zeta]$ untersuchen. Genauer: Er suchte eine Bedingung, die garantiert, daß $\alpha \in \boldsymbol{Z}[\zeta]$ durch $\mathfrak{q}_k$ teilbar ist. Er zeigte, daß α auf eindeutige Weise als Polynom in η_0 und ζ geschrieben werden kann, d. h., daß

$$\alpha = \alpha(\eta, \zeta) = a_0(\eta) + a_1(\eta)\,\zeta + \cdots + a_{f-1}(\eta)\,\zeta^{f-1}$$

gilt. Führen wir in dieser Darstellung von α die Substitution $\eta \mapsto u_k$ aus, so ist (wie Kummer zeigte) α genau dann durch $\mathfrak{q}_k$ teilbar, wenn

$$a_i(u_k) \equiv 0 \pmod{q}\,, \qquad i = 0, \dots, f-1\,,$$

ist. Die Beschreibung der Tatsache, daß α durch $\mathfrak{q}_k^n$, aber nicht durch $\mathfrak{q}_k^{n+1}$ teilbar ist, wurde für jede Primzahl p durch Kronecker, damals Schüler von Kummer, in seiner Dissertation geliefert. Er zeigte, daß es eine Zahl ψ_k der Gestalt

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{e-1} \left(t_i(\eta - u_i) + r_i q\right)$$

mit $t_i, r_i \in \boldsymbol{Z}[\zeta]$ gibt mit der Eigenschaft $(\eta - u_k)\,\psi_k = tq$ und $t \not\equiv r \pmod{q}$. Diese Zahl ist so beschaffen, daß im Fall $\mathfrak{q}_k^n \mid \alpha$, aber $\mathfrak{q}_k^{n+1} \nmid \alpha$, die Beziehungen

$$\psi_k^n a_i(u_k) \equiv 0 \pmod{q^n} \quad \text{für} \quad 0 \leqq i \leqq f-1$$

und

$$\psi_k^{n+1} a_i(u_k) \not\equiv 0 \pmod{q^{n+1}} \quad \text{für ein gewisses } i$$

gelten.

Daher ist die Aussage $\mathfrak{q}_k^n \mid \alpha$ vollständig durch eine Menge von Kongruenzen definiert.

Im allgemeinen Fall, für $p \geqq 23$, ist die Ausage, es gebe eine eindeutige Faktorzerlegung und q besitze e eindeutige Faktoren, nicht immer richtig. (Wir setzen stets voraus, es sei $q^f \equiv 1 \pmod{p}$ und $q^n \not\equiv 1 \pmod{p}$ für $0 < n < f$.) Einige der Primzahlen q brauchen sogar überhaupt keine komplexen Faktoren zu haben. Jedoch zeigte Kummer auch in diesem Fall, daß das Polynom $F_e(y)$ modulo q vollständig zerfällt und daß die u_k modulo q auf eindeutige Weise bestimmt sind. Überdies können wir wieder die Kongruenzen

$$a_i(u_k) \equiv 0 \pmod{q}\,, \qquad i = 0, \dots, f-1\,,$$

betrachten. Aus diesen Gründen ordnete Kummer der Primzahl q die e „idealen Primzahlen" zu; diese nannte er $\mathfrak{q}_0, \dots . \mathfrak{q}_{e-1}$, und er sagte, die ideale Zahl $\mathfrak{q}_k$ teile die Zahl $\alpha \in \boldsymbol{Z}[\zeta]$, wenn die oben angeführten Kongruenzen erfüllt sind. Man kann

die Vielfachheit von $\mathfrak{q}_k$ als Faktor von α analog zum Fall $p < 23$ mit Hilfe einer Zahl ψ_k definieren.[28]

Da es zu jeder Primzahl $q \neq p$ ein f mit $q^f \equiv 1 \pmod{p}$ gibt, haben wir die Zerlegung jeder Primzahl $q \neq p$ in ideale Zahlen vollständig beschrieben. Jetzt muß noch die Faktorzerlegung von p selbst untersucht werden. Kummer hat gezeigt, daß sich p auf eindeutige Weise in der Gestalt

$$p = w(1 - \zeta)^{p-1}$$

darstellen läßt, wobei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel und w eine spezifische Einheit im Ring $\mathbf{Z}[\zeta]$ ist. Um die Teilbarkeit von $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta]$ durch $1 - \zeta$ zu prüfen, schreiben wir

$$\alpha = a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{p-2}\zeta^{p-2}$$

mit $a_i \in \mathbf{Z}$. Dann gilt $(1 - \zeta) \mid \alpha$ genau dann, wenn

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Die Vielfachheit des Faktors $1 - \zeta$ bereitet keinerlei besondere Schwierigkeit.

5.5.2.3. Idealklassen

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verschiedene ideale Zahlen, die nicht notwendig zu ein und derselben Primzahl gehören, und gilt $\mathfrak{A}^n \mid \alpha$ und $\mathfrak{B}^m \mid \alpha$, so sagen wir, $\mathfrak{A}^n\mathfrak{B}^m$ teile α. Kummer hat gezeigt, daß man jedem $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta]$ ein endliches Produkt $\mathfrak{A}_1^{r_1}\mathfrak{A}_2^{r_2} \cdots \mathfrak{A}_m^{r_m}$ verschiedener idealer Zahlen zuordnen kann derart, daß die $\mathfrak{A}_j^{r_j}$ die einzigen idealen Faktoren von α sind. Er hat überdies bewiesen, daß sich zwei Zahlen aus $\mathbf{Z}[\zeta]$ nur um einen Einheitenfaktor unterscheiden, wenn sie die gleichen idealen Faktoren mit den gleichen Vielfachheiten besitzen. Somit gilt für die idealen Zahlen das Analogon der eindeutigen Faktorzerlegung.

Kummer hat ferner einige sehr spezielle Eigenschaften der idealen Zahlen untersucht. Eines seiner wichtigsten Ergebnisse lautet:

Es existiert eine endliche Menge von idealen Zahlen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{h-1}$ derart, daß es zu einem gegebenen formalen Produkt $\prod_{j=1}^{r} \mathfrak{B}_j^{n_j}$ idealer Zahlen entweder genau ein $\mathfrak{A}_i$ und ein gewisses $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta]$ gibt derart, daß $\mathfrak{A}_i \prod_{j=1}^{r} \mathfrak{B}_j^{n_j}$ die Ideal-Faktorzerlegung von α ist oder daß $\prod_{j=1}^{r} \mathfrak{B}_j^{n_j}$ schon die genaue Faktorzerlegung einer gewissen Zahl $\beta \in \mathbf{Z}[\zeta]$ darstellt.

Das vorstehende Resultat hat Kummer dazu angeregt, die sogenannten *Idealklassen* einzuführen. Man sagt, das formale Produkt $\mathfrak{B} = \prod_{j=1}^{r} \mathfrak{B}_j^{n_j}$ gehöre zur Klasse von $\mathfrak{A}_i$, wenn $\mathfrak{A}_i \prod_{j=1}^{r} \mathfrak{B}_j^{n_j}$ die Ideal-Faktorzerlegung eines gewissen $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta]$ ist; wir schreiben dann $\mathfrak{B} \in (\mathfrak{A}_i)$. Ist $\mathfrak{B}$ die Ideal-Faktorzerlegung eines gewissen $\beta \in \mathbf{Z}[\zeta]$, so sagen wir, $\mathfrak{B}$ gehöre zur *Hauptklasse*, und schreiben $\mathfrak{B} \in (1)$.

Die h Klassen $(\mathfrak{A}_1), \ldots, (\mathfrak{A}_{h-1}), (1)$ besitzen ein natürliches Verknüpfungsgesetz, nach welchem das Produkt $(\mathfrak{A}_i)(\mathfrak{A}_j)$ als die Klasse von $\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j$ anzusehen ist. Kummer

hat gezeigt, daß man mit diesem Produkt eine abelsche Gruppe der Ordnung h erhält, natürlich nicht in dieser Terminologie. Die Zahl $h = h(p)$ wird die *Klassenzahl* von $\mathbf{Z}[\zeta]$ genannt. Es gibt einen anderen Satz von Kummer, der aussagt, es sei genau dann $h(p) = 1$, wenn die Faktorzerlegung in $\mathbf{Z}[\zeta]$ eindeutig ist.

Anscheinend hat Dirichlet die Berechnung von $h(p)$ durchgeführt, aber niemals seine Ergebnisse publiziert, ohne Zweifel deshalb, weil Kummer ebenfalls diese Berechnung ausgeführt hatte. Die von Kummer erhaltene Formel für die Klassenzahl ist zu kompliziert, als daß wir sie hier angeben könnten; es genügt zu sagen, daß $h(p)$ als Produkt von mehreren Zahlen dargestellt wird, die — mit einigen Schwierigkeiten — berechnet werden können. Allerdings wachsen die Werte von $h(p)$ außergewöhnlich schnell an; beispielsweise ist $h(97)$ größer als 10^{11}.

Nachdem Kummer seine Theorie für die Ringe $\mathbf{Z}[\zeta]$ ausgearbeitet hatte, wandte er seine Ergebnisse auf die Fermatsche Vermutung an. Er hat bewiesen, daß sie richtig ist, falls p kein Teiler von $h(p)$ ist, und eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß p kein Teiler von $h(p)$ ist. Diese Bedingung besteht darin, daß dies genau dann gilt, wenn p keinen der Zähler der ersten $\frac{1}{2}(p-3)$ Bernoullischen Zahlen teilt. (Die Bernoullischen Zahlen B_n sind durch

$$t/(e^t - 1) = 1 - \frac{1}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!} t^{2n}$$

definiert.) Die Primzahlen p mit $p \nmid h(p)$ werden *regulär* genannt, die übrigen *irregulär*. Die einzigen irregulären Primzahlen unter 100 sind 37, 59 und 67. Für die irregulären Primzahlen unter 100 sind 37, 59 und 67. Für die irregulären Primzahlen hat Kummer auch verschiedene Kriterien dafür angegeben, daß die Gleichung $x^p + y^p = z^p$ keine nichttriviale Lösung hat. Ist beispielsweise p irregulär und $B_\nu \equiv 0 \pmod{p}$ für $0 < \nu < \frac{1}{2}(p-3)$, so muß $B_{\nu p} \equiv 0 \pmod{p^3}$ sein, falls die Gleichung eine Lösung besitzt. Dieses Kriterium schließt alle irregulären Primzahlen unterhalb 100 aus. Im Jahre 1915 hat Jensen bewiesen, daß es unendlich viele irreguläre Primzahlen gibt; es ist aber noch unbekannt, ob es unendlich viele reguläre Primzahlen gibt.

Wir werden nun kurz auf einige neuere Arbeiten eingehen. Bezeichnet $I(x)$ die Anzahl der irregulären Primzahlen unterhalb x, so würde aus einer von Siegel 1964 angegebenen heuristischen Überlegung, wenn sie richtig ist, folgen, daß

$$\lim_{x\to\infty} \frac{I(x)}{\pi(x)} = 1 - e^{-1/2} = 0{,}39346\ldots$$

ist. Die tatsächliche Anzahl der irregulären Primzahlen unterhalb 30000 ist 1273, und es ist

$$\frac{I(30000)}{\pi(30000)} = 0{,}3924\,,$$

was für die Vermutung von Siegel spricht. Durch systematische Berechnungen konnte 1975 gezeigt werden, daß die Fermatsche Vermutung für alle Exponenten unterhalb 30000 richtig ist.

5.5.3. *Dedekind und die algebraischen Zahlen*

Nach den Pionierarbeiten Kummers wurde bis 1871 nichts über die Theorie der algebraischen Zahlen veröffentlicht.(29) Dies ist das Jahr, in dem Dedekind seine Arbeit über die Grundlagen der Theorie der algebraischen Zahlen als X. Supplement zur zweiten Auflage der Dirichletschen *Vorlesungen über Zahlentheorie* publizierte. In der 1894 veröffentlichten vierten Auflage findet man das X. Supplement, das inzwischen zum XI. Supplement geworden war, in seiner endgültigen Form. Es ist ein Meisterwerk der mathematischen Literatur [10].

Dedekind hat seine Theorie der algebraischen Zahlen nicht erarbeitet, um eine spezifische mathematische Aufgabe zu lösen, wie es Kummer getan hatte, sondern um eine allgemeine und vollständige Theorie aufzustellen, die sich auf feste und wohldefinierte Grundlagen stützte. Wie Kummer hat er jedoch faktisch nichts publiziert, ehe seine Theorie praktisch vollständig war. Aus eben diesem Grunde besitzen wir keine sichere Kenntnis von den Beweggründen vieler Dedekindscher Ideen. Das beste, was wir hoffen hier bieten zu können, besteht darin, der Gliederung des XI. Supplements zu folgen, in dem Versuch, dort, wo es notwendig ist, die Dedekindschen Begriffsbildungen als natürlich darzustellen.

5.5.3.1. Die Körpertheorie

Dedekind war der erste Mathematiker, der den Begriff des Körpers formell einführt und seine Untersuchung in Angriff nimmt.(30) Zwar hatten Abel, Galois und andere die Vorstellung eines „Rationalitätsbereichs", die mehr oder weniger unserem Körperbegriff entspricht, ohne weitere Erörterung benutzt, doch für sie waren die wichtigen Objekte eher die Elemente als die Menge, die aus ihnen besteht, während für Dedekind die Grundobjekte die Körper selbst waren.

Im XI. Supplement bleibt die Dedekindsche Definition eines Körpers auf Teilkörper des Körpers der komplexen Zahlen beschränkt. Für die Teilkörper von $\boldsymbol{C}$ untersuchte Dedekind im Detail Begriffe wie den Durchschnitt, das Kompositum, die Einbettungen in $\boldsymbol{C}$ und die Automorphismen. Darüber hinaus betrachtete Dedekind endliche Erweiterungen eines beliebigen Grundkörpers und gab Beweise der meisten Sätze, die bis zum heutigen Tage den Inhalt einer Einführungsvorlesung über Körpertheorie bilden. Für diesen Aspekt des Werkes von Dedekind verweisen wir den Leser auf 3.3.1.

Der größte Teil des XI. Supplements ist der Untersuchung der endlichen algebraischen Erweiterungen von $\boldsymbol{Q}$ gewidmet. Wir bezeichnen solche Erweiterungen, die man einfach *algebraische Zahlkörper* nennt, mit K.

5.5.3.2. Was ist eine ganze Zahl?

Sobald Dedekind eine brauchbare Theorie der algebraischen Zahlkörper besaß, wollte er die korrekte Verallgemeinerung der ganzen rationalen Zahlen finden. Wie eine solche Verallgemeinerung aussehen könnte, war keineswegs offensichtlich. Dedekind hat ohne Erfolg versucht, eine allgemeine Theorie der Faktorzerlegung

für einen Ring $\boldsymbol{Z}[\theta]$ mit algebraischem θ aufzubauen, und andere Mathematiker waren bestrebt, den Begriff der ganzen algebraischen Zahlen so zu fassen, daß immer eine eindeutige Zerlegung in ganze algebraische Primzahlen existiert. Tatsächlich ist dies ein vergebliches Unterfangen. Dedekinds Ansatz ist davon völlig verschieden.

Vermutlich fragte er sich, welchen natürlichen Bedingungen eine Menge algebraischer Zahlen genügen muß, damit diese „ganz algebraisch" genannt werden dürfen. Man muß vernünftigerweise die folgenden vier Bedingungen stellen:

(a) Die einzigen rationalen Zahlen, welche „ganz algebraisch" sind, sind die ganzen rationalen Zahlen.

(b) Die Definition einer „ganzen algebraischen" Zahl muß so beschaffen sein, daß die ganzen algebraischen Zahlen von K auch in jeder Erweiterung L von K ganz algebraisch sind. Insbesondere besagt diese Bedingung, daß beim Übergang zu einer algebraischen Abschließung von $\boldsymbol{Q}$ die Definition einer ganzen algebraischen Zahl *ohne* Bezug auf irgendeinen speziellen Körper K gegeben sein muß.

(c) Die ganzen algebraischen Zahlen bilden einen Ring.

(d) Ist α eine ganze algebraische Zahl, so sind auch alle Konjugierten von α ganz algebraisch.

Aus diesen Bedingungen folgt, daß auch die symmetrischen Funktionen von α und der Konjugierten von α ganz algebraisch sein müssen; da aber α eine algebraische Zahl ist, sind die symmetrischen Funktionen rational. Somit sind die symmetrischen Funktionen ganze rationale Zahlen, und α muß einer Gleichung der Gestalt

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad \text{mit} \quad a_i \in \boldsymbol{Z}$$

genügen, mit anderen Worten, α ist Nullstelle eines Polynoms mit höchstem Koeffizienten 1 (und mit ganzen rationalen Koeffizienten). Wir formulieren nun die folgende Definition:

Eine Zahl α ist genau dann ganz algebraisch, wenn α Nullstelle eines Polynoms mit ganzen rationalen Koeffizienten und höchstem Koeffizienten 1 ist.

Tatsächlich waren die algebraischen Zahlen, welche Wurzeln von Polynomen mit ganzen rationalen Koeffizienten und höchstem Koeffizienten 1 sind, schon früher von Dirichlet, Hermite und Eisenstein bei anderen Untersuchungen studiert worden. Übrigens hatte Eisenstein gezeigt, daß die Menge dieser Zahlen gegenüber Addition und Multiplikation abgeschlossen ist.

Es ist verhältnismäßig leicht zu beweisen, daß die Menge der ganzen algebraischen Zahlen eines gegebenen Körpers K ein freier $\boldsymbol{Z}$-Modul vom Rang n ist, wobei n den Grad von K über $\boldsymbol{Q}$ bedeutet. Darüber hinaus bilden diese Zahlen einen Unterring von K, und der Quotientenkörper dieses Ringes ist genau K. Es gibt jedoch in K unendlich viele freie $\boldsymbol{Z}$-Moduln vom Rang n, welche Unterringe von K sind; Dedekind nannte solche Objekte die *Ordnungen* des Körpers. Alle Ordnungen haben den Rang n und besitzen deshalb K als Quotientenkörper. Dedekind kennzeichnete auf

folgende Weise diejenige Ordnung, die den Ring der ganzen algebraischen Zahlen von K darstellt:

Unter allen Ordnungen von K gibt es genau eine maximale Ordnung (d. h. eine solche, die alle übrigen umfaßt), und diese Ordnung ist der Ring der ganzen algebraischen Zahlen von K, den wir mit $\mathfrak{o}_K$ bezeichnen.

Wir sagten, es sei nicht schwer, die Existenz einer Basis für $\mathfrak{o}_K$ zu beweisen; oft ist es aber eine mühsame Arbeit, eine solche Basis zu finden, wenn ein spezieller Körper K gegeben ist. Nachstehend geben wir wenigstens zwei Beispiele, in denen wir vollständig zum Ziele gelangen.

(1) Es sei $K = \boldsymbol{Q}(\zeta_p)$, wobei p eine ungerade Primzahl und ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel ist. Dann ist $1, \zeta_p, \ldots, \zeta_p^{p-1}$ eine Basis von $\mathfrak{o}_K$; dies bedeutet $\mathfrak{o}_K = \boldsymbol{Z}[\zeta_p]$. Kummer hatte das Glück, daß in dem ersten Fall, mit dem er sich auseinandersetzte, seine naive Vorstellung von einer ganzen algebraischen Zahl der korrekten Bestimmung entsprach!

(2) Es sei $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$, wobei d eine quadratfreie ganze Zahl mit $d \equiv 1 \pmod 4$ ist. Dann ist $\{1, (1 + \sqrt{d})/2\}$ eine Basis von $\mathfrak{o}_K$. Ist jedoch $d \equiv 2, 3 \pmod 4$, so ist $\{1, \sqrt{d}\}$ eine Basis von $\mathfrak{o}_K$. Wir sehen, daß im allgemeinen $\boldsymbol{Z}[\theta]$ nicht der Ring der ganzen Zahlen von $\boldsymbol{Q}(\theta)$ ist.(31) Welch ein Pech für Kummer, daß im zweiten Fall, den er untersuchen wollte, seine naive Vorstellung von den ganzen Zahlen fehlerhaft war!(32) Im Fall $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ kann man leicht auch alle anderen Ordnungen von K beschreiben. Ist etwa $\{1, \omega\}$ eine Basis von $\mathfrak{o}_K$, so werden die Ordnungen durch $\{1, f\omega\}$ mit f in $\boldsymbol{Z}$ erzeugt. Die ganze rationale Zahl f wird der *Führer* der Ordnung genannt.

Dedekind hat für den Ring $\mathfrak{o}_K$ einen wichtigen Satz aufgestellt, der die Verallgemeinerung des berühmten Dirichletschen Einheitensatzes ist.

Es sei $K = \boldsymbol{Q}(\alpha)$; dabei gebe es r reelle Konjugierte und $2s$ komplexe Konjugierte von α (d. h., der Körper K besitze r reelle und $2s$ komplexe Einbettungen). Dann gibt es $t = r + s - 1$ Einheiten in $\mathfrak{o}_K$, etwa $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ derart, daß jede Einheit $\varepsilon \in \mathfrak{o}_K$ eine eindeutige Darstellung der Gestalt

$$\varepsilon = \zeta \varepsilon_1^{n_1} \cdots \varepsilon_t^{n_t}$$

besitzt, wobei $n_i \in \boldsymbol{Z}$ und ζ eine Einheitswurzel in $\mathfrak{o}_K$ ist.

Wir sagen, daß die $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$ eine Menge von *Grundeinheiten* für $\mathfrak{o}_K$ bilden.

5.5.3.3. Ideale

Nachdem er einmal im Besitz einer korrekten Definition der ganzen algebraischen Zahlen für einen algebraischen Zahlkörper K war, hat sich Dedekind eingehend mit dem Problem der Zerlegung einer gegebenen Primzahl $p \in \boldsymbol{Z}$ in Primfaktoren in $\mathfrak{o}_K$ befaßt. Er hatte das Werk von Kummer über die Körper $\boldsymbol{Q}(\zeta_p)$ zur Verfügung, und er hat es ohne Zweifel sehr sorgfältig studiert. Wir werden nachstehend eingehend untersuchen, wie Dedekind zu seiner Idealtheorie durch die Idee der idealen

Zahlen von Kummer gekommen sein mag, müssen uns jedoch leider auf 5.5.2.2., einen technischen Abschnitt, beziehen. Selbstverständlich kann der Leser diesen Abschnitt übergehen.

Wir benutzen die Bezeichnungen von 5.5.2.2. Kummer hatte bewiesen, daß man die Faktoren einer gegebenen ganzen rationalen Primzahl q immer unter den ganzen algebraischen Zahlen der Gestalt $\alpha_i(\eta - u_i) + \beta_i q$ mit $i = 0, \dots, e-1$ bestimmen kann. Wahrscheinlich hat Dedekind bemerkt, daß man die Faktoren von q in den von $\{(\eta - u_i), q\}$ erzeugten $\mathfrak{o}_K$-Moduln untersuchen muß und daß andererseits jedes Produkt

$$\prod_{i=0}^{e-1} (\alpha_i(\eta - u_i) + \beta_i q)$$

die Gestalt αq mit α in $\mathfrak{o}_K$ besitzt. In diesem Sinne ist es vernünftig zu sagen, der $\mathfrak{o}_K$-Modul $\{(\eta - u_i), q\}$ *teile* den $\mathfrak{o}_K$-Modul $\{q\}$. (Wir merken an, daß es viele Jahre dauerte, bis diese anscheinend einfache Idee im Geiste eines der größten Mathematiker der Welt zur Reife gelangte.)

Es war ganz im Stile Dedekinds, unmittelbar diejenigen Eigenschaften der $\mathfrak{o}_K$-Moduln $\{(\eta - u_i), q\}$ und $\{q\}$ herauszuarbeiten, die für seine neue Idee der Teilbarkeit wesentlich waren, und sie dann auf andere Körper zu verallgemeinern. Dies ist es anscheinend, was er getan hat und was ihn dazu gebracht hat, das Problem der Teilbarkeit völlig neu zu stellen; statt ganze Zahlen, die andere ganze Zahlen teilen, zu betrachten, hat er Moduln untersucht, die andere Moduln teilen. Wir werden feststellen, daß die Moduln im Beispiel von Kummer immer als $\mathbf{Z}$-Moduln angesehen werden können; daher wurde Dedekind auf eine detaillierte Untersuchung von $\mathbf{Z}$-Moduln geführt.

5.5.3.4. Moduln

Ehe Dedekind die Teilbarkeit definieren konnte, mußte er eine Arithmetik der Moduln definieren und untersuchen. Seine Definition der Multiplikation spiegelt klar den Einfluß der Kummerschen Arbeiten wider. Sie lautet:

Sind die $\mathbf{Z}$*-Moduln* M *und* N *mit den Basen* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ *bzw.* $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ *gegeben, so wird der Modul* MN *durch die Menge*

$$\{\alpha_i \beta_j \mid i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n\}$$

erzeugt.

Nun sind wir in der Lage, ein *gebrochenes Ideal* zu definieren: Ein gebrochenes Ideal ist ein $\mathbf{Z}$-Modul $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{o}_K \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. (Für jeden Modul $\mathfrak{a}$ gilt $\mathfrak{o}_K \mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}$.) Von nun an werden wir das Ideal (0) stets aus unseren Betrachtungen ausschließen.

Der Hauptsatz sagt aus, daß die gebrochenen Ideale eine *abelsche Gruppe* bilden, deren Einselement $\mathfrak{o}_K$ ist. Eine wichtige Unterklasse von gebrochenen Idealen wird von denjenigen Idealen gebildet, die in $\mathfrak{o}_K$ enthalten sind. Diese nennen wir naturgemäß *ganze Ideale*. In der arithmetischen Theorie der Ideale spielen die ganzen Ideale die Rolle der ganzen rationalen Zahlen, die gebrochenen Ideale die Rolle

der rationalen Zahlen. Man kann ein gebrochenes Ideal als Quotient zweier ganzer Ideale ansehen in dem Sinne, daß es zu einem vorgegebenen gebrochenen Ideal $\mathfrak{a}$ ganze Ideale $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ gibt.

Mittels einer tiefgehenden Analyse zeigte Dedekind, daß die Halbgruppe der ganzen Ideale alle multiplikativen Eigenschaften von $\boldsymbol{Z}$ besitzt. Insbesondere stellte er eine „Kürzungsregel" auf, nämlich die folgende: Sind $\mathfrak{a} \neq 0$ und $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ drei ganze Ideale, für welche $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2$ gilt, so ist $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$. Es bedurfte einiger Jahre, bis Dedekind einen annehmbaren Beweis dieses Satzes, eines der Schlüsselergebnisse der Theorie, gefunden hatte. Dieser Satz spielt beim Beweis der Tatsache, daß die gebrochenen Ideale eine *abelsche Gruppe* bilden, eine wesentliche Rolle. (Man braucht sich nicht darüber zu wundern, daß dies ein tiefliegender Satz ist; denn er gilt nicht in jedem Ring. Im Polynomring $\boldsymbol{Z}[x, y]$ beispielsweise gilt für $\mathfrak{a} = (x, y)$, $\mathfrak{b}_1 = (x^2, y^2)$, $\mathfrak{b}_2 = (x^2, xy, y^2)$ zwar $\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2$, aber $\mathfrak{b}_1 \neq \mathfrak{b}_2$.)

Die Krönung der Dedekindschen Theorie ist der Satz, daß jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}$ in eindeutiger Weise als Produkt von unzerlegbaren Faktoren, welche *Primideale* genannt werden, geschrieben werden kann. Die Dedekindsche Lösung des Problems der Nicht-Eindeutigkeit der Faktorzerlegung in $\mathfrak{o}_K$ besteht also darin, jedem $\alpha \in \mathfrak{o}_K$ das von α erzeugte Hauptideal (α) zuzuordnen und dann (α) als Produkt von Primidealpotenzen auszudrücken, also

$$(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}.$$

Wir sagen, $\mathfrak{p}_i$ sei Teiler des Hauptideals (α) und schreiben $\mathfrak{p}_i \mid (\alpha)$. Im XI. Supplement befaßte sich Dedekind nicht mit den Einzelheiten der Zerlegung eines gegebenen Hauptideals in Primideale. Dieses Problem war schwierig, und bis 1878 veröffentlichte er kein Ergebnis zu diesem Gegenstand.

5.5.3.5. Idealklassen

Die Verallgemeinerung der „Idealklassen" von Kummer (vgl. 5.5.2.3.) ergibt sich in der Dedekindschen Theorie in natürlicher Weise. Wir erinnern daran, daß es in der Kummerschen Theorie zu gegebenem formalem Produkt $\mathfrak{B} = \prod_i \mathfrak{B}_i^{r_i}$ von „idealen Zahlen" eine „ideale Zahl" $\mathfrak{A}$ und eine komplexe Zahl α gibt derart, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_i$ die „einzigen Ideal-Faktoren" von α sind. Dedekind gelang es, im allgemeinen Fall ein analoges Ergebnis für die ganzen Ideale zu gewinnen, nämlich, daß zu einem ganzen Ideal $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{m}$ existiert derart, daß $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = (\alpha)$ ein Hauptideal ist. Nach dem Beispiel von Kummer nannte Dedekind zwei ganze Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ äquivalent, in Zeichen $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}'$, wenn es ein Ideal $\mathfrak{m}$ gibt derart, daß sowohl $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ als auch $\mathfrak{a}'\mathfrak{m}$ Hauptideale sind.

Ist A die Klasse von $\mathfrak{a}$ und B die Klasse von $\mathfrak{b}$, so läßt sich auf den Klassen eine natürliche Multiplikation einführen, indem man unter AB die Klasse von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ versteht. Dedekind hat gezeigt, daß unter dieser Multiplikation die Idealklassen eine *endliche* abelsche Gruppe $H(K)$ bilden. Die Ordnung von $H(K)$ wird üblicherweise mit $h(K)$ bezeichnet. Offenbar gilt genau dann $h(K) = 1$, wenn jedes ganze Ideal ein Hauptideal ist, und dies bedeutet, daß im Ring $\mathfrak{o}_K$ der ganzen algebraischen Zahlen die Faktorzerlegung eindeutig ist.

Als Einführung in 5.5.6., wo wir die Diskussion der Klassenkörpertheorie beginnen werden, betrachten wir die Dedekindsche Definition von $H(K)$ etwas eingehender. Ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}'$, so gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = (\mu)$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{m} = (\mu')$. Somit ist $(\mu')\,\mathfrak{a}\mathfrak{m} = (\mu\mu') = (\mu)\,\mathfrak{a}'\mathfrak{m}$, also $(\mu')\,\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'(\mu)$, mit anderen Worten, $\mathfrak{a} = (\mu/\mu')\,\mathfrak{a}'$. Genau dann ist also $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}'$, wenn sich diese Ideale um ein gebrochenes Hauptideal unterscheiden. Dies führt auf den Gedanken, den Äquivalenzbegriff auf gebrochene Ideale auszudehnen. Ist F_K die Gruppe der gebrochenen Ideale in K und P_K die Untergruppe der gebrochenen Hauptideale, so ist es nicht schwer zu zeigen, daß $H(K) \cong F_K/P_K$ gilt. In 5.5.6. werden wir Untergruppen von F_K und P_K herausgreifen und die entsprechenden Faktorgruppen untersuchen.

5.5.3.6. Einige technische Hilfsmittel

Zum Verständnis des folgenden Abschnitts brauchen wir einige technische Definitionen.

Es sei $\mathfrak{M}$ ein freier $\mathbf{Z}$-Modul vom Rang n in K; dann besitzt $\mathfrak{M}$ eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Wir definieren die *Diskriminante* von $\mathfrak{M}$ durch

$$D(\mathfrak{M}) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \dots & \alpha_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^{(1)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}^2,$$

wobei $\alpha_i^{(j)}$ das j-te konjugierte Element von α_i bezeichnet. Die Zahl $D(\mathfrak{M})$ ist rational und hängt nicht von der Wahl einer speziellen Basis von $\mathfrak{M}$ ab. Im Fall $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}_K$ schreiben wir D_K statt $D(\mathfrak{o}_K)$ und nennen D_K die *Diskrimante des Körpers K*.

Ist $\mathfrak{M}$ ein Untermodul von $\mathfrak{o}_K$, so ist der *Index* $N(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ durch $D(\mathfrak{M}) = D_K \cdot N(\mathfrak{M})^2$ und $N(\mathfrak{M}) > 0$ definiert. In dem Spezialfall, daß $\mathfrak{M}$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ ist, wird die dann ganze rationale Zahl $N(\mathfrak{a})$ auch als die *Absolutnorm* von $\mathfrak{a}$ bezeichnet. An anderer Stelle dieses Kapitels haben wir die Bezeichnung $N(\alpha)$ für das Produkt der Konjugierten einer algebraischen Zahl α benutzt. Wo die Gefahr einer Verwechslung mit der Absolutnorm eines Ideals vorliegt, schreiben wir $\mathrm{Norm}(\alpha)$ statt $N(\alpha)$. Die Beziehung zwischen der Absolutnorm des Hauptideals (α) und $\mathrm{Norm}(\alpha)$ wird durch $N((\alpha)) = |\mathrm{Norm}(\alpha)|$ gegeben. Man kann auch zeigen, daß die Absolutnorm eine multiplikative Funktion, mit anderen Worten, daß $N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{b})$ ist, was wir im folgenden benutzen werden.

Wir erwähnen hier noch eine technische Angelegenheit, die sich auf die Absolutnorm bezieht, obwohl wir erst in 5.5.4. auf sie Bezug nehmen werden. Angenommen, es sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal und $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}_K$. Wir schreiben $\alpha \sim \beta$, falls $\alpha - \beta \in \mathfrak{a}$ gilt, und bezeichnen die Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen mit $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{a}$; dann ist $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{a}$ ein Ring, und man kann zeigen, daß die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{a}$ gleich $N(\mathfrak{a})$ ist. Im Spezialfall $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}$ als Primideal ist $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}$ ein Körper, den man den *Restklassenkörper* von $\mathfrak{p}$ nennt, und es ist $N(\mathfrak{p}) = p^f$, wobei p die eindeutig bestimmte rationale Primzahl mit $\mathfrak{p} \mid p$ und f eine positive ganze rationale Zahl ist.

Nebenbei merken wir an, daß im Fall $K = \mathbf{Q}(\zeta)$ mit $\zeta^q = 1$ für eine gewisse Primzahl q die Kongruenz $p^f \equiv 1 \pmod q$ gilt, wobei das f dem f aus der Kummerschen Theorie entspricht.

5.5.3.7. Zerlegung der Primzahlen

Wir wollen nun das Problem der Faktorzerlegung eines Primideals (p) von $\mathbf{Z}$ in ein Produkt von Primidealen von $\mathfrak{o}_K$ diskutieren. Eines der ersten Ergebnisse zu diesem Thema stammt von Kummer; denn wenn wir Kummer in die Sprache Dedekinds übersetzen, erkennen wir, daß er den folgenden sehr interessanten Satz bewiesen hat:

Es sei $K = \mathbf{Q}(\zeta_m)$, wobei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel ist, und $f(x)$ das Minimalpolynom von ζ_m über $\mathbf{Q}$. Ferner sei q eine rationale Primzahl; es möge

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{r} \left(P_i(x)\right)^{e_i} \pmod q$$

gelten, wobei die $P_i(x) \pmod q$ paarweise verschiedene irreduzible Polynome sind. Dann gilt in $\mathfrak{o}_K$

$$(q) = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{e_i},$$

wobei die $\mathfrak{p}_i$ paarweise verschiedene Primideale von $\mathfrak{o}_K$ sind, die jeweils von $\{q, P_i(\zeta_m)\}$ erzeugt werden.

In Wirklichkeit hat Kummer etwas mehr über die Faktorzerlegung in $\mathbf{Q}(\zeta_m)$ bewiesen; er hat gezeigt: Ist $(q, m) = 1$, so sind alle e_i gleich 1, und die Grade der Polynome $P_i(x)$ sind sämtlich gleich f, wobei f die kleinste positive ganze Zahl ist, für welche $q^f \equiv 1 \pmod m$ ist. Überdies gilt $rf = [\mathbf{Q}(\zeta_m):\mathbf{Q}] = \varphi(m)$, mit der Eulerschen Funktion φ. Im Falle $q \mid m$ möge $m = q^\alpha m_1$ für ein bestimmtes $\alpha \geqq 1$ mit $(q, m_1) = 1$ sein. Dann ist jedes der e_i gleich $\varphi(q^\alpha)$, und die Grade der $P_i(x)$ sind sämtlich gleich f, wobei f die kleinste positive ganze Zahl mit $q^f \equiv 1 \pmod{m_1}$ und $\varphi(q^\alpha)\,fr = \varphi(m) = [\mathbf{Q}(\zeta_m):\mathbf{Q}]$ ist.

Im Jahre 1878 veröffentlichte Dedekind eine Arbeit, in der er den Satz von Kummer in folgender Weise verallgemeinerte:

Es sei $\gamma \in \mathfrak{o}_K$ so beschaffen, daß $K = \mathbf{Q}(\gamma)$ gilt, und $f(x)$ sei das Minimalpolynom von γ. Wir bezeichnen mit $C(\gamma)$ den Index des Moduls $\mathbf{Z}[\gamma]$, und es sei p eine Primzahl, die $C(\gamma)$ nicht teilt. Ist

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^{r} P_i^{e_i}(x) \pmod p,$$

wobei die $P_i(x) \pmod p$ paarweise verschiedene irreduzible Polynome sind, so besteht eine Zerlegung

$$(p) = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{e_i},$$

wobei man die Primideale $\mathfrak{p}_i$ bestimmen kann, wenn man die $P_i(x)$ kennt.

Ist p ein Teiler von $C(\gamma)$, so läßt sich der Dedekindsche Satz zur Faktorzerlegung von (p) nicht benutzen. In einem solchen Fall kann man hoffen, durch Abänderung von γ etwa in θ zu erreichen, daß p kein Teiler von $C(\theta)$ wird. Üblicherweise ist dies möglich; doch Dedekind wußte, daß es Körper K und Primzahlen p gibt derart, daß für *jedes* $\gamma \in \mathfrak{o}_K$ die Primzahl p ein Teiler von $C(\gamma)$ ist. Genügt θ beispielsweise der Gleichung $x^3 - x^2 - 2x - 8 = 0$, so kann man für $K = \boldsymbol{Q}(\theta)$ zeigen, daß $2 \mid C(\alpha)$ für jedes $\alpha \in \mathfrak{o}_K$ gilt. Man kann also den Dedekindschen Satz auf den Faktor (2) nicht anwenden; mit anderen Methoden kann man aber zeigen, daß

$$(2) = (2, \theta, \eta)\,(2, \theta + 1, \eta)\,(2, \theta, \eta + 1)$$

ist, wobei $\eta = \frac{1}{2}\theta(\theta - 1) + 1$ ist. Dieses Dedekindsche Beispiel zeigt, daß man die Faktorzerlegung der Ideale nicht durch Kongruenzen nach ganzen rationalen Primzahlen allein beschreiben kann, wie Kummer und Dedekind selbst gehofft hatten. Dedekind hat in seiner Arbeit von 1878 versucht, diese Schwierigkeit durch die Betrachtung von Kongruenzen modulo Primzahlpotenzen zu überwinden, das Problem fand jedoch erst mit Hensels Einführung der p-adischen Zahlen (vgl. 5.5.9.) eine allgemeine und elegante Lösung.

Dedekind hat über die Faktorzerlegung der Primzahlen einen anderen sehr wichtigen Satz angegeben. Ehe wir ihn formulieren, führen wir den Begriff der *Verzweigung* ein. Wir werden diese Definitionen in diesem Abschnitt kaum benutzen; im folgenden werden sie jedoch häufig verwendet.

Aus der Annahme

$$(p) = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i^{e_i}$$

erhalten wir durch Bildung der Absolutnorm die Beziehung

$$p^n = N((p)) = \prod_{i=1}^{r} N(\mathfrak{p}_i)^{e_i},$$

wobei n der Grad des Körpers K ist.

Somit gibt es zu jedem $\mathfrak{p}_i$ eine ganze Zahl f_i derart, daß $N(\mathfrak{p}_i) = p^{f_i}$ ist. Dabei nennen wir

(a) die ganze Zahl f_i den *Grad* von $\mathfrak{p}_i$,
(b) die ganze Zahl e_i den *Verzweigungsindex* von $\mathfrak{p}_i$.

Sofort ergibt sich $\sum_{i=1}^{r} e_i f_i = n$. Ist $e_i = f_i = 1$ für alle i, so sagen wir, die Primzahl p *zerfalle vollständig*. In diesem Fall ist $r = n$. (Im Spezialfall von $\boldsymbol{Q}(\zeta_m)$ sind die vollständig zerfallenden Primzahlen diejenigen, die der Bedingung $p \equiv 1 \pmod{m}$ genügen.) Gilt $e_i > 1$ für ein gewisses i, so sagen wir, $\mathfrak{p}_i$ sei ein in K *verzweigtes* Primideal, und im Fall $\mathfrak{p}_i \mid (p)$ sagen wir, die *rationale Primzahl p verzweige sich in K*.

Dank der Untersuchung zahlreicher Beispiele hatte Dedekind erkannt, daß mit Ausnahme *endlich vieler* Primideale $\mathfrak{p}$ stets $e = 1$ ist. Doch war der Beweis dieser Tatsache für einen beliebigen Körper K eine der großen Schwierigkeiten, auf die

Dedekind gestoßen war[33]. Er hatte die Veröffentlichung seiner Theorie jahrelang zurückgehalten, bis es ihm gelungen war, alle verzweigten Primideale zu charakterisieren, so daß er den Satz nicht in das XI. Supplement aufnahm. Sein Hauptergebnis über die Verzweigung hat Dedekind schließlich 1881 veröffentlicht (er war ein echter Perfektionist!). Dieser Satz lautet wie folgt:

Eine rationale Primzahl p ist in K genau dann verzweigt, wenn p ein Teiler von D_K ist. Außerdem gibt es ein ganzes Ideal $\mathfrak{d}_K$ (das heutzutage die *Differente* von K genannt wird) *derart, daß $N(\mathfrak{d}_K) = |D_K|$ gilt, und $\mathfrak{p}$ ist ein verzweigtes Primideal von K genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ Teiler von $\mathfrak{d}_K$ ist.*

Dedekind hat die Differente explizit konstruiert, doch ist die Konstruktion zu technisch, als daß wir sie hier anführen könnten.

Für diejenigen p, die sich in K verzweigen, hat Dedekind versucht, die genaue Potenz von p zu bestimmen, welche Teiler von D_K ist, und den folgenden Satz bewiesen:

Wird $(p) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$ vorausgesetzt und ist überdies p für $i = 1, \dots, r$ kein Teiler von e_i, so ist D_K durch $p^{f_1(e_1-1)+\cdots+f_r(e_r-1)}$, aber durch keine höhere Potenz von p teilbar; dabei ist $N(\mathfrak{p}_i) = p^{f_i}$.

Gilt nun $p \mid e_i$ für ein gewisses i, so ist es Dedekind nicht gelungen, die größte in D_K enthaltene p-Potenz zu finden. Solche Primzahlen werden die *singulären* Faktoren von D_K genannt.[34] Im Jahre 1897 löste Hensel das Problem der singulären Faktoren durch Benutzung seiner p-adischen Zahlen vollständig.

5.5.3.8. Die Dedekindsche Zetafunktion

Die Entdeckung der Formel, welche die Klassenzahl $h(K)$ angibt, ist ein weiterer großer Erfolg Dedekinds. Zu diesem Zweck hat er im XI. Supplement eine Verallgemeinerung der Riemannschen Zetafunktion eingeführt (vgl. 5.6.). Wir geben jetzt die Definition dieser heute als *Dedekindsche Zetafunktion* bezeichneten Funktion.

Ist K ein algebraischer Zahlkörper, so definieren wir für jede reelle Zahl $s > 1$

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s},$$

wobei sich die Summation über alle ganzen Ideale von K erstreckt.

Ebenso wie die Riemannsche Funktion $\zeta(s)$ zur Untersuchung der rationalen Primzahlen verwendet werden kann, gibt das Verhalten von $\zeta_K(s)$ Aufschluß über die Arithmetik von K. Allerdings ist Dedekind in dieser Richtung nicht sehr weit gegangen; er hat sich darauf beschränkt, die Beziehung

$$\lim_{s\to 1+} (s-1)\,\zeta_K(s) = \frac{2^{r+t}\pi^t \mathcal{R}_K}{\omega\sqrt{|D_K|}}\,h(K)$$

zu beweisen; dabei ist D_K die Diskriminante von K und $h(K)$ die Klassenzahl, ω die Anzahl der Einheitswurzeln in K sowie $\mathcal{R}_K$ der Regulator von K (eine Konstante, die wir nicht definieren werden, die aber nur von den Erzeugenden der Einheiten-

gruppe von $\mathfrak{o}_K$ abhängt); t ist die Anzahl der reellen und r die Anzahl der komplexen Einbettungen von K. Mit Hilfe seiner Zetafunktion hat Dedekind die Kummersche Formel für die Klassenzahl eines Kreisteilungskörpers und die Dirichletsche Bestimmung der Klassenzahl eines quadratischen Zahlkörpers wiedergefunden. Weitere Anwendungen von $\zeta_K(s)$ bringen wir in 5.5.8.

Um den Ausdruck $\lim\limits_{s\to 1+} (s-1)\,\zeta_K(s)$ auszuwerten, hat Dedekind die Verteilung der ganzen Ideale auf die Idealklassen untersucht. Ist $\mathcal{K}$ eine Idealklasse von K und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{o}_K$, so ist, wie Dedekind gezeigt hat,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{T(\mathcal{K}, x; \mathfrak{a})}{x} = \frac{2^{r+t}\pi^t \mathcal{R}_K}{N(\mathfrak{a})\,\omega\,\sqrt{|D_K|}}\,;$$

dabei bezeichnet $T(\mathcal{K}, x; \mathfrak{a})$ die Anzahl der ganzen durch $\mathfrak{a}$ teilbaren Ideale in $\mathcal{K}$, deren Norm kleiner als x ist.

Da der Ausdruck auf der rechten Seite nicht von $\mathcal{K}$ abhängt, ergibt sich aus dieser Beziehung, daß für $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}_K$ die ganzen Ideale in den Klassen *gleichverteilt* sind. Dieses Ergebnis und eine Verallgemeinerung sollten sich in dem in 5.5.6. zu beschreibenden Werk von Weber als wesentlich erweisen.

5.5.3.9. Dedekind und die quadratischen Körper

Es ist sicher, daß sich Dedekind der quadratischen Körper $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ einerseits als Prüffeld für seine Theorie, andererseits als Quelle von Anregungen bedient hat. Und er ist auch der erste, der wirklich die Art und Weise beschrieben hat, in der die quadratischen Körper mit den quadratischen Formen zusammenhängen, obwohl Kummer 1847 darauf angespielt hatte. Die Kummersche Theorie der idealen Zahlen konnte in der Tat nicht so leicht auf quadratische Körper erweitert werden, wie Kummer es sich vorstellte, weil der Ring der ganzen Zahlen von $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ nicht immer mit $\boldsymbol{Z}[\sqrt{d}]$ übereinstimmt; doch scheint sich Kummer über diese Tatsache niemals Rechenschaft abgelegt zu haben. Aus diesen Gründen ist es logisch, daß wir hier wenigstens kurz die Anwendungen der Dedekindschen Theorie auf die quadratischen Körper erörtern und so den Zusammenhang zwischen den Körpern und den Formen herstellen.

Es sei $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$, wobei d eine quadratfreie ganze Zahl ist. Wir sagten schon, daß man durch

$$\left\{1, \frac{1+\sqrt{d}}{2}\right\}, \quad \text{falls} \quad d \equiv 1 \pmod 4,$$

$$\{1, \sqrt{d}\}, \qquad \text{falls} \quad d \equiv 2, 3 \pmod 4,$$

eine Basis von $\mathfrak{o}_K$ erhält (siehe S. 209).

Ist $d \equiv 2, 3 \pmod 4$, so ist $D_K = 4d$ und $C(\sqrt{d}) = 1$; daher läßt sich der Satz von Dedekind (tatsächlich genügt die Kummersche Fassung) auf alle Primzahlen p anwenden. Das Minimalpolynom von $\sqrt{d}$ ist $X^2 - d$, und man findet durch An-

wendung des Satzes:

$$(p) = \begin{cases} \mathfrak{p}^2 & \text{für } p \mid 4d\,, \\ \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 & \text{für } \left(\dfrac{d}{p}\right) = +1\,, \\ \mathfrak{p} & \text{für } \left(\dfrac{d}{p}\right) = -1\,. \end{cases}$$

Ist $d \equiv 1 \pmod 4$, so ist $D_K = d$ und $C\big((1+\sqrt{d})/2\big) = 1$. In diesem Fall ist $X^2 - X - \big((d-1)/4\big)$ das Minimalpolynom, das auch in der Gestalt $(2X-1)^2 - d$ geschrieben werden kann. Demnach ist

$$(p) = \begin{cases} \mathfrak{p}^2 & \text{für } p \mid d\,, \\ \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 & \text{für } \left(\dfrac{d}{p}\right) = +1\,, \\ \mathfrak{p} & \text{für } \left(\dfrac{d}{p}\right) = -1\,. \end{cases}$$

Darüber hinaus ist, weil d quadratfrei ist, die höchste Potenz einer ungeraden Primzahl p, die D_K teilt, die Zahl p.

Wir gehen nun zu den Beziehungen zwischen den quadratischen Körpern und den quadratischen Formen über. Es sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal von K, das $\{\alpha, \beta\}$ als Basis über $\mathbf{Z}$ besitzt; die allgemeine ganze Zahl ξ von $\mathfrak{a}$ wird durch

$$\xi = \alpha x + \beta y$$

gegeben, wobei x und y alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen. Es ist

$$\text{Norm}(\xi) = (\alpha x + \beta y)\,(\alpha' x + \beta' y)\,,$$

wobei α' und β' die Konjugierten von α bzw. β sind. Offenbar ist $\text{Norm}(\alpha x + \beta y)$ eine quadratische Form in x, y mit ganzen rationalen Koeffizienten. Da ξ in $\mathfrak{a}$ liegt, wissen wir, daß $\mathfrak{a} \mid (\xi)$, und daraus folgt $N(\mathfrak{a}) \mid N((\xi))$. Auf Grund von $N((\xi)) = |\text{Norm}(\xi)|$ gilt auch $N(\mathfrak{a}) \mid \text{Norm}(\xi)$. Nun sei $\text{Norm}(\xi) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, wobei A, B, C Funktionen von $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sind. Da $N(\mathfrak{a})$ ein Teiler von $\text{Norm}(\xi)$ für alle Werte der x, y ist, folgt hieraus, daß $N(\mathfrak{a})$ jeden der Koeffizienten A, B, C teilt. (Man nehme beispielsweise nacheinander $x = 1, y = 0$; $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 1$). Setzen wir

$$\frac{N(\xi)}{N(\mathfrak{a})} = ax^2 + bxy + cy^2\,,$$

so ist die Diskriminante dieser Form gleich D_K. Die Klasse, zu der diese Form gehört, ist von der Wahl einer Idealbasis unabhängig. Es wäre also angenehm, wenn zwei äquivalente Ideale zu der gleichen Formenklasse assoziiert wären; leider ist dies aber nicht immer der Fall.

Um eine umkehrbar eindeutige Entsprechung zwischen den Klassen von quadratischen Formen und den Idealklassen von $\mathfrak{o}_K$ zu erhalten, war Dedekind

gezwungen, die Begriffe der *eingeschränkten Äquivalenz* der Ideale und der *Gruppe der eingeschränkten Klassen*, die wir nun beschreiben werden, einzuführen.

Zwei ganze Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{o}_K$ sind *im eingeschränkten Sinne äquivalent*, wenn es ein $\lambda \in K$ *mit* $\mathrm{Norm}(\lambda) > 0$ gibt derart, daß $\mathfrak{a} = (\lambda)\mathfrak{b}$ ist. Die eingeschränkten Äquivalenzklassen bilden eine Gruppe, die sogenannte *Gruppe der eingeschränkten Klassen*. Ist $d < 0$, so ist $\mathrm{Norm}(\lambda) > 0$ für jedes von null verschiedene λ, und die Gruppe der eingeschränkten Klassen (auch *Klassengruppe im engeren Sinne* genannt) stimmt mit der Gruppe der üblichen Klassen überein. Ist aber $d > 0$, so kann die Gruppe der eingeschränkten Klassen umfassender sein als die Gruppe der üblichen Klassen, je nach der Norm der Grundeinheit ε von $\mathfrak{o}_K$. Ist $\mathrm{Norm}(\varepsilon) = -1$, so stimmen die beiden Gruppen überein; denn ist $\mathfrak{a} = (\lambda)\mathfrak{b}$ mit $\mathrm{Norm}(\lambda) < 0$, so ist $\mathfrak{a} = (\varepsilon\lambda)\mathfrak{b}$ und $\mathrm{Norm}(\varepsilon\lambda) > 0$. Wäre $\mathrm{Norm}(\varepsilon) = +1$ und $\mathfrak{a} = (\lambda)\mathfrak{b}$ mit $\mathrm{Norm}(\lambda) < 0$ und existierte ein μ mit $\mathrm{Norm}(\mu) > 0$ und $\mathfrak{a} = (\mu)\mathfrak{b}$, so wäre $(\mu) = (\lambda)$, also

$$\frac{\mathrm{Norm}(\mu)}{\mathrm{Norm}(\lambda)} = \mathrm{Norm}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = -1 ,$$

was unmöglich ist. Wir können also nicht behaupten, eine Darstellung $\mathfrak{a} = (\lambda)\mathfrak{b}$ mit $\mathrm{Norm}(\lambda) > 0$ sei immer möglich; in diesem Fall gibt es zweimal so viele Klassen im eingeschränkten Sinne wie im normalen Sinne.

Wir betrachten nun ein typisches Beispiel der oben eingeführten Entsprechung. Ein einfacher Fall ist der Fall der quadratischen Formen mit der Diskriminante 12. Um die Anzahl der Klassen dieser binären quadratischen Formen mit der Diskriminante 12 zu bestimmen, beginnen wir zunächst damit, alle reduzierten Formen der Diskriminante 12 zu konstruieren (vgl. 5.4.1.). Es gibt zwei solche Formen, nämlich $x^2 - 3y^2$ und $-x^2 + 3y^2$; es gibt also höchstens zwei Klassen. Die erste Form stellt 1 dar; wäre auch

$$1 = -x^2 + 3y^2 ,$$

so wäre $1 \equiv -x^2 \pmod 3$, was unmöglich ist; daher sind die beiden Formen nicht äquivalent; die Klassenzahl ist also genau gleich 2.

Der den quadratischen Formen mit der Diskriminante 12 entsprechende quadratische Körper ist $\mathbf{Q}(\sqrt{3}) = K$. Man kann zeigen, daß seine Klassenzahl 1 ist, denn jedes ganze Ideal ist Hauptideal. Weiterhin kann man leicht feststellen, daß $\{1, \sqrt{3}\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis für $\mathfrak{o}_K$ ist, daß ferner $\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$ eine Grundeinheit und daß $N(\varepsilon) = 1$ ist. Nun betrachten wir das Ideal $\mathfrak{a}_1 = (\sqrt{3})$. Man kann beweisen, daß $\{3, \sqrt{3}\}$ eine $\mathbf{Z}$-Basis für $\mathfrak{a}_1$ ist; wenn wir nun die obige Korrespondenz zwischen Idealen und Formenklassen aufschreiben, finden wir

$$\frac{N(\xi_1)}{N(\mathfrak{a}_1)} = -x^2 + 3y^2 .$$

Somit entspricht $\mathfrak{a}_1$ der Klasse der Form $-x^2 + 3y^2$. Auf die gleiche Weise kann man zeigen, daß das Ideal $\mathfrak{a}_2 = (\sqrt{3} - 3)$ als $\mathbf{Z}$-Basis $\{\sqrt{3} - 3, 3 - 3\sqrt{3}\}$ besitzt

und daß

$$\frac{N(\xi_2)}{N(\mathfrak{a}_2)} = x^2 - 3y^2$$

gilt; $\mathfrak{a}_2$ entspricht also der Klasse der Form $x^2 - 3y^2$.

Selbstverständlich sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ im üblichen Sinne äquivalent, weil sie beide Hauptideale sind, und tatsächlich ist $\mathfrak{a}_2 = (1 - \sqrt{3})\,\mathfrak{a}_1$. Nun ist aber Norm$(1 - \sqrt{3}) = -2$, so daß $\mathfrak{a}_2$ nicht im eingeschränkten Sinne zu $\mathfrak{a}_1$ äquivalent sein kann. Man sieht also, daß für $\boldsymbol{Q}(\sqrt{3})$ die Anzahl der gewöhnlichen Klassen gleich 1 und die Anzahl der eingeschränkten Klassen gleich 2 ist.

5.5.3.10. Relativ-Erweiterungen

In einer 1882 veröffentlichten wichtigen Arbeit begründete Dedekind die Untersuchung der *Relativ-Erweiterungen*. Dies besagt, daß er die Situation von zwei endlichen Erweiterungen von $\boldsymbol{Q}$, etwa K und L mit $K \subset L$ betrachtete. Das Problem, das er in seiner Arbeit löste, besteht darin, auseinanderzusetzen, wie sich ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}_K$ in $\mathfrak{o}_L$ in ein Produkt $\mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}$ von Primidealen zerlegen läßt. In Analogie zu seinen früheren Untersuchungen nannte er $\mathfrak{P}_i$ ein *verzweigtes Primideal* über $\mathfrak{p}$, wenn $e_i > 1$ ist, und in diesem Fall sagte er, $\mathfrak{p}$ *verzweige sich von K in L*. Wie in den vorangehenden Arbeiten konstruierte er ein gewisses Ideal von $\mathfrak{o}_L$, das er mit $\mathfrak{D}_{L/K}$ bezeichnete und das er die *Relativ-Differente* von L/K nannte. Ähnlich der oben erwähnten Absolut-Differente genügt die Relativ-Differente dem folgenden Satz:

Ein Primideal $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{o}_L$ ist genau dann über $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{o}_K$ verzweigt, wenn $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{D}_{L/K}$ gilt.

In seiner Arbeit von 1882 hat Dedekind ein weiteres wichtiges Resultat bewiesen; ehe wir es aber formulieren, müssen wir einige zusätzliche technische Betrachtungen anstellen. Der Leser, dem sie geläufig sind, kann sofort zu 5.5.3.11. übergehen.

Angenommen, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ seien Primideale von $\mathfrak{o}_K$ bzw. $\mathfrak{o}_L$, und es gelte $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$. Wie schon gesagt, sind $\mathfrak{o}_L/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{P}$ Körper (Restklassenkörper), und wie man leicht sieht, kann man $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}$ als einen Teilkörper von $\mathfrak{o}_L/\mathfrak{P}$ ansehen. Daher können wir vom *Grad* von $\mathfrak{o}_L/\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}$ sprechen, in Zeichen $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$; man nennt $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ den *Relativ-Grad* von $\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{p}$.

Nun definieren wir durch $N_{L/K}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^{f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})}$ eine *Normfunktion* $N_{L/K}$ auf den Idealen von $\mathfrak{o}_L$ und dehnen diese Abbildung linear auf alle gebrochenen Ideale von $\mathfrak{o}_L$ aus.

Unsere letzte Definition in diesem Abschnitt ist die der *Relativ-Diskriminante*. Wir nehmen an, wir könnten Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ aus $\mathfrak{o}_L$ bestimmen derart, daß der $\mathfrak{o}_K$-Modul $\mathfrak{o}_L$ eine aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ bestehende *Basis* besitzt. (Dies ist nicht immer der Fall, aber immerhin so oft, daß sich die Untersuchung lohnt.) Dann können wir eine Relativ-Diskriminante $D_{L/K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ in derselben Weise definieren, wie wir es schon im Fall $K = \boldsymbol{Q}$ getan haben. Es treten jedoch Schwierigkeiten auf. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ und $\beta_1, \ldots, \beta_d$ zwei verschiedene Basen des $\mathfrak{o}_K$-Moduls $\mathfrak{o}_L$, so können sich

$D_{L/K}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ und $D_{L/K}(\beta_1, \dots, \beta_d)$ um das Quadrat einer von ± 1 verschiedenen Einheit unterscheiden. Überdies braucht der Ring $\mathfrak{o}_K$ kein Hauptidealring zu sein. Aus diesen Gründen betrachten wir das von $D_{L/K}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ erzeugte Ideal, das wir mit $(D_{L/K})$ bezeichnen. Man kann zeigen, daß $(D_{L/K})$ nicht von der gewählten speziellen Basis abhängt. In diesen Bezeichnungen hat Dedekind den folgenden Satz bewiesen:

Es ist $(D_{L/K}) = N_{L/K}(\mathfrak{D}_{L/K})$; daher ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}_K$ genau dann verzweigt, wenn $\mathfrak{p} \mid (D_{L/K})$ gilt.

In dem Fall, daß eine relative Ganzheitsbasis existiert, hat man eine verhältnismäßig bequeme Methode, um zu entscheiden, welches die verzweigten Primideale sind. Falls aber keine solche relative Ganzheitsbasis existiert (was gewöhnlich der Fall ist, es sei denn, $\mathfrak{o}_K$ ist ein Hauptidealring), muß man anders vorgehen.

Angenommen, L/K sei vom Grade r und $L/\boldsymbol{Q}$ vom Grade n. Dann kann man beweisen, daß es eine Basis für $\mathfrak{o}_L$ über $\boldsymbol{Z}$ gibt, die man mit $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ bezeichnet, mit der Eigenschaft, daß jedes Ω_i eine algebraische Zahl vom Grad n ist, so daß jedes Ω_i den Körper L über $\boldsymbol{Q}$ erzeugt. Es ist klar, daß jedes Ω_i auch L über K erzeugt und daß jedes Ω_i ein irreduzibles Polynom der Gestalt

$$X^r + \alpha_{1i}X^{r-1} + \cdots + \alpha_{ri} = 0\,, \qquad \alpha_{ji} \in \mathfrak{o}_K\,,$$

annulliert. Sind $\Omega_i^{(1)}, \dots, \Omega_i^{(r)}$ sämtliche Wurzeln der von Ω_i befriedigten Gleichung, so betrachten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} \Omega_1^{(1)} & \Omega_2^{(1)} & \dots & \Omega_n^{(1)} \\ \Omega_1^{(2)} & \Omega_2^{(2)} & \dots & \Omega_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_1^{(r)} & \Omega_2^{(r)} & \dots & \Omega_n^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen nun alle quadratischen Untermatrizen der Ordnung r und betrachten die Ideale, die von ihren Determinanten erzeugt werden. Dann wird die Relativ-Diskriminante $\mathfrak{d}_{L/K}$ als das Quadrat des größten gemeinsamen Teilers dieser Ideale definiert. Man kann beweisen, daß die beiden Definitionen der Diskriminante übereinstimmen, falls es eine Basis für $\mathfrak{o}_L$ über $\mathfrak{o}_K$ gibt. Dedekind hat bewiesen, daß der oben formulierte Satz für diese letzte Definition der Diskriminante richtig bleibt.

5.5.3.11. Unverzweigte Erweiterungen

Wir beenden diese Ausführungen über die Relativ-Erweiterungen mit einem Kommentar über die *unverzweigten* Erweiterungen eines gegebenen Zahlkörpers K. Es sei $K \neq \boldsymbol{Q}$, und L sei eine endliche Erweiterung von K; dann ist es möglich, daß sich *kein* Primideal von K in L verzweigt. In diesem Fall sagen wir, L sei eine unverzweigte Erweiterung von K. Man kann beispielsweise zeigen, daß für teilerfremde $a, b \equiv 1 \pmod 4$ und $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{ab})$, $L = K(\sqrt{a})$ der Körper L eine unverzweigte Erweiterung von K ist. Für $K = \boldsymbol{Q}$ kann diese Situation nicht auf-

treten; denn wie Minkowski 1891 gezeigt hat, ist $|D_{K/Q}| > 1$, so daß es mindestens eine verzweigte Primzahl gibt. Kronecker hatte diesen Satz um 1882 angekündigt, aber niemals einen Beweis dafür geliefert.

Wie wir später sehen werden, ist die Kenntnis der unverzweigten Erweiterungen eines Körpers K bei zahlreichen Problemstellungen wichtig, und die eingehende Untersuchung dieser Körper ist einer der Ursprünge der Klassenkörpertheorie.

Dedekind hat bedeutend mehr über die Relativ-Erweiterungen herausbekommen, als wir hier mitgeteilt haben, doch wurde keine seiner Untersuchungen zu seinen Lebzeiten publiziert; sie wurden erst bekannt, als 1932 die Gesammelten Werke von Dedekind veröffentlicht wurden.

Hilbert, der ein großer Verehrer Dedekinds und einer der ersten war, die Dedekinds Werk richtig würdigten, hat den Relativ-Erweiterungen einen großen Abschnitt in seinem *Zahlbericht* (vgl. 5.5.5.) gewidmet; es ist aber schwer einzuschätzen, ob Hilbert darüber informiert war, daß die meisten der im Zahlbericht entwickelten Ideen vorher von Dedekind gefunden worden waren.

5.5.4. *Kronecker und die algebraischen Zahlen*

Es ist schwierig, die Bedeutung des Kroneckerschen Werkes in der Zahlentheorie im allgemeinen und in der Theorie der algebraischen Zahlen im besonderen zu beurteilen. Kronecker war unbestritten ein bedeutender Mathematiker, doch leider war sein Talent zur Formulierung seiner Gedanken viel weniger groß als sein mathematisches Genie; daher ist sein von höchster Originalität geprägtes Werk — vorsichtig ausgedrückt — schwer zu lesen. Es ist noch gar nicht so lange her, daß man seine ausführlichen Arbeiten, die unbeachtet geblieben waren, wieder studiert hat. In weiten Teilen des Kroneckerschen Werkes zur Zahlentheorie wird in vielfältiger Weise von der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen Gebrauch gemacht, so daß wir hier nicht einmal versuchen können, den tatsächlichen Beitrag Kroneckers zur Zahlentheorie auch nur summarisch darzustellen. Wir beschränken uns auf zwei Themen: die Beschreibung der abelschen Gleichungen (an deren Definition nachstehend erinnert wird) und die Grundlagen der Theorie der algebraischen Zahlen.

5.5.4.1. Abelsche Gleichungen

Wir erinnern daran (vgl. 2.2.2.), daß man unter einer abelschen Gleichung eine Beziehung $f(x) = 0$ versteht, wobei $f(x)$ ein irreduzibles Polynom vom Grade $n > 1$ mit rationalen Koeffizienten ist, für das folgende Bedingung erfüllt ist: Besteht in $\boldsymbol{C}$ die Zerlegung $f(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2) \cdots (x - \theta_n)$, so ist die Gleichung $f(x) = 0$ genau dann abelsch, wenn ihre Galoisgruppe über $\boldsymbol{Q}$ abelsch ist; dann wird auch der von irgendeinem der θ_i über $\boldsymbol{Q}$ erzeugte Körper *abelsch* genannt. (Als Kronecker schrieb, war der Gruppenbegriff noch nicht formal definiert.) Es ist nicht unmöglich, daß Kronecker sich zum ersten Mal für die abelschen Gleichungen interessierte, als er die 1846 in *Liouvilles Journal* publizierten Arbeiten von Galois

las. Darüber hinaus las er auch Abel. Wie Kronecker selbst sagte, war es gegen Ende der vierziger Jahre, daß er anfing, zwei Vermutungen über die abelschen Gleichungen zu formulieren, die beide für die Entwicklung der Theorie der algebraischen Zahlen große Bedeutung erlangen sollten. Die erste erschien in einer Arbeit von 1853, während die zweite nicht vor 1877 publiziert wurde.

Die erste Vermutung läßt sich folgendermaßen formulieren:

Alle Wurzeln einer abelschen Gleichung sind rationale Funktionen von Einheitswurzeln, und umgekehrt ist jede rationale Funktion einer gegebenen Einheitswurzel zugleich Wurzel einer gewissen abelschen Gleichung.[35]

In moderner Sprache besagt dies:

Jede abelsche Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen ist ein Teilkörper eines gewissen Körpers $\mathbf{Q}(\zeta)$ *mit* $\zeta^n = 1$, $\zeta \neq \pm 1$, *d. h. ein Kreisteilungskörper; umgekehrt ist jeder Teilkörper eines Kreisteilungskörpers abelsch.*

Man sieht, daß der Satz in dieser Gestalt alle abelschen Erweiterungen von $\mathbf{Q}$ elegant klassifiziert. Das Umgekehrte ist leicht zu zeigen; doch ist dies etwas anderes, als die direkte Implikation festzustellen. Kronecker selbst hat niemals einen Beweis dieser Behauptung veröffentlicht; den ersten Beweis hat Weber 1886 angegeben.[36] Der Satz ist heute als *Satz von Kronecker-Weber* bekannt. Wie wir in 5.5.6. sehen werden, war dieser Satz für Weber von großem Nutzen, als er die Grundbegriffe dessen formulierte, was sich zur Klassenkörpertheorie entwickeln sollte.

Die zweite Vermutung Kroneckers über die abelschen Gleichungen ist in gewissem Sinne eine Folge der ersten. Dies will sagen, daß er eine mögliche Form gesehen hat, in welcher die Wurzeln einer Gleichung charakterisiert werden können, deren Koeffizienten in einem gewissen imaginär-quadratischen Körper $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ liegen und die in bezug auf diesen Körper abelsch ist. Zur selben Zeit, als Kronecker sich für die abelschen Gleichungen interessierte, untersuchte er auch die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen (vgl. 5.5.6.). Wahrscheinlich ist es dieses zeitliche Zusammenfallen, das Kronecker darauf führte, einen imaginär-quadratischen Grundkörper zu betrachten. Da wir den Zusammenhang zwischen den abelschen Gleichungen und den imaginär-quadratischen Körpern in 5.5.6. ausführlich behandeln, fassen wir uns hier kurz, abgesehen von der Formulierung der Vermutung Kroneckers, die er seinen *liebsten Jugendtraum* nannte, ohne sie allerdings zu präzisieren.

Ist $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ *ein imaginär-quadratischer Zahlkörper und* $f(x) \in K[x]$ *so beschaffen, daß die Gleichung* $f(x) = 0$ *in bezug auf* K *abelsch ist, so lassen sich alle Wurzeln der Gleichung* $f(x) = 0$ *als rationale Funktionen (in bezug auf* K*) von* $\sqrt{-d}$, *gewissen Einheitswurzeln und gewissen Werten* $j(c_i)$ *der Modulfunktion* j (vgl. 7.1.16.) *ausdrücken.*

Wie wir sehen werden, ist der Jugendtraum nicht völlig richtig.[37] Weber gab 1908 einen teilweisen Beweis; der vollständige und korrekte Satz wurde 1920 von Takagi aufgestellt.

Die beiden obigen Vermutungen Kroneckers inspirierten Hilbert zur Formulierung seines 12. Problems (vgl. 5.5.5.), das grosso modo folgendermaßen notiert werden kann:

Es sei k eine endliche algebraische Erweiterung von $\mathbf{Q}$ und K eine endliche abelsche Erweiterung von k. Kann man „gute", von k abhängende analytische Funktionen $\varphi_1(z), \dots, \varphi_r(z)$ finden derart, daß für passende Werte z_i von z der Körper K einem Teilkörper von $k(\varphi_1(z_1), \dots, \varphi_r(z_r))$ isomorph ist?

Der Satz von Kronecker-Weber entspricht dem Fall $k = \mathbf{Q}$, $\varphi_1(z) = e^z$ und der Jugendtraum von Kronecker dem Fall $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, $\varphi_1(z) = e^z$, $\varphi_2(z) = j(z)$ der Modulfunktion. Bis auf den heutigen Tag ist man bei der Lösung dieses wichtigen Problems nur wenig vorangekommen. Hecke benutzte 1913 die Hilbertschen Modulformen, um alle abelschen Erweiterungen von bestimmten biquadratischen Körpern zu erzeugen, und im Jahre 1955 versuchten Shimura, Taniyama und Weil, die Theorie der komplexen Multiplikation zu verallgemeinern, wobei eines der Ziele darin bestand, wenigstens eine teilweise Lösung des 12. Problems zu erhalten. Leider können wir hier keine Beschreibung dieser Arbeiten geben.

5.5.4.2. Die Grundlagen der Theorie der algebraischen Zahlen

Es scheint, daß Kronecker seit den Jahren 1855—1860 eine Theorie der algebraischen Zahlen besaß, welche der von Dedekind äquivalent war, sich aber auf eine andere Methode stützte, die mit der Adjunktion von Unbestimmten vorging.

Im Jahre 1882 publizierte er schließlich seine *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen*. Während der vorangegangenen dreißig Jahre hatte es Gerüchte um die Kroneckersche Theorie der algebraischen Zahlen gegeben, doch kannten anscheinend vor 1882 seine Zeitgenossen kaum die Details. Als er endlich seine Schrift gute elf Jahre nach dem XI. Supplement von Dedekind veröffentlichte, wurde man gewahr, daß Kroneckers Ziel viel höher gesteckt war als, wie er selbst sagte, die Fundamente der Theorie der algebraischen Zahlen zu legen. Es hat den Anschein, daß Kronecker die gesamte arithmetische Theorie der Zahlen und das Studium der algebraischen Geometrie auf die Theorie der Ringe $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_s]$ zurückführen wollte. (Die Untersuchung dieser Ringe gehört zu dem Gebiet, das heute kommutative Algebra genannt wird. Es sei darauf hingewiesen, daß Algebraiker wie Lasker, Macaulay, König und andere bei dem Versuch, einige der Kroneckerschen Ideen aus den *Grundzügen* klar herauszuarbeiten, zur Formulierung und zum Beweis der ersten Ergebnisse der modernen kommutativen Algebra geführt wurden. Obwohl die meisten Sätze der algebraischen Zahlentheorie und der algebraischen Geometrie formal in die Sprache der kommutativen Algebra umgeschrieben werden können, darf man nicht glauben, die Algebraiker hätten die Zahlentheoretiker und die Geometer ersetzt!)

Die Vorstellung, so umfassend ausgearbeitete mathematische Strukturen wie die Zahlentheorie und die algebraische Geometrie könnten ausgehend von den relativ einfachen Ringen $\mathbf{Z}[X_1, \dots, X_s]$ aufgebaut werden, offenbart einige der philosophischen Konzeptionen Kroneckers über die Grundlagen der Mathematik.

Sein Ausspruch „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk",(38) den er in der Überzeugung äußerte, alles übrige müsse explizit konstruiert werden, sobald $\boldsymbol{Z}$ gegeben ist, wird oft zitiert. Im Zusammenhang mit dem Aufbau der reellen Zahlen wird diese philosophische Konzeption Kroneckers in Kapitel 13 diskutiert; hier beschränken wir uns auf die Kroneckersche Konstruktion für die algebraischen Zahlkörper.

Wie wir in 5.5.3. gesehen haben, hat Dedekind in seinem XI. Supplement die algebraischen Zahlkörper stets als Teilkörper von $\boldsymbol{C}$ angesehen, die über $\boldsymbol{Q}$ durch eine Wurzel eines irreduziblen Polynoms $f(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten erzeugt werden. Von seinem Standpunkt der Grundlegung der Theorie der Zahlen sah Kronecker die Existenz von $\sqrt{-1}$ (also von $\boldsymbol{C}$) nicht als besser gesichert an als die Existenz einer Wurzel α von $f(x) = 0$. Um seiner nahezu fanatischen Abneigung gegen alles, was seiner Ansicht nach nicht konstruktiv ist, frönen zu können, griff er auf eine von Cauchy 1847 benutzte Idee zurück.(39) Cauchy wollte $\boldsymbol{C}$ von $\boldsymbol{R}$ ausgehend definieren und betrachtete die Polynome von $\boldsymbol{R}[x]$ modulo $(1 + x^2)$, d. h. den Körper $\boldsymbol{R}[x]/(1 + x^2)$. Zu jedem $f \in \boldsymbol{R}[x]$ gibt es $a, b \in \boldsymbol{R}$ derart, daß $f(x) \equiv a + bx \pmod{1 + x^2}$ ist; es ist leicht zu sehen, daß vermöge der Abbildung $x \mapsto \sqrt{-1}$ der entsprechende Körper zu $\boldsymbol{C}$ algebraisch isomorph ist. Kronecker nimmt ein beliebiges irreduzibles Polynom $f(x) \in \boldsymbol{Q}[x]$ und betrachtet $\boldsymbol{Q}[x]/(f(x))$. Dies ist ein Körper, der dem von Dedekind mit $\boldsymbol{Q}(\alpha)$ bezeichneten Teilkörper von $\boldsymbol{C}$ isomorph ist; dabei ist α eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

5.5.5. *Hilbert und die algebraischen Zahlen*

Im Zusammenhang mit den Arbeiten Kummers, Dedekinds und Kroneckers hatte sich die Theorie der algebraischen Zahlen zu einem Gegenstand entwickelt, der eigenständiges Interesse besaß und nicht mehr als bloßes Hilfsmittel zur Bearbeitung solcher Probleme wie der Fermatschen Vermutung angesehen wurde. Hinlänglich viele Forschungen waren ausgeführt worden, so daß das Studium von Klassen algebraischer Zahlen, der abelschen Körper oder der Galoisschen Körper „in natürlicher Weise" interessante Probleme darbieten konnte; die Zeit war gekommen, Rückschau zu halten und Bilanz zu ziehen. Derjenige Mathematiker, dem es zufiel, diese Bilanz zu ziehen und die späteren Untersuchungen vorzubereiten, war Hilbert.

Das Werk Hilberts über die algebraischen Zahlen, das im Verlauf von zehn Jahren erarbeitet wurde, ist Eckpfeiler und Ausgangspunkt der späteren Entwicklungen des zwanzigsten Jahrhunderts. Dieser Einfluß entstammt im wesentlichen drei Quellen. Die erste ist sein 1897 veröffentlicher *Zahlbericht*, die zweite bilden seine Arbeiten über die abelschen Relativ-Erweiterungen (zwischen 1899 und 1902 publiziert), und die dritte ist seine berühmte Liste von 23 Problemen, von denen sich acht direkt auf die Zahlentheorie beziehen. Die Arbeiten über die abelschen Relativkörper gehören de facto dem zwanzigsten Jahrhundert an, davon wird in 5.5.7. die Rede sein; hier beschränken wir unsere Erörterungen auf den *Zahlbericht* und die Hilbertschen Probleme.

5.5.5.1. Der Zahlbericht

Im Jahre 1893 hatte sich die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* an Hilbert und Minkowski gewandt mit der Bitte, einen Bericht über den damaligen Stand der Zahlentheorie zu schreiben. Minkowski sollte den der Theorie der rationalen Zahlen gewidmeten Teil und Hilbert den auf die algebraischen Zahlen bezüglichen Teil zusammenstellen. Leider war Minkowski durch seine Untersuchungen und die Vollendung seines Buches über die Geometrie der Zahlen sehr stark in Anspruch genommen, so daß er seinen Anteil nicht fertigstellen konnte. Doch haben seine sehr sorgfältigen kritischen Kommentare zum Manuskript und zu den Hilbertschen Beweisen dazu beigetragen, den *Zahlbericht* zu einem wahren Meisterwerk zu machen.

Der *Zahlbericht* [15] hat in gewissem Sinne eine ähnliche Rolle gespielt wie die *Disquisitiones Arithmeticae* von Gauß; er stellte die bekannten Resultate zusammen, ging mehr logisch als historisch auf ihre Entwicklung ein und lieferte den Zahlentheoretikern eine systematische Bezeichnungsweise und Sprache. In seinem Nachruf auf Hilbert sagte Hermann Weyl über den Zahlbericht:(40)

„Der großangelegte Bericht ‚Die Theorie der algebraischen Zahlkörper' von Hilbert erschien im *Jahresbericht* von 1896 (das Vorwort ist vom April 1897 datiert). Hilbert hat unendlich viel mehr geleistet, als sich die Mathematiker-Vereinigung erhoffen konnte. Der Bericht ist eine echte Perle der mathematischen Literatur. Selbst heute, nach fast fünfzig Jahren, ist das Studium dieses Buches für jeden, der Spezialist in der algebraischen Zahlentheorie werden möchte, unerläßlich. Hilbert füllte die Lücken durch zahlreiche eigene Untersuchungen aus und verwandelte so die Theorie in ein großartiges Gebilde aus einem Guß. Er hat die Beweise aller bekannten Sätze sorgfältig analysiert, ehe er sich für diejenigen entschied, deren ‚dabei zugrunde gelegten Prinzipien der Verallgemeinerung fähig und zur Weiterforschung brauchbar sind'. Bevor er aber eine solche Auswahl treffen konnte, mußte er ja diese ‚Weiterforschung' selbst betreiben. Der Wahl der Bezeichnungen galt seine besondere Sorgfalt; dies führte dazu, daß sie allgemein gebräuchlich wurden (einschließlich — was die amerikanischen Druckereien zur Verzweiflung brachte — der Frakturbuchstaben für die Ideale). Er hat die Kummersche Theorie, die sich auf sehr komplizierte Rechnungen gründete, beträchtlich vereinfacht und Begriffe eingeführt und zahlreiche Sätze bewiesen, welche heutzutage die Grundlagen der allgemeinen Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper ausmachen. Der wichtigste dieser Begriffe ist das Normenrestsymbol, der wichtigste Satz der berühmte ‚Satz 90' über die relativ-zyklischen Körper (Ges. Abhandl. Bd. 1, S. 149). Aus dem Vorwort, in dem er den allgemeinen Charakter der Zahlentheorie und insbesondere die in seinem Bericht berührten Themen beschreibt, möchte ich einen Absatz zitieren (Ges. Abhandlungen Bd. 1, S. 67):

‚Die Theorie der Zahlkörper ist wie ein Bauwerk von wunderbarer Schönheit und Harmonie; als der am reichsten ausgestattete Teil dieses Bauwerkes erscheint mir die Theorie der Abelschen und relativ-Abelschen Körper, die uns Kummer durch seine Arbeiten über die höheren Reziprozitätsgesetze und Kronecker durch seine Untersuchungen über die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen

erschlossen haben. Die tiefen Einblicke, welche die Arbeiten dieser beiden Mathematiker in die genannte Theorie gewähren, zeigen uns zugleich, daß in diesem Wissensgebiete eine Fülle der kostbarsten Schätze noch verborgen liegt, winkend als reicher Lohn dem Forscher, der den Wert solcher Schätze kennt und die Kunst, sie zu gewinnen, mit Liebe betreibt.'

Hilbert selbst war der Bergmann, der im Laufe der beiden folgenden Jahre die meisten dieser verborgenen Schätze zutage gefördert hat."

Wir können nur hinzufügen, daß der *Zahlbericht* auch heute noch, achtzig Jahre nach seiner Veröffentlichung, eine grundlegende Lektüre bleibt. Das moderne Äquivalent muß noch geschrieben werden.

Es steht außer Zweifel, daß hinter Hilberts zahlentheoretischem Denken das Bestreben steht, eine allgemeine Theorie von Relativ-Erweiterungen K/k aufzubauen, die etwa in der Lage wäre, die Art der Zerlegung der Primideale von k in K zu beschreiben. Dieses Problem hat auch heute keine vollständige Lösung gefunden. Wir erkennen jedoch im *Zahlbericht*, in welcher Weise Hilbert dieses Problem in Angriff nahm, sie spiegelt auf höchst lebendige Art sein taktisches und philosophisches Herangehen an die Mathematik wider, das er folgendermaßen (in seinem Pariser Vortrag) beschreibt:

„Eine noch wichtigere Rolle als das Verallgemeinern spielt — wie ich glaube — bei der Beschäftigung mit mathematischen Problemen das Spezialisieren. Vielleicht in den meisten Fällen, wo wir die Antwort auf eine Frage vergeblich suchen, liegt die Ursache des Mißlingens darin, daß wir einfachere und leichtere Probleme als das vorgelegte noch nicht oder noch unvollkommen erledigt haben. Es kommt dann alles darauf an, diese leichteren Probleme aufzufinden und ihre Lösung mit möglichst vollkommenen Hilfsmitteln und durch verallgemeinerungsfähige Begriffe zu bewerkstelligen. Diese Vorschrift ist einer der wichtigsten Hebel zur Überwindung mathematischer Schwierigkeiten, und es scheint mir, daß man sich dieses Hebels meistens — wenn auch unbewußt — bedient." (Vgl. *[99][1], S. 32.)

Wir werden nun den Inhalt des *Zahlberichts* etwas im Detail erörtern. Insbesondere wollen wir diejenigen Begriffe hervorheben, die für die anschließenden Entwicklungen wichtig gewesen sind. Der *Zahlbericht* ist in fünf Teile gegliedert: (I) Die allgemeine Dedekindsche Theorie der Zahlkörper, (II) Die Galoisschen Erweiterungen, (III) Die quadratischen Zahlkörper, (IV) Die Kreisteilungskörper, (V) Die Kummerschen Körper.

Wir haben nur wenig zum Teil I zu sagen, da er im wesentlichen alle veröffentlichten Dedekindschen Ergebnisse über die Theorie der algebraischen Zahlen enthält. Man muß jedoch sagen, daß Hilbert eine sehr elegante Darstellung der Dedekindschen Sätze gab und viele Beweise beträchtlich vereinfachte.[41]

Der Teil II ist einer Untersuchung der Galoisschen Erweiterungen von $\boldsymbol{Q}$ gewidmet; eine endliche Erweiterung $\boldsymbol{Q}(\alpha) = K$ ist *Galoissch*, wenn jede Konjugierte von α in K liegt. Die Annahme, ein Körper sei Galoissch, ist recht einschränkend; ist beispielsweise $f(x) = 0$ (mit irreduziblem f) eine kubische Gleichung mit einer einzigen reellen Wurzel, so kann der von der reellen Wurzel erzeugte Körper nicht die beiden komplexen Wurzeln enthalten, also nicht Galoissch sein. Tatsächlich kann man zeigen, daß eine kubische Erweiterung K von $\boldsymbol{Q}$ genau dann

Galoissch ist, wenn die Diskriminante D_K ein vollständiges Quadrat ist. Doch sind die quadratischen Zahlkörper und die von einer n-ten Einheitswurzel erzeugten Körper offenbar Galoissch. Der Vorteil, der sich bei den Galoisschen Erweiterungen ergibt, liegt darin, daß für sie die Sätze leichter zu beweisen sind als die entsprechenden Sätze für die allgemeinen Erweiterungen von $\boldsymbol{Q}$. Der Grund dafür ist der, daß man die Beziehung zwischen einem Galoiskörper und seiner Galoisgruppe (auf deren Definition wir nachstehend eingehen) sowie die Beziehungen zwischen den Teilkörpern eines Galoiskörpers und den Untergruppen der Galoisgruppe ausnutzen kann. Wir werden dies noch näher erläutern, gehen aber zunächst auf die Definition der Galoisgruppe ein.

Es sei $K = \boldsymbol{Q}(\alpha)$ eine Galoissche Erweiterung vom Grade n, und $\alpha = \alpha_0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ seien die n Konjugierten von α. Wir definieren n Automorphismen von K durch $\sigma_i\alpha = \alpha_i$ und $\sigma_i a = a$ für $a \in \boldsymbol{Q}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Die σ_i bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die sogenannte *Galoisgruppe von* K; wir bezeichnen sie hier mit Gal $(K/\boldsymbol{Q})$.

Wir betrachten folgende Tatsache als Beispiel für die in bestimmten Situationen durch die Existenz der Galoisgruppe hervorgebrachte Vereinfachung. Es sei eine Primzahl $p \in \boldsymbol{Q}$ gegeben; in K gilt dann $(p) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_g^{e_g}$. Unter Benutzung der Eigenschaften der Galoisgruppe kann man herleiten, daß $e_1 = \cdots = e_g$ und $f(\mathfrak{p}_i/(p)) = f(\mathfrak{p}_j/(p))$ gilt, und man kann sogar zeigen, daß $efg = n$ ist (n der Grad von $K/\boldsymbol{Q}$).

Hilbert benutzte bestimmte spezielle Untergruppen der Galoisgruppe, um die Verzweigung in den Galoisschen Erweiterungen eingehender zu untersuchen, als dies vor ihm geschehen war. Wir erinnern daran, daß Dedekind im Jahre 1881 den Satz veröffentlicht hatte, nach dem die einzigen verzweigten rationalen Primzahlen diejenigen sind, welche Teiler der Diskriminante von K sind, und daß überdies, wenn $p \mid D_K$ und $p \nmid e_i$ für alle i gilt, die Zahl D_K genau durch die Potenz $p^{f_1(e_1-1)+\cdots+f_r(e_r-1)}$ teilbar ist. Über den Fall, daß $p \mid e_i$ für ein bestimmtes i gilt, hat Dedekind niemals etwas publiziert (in moderner Terminologie sagt man, dies sei der Fall der *wilden* Verzweigungen). Eines der Hauptziele Hilberts bei der Untersuchung der Galoisschen Erweiterungen bestand darin, einen Satz aufzustellen, der dem Dedekindschen Ergebnis auch unter der Voraussetzung $p \mid e_i$ entspricht, und er erreichte sein Ziel für die Galoisschen Erweiterungen (es war Hensel, der 1897 das Problem für einen beliebigen Körper vollständig löste). Nach einer Arbeit von 1894 und unveröffentlichten Manuskripten zu urteilen, hatte Dedekind ebenfalls den Galoisschen Fall angegriffen, und zwar genau vom selben Standpunkt wie Hilbert. Man weiß nicht, ob Hilbert von diesen Untersuchungen Kenntnis hatte.[42] Wir werden nun die Hilbertsche Methode beschreiben, lassen aber wie immer, wenn der Gegenstand technisch ist, dem Leser die Freiheit, diesen Abschnitt zu übergehen.

5.5.5.2. Zerlegung, Trägheit und Verzweigung

Es sei $K/\boldsymbol{Q}$ eine Galoissche Erweiterung vom Grade n und mit der Galoisgruppe Gal $(K/\boldsymbol{Q})$. Wir definieren zunächst gewisse Untergruppen von Gal $(K/\boldsymbol{Q})$, deren

Bedeutung im weiteren Verlaufe unserer Darstellung hoffentlich klar werden wird. Wir nehmen an, p sei eine rationale Primzahl und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_K$, das (p) teilt. Wir definieren

$$Z(\mathfrak{p}) = \{\sigma \in \text{Gal}\,(K/\boldsymbol{Q}) \mid \sigma\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}$$

und bezeichnen mit $K_{Z(\mathfrak{p})}$ den Teilkörper von K, der aus den Elementen besteht, welche gegenüber den Automorphismen aus $Z(\mathfrak{p})$ invariant sind. Man kann zeigen, daß in $K_{Z(\mathfrak{p})}$ die Zerlegung $(p) = \mathfrak{p}_Z\mathfrak{a}$ gilt, wobei $\mathfrak{p}_Z = \mathfrak{p} \cap K_{Z(\mathfrak{p})}$ gilt und $\mathfrak{a}$ nicht durch $\mathfrak{p}_Z$ teilbar ist. Darüber hinaus kann man zeigen, daß $f(\mathfrak{p}_Z/(p)) = 1$ ist. Durch den Übergang von $\boldsymbol{Q}$ zu $K_{Z(\mathfrak{p})}$ zerlegen wir also die dem Ideal $\mathfrak{p}$ entsprechende Primzahl, erhalten aber keine Verzweigung und vergrößern ihren Restklassenkörper nicht. Weiterhin läßt sich $\mathfrak{p}_Z$ durch Übergang von $K_{Z(\mathfrak{p})}$ zu K nicht in ein Produkt von verschiedenen Primidealen zerlegen. Aus diesem Grunde wird $K_{Z(\mathfrak{p})}$ der *Zerlegungskörper* von $\mathfrak{p}$ genannt. Man kann außerdem zeigen, daß $[K_{Z(\mathfrak{p})}: \boldsymbol{Q}] = g$ ist, wobei $(p) = (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_g)^e$ in K gilt.

Der folgende Schritt von Hilbert bestand darin, die Stelle einzugrenzen, an der beim Übergang von $K_{Z(\mathfrak{p})}$ zu K eine Erweiterung des Restklassenkörpers stattfindet. Zu diesem Zweck betrachtete er die Gruppe

$$T(\mathfrak{p}) = \{\sigma \in \text{Gal}\,(K/\boldsymbol{Q}) \mid \sigma\alpha \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}} \text{ für alle } \alpha \in \mathfrak{o}_K\}\,.$$

Der entsprechende Teilkörper wird mit $K_{T(\mathfrak{p})}$ bezeichnet, und es ist leicht zu zeigen, daß beim Übergang von $K_{T(\mathfrak{p})}$ zu K keine Erweiterung des Restklassenkörpers des Primideals $\mathfrak{p}_T = \mathfrak{p} \cap K_{T(\mathfrak{p})}$ stattfindet. Daher stellt sich die gesamte Erweiterung des Restklassenkörpers während des Übergangs von $K_{Z(\mathfrak{p})}$ zu $K_{T(\mathfrak{p})}$ ein; folglich tritt die gesamte Verzweigung während des Übergangs von $K_{T(\mathfrak{p})}$ zu K auf.[43] Da $\mathfrak{p}_{Z(\mathfrak{p})}$ beim Übergang von $K_{Z(\mathfrak{p})}$ zu $K_{T(\mathfrak{p})}$ im wesentlichen unverändert bleibt, nennt man den Körper $K_{T(\mathfrak{p})}$ den *Trägheitskörper* und $T(\mathfrak{p})$ die *Trägheitsgruppe von* $\mathfrak{p}$. Man kann zeigen, daß $T(\mathfrak{p})$ ein Normalteiler von $Z(\mathfrak{p})$ der Ordnung e und daß $Z(\mathfrak{p})/T(\mathfrak{p})$ zyklisch von der Ordnung f ist, so daß $[K_{T(\mathfrak{p})}: K_{Z(\mathfrak{p})}] = f$ gilt. (Im Fall $e(\mathfrak{p}/(p)) = 1$ schließt man auf $T(\mathfrak{p}) = \{1\}$; daher ist $Z(\mathfrak{p})$ selbst zyklisch von der Ordnung f, eine Tatsache, die wir benötigen, wenn wir die Arbeiten von Frobenius in 5.5.8. diskutieren.)

Nun ist die Zeit gekommen, die Verzweigung, insbesondere die wilde Verzweigung, die beim Übergang von $K_{T(\mathfrak{p})}$ zu K auftritt, eingehend zu untersuchen. Mit diesem Ziel führte Hilbert die heute als die *höheren Verzweigungsgruppen* bezeichneten Gruppen

$$V_n(\mathfrak{p}) = \{\sigma \in \text{Gal}\,(K/\boldsymbol{Q}) \mid \sigma\alpha \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}^{n+1}} \text{ für alle } \alpha \in \mathfrak{o}_K\}$$

ein, wobei $n \geqq 1$ ist. Man schreibt oft $V_0(\mathfrak{p}) = T(\mathfrak{p})$ und $V_{-1}(\mathfrak{p}) = Z(\mathfrak{p})$. Hilbert hat bewiesen, daß $V_n = \{1\}$ für $n \geqq 1$ im Fall $p \nmid e$ gilt und daß V_0/V_1 im Fall $p \mid e$ zyklisch ist, während V_i/V_{i+1} abelsch ist. Für ein hinreichend großes i ist $V_i = \{1\}$, und die Folge der nichttrivialen Verzweigungsgruppen bricht ab. Hilbert hat folgenden Satz bewiesen:

Der Körper $K/\boldsymbol{Q}$ sei Galoissch über $\boldsymbol{Q}$ und besitze die Diskriminante D_K; wenn sich dann p in K verzweigt, hat die Potenz von p, welche D_K teilt, den Expo-

nenten

$$fg\{(v_0 - v_1) + 2(v_1 - v_2) + 3(v_2 - v_3) + \cdots\}.$$

(Dabei bezeichnet v_i die Ordnung der Gruppe V_i).

Die Beziehungen zwischen den verschiedenen Körpern, die wir soeben betrachtet haben, werden durch das Diagramm

$$\overbrace{Q \subset K_{Z(\mathfrak{p})}}^{\text{zyklisch}} \subset \overbrace{K_{T(\mathfrak{p})} \subset K_{V_1}}^{\text{zyklisch}} \subset \overbrace{K_{V_2}}^{\text{abelsch}} \subset \overbrace{\ldots}^{} \subset K_{V_i} \subset \ldots \subset K$$

Grad g — Grad f — Grad e

verdeutlicht, wobei K_{V_i} der Invariantenkörper von V_i ist. Mehr oder weniger als eine Überlegung a posteriori merkte Hilbert an, daß K eine auflösbare Erweiterung von $K_{Z(\mathfrak{p})}$ im Sinne der Gruppentheorie (vgl. 2.2.2.) ist und daß jedes Element von K über $K_{Z(\mathfrak{p})}$ einer Gleichung genügt, die „durch Radikale gelöst werden kann".

Außerdem wies Hilbert darauf hin, daß sich alle Definitionen der V_i und der K_{V_i} und die Sätze, die sie direkt betreffen, fast ohne Änderung auf den Fall einer relativ-Galoisschen Erweiterung K/k übertragen lassen, daß aber der Beweis des Hauptsatzes nicht mehr gültig ist.

5.5.5.3. Die übrigen Teile des Zahlberichts

Die übrigen Abschnitte des zweiten Teils des *Zahlberichts* sind einer Reihe von isolierten Ergebnissen über die Galoisschen Erweiterungen gewidmet. Beispielsweise untersuchte Hilbert eine Vermutung von Kronecker (die von Frobenius bewiesen wurde; siehe 5.5.8.) über die Dichte der rationalen Primzahlen, die in einer bestimmten Weise zerfallen. Er bewies auch den Satz, daß es in jeder Idealklasse ein Ideal gibt, dessen sämtliche Primfaktoren vom ersten Grad sind (d. h., für die $f = 1$ ist); dies ist eine erste Annäherung an den Satz von Dirichlet-Dedekind, den Weber beweisen wollte (vgl. 5.5.6.).[44] In den allerletzten Abschnitten von Teil II findet man auch den berühmten Hilbertschen „Satz 90", der sich in der kohomologischen Deutung der Klassenkörpertheorie als wichtig erwiesen hat. Dieser Satz 90 besagt: *Es sei K/k eine endliche relativ-Galoissche Erweiterung mit durch σ erzeugter zyklischer Galoisgruppe. Gilt $N_{K/k}(\alpha) = 1$ für ein $\alpha \in K$, so ist $\alpha = \beta/\sigma(\beta)$ für ein gewisses β in K.*

Die letzten drei Teile des *Zahlberichts* sind einem eingehenden Studium derjenigen Objekte gewidmet, die man als die drei einfachsten Beispiele von Galoisschen Körpern ansehen kann. Wir erinnern daran, daß Hilbert der Ansicht war, man könne ein allgemeines Problem erst dann formulieren und angreifen, wenn man mit möglichst vollkommenen Methoden einfachere und speziellere Fälle untersucht habe, in der Hoffnung, diese Methoden seien dann einer Verallgemeinerung zugänglich (aus diesem Grunde gab Hilbert oft einen „raffinierten" Beweis zugunsten eines anderen, der eher verallgemeinerungsfähig ist, auf). So befaßt sich der Teil III mit den quadratischen Erweiterungen, die ja Galoissch mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 sind. Im Teil IV beschäftigt er sich mit Kreis-

teilungskörpern, d.h. Körpern der Gestalt $\mathbf{Q}(\zeta)$, wobei ζ eine komplexe n-te Einheitswurzel ist. Diese Körper besitzen eine abelsche Galoisgruppe (wir erinnern daran, daß im allgemeinen diejenigen Galoisschen Körper, die eine abelsche Galoisgruppe besitzen, *abelsch*, und diejenigen, deren Gruppe zyklisch ist, *zyklisch* genannt werden).

Im Teil V schließlich untersuchte Hilbert die zyklischen Erweiterungen von Kreisteilungskörpern; wir werden sie weiter unten beschreiben.

Wie wir sehen werden, sind nur sehr wenige Sätze aus den letzten drei Teilen neu. Was neu ist, ist die Art und Weise, in der Hilbert sie darstellte.

Wie es Gauß fast ein Jahrhundert früher getan hatte, formulierte Hilbert bekannte Resultate durch Benutzung einer völlig neuen „Sprache", welche die Sätze bei weitem verständlicher macht. So sehen wir in der Hilbertschen Darstellung der quadratischen und der Kummerschen Körper zum erstenmal das „Normenrestsymbol", die „Produktformel" und den „Normensatz" auftauchen. Diese Begriffsbildungen haben während des ersten Viertels des zwanzigsten Jahrhunderts beträchtlichen Einfluß auf die Theorie der algebraischen Zahlen ausgeübt.

Die ersten Abschnitte des Teils III sind völlig naturgemäß der Theorie der quadratischen Körper in der Dedekindschen Darstellung gewidmet. Der übrige Teil von III bringt in der Sprache der Körpertheorie die gesamte Gaußsche Theorie der (binären) quadratischen Formen. (Es sei daran erinnert, daß schon Dedekind den Zusammenhang zwischen den Formenklassen und den eingeschränkten Idealklassen formell hergestellt hatte.) Der große Vorteil der Sprache der Körpertheorie, so wie sie Hilbert benutzte, besteht darin, daß die meisten Gaußschen Beweise, die, gelinde gesagt, einfach schrecklich waren, in erstaunlicher Weise vereinfacht werden (25 Seiten Text bei Hilbert entsprechen annähernd 250 bei Gauß).

In den letzten Abschnitten von Teil III findet man neben anderen Ergebnissen die auf Dedekind zurückgehende Darstellung der Dirichletschen Klassenzahlformel und schließlich eine kurze Untersuchung der Ordnungen einer quadratischen Erweiterung. An dieser Stelle ist es aber unser Hauptziel, die Hilbertsche Version der Gaußschen Arbeiten über die quadratischen Formen zu erläutern.

Wie wir gesehen haben, ist das wichtigste Ergebnis (und in gewisser Weise das bestmögliche) über die Darstellungen von ganzen Zahlen durch quadratische Formen mit dem Begriff des Geschlechts verknüpft. (Dies hat natürlich nichts mit dem Begriff des Geschlechts einer Kurve zu tun.) In 5.4.3. haben wir uns äußerst vage über Geschlechter von Formen ausgedrückt, denn es ist unmöglich, die Gaußsche Definition in einer auch nur einigermaßen einleuchtenden Weise zu formulieren. Dagegen bereitet die Hilbertsche Übersetzung der Gaußschen Definition in die Sprache der Körpertheorie überhaupt keine Schwierigkeiten; wir müssen zunächst jedoch das Normenrestsymbol für die quadratischen Körper definieren und mehrere seiner Eigenschaften angeben.

In 5.4. haben wir schon das Symbol $\left(\frac{a, b}{p}\right)$ erklärt, nämlich:

$$\left(\frac{a, b}{p}\right) = \begin{cases} +1, & \text{falls } a \equiv x^2 - by^2 \pmod{p^r} \text{ für jedes } r \geqq 1 \\ & \text{eine Lösung besitzt}, \\ -1 & \text{sonst;} \end{cases}$$

dabei ist p eine Primzahl, und a, b sind ganze rationale Zahlen. Ist b kein Quadrat, so kann man dieses Symbol in folgender Weise deuten:

$$\left(\frac{a,\,b}{p}\right) = \begin{cases} +1\,, & \text{wenn } a \equiv N(\alpha) \pmod{p^r} \text{ für jedes } r \geqq 1 \text{ lösbar ist}\,, \\ -1 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

wobei $N(\alpha)$ die Norm in $\boldsymbol{Q}(\sqrt{b})$ bezeichnet.

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß $\left(\frac{a,\,b}{p}\right) = 1$ ist, falls p kein Teiler von b ist, und

$$\left(\frac{a,\,b}{p}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)$$

gilt, falls $p \mid b$, wobei $\left(\frac{a}{b}\right)$ das Legendre-Symbol ist. Wir haben schon gesehen, wie wichtig das Legendre-Symbol und die quadratische Reziprozität bei der Untersuchung der binären quadratischen Formen sind; Hilbert hatte die tiefe Idee, das Legendre-Symbol durch das Normenrestsymbol zu ersetzen. Das Normenrestsymbol besitzt gewisse elementare Eigenschaften wie

$$\left(\frac{a,\,b}{p}\right) = \left(\frac{b,\,a}{p}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{a,\,bc}{p}\right) = \left(\frac{a,\,b}{p}\right)\left(\frac{a,\,c}{p}\right).$$

Um das Legendresche quadratische Reziprozitätsgesetz klar in den Termen des Normenrestsymbols auszudrücken, führte Hilbert eine *unendliche Primstelle* ein (die Primzahlen werden dann auch *endliche Stellen* genannt); wir setzen

$$\left(\frac{a,\,b}{\infty}\right) = \begin{cases} +1\,, & \text{wenn } a = x^2 - by^2 \text{ eine Lösung in } \boldsymbol{R} \text{ besitzt}, \\ -1 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und wenn wir $\left(\frac{a,\,b}{p}\right)$ schreiben, darf p endlich oder unendlich sein. (Tatsächlich hat Hilbert diese Bezeichnung erst mehrere Jahre nach der Veröffentlichung des *Zahlberichts* eingeführt; siehe 5.5.7. Wir benutzen sie hier jedoch aus Gründen der Bequemlichkeit.) In dieser Bezeichnung hat Hilbert die folgende *Produktformel* bewiesen, die für von null verschiedene $a, b \in \boldsymbol{Z}$ gilt:

$$\prod_{p,\,\infty} \left(\frac{a,\,b}{p}\right) = 1\,.$$

Wir werden nun eine Vorstellung davon geben, warum diese Formel dem klassischen Reziprozitätsgesetz äquivalent ist. Da das Normenrestsymbol multiplikativ ist, genügt es, den Fall zu betrachten, daß a, b die Werte -1, 1, 2 und q (q eine ungerade Primzahl) annehmen. Sind beispielsweise p und q beides ungerade Primzahlen, so ist, wie sich leicht verifizieren läßt, $\left(\frac{p,\,q}{r}\right) = 1$, mit eventueller Ausnahme von $r = 2, p, q$. Offenbar ist auch $\left(\frac{p,\,q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, und eine Rechnung zeigt,

daß $\left(\frac{p, q}{2}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$ ist. Somit reduziert sich die Produktformel auf

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{(p-1)(q-1)/4} = 1\,,$$

und das ist das klassische quadratische Reziprozitätsgesetz. Entsprechend kann man die anderen Fälle behandeln.

Jetzt erläutern wir, wie Hilbert die *Geschlechter* mit Hilfe des Normenrestsymbols definierte. Es sei $K = \mathbf{Q}(\sqrt{b})$ ein quadratischer Zahlkörper mit der Diskriminante D (also b oder $4b$; vgl. 5.5.3.9.), und es sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}_K$ ein ganzes Ideal. Es sei $n = N(\mathfrak{a})$, wobei $N(\mathfrak{a})$ die (ebenfalls in 5.5.3.9. definierte) Absolutnorm ist, $p_1, p_2, \ldots, p_r$ seien die Primteiler von D. Gilt nun $p \nmid D$, so ist $\left(\frac{n, D}{p}\right) = 1$; man kann also diese Faktoren weglassen. Die einzig interessanten Primzahlen sind demnach $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Wir betrachten die Symbole

$$\left(\frac{n, D}{p_1}\right), \ldots, \left(\frac{n, D}{p_r}\right);$$

diese Menge von Zahlen $+1$ oder -1 wird das *Charakterensystem des Ideals* $\mathfrak{a}$ genannt. Ist $\mathfrak{b}$ ein ganzes, zu $\mathfrak{a}$ im eingeschränkten (oder engeren) Sinne äquivalentes Ideal (vgl. 5.5.3.9.), so kann man zeigen, daß es das gleiche Charakterensystem besitzt. Somit kann man vom Charakterensystem einer engeren (eingeschränkten) Klasse sprechen. Man sagt, daß alle engeren Klassen, die das gleiche Charakterensystem haben, zum gleichen *Geschlecht* gehören. Diese Definition des Geschlechts entspricht genau der Definition des Geschlechts für die Klassen quadratischer Formen in dem Sinne, daß die einer gegebenen engeren Idealklasse zugeordneten Formen das gleiche Charakterensystem wie die Idealklasse besitzen (vgl. 5.4.). Hilbert hat den von Gauß stammenden wichtigen Satz, daß die Anzahl der Geschlechter genau gleich 2^{r-1} ist (den sogenannten *Existenzsatz für die Geschlechter*), nochmals bewiesen, doch ist, wie schon gesagt, der Hilbertsche Beweis weitaus einfacher als der Gaußsche.

Der als *Normensatz* bekannte Satz ist ebenfalls ein alter Satz, den Hilbert im Teil III neu formuliert hat. Wir geben ihn hier im Wortlaut an und kommen darauf in 5.5.7. zurück; dort erörtern wir seine Bedeutung sowie die Art und Weise, in der er zu verallgemeinern ist. Man kann den Normensatz in folgender Weise aussprechen:

Es sei b eine ganze Zahl, die kein Quadrat ist, und a eine von null verschiedene ganze Zahl. Gilt für jede endliche oder unendliche Stelle p die Beziehung $\left(\frac{a, b}{p}\right) = 1$, so besitzt die Gleichung $a = N(x)$ eine Lösung x im quadratischen Körper $\mathbf{Q}(\sqrt{b})$. Dies bedeutet, a ist genau dann eine globale Norm, wenn a überall eine lokale Norm ist.

Im *Zahlbericht* benutzte Hilbert den Normensatz beim Beweis des Existenzsatzes für die Geschlechter. Der Beweis des Normensatzes seinerseits hängt eng von der Produktformel ab.

Der vierte Teil des *Zahlberichts* ist der Kummerschen Theorie der Kreisteilungskörper gewidmet. Hilbert griff Dedekinds Darstellung der Bestimmung einer Basis für die ganzen Zahlen, der Diskriminante und der Zerlegung der rationalen Primzahlen auf, gab aber auch einen vereinfachten Beweis des Satzes von Kronecker-Weber (vgl. 5.5.4.1.). Ebenso untersuchte er die Kummersche Formel für die Idealklassenzahl einer Kreisteilungserweiterung und die Kummerschen Reziprozitätsgesetze für die l-ten Potenzen. Dies waren Verallgemeinerungen der Arbeiten von Gauß, Jacobi und Eisenstein. Diese sehr speziellen Sätze waren Versuche, das quadratische Reziprozitätsgesetz von Legendre auszudehnen, doch muß man zugeben, daß sie, vielleicht mit Ausnahme des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes (vgl. 5.3.3.), höchst gekünstelt wirken. Die Kummerschen Gesetze waren noch gekünstelter und sehr aufwendig;[45] die Mathematiker untersuchten jedoch die Reziprozitätsgesetze der l-ten Potenzreste bis zum Jahre 1926 weiter. Zu dieser Zeit fand dann Artin eine außerordentlich fruchtbare Verallgemeinerung der Reziprozität (siehe 5.5.10.).

Der fünfte und letzte Abschnitt beschäftigt sich hauptsächlich mit der Untersuchung der *Kummerschen Körper*, d. h. mit den Körpern von folgendem Typ. Es sei ζ_l eine komplexe l-te Einheitswurzel, wobei l eine Primzahl ist, und μ eine ganze Zahl aus $\boldsymbol{Q}(\zeta_l)$, die keine l-te Potenz in $\boldsymbol{Q}(\zeta_l)$ ist; man nennt dann die durch $X^l - \mu = 0$ definierte Erweiterung $K/\boldsymbol{Q}(\zeta_l)$ einen Kummerschen Körper (die Kummerschen Körper sind zyklische Erweiterungen der Kreisteilungskörper, und sie sind tatsächlich die einzigen zyklischen Erweiterungen (vom Grad l)).

Kummer hatte sich gegen 1859 mit der Untersuchung dieser Erweiterungen befaßt, um die Reziprozitätsgesetze für die l-ten Potenzreste, die er schon gefunden hatte, zu verbessern. Alle seine diesbezüglichen Arbeiten waren außerordentlich kompliziert und bieten hier für uns kein besonderes Interesse. Was interessant ist, ist die Tatsache, daß Hilbert dadurch zu einer Vereinfachung der Kummerschen Überlegungen gelangte, daß er eine Verallgemeinerung des Normenrestsymbols, die es ihm schon ermöglicht hatte, Gaußsche Arbeiten zu verdeutlichen, sowie eine Verallgemeinerung des Begriffs des Geschlechts in einem Körper benutzte. Da die Definition dieses neuen Normenrestsymbols technischer Natur ist, verzichten wir hier darauf, sie genau anzugeben; wir wollen nur andeuten, was es bedeutet. In 5.5.10. kommen wir darauf zurück.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_{\boldsymbol{Q}(\zeta_l)}$, so schreiben wir $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}^e}$ für $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}_{\boldsymbol{Q}(\zeta_l)}$, wenn $\alpha - \beta \in \mathfrak{p}^e$ gilt. Wir nehmen nun an, μ, ν seien ganze Zahlen aus $\boldsymbol{Q}(\zeta_l)$ derart, daß μ den Kummerschen Körper $\boldsymbol{Q}(\zeta_l, \sqrt[l]{\mu}) = K$ erzeugt; dann können wir (als erste Näherung) definieren:

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} +1\,, & \text{wenn } \nu \equiv N(x) \pmod{\mathfrak{p}^e} \text{ für jedes } e \geqq 1 \text{ lösbar ist}\,, \\ \text{einer bestimmten Einheitswurzel, die von } \nu \text{ abhängt, aber} \\ \qquad \text{von } +1 \text{ verschieden ist, in den übrigen Fällen}\,, \end{cases}$$

wobei $N(x)$ die Norm in K relativ zu $\boldsymbol{Q}(\zeta_l)$ ist. Hilbert hat bewiesen, daß $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist, wenn $\mathfrak{p}$ nicht die Relativ-Diskriminante von K in bezug auf $\boldsymbol{Q}(\zeta_l)$ teilt, so daß

wir für ν ein Charakterensystem in analoger Weise wie bei den quadratischen Körpern definieren können. Allerdings ist der Übergang von dieser Definition eines Charakterensystems zu den Idealklassen ein wenig aufwendig, so daß wir uns damit begnügen, das zu sagen, was sich in einfacher Weise sagen läßt. Wie im quadratischen Fall sagt man, daß zwei Idealklassen zum gleichen Geschlecht gehören, wenn sie das gleiche Charakterensystem haben.

Man kann das Wesentliche von Kummers Beiträgen zu den Reziprozitätsgesetzen für die l-ten Potenzreste durch die Produktformel

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

wiedergeben, deren Aufstellung Hilbert in dem Fall gelungen ist, daß l für den Grundkörper $\mathbf{Q}(\zeta_l)$ eine reguläre Primzahl ist, d. h., daß l kein Teiler der Klassenzahl von $\mathbf{Q}(\zeta_l)$ ist (vgl. 5.5.2.3.). Unter Benutzung der Produktformel hat dann Hilbert das Analogon des Gaußschen Existenzsatzes der Geschlechter aufgestellt, nämlich den Satz, daß jedes (nach der Produktformel) mögliche Charakterensystem, das ein Geschlecht darstellen kann, auch wirklich ein Geschlecht ist. Schließlich hat Hilbert mit Hilfe des Existenzsatzes das Analogon des Normensatzes bewiesen, stets unter der Voraussetzung, daß l eine reguläre Primzahl ist:

Gilt $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p}$, *so gibt es ein* $\alpha \in K$ *derart, daß* $\nu = N(\alpha)$ *ist, wobei* $N(\alpha)$ *die Relativnorm von* K *in bezug auf* $\mathbf{Q}(\zeta_l)$ *bezeichnet. Mit anderen Worten, ist* ν *für alle* $\mathfrak{p}$ *eine lokale Norm, so ist* ν *eine globale Norm.*

Wir werden in 5.5.6. und in 5.5.9. auf die große Bedeutung der Hilbertschen Ergebnisse zur Reziprozität und auf den Normensatz näher eingehen.[46]

5.5.5.4. Die Hilbertschen Probleme

Die Mathematik schreitet voran, wenn alte Probleme mit neuen Methoden gelöst werden, oder, wie Hilbert es sagt: „... wer, ohne ein bestimmtes Problem vor Augen zu haben, nach Methoden sucht, dessen Suchen ist meist vergeblich."[47] Unter diesem Gesichtswinkel legte Hilbert auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1900 in Paris 23 Probleme vor, deren Lösung neue Methoden erfordern würden, die dazu berufen wären, in der Mathematik „wichtig" zu sein.

Wir führen auf den nächsten fünf Seiten diejenigen Hilbertschen Probleme an, die sich auf die Zahlentheorie beziehen.[48]

„Wir haben bisher lediglich Fragen über die *Grundlagen* mathematischer Wissenszweige berücksichtigt. In der Tat ist die Beschäftigung mit den Grundlagen einer Wissenschaft von besonderem Reiz, und es wird die Prüfung dieser Grundlagen stets zu den vornehmsten Aufgaben des Forschers gehören. ‚Das Endziel', so hat Weierstraß einmal gesagt, ‚welches man stets im Auge behalten muß, besteht darin, daß man über die Fundamente der Wissenschaft ein sicheres Urteil zu erlangen suche ... Um überhaupt in die Wissenschaften einzudringen, ist freilich

die Beschäftigung mit einzelnen Problemen unerläßlich.‘ In der Tat bedarf es zur erfolgreichen Behandlung der Grundlagen einer Wissenschaft des eindringenden Verständnisses ihrer speziellen Theorien; nur der Baumeister ist imstande, die Fundamente für ein Gebäude sicher anzulegen, der die Bestimmung des Gebäudes selbst im einzelnen gründlich kennt. So wenden wir uns nunmehr zu speziellen Problemen einzelner Wissenszweige der Mathematik und berücksichtigen dabei zunächst die Arithmetik und die Algebra. . . .

7. Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen

Hermites arithmetische Sätze über die Exponentialfunktion und ihre Weiterführung durch Lindemann sind der Bewunderung aller mathematischen Generationen sicher. Aber zugleich erwächst uns die Aufgabe, auf dem betretenen Wege fortzuschreiten, wie dies bereits A. Hurwitz in zwei interessanten Abhandlungen ‚Über arithmetische Eigenschaften gewisser transzendenter Funktionen‘[1]) getan hat. Ich möchte daher eine Klasse von Problemen kennzeichnen, die meiner Meinung nach als die nächstliegenden hier in Angriff zu nehmen sind. Wenn wir von speziellen, in der Analysis wichtigen transzendenten Funktionen erkennen, daß sie für gewisse algebraische Argumente algebraische Werte annehmen, so erscheint uns diese Tatsache stets als besonders merkwürdig und der eingehenden Untersuchung würdig. Wir erwarten eben von transzendenten Funktionen, daß sie für algebraische Argumente im allgemeinen auch transzendente Werte annehmen, und obgleich uns wohlbekannt ist, daß es tatsächlich ganze transzendente Funktionen gibt, die für alle algebraischen Argumente sogar rationale Werte besitzen, so werden wir es doch für höchst wahrscheinlich halten, daß z.B. die Exponentialfunktion $e^{i\pi z}$, die offenbar für alle rationalen Argumente z stets algebraische Werte hat, andererseits für alle irrationalen algebraischen Argumente z stets transzendente Zahlenwerte annimmt. Wir können dieser Aussage auch eine geometrische Einkleidung geben, wie folgt. Wenn in einem gleichschenkligen Dreieck das Verhältnis von Basiswinkel zum Winkel an der Spitze algebraisch, aber nicht rational ist, so ist das Verhältnis zwischen Basis und Schenkel transzendent. Trotz der Einfachheit dieser Aussage und der Ähnlichkeit mit den von Hermite und Lindemann gelösten Problemen halte ich doch den Beweis dieses Satzes für äußerst schwierig, ebenso wie etwa den Nachweis dafür, daß die Potenz α^β für eine algebraische Basis α und einen algebraisch irrationalen Exponenten β, z.B. die Zahl $2^{\sqrt{2}}$ oder $e^\pi = i^{-2i}$, stets eine transzendente oder auch nur eine irrationale Zahl darstellt. Es ist gewiß, daß die Lösung dieser und ähnlicher Probleme uns zu ganz neuen Methoden und zu neuen Einblicken in das Wesen spezieller irrationaler und transzendenter Zahlen führen muß.

8. Primzahlenprobleme

In der Theorie der Verteilung der Primzahlen sind in neuerer Zeit durch Hadamard, de la Vallée-Poussin, v. Mangoldt und andere wesentliche Fortschritte gemacht

[1]) Math. Annalen *22* (1883), 211–229 = Math. Werke Bd. 1 (1932), S. 119–137, und Math. Annalen *32* (1888), 585–588 = Math. Werke Bd. 1, S. 260–265.

worden. Zur vollständigen Lösung der Probleme, die uns die Riemannsche Abhandlung ‚Über die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Größe' gestellt hat, ist es jedoch noch nötig, die Richtigkeit der äußerst wichtigen Behauptung von Riemann nachzuweisen, daß die Nullstellen der Funktion $\zeta(s)$, die durch die Reihe

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

dargestellt wird, sämtlich den reellen Bestandteil $\frac{1}{2}$ haben — wenn man von den bekannten negativ ganzzahligen Nullstellen absieht. Sobald dieser Nachweis gelungen ist, so würde die weitere Aufgabe darin bestehen, die Riemannsche unendliche Reihe für die Anzahl der Primzahlen genauer zu prüfen und insbesondere zu entscheiden, ob die Differenz zwischen der Anzahl der Primzahlen unterhalb einer Größe x und dem Integrallogarithmus von x in der Tat von nicht höherer als der $\frac{1}{2}$-ten Ordnung in x unendlich wird[1]), und ferner, ob dann die von den ersten komplexen Nullstellen der Funktion $\zeta(s)$ abhängenden Glieder der Riemannschen Formel wirklich die stellenweise Verdichtung der Primzahlen bedingen, welche man bei den Zählungen der Primzahlen bemerkt hat.

Nach einer erschöpfenden Diskussion der Riemannschen Primzahlformel wird man vielleicht dereinst in die Lage kommen, an die strenge Beantwortung des Problems von Goldbach[2]) zu gehen, ob jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen darstellbar ist, ferner an die bekannte Frage, ob es unendlich viele Primzahlpaare mit der Differenz 2 gibt oder gar an das allgemeinere Problem, ob die lineare diophantische Gleichung

$$ax + by + c = 0$$

mit gegebenen ganzzahligen paarweise teilerfremden Koeffizienten a, b, c stets in Primzahlen x, y lösbar ist.

Aber von nicht geringerem Interesse und vielleicht von noch größerer Tragweite erscheint mir die Aufgabe, die für die Verteilung der rationalen Primzahlen gewonnenen Resultate auf die Theorie der Verteilung der Primideale in einem gegebenen Zahlkörper k zu übertragen — eine Aufgabe, die auf das Studium der dem Zahlkörper k zugehörigen Funktion

$$\zeta_k(s) = \sum_j \frac{1}{n(j)^s}$$

hinausläuft, wo die Summe über alle Ideale j des gegebenen Zahlkörpers k zu erstrecken ist und $n(j)$ die Norm des Ideals j bedeutet.

Ich nenne noch drei speziellere Probleme aus der Zahlentheorie, nämlich eines über die Reziprozitätsgesetze, eines über diophantische Gleichungen und ein drittes aus dem Gebiete der quadratischen Formen.

---

[1]) Vgl. H. v. Koch, Math. Annalen 55 (1902), 441—464.

[2]) Vgl. P. Stäckel, *Über Goldbachs empirisches Theorem.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1896, S. 292—299, und E. Landau, *Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbachschen Satze.* Ebenda 1900, S. 177—186.

9. Beweis des allgemeinsten Reziprozitätsgesetzes im beliebigen Zahlkörper

Für einen beliebigen Zahlkörper soll das Reziprozitätsgesetz der l-ten Potenzreste bewiesen werden, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet, und ferner, wenn l eine Potenz von 2 oder eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist. Die Aufstellung des Gesetzes, sowie die wesentlichen Hilfsmittel zum Beweise desselben werden sich, wie ich glaube, ergeben, wenn man die von mir entwickelte Theorie des Körpers der l-ten Einheitswurzeln[1]) und meine Theorie[2]) des relativ-quadratischen Körpers in gehöriger Weise verallgemeinert.

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung

Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten sei vorgelegt: Man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.

11. Quadratische Formen mit beliebigen algebraischen Zahlenkoeffizienten

Unsere jetzige Kenntnis der Theorie der quadratischen Zahlkörper[3]) setzt uns in den Stand, die Theorie der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variablen und beliebigen algebraischen Zahlenkoeffizienten erfolgreich in Angriff zu nehmen. Damit gelangen wir insbesondere zu der interessanten Aufgabe, eine vorgelegte quadratische Gleichung beliebig vieler Variablen mit algebraischen Zahlenkoeffizienten in solchen ganzen oder gebrochenen Zahlen zu lösen, die in dem durch die Koeffizienten bestimmten algebraischen Rationalitätsbereiche gelegen sind.

Den Übergang zur Algebra und Funktionentheorie möge das folgende wichtige Problem bilden.

12. Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes über Abelsche Körper auf einen beliebigen algebraischen Rationalitätsbereich

Von Kronecker rührt der Satz her, daß jeder Abelsche Zahlkörper im Bereich der rationalen Zahlen durch Zusammensetzung aus Körpern von Einheitswurzeln entsteht. Dieser fundamentale Satz aus der Theorie der ganzzahligen Gleichungen enthält zwei Aussagen, nämlich

erstens wird durch denselben die Frage nach der Anzahl und Existenz derjenigen Gleichungen beantwortet, die einen vorgeschriebenen Grad, eine vorgeschriebene

[1]) Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung über die Theorie der algebraischen Zahlkörper Bd. 4 (1897) S. 175—546. Fünfter Teil = Ges. Abhandlungen Bd. I, Nr. 7.

[2]) Math. Annalen Bd. 51 (1898) S. 1—127 und Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1898, S. 370—399 = Ges. Abhandlungen Bd. I, Nr. 9 und 10. Vgl. ferner die demnächst erscheinende Inauguraldissertation von G. Rückle, Göttingen 1901. Diese Ges. Abhandlungen Bd. III, Verzeichnis der bei Hilbert angefertigten Dissertationen Nr. 13.

[3]) Hilbert; *Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper.* Math. Annalen Bd. 45 (1894) S. 309—340. *Über die Theorie der relativ-quadratischen Zahlkörper.* Jahresber. DMV 1899, S. 88—94, und Math. Annalen Bd. 51. *Über die Theorie der relativ Abelschen Körper.* Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1898 = Ges. Abhandlungen Bd. I, Nr. 5, 8, 9, 10.

Abelsche Gruppe und eine vorgeschriebene Diskriminante in bezug auf den Bereich der rationalen Zahlen besitzen und

zweitens wird behauptet, daß die Wurzeln solcher Gleichungen einen Bereich algebraischer Zahlen bilden, der genau mit demjenigen Bereiche übereinstimmt, den man erhält, wenn man in der Exponentialfunktion $e^{i\pi z}$ für das Argument z der Reihe nach alle rationalen Zahlwerte einträgt.

Die *erste* Aussage betrifft die Frage nach der Bestimmung gewisser algebraischer Zahlen durch ihre Gruppe und ihre Verzweigung; diese Frage entspricht also dem bekannten Problem der Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche.

Die *zweite* Aussage liefert die verlangten Zahlen durch ein transzendentes Mittel, nämlich durch die Exponentialfunktion $e^{i\pi z}$.

Da nächst dem Bereiche der rationalen Zahlen der Bereich der imaginären quadratischen Zahlkörper der einfachste ist, so entsteht die Aufgabe, den Kroneckerschen Satz auf diesen Fall auszudehnen. Kronecker selbst hat die Behauptung ausgesprochen, daß die Abelschen Gleichungen im Bereiche eines imaginären quadratischen Körpers durch die Transformationsgleichungen der elliptischen Funktionen mit singulären Moduln gegeben werden, so daß hiernach die elliptische Funktion die Rolle der Exponentialfunktion im vorigen Falle übernimmt. Der Beweis der Kroneckerschen Vermutung ist bisher nicht erbracht worden; doch glaube ich, daß derselbe auf Grund der von H. Weber[1]) entwickelten Theorie der komplexen Multiplikation unter Hinzuziehung der von mir aufgestellten rein arithmetischen Sätze über Klassenkörper ohne erhebliche Schwierigkeiten gelingen muß.

Von der höchsten Bedeutung endlich erscheint mir die Ausdehnung des Kroneckerschen Satzes auf den Fall, daß an Stelle des Bereiches der rationalen Zahlen oder des imaginären quadratischen Zahlbereiches ein beliebiger algebraischer Zahlkörper als Rationalitätsbereich zugrundegelegt wird; ich halte dieses Problem für eines der tiefgehendsten und weittragendsten Probleme der Zahlen- und Funktionentheorie.

Das Problem erweist sich von mannigfachen Seiten aus als zugänglich. Den wichtigsten Schlüssel zur Lösung des arithmetischen Teiles dieses Problemes erblicke ich in dem allgemeinen Reziprozitätsgesetze der l-ten Potenzreste innerhalb eines beliebig vorgelegten Zahlkörpers.

Was den funktionentheoretischen Teil des Problems betrifft, so wird sich der Forscher auf diesem so anziehenden Gebiete durch die merkwürdigen Analogien leiten lassen, die zwischen der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen und der Theorie der algebraischen Zahlen bemerkbar sind. Das Analogon zur Potenzreihenentwicklung einer algebraischen Funktion in der Theorie der algebraischen Zahlen hat Hensel[2]) aufgestellt und untersucht, und das Analogon

---

[1]) *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen.* Braunschweig 1891.

[2]) *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen.* Jahresber. DMV (1899) S. 83—88, sowie *Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen.* Math. Annalen Bd. 55 (1902), S. 301—336.

für den Riemann-Rochschen Satz hat Landsberg[1]) behandelt. Auch die Analogie zwischen dem Begriff des Geschlechts einer Riemannschen Fläche und dem Begriff der Klassenanzahl eines Zahlkörpers fällt ins Auge. Betrachten wir, um nur den einfachsten Fall zu berühren, eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p = 1$ und andererseits einen Zahlkörper von der Klassenanzahl $h = 2$, so entspricht dem Nachweise der Existenz eines überall endlichen Integrals auf der Riemannschen Fläche der Nachweis der Existenz einer ganzen Zahl α im Zahlkörper, die von solcher Art ist, daß die Zahl $\sqrt{\alpha}$ einen relativ unverzweigten quadratischen Körper in bezug auf den Grundkörper darstellt. In der Theorie der algebraischen Funktionen dient bekanntlich zum Nachweise jenes Riemannschen Existenzsatzes die Methode der Randwertaufgabe; auch in der Theorie der Zahlkörper bietet der Nachweis der Existenz jener Zahl α gerade die meiste Schwierigkeit. Dieser Nachweis gelingt mit wesentlicher Hilfe des Satzes, daß es im Zahlkörper stets Primideale mit vorgeschriebenen Restcharakteren gibt; die letztere Tatsache ist also das zahlentheoretische Analogon zum Randwertproblem.

Die Gleichung des Abelschen Theorems in der Theorie der algebraischen Funktionen sagt bekanntlich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aus, daß die betreffenden Punkte der Riemannschen Fläche die Nullstellen einer algebraischen zur Fläche gehörigen Funktion sind; das genaue Analogon des Abelschen Theorems ist in der Theorie des Zahlkörpers von der Klassenanzahl $h = 2$ die Gleichung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes[2])

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{j}}\right) = +1 ,$$

welche aussagt, daß das Ideal $\mathfrak{j}$ dann und nur dann ein Hauptideal des Zahlkörpers ist, wenn jene Zahl α in bezug auf das Ideal $\mathfrak{j}$ einen *positiven* quadratischen Restcharakter besitzt.

Wie wir sehen, treten in dem eben gekennzeichneten Problem die drei grundlegenden Disziplinen der Mathematik, nämlich Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie, in die innigste gegenseitige Berührung, und ich bin sicher, daß insbesondere die Theorie der analytischen Funktionen mehrerer Variablen eine wesentliche Bereicherung erfahren würde, wenn es gelänge, diejenigen Funktionen aufzufinden und zu diskutieren, die für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper die entsprechende Rolle spielen, wie die Exponentialfunktion für den Körper der rationalen Zahlen und die elliptische Modulfunktion für den imaginären quadratischen Zahlkörper" (Ende des Hilbert-Zitates).

Hilbert hoffte, daß die Lösung der angeführten Probleme zu wichtigen Fortschritten in der Mathematik führen würde, und diese Hoffnung hat sich zum großen Teil erfüllt. Wir werden das siebente Problem und seine anschließenden Entwicklungen in 5.7. untersuchen, während das achte Problem und seine Verzweigungen

[1]) Math. Annalen Bd. 50 (1898), S. 333–380 und S. 577–582.

[2]) Vgl. Hilbert, *Über die Theorie der relativ Abelschen Zahlkörper*. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1898 = Ges. Anhandlungen Bd. I, Nr. 10.

in 5.6., 5.5.8., und 5.11. zur Sprache kommen werden. Das neunte, das elfte und das zwölfte Problem, die sehr eng miteinander zusammenhängen, werden in 5.5.6. und 5.5.8. diskutiert werden. Das zehnte Problem, das als letztes gelöst wurde, wird in 5.9. betrachtet.[49]

5.5.6. *Weber und die Klassenkörpertheorie*

Eines der wichtigen Probleme in der Theorie der algebraischen Zahlen während der letzten Jahre des neunzehnten Jahrhunderts betrifft die Verteilung der Primideale eines Körpers von algebraischen Zahlen auf die Idealklassen. Mit Hilfe der Techniken von Dirichlet hatte Dedekind schon gezeigt, daß die ganzen Ideale gleichmäßig auf die Idealklassen verteilt sind. Bis 1897 wußte man jedoch nicht, ob jede Idealklasse unendlich viele Primideale enthält.

In den Jahren 1896 und 1897 publizierte Weber eine Reihe von drei Arbeiten unter dem Titel *Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern* [44], in denen er das Problem der Verteilung der Primideale in einem Zahlkörper in Angriff nahm. Mit den Methoden von Dirichlet und Dedekind zeigte er, daß man unter gewissen Voraussetzungen beweisen kann, daß jede Idealklasse unendlich viele Primideale *vom ersten Grad* besitzt. Wie wir sehen werden, hat Weber tatsächlich ein etwas allgemeineres Ergebnis bewiesen, selbstverständlich unter der Annahme, daß seine Voraussetzungen erfüllt sind.

Die Wichtigkeit der Weberschen Arbeiten liegt nicht so sehr in dem Satz, den er beweisen wollte, als vielmehr in den Annahmen, die er machen mußte, um ihn zu beweisen. Wir werden sie nachstehend diskutieren; im Augenblick genügt es zu sagen, daß er zu einer gegebenen endlichen Erweiterung $k/\boldsymbol{Q}$ die Existenz einer Erweiterung K/k mit speziellen Eigenschaften voraussetzte. Es ist aber bemerkenswert, daß Hilbert einige Jahre später, von einem ganz anderen Problem ausgehend, ebenfalls darauf geführt wurde, die Existenz von Erweiterungen von k anzunehmen, die ähnliche Eigenschaften wie die von Weber postulierten besitzen (vgl. 5.5.7.). Der Beweis der Existenz von Klassenkörpern und die sich auf diese Körper beziehenden Probleme waren eines der Hauptthemen der Theorie der algebraischen Zahlen während der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts.

Wir werden nun einige Definitionen einführen und dann die Voraussetzungen von Weber formulieren. Dabei bitten wir um Nachsicht, daß sie gekünstelt erscheinen können, hoffen aber, daß der Leser später, wenn wir die speziellen Beispiele, die Weber kannte, eingehend untersuchen, erkennen wird, daß die Definitionen nicht unbegründet sind. Um jedoch genau zu verstehen, wozu Weber diese Annahmen nötig hatte, müßte man seinen Beweis studieren, was wir allerdings hier nicht tun können (für weitere Information lese man 5.5.8.).

Es sei k eine Erweiterung von $\boldsymbol{Q}$ vom Grade n und $\mathfrak{m}$ ein ganzes Ideal von $\mathfrak{o}_k$. (Wir schließen den Fall $\mathfrak{m} = (1)$ nicht aus.) Ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{m_r}$, so bezeichnen wir mit $S(\mathfrak{m})$ die Menge der in $\mathfrak{m}$ vorkommenden Primideale (hier also $S(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$). Es sei $A_{\mathfrak{m}}$ die Gruppe derjenigen gebrochenen Ideale von k, die von allen *nicht* in $S(\mathfrak{m})$ *enthaltenen* Primidealen von $\mathfrak{o}_k$ erzeugt wird. Schließlich sei

$H_{\mathfrak{m}}$ eine aus Hauptidealen bestehende Untergruppe von $A_{\mathfrak{m}}$ derart, daß $(A_{\mathfrak{m}}:H_{\mathfrak{m}}) = h' < \infty$ ist. Weber machte nun folgende Annahmen:

1. Für die Klassen von $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ gilt das Analogon des Satzes von Dirichlet-Dedekind, d. h., die ganzen Ideale von $\mathfrak{o}_k$ sind gleichmäßig auf die Klassen von $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ verteilt. Bezeichnet $T(t, \mathfrak{a}, \mathcal{K})$ bei gegebenem ganzen Ideal $\mathfrak{a} \subset A_{\mathfrak{m}}$ die Anzahl der ganzen Ideale in einer beliebigen Klasse $\mathcal{K}$, die durch $\mathfrak{a}$ teilbar sind und deren Norm kleiner als t ist, so bedeutet dies, daß die Beziehung

$$T(t, \mathfrak{a}, \mathcal{K}) = \frac{gt}{N(\mathfrak{a})} + O(t^{1-(1/n)})$$

gilt, wobei g eine nicht von $\mathfrak{a}$ abhängende Konstante ist.

2. Es gibt eine Erweiterung K von k derart, daß $[K:k] = \nu$ mit $\nu \leq h'$ gilt und welche die Eigenschaft hat, daß alle Primideale *ersten Grades* von $H_{\mathfrak{m}}$ in K vollständig zerfallen. Man nennt einen solchen Körper einen *Klassenkörper* für k.

Unter diesen Annahmen hat Weber mit den analytischen Methoden von Dirichlet den folgenden Satz bewiesen:

In jeder Klasse von $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ gibt es unendlich viele Primideale vom Grad 1.

Wir merken an, daß $A_{\mathfrak{m}}$ im Spezialfall $\mathfrak{m} = (1)$ die Menge aller gebrochenen Ideale von k ist, so daß man für $H_{\mathfrak{m}}$ die Gruppe der gebrochenen Hauptideale nehmen kann. In diesem Fall ist also $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ die Gruppe der Idealklassen von $\mathfrak{o}_k$.

Weber kannte einen Fall, in dem seine Annahmen erfüllt waren, nämlich $k = \boldsymbol{Q}$, und eine Klasse von Körpern, nämlich die imaginär-quadratischen Zahlkörper, für welche begründete Hoffnung bestand, daß sie erfüllt seien.

5.5.6.1. Klassenkörper über $\boldsymbol{Q}$

Da dies das einzige Beispiel ist, von dem Weber wußte, daß seine Annahmen erfüllt waren, gehen wir näher darauf ein.

Wir wählen eine ganze Zahl m in $\boldsymbol{Z}$ und setzen $\mathfrak{m} = (m)$. Dann besteht $A_{\mathfrak{m}}$ aus allen gebrochenen Idealen (a/b) mit $(a, m) = (b, m) = 1$. Für $H_{\mathfrak{m}}$ wählen wir die von allen ganzen Idealen (h) mit $h \equiv 1 \pmod m$ erzeugte Untergruppe von $A_{\mathfrak{m}}$. Zunächst stellen wir fest, daß $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ endlich ist. Wegen $(b, m) = 1$ gibt es ein b' mit $bb' \equiv 1 \pmod m$, woraus

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\frac{b'}{b'}\right) = (ab')\left(\frac{1}{1+mr}\right)$$

für ein bestimmtes r folgt. Mit anderen Worten, es ist $(a/b) = (ab')(h)$ mit (h) in $H_{\mathfrak{m}}$; demnach ist (a/b) äquivalent zu einem ganzen Ideal (c). Ist darüber hinaus $c \not\equiv d \pmod m$, so repräsentieren (c) und (d) verschiedene Klassen modulo $H_{\mathfrak{m}}$; daher gibt es genau $\varphi(m)$ solcher Klassen.

Nun zeigen wir, daß die erste Annahme erfüllt ist. Wir bezeichnen mit $T(t, A, c)$ die Anzahl der durch A teilbaren ganzen Ideale in der Klasse von (c), deren Normen kleiner als t sind. Das Ideal (x) liegt genau dann in der Klasse von (c), wenn $x \equiv c \pmod m$ gilt, und (x) ist genau dann durch A teilbar, wenn $x \equiv 0 \pmod A$ ist.

Wegen $(A, m) = 1$ folgt aus einem wohlbekannten Satz der elementaren Zahlentheorie (dem „Chinesischen Restklassensatz"), daß die Kongruenzen $x \equiv c \pmod m$ und $x \equiv 0 \pmod A$ eine modulo mA eindeutig bestimmte gemeinsame Lösung besitzen, etwa x_0. Wir haben somit die y mit $y \leqq t$ und $y = x_0 + mAv$ abzuzählen. Wegen $y \leqq t$ ist $x_0 + mAv \leqq t$ oder $mAv \leqq t - x_0$ oder auch $v \leqq (t - x_0)/mA$, und die Anzahl jener y ist genau gleich $\left[\frac{t - x_0}{mA}\right] = \frac{t}{mA} + O(1)$. Daher ist die erste Annahme erfüllt.

Weiter wußte man zur Zeit Webers, daß im Kreisteilungskörper $\boldsymbol{Q}(\zeta_m)$, wobei ζ_m eine primitive Einheitswurzel ist, von den Primidealen (p) genau diejenigen vollständig zerfallen, für welche $p \equiv 1 \pmod m$ gilt. Wegen $[\boldsymbol{Q}(\zeta_m):\boldsymbol{Q}] = \varphi(m)$ folgt daraus, daß $K = \boldsymbol{Q}(\zeta_m)$ ein Klassenkörper für $\boldsymbol{Q}$ ist; daher ist auch die zweite Annahme Webers erfüllt.

In diesem Spezialfall ist der Satz von Weber nichts anderes als der Satz von Dirichlet, der besagt, daß es, falls $(m, a) = 1$ ist, in der arithmetischen Progression $\{mk + a; k = 1, 2, \ldots\}$ unendlich viele Primzahlen gibt.

Wir nehmen nun an, $H'_{\mathfrak{m}}$ sei eine andere Untergruppe von $A_{\mathfrak{m}}$ mit $H_{\mathfrak{m}} \subset H'_{\mathfrak{m}}$. Weber hat gezeigt, daß der zu $A_{\mathfrak{m}}/H'_{\mathfrak{m}}$ assoziierte Klassenkörper existiert, durch $H'_{\mathfrak{m}}$ eindeutig bestimmt ist und ein Teilkörper von $\boldsymbol{Q}(\zeta_m)$, etwa K', ist. Insbesondere ist $K'/\boldsymbol{Q}$ eine abelsche Erweiterung und $\operatorname{Gal}(K'/\boldsymbol{Q}) \cong A_{\mathfrak{m}}/H'_{\mathfrak{m}}$. Weiter kann man für jeden Teilkörper von $\boldsymbol{Q}(\zeta_m)$ immer auf eindeutige Weise ein passendes $H'_{\mathfrak{m}}$ bestimmen derart, daß der fragliche Teilkörper der Klassenkörper für $A_{\mathfrak{m}}/H'_{\mathfrak{m}}$ ist.

Übrigens hatte Weber um 1886 die berühmte Kroneckersche Vermutung bewiesen, wonach jede abelsche Erweiterung des rationalen Zahlkörpers Teilkörper eines Kreisteilungskörpers ist[60] (vgl. 5.5.4.1.). Nach dem Satz von Kronecker-Weber kann man bei gegebener abelscher Erweiterung L von $\boldsymbol{Q}$ stets eine ganze Zahl $n \in \boldsymbol{Z}$ und eine Untergruppe H'_n von A_n finden derart, daß L der Klassenkörper für A_n/H'_n ist. (Wir haben hier A_n anstelle von $A_{(n)}$ und H'_n anstelle von $H'_{(n)}$ geschrieben; dies werden wir auch weiterhin tun.)

Eine abelsche Erweiterung von $L/\boldsymbol{Q}$ kann in verschiedene Kreisteilungskörper eingebettet werden. Angenommen, es sei

$$L \subset \boldsymbol{Q}(\zeta_{m_1}) \quad \text{und} \quad L \subset \boldsymbol{Q}(\zeta_{m_2});$$

L entspricht also zugleich einer Gruppe $H'_{m_1} \subset A_{m_1}$ und einer Gruppe $H'_{m_2} \subset A_{m_2}$. Es sei $m = (m_1, m_2)$ der größte gemeinsame Teiler von m_1 und m_2; es ist nicht schwer nachzuweisen, daß $\boldsymbol{Q}(\zeta_{m_1}) \cap \boldsymbol{Q}(\zeta_{m_2}) = \boldsymbol{Q}(\zeta_m)$ gilt. Somit ist L Teilmenge von $\boldsymbol{Q}(\zeta_m)$, entspricht demnach einer Gruppe $H'_m \subset A_m$. Das kleinste m, für welches L Teilmenge von $\boldsymbol{Q}(\zeta_m)$ ist, ist der größte gemeinsame Teiler aller überhaupt in Frage kommenden Zahlen m, und dieses spezielle m heißt der *Führer des Körpers L*. (Wir bemerken nebenbei, daß sich eine rationale Primzahl p genau dann in L verzweigt, wenn $p \mid m$ gilt.)

Wir nehmen nun an, daß die Gruppen $H'_{n_1} \subset A_{n_1}$ und $H'_{n_2} \subset A_{n_2}$ den gleichen Klassenkörper L bestimmen; dann ist

$$A_{n_1}/H'_{n_1} \cong A_{n_2}/H'_{n_2}.$$

Ist n das kleinste gemeinsame Vielfache von n_1 und n_2, so kann man überdies zeigen, daß

$$H'_{n_1} \cap A_n = H'_{n_2} \cap A_n$$

gilt. Aus diesem Grund bezeichnete Weber eine Menge $\{A_{n_1}/H'_{n_1}, \ldots\}$ von Faktorgruppen, für welche

$$H'_{n_i} \cap A_{n_{ij}} = H'_{n_j} \cap A_{n_{ij}}$$

gilt, wobei n_{ij} das kleinste gemeinsame Vielfache von n_i und n_j ist, als *Kongruenzklassengruppe* von $\boldsymbol{Q}$. Oftmals ist es für die Formulierung von Sätzen bequem, einen speziellen Repräsentanten der Menge zu wählen, gewöhnlich A_m/H'_m, worin m der Führer ist, und ihn eine Kongruenzklassengruppe zu nennen. Jede Kongruenzklassengruppe legt auf eindeutige Weise eine abelsche Erweiterung $L/\boldsymbol{Q}$ fest, die ihr Klassenkörper ist, und umgekehrt legt jede abelsche Erweiterung $L/\boldsymbol{Q}$ eine Kongruenzklassengruppe fest.

Wir werden nachstehend die Art und Weise diskutieren, in der Weber die Idee der Kongruenzklassengruppe auf andere Körper als $\boldsymbol{Q}$ übertragen hat, zunächst aber ein weiteres Beispiel von Klassenkörpern anführen.

5.5.6.2. Klassenkörper über $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-d})$

In dem Falle, daß k eine imaginär-quadratische Erweiterung von $\boldsymbol{Q}$ ist, besaß Weber einige Vorstellungen über das Verhalten der Klassenkörper, obwohl es ihm nicht gelang, alle seine Vermutungen tatsächlich zu beweisen. Ehe wir die Klassenkörper in diesem Fall beschreiben werden, schalten wir einen Exkurs über bestimmte, mit den elliptischen Funktionen verknüpfte Kroneckersche Arbeiten ein. Mit Rücksicht darauf, daß diese Begriffe im eigentlichen Sinne nicht zur Zahlentheorie gehören, werden wir uns sehr kurz fassen; für weitere Details verweisen wir den Leser auf Kapitel 7 und auf den *Cours d'Analyse* von C. Jordan, Bd. 2, S. 594 ff.

Es sei $F(z)$ eine elliptische Funktion. Bekanntlich läßt sich $F(mz)$ für jede ganze Zahl $m \in \boldsymbol{Z}$ als rationale Funktion von $F(z)$ ausdrücken. In diesem Zusammenhang erhebt sich die wichtige Frage: „Für welche weiteren Werte von m ist $F(mz)$ eine rationale Funktion von $F(z)$?" Im allgemeinen gibt es keinen solchen Wert, doch lassen bestimmte elliptische Funktionen nichtganzzahlige m als Multiplikatoren zu. Wenn sich diese Situation darbietet, sagen wir, F gestatte eine *komplexe Multiplikation* (vgl. 7.1.13.).

Sind ω_1 und ω_2 die Perioden von F, so bezeichnen wir mit τ denjenigen der beiden Quotienten ω_1/ω_2 bzw. ω_2/ω_1, dessen Imaginärteil positiv ist. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß $F(z)$ genau dann eine komplexe Multiplikation gestattet, wenn τ dem Ring der ganzen Zahlen in einem imaginär-quadratischen Zahlkörper K angehört.[61] Wir nehmen an, für eine gegebene elliptische Funktion F liege τ in K; dann bildet die Menge der komplexen Multiplikatoren eine *Ordnung* in K. (Wir erinnern an folgendes: Ist $(1, \alpha)$ eine $\boldsymbol{Z}$-Basis für die ganzen Zahlen in K, so ist eine Ordnung von K ein Unterring, der ein durch $(1, f\alpha)$ mit $f \in \boldsymbol{Z}$ erzeugter $\boldsymbol{Z}$-Modul

ist. Die (positiv gewählte) ganze Zahl f wird der Führer der Ordnung genannt.) Ist, umgekehrt, eine Ordnung von K gegeben, so gibt es elliptische Funktionen, welche diese Ordnung als Menge der komplexen Multiplikatoren besitzen.

Genauso, wie man die Idealklassen in $\mathfrak{o}_K$ definiert, kann man die Idealklassen in einer gegebenen Ordnung definieren, und ebenso wie für $\mathfrak{o}_K$ gibt es nur endlich viele Klassen, etwa $\mathscr{C}_1(f), \ldots, \mathscr{C}_{h(f)}(f)$. Besitzen zwei elliptische Funktionen F, G die gleiche Ordnung als Menge der komplexen Multiplikatoren und (ω_1, ω_2) bzw. (ν_1, ν_2) als Fundamentalperioden, so darf man (ω_1, ω_2), (ν_1, ν_2) als Ideale bezüglich der gegebenen Ordnung ansehen, und man kann zeigen, daß $F(z)$ und $G(z)$ genau dann isomorphe elliptische Kurven definieren, wenn die Ideale (ω_1, ω_2) und (ν_1, ν_2) zur gleichen Idealklasse in der Ordnung gehören.[(52)] Somit legt jede Idealklasse der Ordnung eine Äquivalenzklasse von elliptischen Kurven fest, die als Invariante die Zahl

$$2^6 3^3 \cdot \frac{g_2^3}{\Delta} \quad \text{mit} \quad \Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

besitzen (g_2, g_3 sind in Kapitel 7 definiert). Mit anderen Worten, jeder Idealklasse $\mathscr{C}_i(f)$ ordnen wir eine komplexe Zahl $j(\mathscr{C}_i(f))$ zu. Diese Zahlen werden die *singulären Moduln* genannt.

Kronecker hat gezeigt, daß die $j(\mathscr{C}_1(f)), \ldots, j(\mathscr{C}_{h(f)}(f))$ sämtlich voneinander verschieden und die Nullstellen eines normierten irreduziblen Polynoms mit (ganzen algebraischen) Koeffizienten in K, also ganze algebraische Zahlen sind. Weiter hat er gezeigt, daß der Körper $K(j(\mathscr{C}_i(f))) = \mathscr{L}_f$ nicht von i abhängt und daß die Erweiterung $\mathscr{L}_f/K$ abelsch vom Grad $h(f)$ ist. Tatsächlich hat Kronecker, wie wir in 5.5.4.1. gesehen haben, die folgende Vermutung formuliert:

Jede abelsche Erweiterung von K ist Teilkörper eines Körpers, der sich ergibt, wenn zu K gewisse der möglichen singulären Moduln und gewisse Einheitswurzeln adjungiert werden.

Diese Behauptung ist als *Kroneckers Jugendtraum* bekannt.[(53)] Wie wir sehen werden, konnte später gezeigt werden, daß diese Vermutung keineswegs völlig korrekt war, aber doch der Wahrheit nahekam. Weber hat 1908 einen Teilbeweis des Jugendtraums gegeben, während der korrekte Satz im Jahre 1920 von Takagi aufgestellt wurde.

Weber war vermutlich auf Grund zahlreicher numerischer Beispiele zu dem Schluß gekommen, daß analog zum Fall der Kreisteilungskörper die Klassenkörper über imaginär-quadratischen Körpern K genau die durch den Jugendtraum beschriebenen abelschen Erweiterungen sind. Insbesondere war er davon überzeugt, der Klassenkörper, welcher der ganzen Idealklassengruppe von K entspricht, sei der Körper $K(j(\mathscr{C}))$, wobei $\mathscr{C}$ eine Idealklasse in der Hauptordnung von K ist. Diese Aussage trifft zu; sie wurde 1911 von Fueter bewiesen.

5.5.6.3. Sätze und Vermutungen von Weber

Ausgehend von dem, was er über die Kreisteilungskörper und die imaginär-quadratischen Zahlkörper wußte, hat Weber eine Reihe von Definitionen, Vermu-

tungen und Sätzen über die Klassenkörper formuliert. Zunächst übertrug er auf jeden algebraischen Zahlkörper k den Begriff der Kongruenzklassengruppe, den wir im Zusammenhang mit den Klassenkörpern von $\mathbf{Q}$ eingeführt haben. Eine genaue Definition bringen wir in 5.5.10. Für den Augenblick genügt es zu sagen, daß man einfach die ganzen Zahlen n_i durch ganze Ideale $\mathfrak{n}_i$ von $\mathfrak{o}_k$ ersetzt, um zu einer Kongruenzklassengruppe $\{A/H\}$ von k zu gelangen.

Es spricht viel dafür, daß Weber von der Gültigkeit des allgemeinen *Existenzsatzes* überzeugt war:

Jeder Kongruenzklassengruppe $\{A/H\}$ von k entspricht ein Klassenkörper K/k.

Diesen Satz vermochte Weber zwar niemals zu beweisen; unter Annahme der Existenz von K hat er jedoch die folgenden Sätze bewiesen:

1. $[K:k] = (A_\mathfrak{n}:H_\mathfrak{n})$.

2. *K/k ist stets eine Galoissche Erweiterung.*

3. *Ist K der zu $H_\mathfrak{n} \subset A_\mathfrak{n}$ assoziierte Klassenkörper und K' der zu $H'_\mathfrak{n} \subset A_\mathfrak{n}$ assoziierte Klassenkörper, so ist genau dann $K = K'$, wenn $H_\mathfrak{n} = H'_\mathfrak{n}$ gilt (Eindeutigkeitssatz).*

4. *Gilt in den obigen Bezeichnungen $A_\mathfrak{n} \supset H'_\mathfrak{n} \supset H_\mathfrak{n}$, so besteht in diesem und nur in diesem Fall die Inklusion $K' \subset K$.*

Höchstwahrscheinlich vermutete Weber, daß die Klassenkörper stets abelsche Erweiterungen von k sind und daß tatsächlich

$$\mathrm{Gal}\,(K/k) \cong A_\mathfrak{n}/H_\mathfrak{n}$$

gilt. Die Art und Weise, in der er zu dem Schluß kam, daß jede abelsche Erweiterung von k Klassenkörper für eine bestimmte Kongruenzklassengruppe ist, ist ein wenig schwieriger zu beschreiben. Um eine solche Zuordnung zu haben, muß man die Definition der Kongruenzklassengruppe abwandeln. Wir werden in 5.5.8. und in 5.5.10. den geschichtlichen Weg nachzeichnen, auf dem Webers Vermutungen schließlich bewiesen wurden.

5.5.7. *Hilbert und die Klassenkörpertheorie*

Zu der Zeit, als Weber an der Verallgemeinerung des Satzes von Dirichlet-Dedekind arbeitete, beschäftigte sich Hilbert seinerseits mit einem ganz anderen Problem, das eigentümlicherweise zur Konstruktion gewisser Klassenkörper führen sollte.

Hilbert versuchte, die Theorie der quadratischen Formen und der quadratischen Zahlkörper zu verallgemeinern. Wie wir in 5.5.5. gesehen haben, hatte Hilbert im *Zahlbericht* schon die quadratischen Erweiterungen von $\mathbf{Q}$ sorgfältig untersucht, und dies läuft natürlich darauf hinaus, die binären quadratischen Formen zu untersuchen. Im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts hatten Mathematiker wie Hermite, Smith und Minkowski (vgl. 5.10.) zahlreiche Resultate über quadratische Formen in mehr als zwei Variablen entdeckt. Insbesondere hatte Minkowski, ein enger Freund Hilberts, den folgenden bemerkenswerten Satz bewiesen:

Es sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine homogene quadratische Form mit rationalen Koeffizienten. Besitzt die Kongruenz $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^r}$ für jede ganze Primzahl p und jede ganze positive Zahl r eine nichttriviale Lösung und überdies die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine nichttriviale reelle Lösung, so hat die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine nichttriviale rationale Lösung.

Hilbert wollte dieses Ergebnis auf quadratische Formen mit Koeffizienten in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper ausdehnen, und tatsächlich stellte er diese Frage als sein 11. Problem. Er selbst hat zwischen 1897 und 1902 eine Reihe von Arbeiten publiziert, in denen er das Analogon des Minkowskischen Satzes für die ternären quadratischen Formen mit Koeffizienten in einem Körper k bewies, wobei k die Klassenzahl 1 oder 2 hat und es nicht mehr als zwei Klassen im engeren Sinne gibt oder k total-imaginär mit ungerader Klassenzahl ist. Wir gehen nicht auf die technischen Notwendigkeiten ein, welche Hilbert zwangen, diese Bedingungen anzunehmen. Allerdings werden wir bestimmte Aspekte des Hilbertschen Beweises diskutieren, weil Hilbert im Laufe des Beweises des Satzes von Minkowski eine Methode entdeckte, um bestimmte spezielle Klassenkörper zu konstruieren.

Die meisten Hauptsätze sind in Hilberts Arbeiten in Termen einer Verallgemeinerung des Normenrestsymbols formuliert, die wir nun definieren werden. Es sei $k/\boldsymbol{Q}$ vom Grad n; wir wählen μ, ν in $\mathfrak{o}_k$ so, daß μ kein Quadrat in $\mathfrak{o}_k$ ist. Dann definieren wir für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ (das man auch als *endliche Stelle* von k bezeichnet) von $\mathfrak{o}_k$

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1\,, & \textit{falls } \nu \equiv x^2 - \mu y^2 \pmod{\mathfrak{p}^e} \textit{ für jedes } e \geqq 1 \textit{ eine Lösung} \\ & \textit{besitzt}\,, \\ -1 & \textit{sonst}\,. \end{cases}$$

Es gibt eine zusätzliche Komplikation, die sich zumindest implizit auch im Fall $k = \boldsymbol{Q}$ darbietet. Angenommen, k habe r reelle Einbettungen $k^{(1)}, \ldots, k^{(r)}$; dann ordnen wir jeder solchen Einbettung einSymbol $\mathfrak{p}_{\infty_i}$, eine sogenannte *reelle unendliche Primstelle*, zu und setzen

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}_{\infty_i}}\right) = \begin{cases} 1\,, & \textit{falls } \nu^{(i)} = x^2 - \mu^{(i)} y^2 \textit{ eine Lösung in } \boldsymbol{R} \textit{ besitzt}\,, \\ -1 & \textit{sonst}\,. \end{cases}$$

(Hilbert war der erste, der den formellen Begriff der unendlichen Stelle einführte, welcher sich für spätere Untersuchungen als sehr nützlich herausgestellt hat.)

Wie im Fall $k = \boldsymbol{Q}$ kann man das Normenrestsymbol deuten als

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1\,, & \textit{falls } \nu \equiv N(\alpha) \pmod{\mathfrak{p}^e} \textit{ für jedes } e \geqq 1 \textit{ in } k(\sqrt{\mu}) \textit{ lösbar} \\ & \textit{ist}\,, \\ -1 & \textit{sonst}\,. \end{cases}$$

Die Sätze, die beim Beweis des Spezialfalls des Minkowskischen Satzes eine entscheidende Rolle spielen, sind die Analoga der *Produktformel* und des Existenz-

satzes für die Geschlechter:

$$\prod_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_\infty} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

und:

Wenn wir den endlichen und den unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ *von* k *die Zahl* -1 *geradzahlig (endlich) oft zuordnen, so gibt es Zahlen* μ, ν *in* $\mathfrak{o}_k$ *derart, daß das Symbol* $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ *die gegebenen Werte annimmt.*

Ausgehend von diesen beiden Ergebnissen (und ihren Beweisen) kann man ohne allzu große Schwierigkeiten den *Normensatz* beweisen:

Gilt für jede endliche oder unendliche Primstelle $\mathfrak{p}$ *die Beziehung* $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, *so besitzt die Gleichung* $\nu = N(x)$ *im Körper* $k(\sqrt{\mu})$ *eine Lösung* x.

Mit anderen Worten, ν ist genau dann eine *globale Norm* in $k(\sqrt{\mu})$, wenn ν stets eine *lokale Norm* ist. Es ist leicht zu sehen, daß der Normensatz dem Satz von Minkowski für die ternären quadratischen Formen gleichwertig ist.

Bei seinen Bemühungen um die Beweise der Produktformel und des Existenzsatzes der Geschlechter wurde Hilbert gewahr, daß er eine sehr komplizierte Konstruktion brauchte. Dies ist der Grund dafür, daß es ihm nur gelang, diese Ergebnisse für den Fall zu erzielen, daß k die Klassenzahl 1 oder 2 hat und es nicht mehr als zwei Klassen (im engeren Sinne) gibt oder daß k total-imaginär mit ungerader Klassenzahl ist. In diesen Fällen konstruierte Hilbert tatsächlich eine Erweiterung K von k, die als ein Klassenkörper definiert und die ein Spezialfall der Weberschen Klassenkörper ist. Die Hilbertsche Definition eines Klassenkörpers lautet:

Man sagt, eine relativ-Galoissche Erweiterung K *von* k *sei ein Klassenkörper für* k, *wenn genau die Primideale vom Grade* 1 *in der Hauptklasse nur durch Primideale vom Grad* 1 *teilbar sind.*

Hilbert formulierte einige Vermutungen über diese Klassenkörper, die oft als *absolute* Klassenkörper bezeichnet werden:

1. Für jeden algebraischen Zahlkörper k von endlichem Grad gibt es einen und nur einen Klassenkörper K.
2. K ist eine relativ-Abelsche Erweiterung von k, und es ist

$$\text{Gal}\,(K/k) \cong \text{Idealklassengruppe von } k\,.$$

3. K ist vollständig unverzweigt über k, mit anderen Worten, keine Stelle von k verzweigt sich in K (dies impliziert, daß die Relativ-Differente gleich (1) ist).
4. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k. Ist f die kleinste natürliche Zahl derart, daß $\mathfrak{p}^f$ ein Hauptideal in k ist, dann besitzen alle Primfaktoren von $\mathfrak{p}$ in K den Relativgrad f.
5. Alle Ideale von $\mathfrak{o}_k$ werden in $\mathfrak{o}_K$ zu Hauptidealen.

Bis in die heutige Zeit besteht sogar eine gewisse Unklarheit über den Sinn des Terminus „Hauptklasse" in der obigen Definition. Es sei A die Gruppe aller ge-

brochenen Ideale von $\mathfrak{o}_k$ und H die Gruppe aller Hauptideale von $\mathfrak{o}_k$. Dann enthält die Hauptklasse von A/H alle Hauptideale. Andererseits bezeichnen wir mit H^+ die Untergruppe von H, die durch diejenigen Ideale (α), $\alpha \in \mathfrak{o}_k$, erzeugt wird, für welche alle reellen Konjugierten von α positiv sind (man sagt dann, α sei *total positiv*). Hilbert konstruierte den zu A/H^+, der sogenannten *Gruppe der Klassen im engeren Sinne*, assoziierten Klassenkörper. (Auf die Gruppe der Klassen im engeren Sinne für die quadratischen Erweiterungen von Q sind wir schon in 5.5.3.9. gestoßen, als wir die umkehrbar eindeutige Entsprechung zwischen den Klassen binärer quadratischer Formen und den Idealklassen erörtert haben.)

Wenn wir den zu A/H^+ assoziierten Klassenkörper betrachten, erweist sich die Vermutung 3 als nicht sinnvoll; denn alle reellen unendlichen Primstellen von k verzweigen sich, allerdings in einem Sinn, der uns hier nicht interessiert. Man muß also die Vermutung 3 in folgender Weise abwandeln:

Kein Primideal verzweigt sich in K/k.

Der Begriff der unendlichen Primstelle wurde erst später völlig geklärt. Hilbert und seine Zeitgenossen konnten nur eine verschwommene Vorstellung von Gebilden haben, die sich bisweilen als anscheinend unverzweigte Erweiterungen darboten.

Heute benutzt man gewöhnlich die Termini „absoluter Klassenkörper" oder „Hilbertscher Klassenkörper", um den zu A/H assoziierten Klassenkörper zu kennzeichnen und weniger oft den zu A/H^+ assoziierten, doch wird dies nicht immer so gehandhabt.

In den Fällen, in denen es Hilbert gelang, Klassenkörper zu konstruieren, konnte er in gleichem Maße seine Vermutungen 1 bis 5 verifizieren. Es war ein Schüler von Hilbert, Furtwängler, der 1907 die Existenz des absoluten Klassenkörpers für jeden Grundkörper bewies und feststellte, daß die ersten vier Vermutungen Hilberts zutreffen. Der Beweis der fünften Vermutung war weitaus schwieriger, als es sich Hilbert vorgestellt hatte, und wurde erst 1930, ausgehend von Artinschen Ideen, von Furtwängler gefunden.

Allerdings hat die fünfte Vermutung zu einem berühmten Problem geführt, das erstmals von Furtwängler formuliert wurde; es wird als *Hilbertsches Klassenkörperturmproblem* bezeichnet und besteht in folgendem:

Es sei k_1 der Hilbertsche Klassenkörper von k; nach der fünften Vermutung wird jedes Ideal von $\mathfrak{o}_k$ zu einem Hauptideal in $\mathfrak{o}_{k_1}$. Es kann jedoch in $\mathfrak{o}_{k_1}$ Ideale geben, die keine Hauptideale sind. Wenn dies der Fall ist, sei k_2 der Hilbertsche Klassenkörper von k_1, usw. Durch Fortsetzung dieser Konstruktion erhalten wir einen Körperturm

$$k \subset k_1 \subset k_2 \subset \cdots,$$

in dem jeder Körper der Hilbertsche Klassenkörper seines Vorgängers ist. Diese Folge wird *Hilbertscher Klassenkörperturm* von k genannt. Das Problem besteht nun darin, festzustellen, ob der Klassenkörperturm endlich ist; in diesem Fall kann man k in einen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1 einbetten.

Erst 1964 wurde dieses Problem durch Golod und Šafarevič gelöst, und zwar in negativem Sinne. Sie haben gezeigt, daß der Turm unendlich sein kann. Als Korollar ihrer Arbeit erhält man den folgenden Satz:

Zu jeder ganzen Zahl $n > 1$ gibt es unendlich viele algebraische Zahlkörper vom Grad n, welche einen unendlichen Klassenkörperturm besitzen, zum Beispiel die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{(q_1 \cdots q_N)})$ mit $N \geqq n^2 + 2n + 1$ und paarweise verschiedenen rationalen Primzahlen q_i.

5.5.8. *Analytische Theorie der algebraischen Zahlen*

Nach den am Ende des neunzehnten Jahrhunderts erzielten Erfolgen in der analytischen Primzahltheorie (vgl. 5.6.) war es nur natürlich, daß es zu einem Wiederaufleben des Interesses an der Verteilung der Primideale kam. Wir beginnen den vorliegenden Abschnitt mit einer eingehenden Erörterung der Hauptaspekte dieses Problems, nämlich mit dem Satz von Landau, dem Analogon des Primzahlsatzes, mit den Ergebnissen von Weber und Hecke über die Verteilung der Primideale in den Idealklassen und schließlich mit den Arbeiten von Frobenius und Čebotarev über die „Dichtigkeits"probleme.

Ein anderer Typ von Problemen, welcher analytische Techniken erfordert, bezieht sich auf das Studium der Klassenzahl algebraischer Zahlkörper. Darauf gehen wir am Schluß dieses Abschnitts ein.

5.5.8.1. Der Primidealsatz

In Analogie mit dem Primzahlsatz (vgl. 5.6.) war es ganz natürlich, daß man versuchte, eine asymptotische Formel für die Anzahl $\pi_K(x)$ der Primideale von $\mathfrak{o}_K$ zu finden, deren Norm unterhalb x liegt. Man hat vermutet, es sei $\pi_K(x) \sim (x/\log x)$; diese Aussage nennt man den *Primidealsatz.*

Es ist nicht verwunderlich, daß die ersten Beweisansätze in Verbindung mit dem Primzahlsatz durchgeführt wurden. Insbesondere stellten 1892 Poincaré und Phragmén voneinander unabhängig ein Analogon des Satzes von Tschebyscheff für bestimmte Zahlkörper auf; für diese Zahlkörper zeigten sie, daß *es Konstanten c_1 und c_2 gibt derart, daß für $x > x_0(K)$ die Ungleichungen*

$$0 < \frac{c_1 x}{\log x} \leqq \pi_K(x) \leqq \frac{c_2 x}{\log x}$$

gelten.

Dieser Satz wurde 1903 von Landau für jeden Zahlkörper K bewiesen.

Im Jahre 1896 war der Primzahlsatz bewiesen worden, und ähnliche Verfahren erlaubten den Beweis des Primidealsatzes.

Der Beweis des Primzahlsatzes stützt sich ganz wesentlich auf die Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$; daher war es ganz natürlich anzunehmen, der Beweis des Primidealsatzes hänge von den analytischen Eigenschaften der Dedekindschen Zetafunktion

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

ab; dabei erstreckt sich die Summation über alle ganzen Ideale von $\mathfrak{o}_K$. Doch wußte man 1896 noch nicht, ob $\zeta_K(s)$ eine analytische Fortsetzung in die gesamte Ebene zuläßt. Erst 1903 hat Landau gezeigt, daß sich diese Funktion in die Halbebene $\mathrm{Re}\, s > 1 - (1/[K:\boldsymbol{Q}])$ analytisch fortsetzen läßt, und Verfahren erarbeitet, die ihm den Beweis des Primidealsatzes erlaubten. Diese neuen Methoden, welche beim Beweis des Primzahlsatzes selbst Vereinfachungen lieferten, haben in der späteren Entwicklung der analytischen Zahlentheorie eine wichtige Rolle gespielt, doch sind sie zu technisch, als daß wir sie hier bringen könnten.

5.5.8.2. Die Verteilungssätze von Weber und Hecke

Wie wir in 5.5.6. gesehen haben, hat Weber zu zeigen versucht, daß jede Idealklasse unendlich viele Primideale ersten Grades enthält. Seine Grundidee besteht darin, sich so eng wie möglich an Dirichlets Beweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen in der arithmetischen Progression $\{an + b\}$ mit $(a, b) = 1$ (vgl. 5.4.4.2. und 5.6.) zu halten. Er betrachtete die Gruppe der *Charaktere* (vgl. 3.4.2.) der endlichen kommutativen Gruppe $A_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m}$ (Bezeichnungen wie in 5.5.6.), und ganz wie Dirichlet seine Charaktere ausgedehnt hatte, um sie als auf $\boldsymbol{Z}$ definierte Funktionen anzusehen, definierte Weber $\chi(\mathfrak{a})$ für jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}$ auf folgende Weise. Angenommen, es sei $\mathfrak{a} \in \mathcal{A} \in A_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m}$; dann ist $\chi(\mathfrak{a}) = \chi(\mathcal{A})$. Haben $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ einen gemeinsamen Faktor, so ist $\chi(\mathfrak{a}) = 0$. Mit dieser Konvention hat Weber eine zu dem Körper k assoziierte Funktion definiert, indem er

$$L(s, \chi, k) = \sum_{(\mathfrak{a}) \neq (0)} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

setzte, wobei über alle ganzen Ideale von $\mathfrak{o}_k$ summiert wird und sich das Produkt über alle Primideale von $\mathfrak{o}_k$ erstreckt. In sehr engem Anschluß an Dirichlet (vgl. 5.6.) kam Weber schnell zu dem Ausdruck

$$\frac{1}{[A_\mathfrak{m}:H_\mathfrak{m}]} \sum_{\chi} \bar{\chi}(\mathcal{A}) \log L(s, \chi, k) = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathcal{A} \\ \mathfrak{p} \text{ vom Grade } 1}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + O(1)$$

für $s > 1$, wobei $\mathcal{A}$ die Klasse von $A_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m}$ ist, in welcher man unendlich viele Primideale vom Grad 1 finden möchte. Wiederum im Anschluß an Dirichlet setzen wir

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(\mathcal{A}) \log L(s, \chi, k) = \bar{\chi}_0(\mathcal{A}) \log L(s, \chi_0, k) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(\mathrm{A}) \log L(s, \chi, k)\,,$$

wobei χ_0 derjenige Charakter ist, der $A_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m}$ auf 1 abbildet, d. h. der Hauptcharakter. Gelingt es jetzt, für $\chi \neq \chi_0$ zu beweisen, daß $L(1, \chi, k) \neq 0$ ist, so hat man die asymptotische Formel

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathcal{A} \\ \mathfrak{p} \text{ vom Grad } 1}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} \sim \frac{1}{[A_\mathfrak{m}:H_\mathfrak{m}]} \log L(s, \chi_0, k)$$

und erhält schließlich

$$L(s, \chi_0, k) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{m}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right) = \zeta_K(s) \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{m}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right).$$

Da das Produkt endlich ist, können wir $L(s, \chi_0, k) = c(s)\,\zeta_K(s)$ schreiben, wobei $c(s)$ eine von $s = 0$ bis $s = 1$ beschränkte Funktion ist. Dedekind hatte gezeigt, daß $\zeta_K(s)$ für $s = 1$ einen einfachen Pol hat; daher folgt aus der Voraussetzung $L(1, \chi, k) \neq 0$ für $\chi \neq \chi_0$ die Beziehung

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathcal{A} \\ \mathfrak{p}\text{ vom Grad } 1}} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} \sim c_1 \log\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

mit einer von null verschiedenen Konstanten c_1. Da $\log\left(1/(s-1)\right)$ für $s \to 1$ gegen unendlich strebt, ergibt sich hieraus, daß es unendlich viele Primideale vom Grad 1 in jeder Klasse gibt.

Als sich Dirichlet vor das Problem gestellt sah, zu zeigen, daß $L(1, \chi) \neq 0$ ist, löste er es, indem er $L(1, \chi)$ mit der Klassenzahl eines quadratischen Zahlkörpers verknüpfte (vgl. 5.4.4.2.). Webers Methode zum Nachweis von $L(1, \chi, k) \neq 0$ stützt sich auf eine von Dedekind stammende Umformulierung dieser Dirichletschen Methode. Dedekind hatte viele der Schwierigkeiten, die bei Kummer und Dirichlet in der Berechnung der Klassenzahl auftauchten, durch sehr geschickte Benutzung seiner Zetafunktion überwunden. Wir werden nun schildern, wie Weber vorgegangen ist, obwohl dies nicht genau die Dedekindsche Methode war.

Wir setzen zunächst voraus, es sei $k = \mathbf{Q}$, und A_p/H_p sei für eine Primzahl p wie in unserer Diskussion der Klassenkörper über $\mathbf{Q}$ in 5.5.6. gewählt. Um eine sich auf die Klassenzahl eines Kreisteilungskörpers $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ beziehende Formel anzugeben, hatte Dedekind die Beziehung

$$\prod_{\chi} L(s, \chi) = \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}$$

bewiesen, wobei das Produkt über alle Nicht-Hauptcharaktere von A_p/H_p zu nehmen ist. Für $s \to 1$ kürzen sich die einfachen Pole von ζ_K und ζ gegeneinander, und man erhält, wie Dedekind zeigte, die gesuchte Klassenzahlformel. Die entsprechende Formel für den quadratischen Fall ist

$$L(s, \chi) = \frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)},$$

wobei $K = \mathbf{Q}(\sqrt{D})$ (D die Diskriminante) und χ der einzige Nicht-Hauptcharakter von A_D/H_D ist; dabei wird H_D von allen (m) erzeugt, für welche die Gleichung $x^2 \equiv m \pmod{D}$ eine Lösung besitzt. Man kann zeigen, daß $\chi(n) = \left(\frac{D}{n}\right)$ (Legendre-Symbol) ist.

Weber wollte diese Idee durch Angabe einer Erweiterung K/k verallgemeinern, für welche

$$\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)} = \prod_{\chi} L(s, \chi, k) \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{q_i^s}\right)$$

ist, worin sich das erste Produkt über alle Nicht-Hauptcharaktere von $A_\mathfrak{m}/H_\mathfrak{m}$ erstreckt. Das zweite, endliche Produkt ist ohne Bedeutung und verschwindet für $s \geqq 1$ nicht; es tritt auf, weil Weber nicht mit den „primitiven" Charakteren ar-

beitete; von diesem Verfahren wird in 5.5.10. die Rede sein. Wenn man eine solche Formel besitzt, dann heben sich für $s \to 1$ die Pole von ζ_K und ζ_k gegeneinander weg, und ihr Quotient strebt gegen eine von null verschiedene Größe. Aus der Existenz einer solchen Erweiterung K würde also unmittelbar $L(1, \chi, k) \neq 0$ folgen. Bei der Aufstellung hinreichender Bedingungen für das Bestehen der obigen Gleichung wurde Weber auf seine Definition des Klassenkörpers geführt. Wie wir in 5.5.10 sehen werden, wurde die Existenz aller benötigten Klassenkörper erst 1920 durch Takagi gesichert. Allerdings gelang Hecke 1917 durch eine andere Methode der Nachweis der Beziehung $L(1, \chi, k) \neq 0$.

Die Heckesche Methode zum Beweis von $L(1, \chi, k) \neq 0$ ist von charakteristischem Scharfsinn. Hecke ging von dem Produkt

$$\zeta_k(s) \prod_{\chi} L(s, \chi, k)$$

aus, und es gelang ihm ohne übermäßige Schwierigkeiten zu zeigen, daß für $\operatorname{Re} s > 1$ die Beziehung

$$\zeta_k(s) \prod_{\chi} L(s, \chi, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

gilt, wobei die a_n ganze nichtnegative Zahlen mit $a_n > 0$ für unendlich viele n sind. Hecke hat nicht versucht, diese Reihe mit einem bestimmten $\zeta_K(s)$ zu identifizieren; er benutzte vielmehr folgenden auf Landau zurückgehenden Satz:

Die Funktion $F(s)$ sei in der Halbebene $\operatorname{Re} s > \alpha$ *durch eine Reihe* $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *mit reellen nichtnegativen a_n darstellbar. Besitzt $F(s)$ eine analytische Fortsetzung längs der reellen Achse bis zu $s = \beta < \alpha$, so ist $F(s)$ in der Halbebene* $\operatorname{Re} s > \beta$ *holomorph und wird durch die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *dargestellt.*

Die Idee von Hecke besteht darin, zuerst zu zeigen, daß für $\chi \neq \chi_0$ die Funktion $L(s, \chi, k)$ überall holomorph ist und daß $\zeta_k(s)$ mit Ausnahme eines einfachen Pols in $s = 1$ holomorph ist. Wenn also eine der Funktionen $L(s, \chi, k)$ in $s = 1$ eine Nullstelle hätte, würde sich diese Nullstelle gegen den einfachen Pol von $\zeta_k(s)$ wegheben, und das Produkt $\zeta_k(s) \prod_{\chi} L(s, \chi, k)$ wäre in der ganzen Ebene holomorph. Dann würde nach dem Landauschen Satz die Reihe $\sum_n a_n/n^s$ überall konvergieren, und daraus ergäbe sich für $s < 0$, daß nur endlich viele a_n von null verschieden wären, was einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet. Folglich verschwindet keines der $L(s, \chi, k)$ für $s = 1$.

Der Beweis der Tatsache, daß die Funktionen $\zeta_k(s)$ und $L(s, \chi, k)$ die geforderten Eigenschaften der analytischen Fortsetzung haben, ist eine bemerkenswerte Leistung scharfsinniger Analyse; er ist dem von Riemann gegebenen Beweis für die Funktionalgleichung von $\zeta(s)$ (vgl. 5.6.) nachgebildet und führt in natürlicher Weise zu einer Funktionalgleichung für $\zeta_k(s)$ und $L(s, \chi, k)$. Heckes Arbeit war für Takagi bei seinem Beweis der Existenz von Klassenkörpern von entscheidender Bedeutung. Der höchst komplizierte Heckesche Beweis wurde erst 1950 begrifflich

klarer, als Tate einen neuen Beweis lieferte, der sich auf die harmonische Analysis auf den Idelgruppen stützte [1].

Im Jahre 1903 hat Landau — ohne Zweifel von Webers Werk inspiriert — eine Verallgemeinerung des Satzes von Weber angegeben. Ihm schwebte eine Formel für die Anzahl $\pi_{\mathcal{A}}(x)$ der Primideale $\mathfrak{p}$ mit $N(\mathfrak{p}) \leqq x$ in einer gegebenen Klasse $\mathcal{A}$ von $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ vor. Nachdem Furtwängler 1907 die Existenz der Hilbertschen Klassenkörper bewiesen hatte, benutzte Landau dieses Ergebnis zum Beweis der Beziehung

$$\pi_{\mathcal{A}}(x) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathcal{A}\\ N(\mathfrak{p})\leqq x}} 1 \sim \frac{1}{[A:H^+]}\cdot\frac{x}{\log x},$$

wobei A/H^+ die in 5.5.7. definierte Klassengruppe im engeren Sinne ist. Der analoge Satz für $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$ steckt implizit in Heckes Arbeit von 1917, in welcher der Satz von Weber ohne Benutzung der Klassenkörper bewiesen wird.

5.5.8.3. Die Dichtigkeitssätze von Frobenius und Čebotarev

Wir wollen nun einen anderen Typus von Dichtigkeitsproblemen besprechen. Die ersten Untersuchungen begannen mit einer Vermutung von Kronecker über die Nullstellen von Polynomen modulo p; die völlige Klärung des Problems sollte in der algebraischen Zahlentheorie von großer Bedeutung sein, und zwar weniger in bezug auf das Ergebnis selbst als in bezug auf die zur Lösung entwickelten Methoden. Diese Methoden, die wir nun erörtern werden, stützen sich auf eine Mischung von Analysis und Gruppentheorie.

Im Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über die Irreduzibilität von Polynomen und über die singulären Moduln von elliptischen Funktionen hatte Kronecker 1880 zwei Behauptungen aufgestellt, die zu folgenden Sätzen äquivalent sind:

Es sei ν_p die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Dann gilt:

(1) *Es ist* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|\{p \leqq x \mid \nu_p > 0\}|}{\pi(x)} = m$, *wobei m gleich der Anzahl der irreduziblen Faktoren von $f(x)$ über $\mathbb{Q}$ und $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen unterhalb x ist.*

(2) *Für jede ganze Zahl k mit $1 \leqq k \leqq \deg f(x)$ existiert*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{p \leqq x \mid \nu_p = k\}|}{\pi(x)}.$$

Bezeichnet man diesen Wert mit d_k, so gilt nach der ersten Behauptung $\sum_k k d_k = m$.

Allgemein sagen wir, eine Menge A von Primzahlen *p habe die Dichte α*, wenn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|\{p \leqq x \mid p \in A\}|}{\pi(x)}$$

existiert und gleich α ist.

Diese Behauptungen, wie sie Kronecker ausgesprochen (und in einigen Spezialfällen bewiesen) hat, sind weniger natürlich. Wir geben sie hier mit den gleichen Bezeichnungen wie oben wieder:

(1) *Für* $\omega > 0$ *gilt* $\sum_p \frac{\nu_p}{p^{1+\omega}} = m \log\left(\frac{1}{\omega}\right) + O(1)$,

(2) $\sum_{\substack{p \\ \nu_p = k}} \frac{1}{p^{1+\omega}} \sim \alpha \log\left(\frac{1}{\omega}\right)$ *für* $1 \leqq k \leqq \deg f(x)$.

Ohne Zweifel hätte Kronecker seine Vermutungen gern möglichst natürlich formuliert, aber erst 1903 hat Landau die Gleichwertigkeit der beiden Formulierungen bewiesen. Der Satz, der die Gleichwertigkeit sichert, ist keineswegs leicht. Im Jahre 1896 hat Frobenius, der die Vermutungen und bestimmte Verallgemeinerungen bewiesen hat, mit ihnen in der Gestalt gearbeitet, in der sie von Kronecker ausgesprochen worden waren; wir werden jedoch seine Ergebnisse in der Sprache der natürlichen Dichte wiedergeben.

Die Bedeutung der Frobeniusschen Arbeit beruht darauf, daß Frobenius beim Beweis der Vermutungen veranlaßt wurde, die Beziehung zwischen dem Zerlegungsverhalten der rationalen Primzahlen in einem Galoisschen Körper $k = \boldsymbol{Q}(\alpha)$ und bestimmten Eigenschaften der Galoisgruppe Gal $(k/\boldsymbol{Q})$ zu untersuchen. Dies führte zur Einführung der heute *Frobenius-Automorphismus* bzw. *Artin-Abbildung* genannten Begriffe, die sich in der algebraischen Zahlentheorie als von grundlegender Bedeutung erwiesen. (In diesem Zusammenhang ist es interessant zu bemerken, daß es über diesen Gegenstand zwischen Frobenius und Dedekind einen Briefwechsel gibt. In seiner Arbeit von 1896 sagte Frobenius ausdrücklich, er sei für die Ideen, zu denen ihn Dedekind angeregt habe, sehr dankbar.)

Der von Frobenius bewiesene Hauptsatz ist eine Verallgemeinerung der zweiten Kroneckerschen Behauptung:

Es sei $f(x) \in \boldsymbol{Z}[x]$ *irreduzibel vom Grad* n. *Sind* $n_1, \ldots, n_g$ *ganze positive Zahlen, deren Summe gleich* n *ist, so existiert die Dichte der Primzahlen* p *mit der Eigenschaft, daß sich* $f(x)$ modulo p *in* g *Faktoren der Grade* $n_1, \ldots, n_g$ *zerlegen läßt; diese Dichte ist positiv, und sie läßt sich explizit als Funktion von* $g, n_1, \ldots, n_g$ *und gewissen Konstanten, die mit der Galoisgruppe der Gleichung* $f(x) = 0$ *zusammenhängen, berechnen.*

Wir erinnern daran, daß wir in 5.5.3.7. eine von Dedekind stammende Verallgemeinerung des Kummerschen Satzes über das Zerlegungsverhalten der Primzahlen in $K = \boldsymbol{Q}(\alpha)$ mit $f(\alpha) = 0$ wiedergegeben haben, und zwar im Zusammenhang mit der Faktorzerlegung von $f(x)$ modulo p. Man kann dies in der Weise deuten, daß der Satz von Frobenius die Dichte derjenigen rationalen Primzahlen angibt, die sich in bestimmter Weise in K zerlegen lassen.

Wir beschreiben nun den Frobenius-Automorphismus und die Artin-Abbildung. Danach werden wir einen kurzen Überblick geben, wie Frobenius diese Begriffe benutzt hat.

Es seien K/k eine Galoissche Erweiterung (in Wirklichkeit hat Frobenius nur den Fall $K/\boldsymbol{Q}$ betrachtet, aber dies macht kaum einen Unterschied), ferner $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{o}_k$

und $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{o}_K$ Primideale mit $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{q}$ und $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{q}) = 1$. Dann ist die Trägheitsgruppe $T(\mathfrak{P})$ von $\mathfrak{P}$ (vgl. 5.5.5.2.) gleich (1), was nach sich zieht, daß die Zerlegungsgruppe $Z(\mathfrak{P})$ zyklisch von der Ordnung $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{q})$ ist. Es ist möglich, ein mit $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)$ bezeichnetes und *Frobenius-Automorphismus* genanntes erzeugendes Element dieser Gruppe herauszuheben, und zwar auf folgende Weise:

$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)$ *ist das eindeutig bestimmte Element von* Gal (K/k), *das durch* $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right) \in Z(\mathfrak{P})$ *und* $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)\alpha \equiv \alpha^{N(\mathfrak{P})} \pmod{\mathfrak{P}}$ *für alle* α *in* $\mathfrak{o}_K$ *gekennzeichnet ist.*

Man kann zeigen, daß für $\sigma \in$ Gal (K/k)

$$\left(\frac{K/k}{\sigma\mathfrak{P}}\right) = \sigma\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)\sigma^{-1}$$

gilt.

Ist $\mathfrak{q}\mathfrak{o}_K = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g$, so ist nicht schwer zu zeigen, daß es zu jedem Paar i, j ein $\sigma \in$ Gal (K/k) mit $\sigma\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_j$ gibt, d. h., daß Gal (K/k) transitiv auf $\{\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_g\}$ operiert. Dann ist also

$$\left(\frac{K/k}{\sigma\mathfrak{P}_i}\right) = \sigma\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}_i}\right)\sigma^{-1} = \left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}_j}\right),$$

und die beiden Automorphismen liegen in der gleichen Konjugiertenklasse. Dies führt uns dazu, die *Artin-Abbildung* auf folgende Weise zu definieren:

Wir definieren eine Abbildung $F_{K/k}$ der Menge der unverzweigten Primideale von $\mathfrak{o}_k$ in die Menge der Konjugiertenklassen von Gal (K/k) durch

$$F_{K/k}(\mathfrak{q}) = \left\{\sigma\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)\sigma^{-1};\ \sigma \in \mathrm{Gal}\,(K/k), \mathfrak{P} \mid \mathfrak{q}\right\}.$$

In dem Spezialfall, daß Gal (K/k) abelsch ist, besteht $F_{K/k}(\mathfrak{q})$ aus einem einzigen Element der Galoisgruppe, welches *Artin-Symbol* oder *Artin-Automorphismus* genannt wird. Man bezeichnet es mit $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{q}}\right)$. Offenbar ist im Fall $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{q}$ der Frobenius-Automorphismus $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)$ dasselbe wie der Artin-Automorphismus $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{q}}\right)$.

Die Abbildung $F_{K/k}$ ist deshalb von Bedeutung, weil man, falls L/k eine Erweiterung von k und K die minimale, L enthaltende Galoissche Erweiterung von k ist, zeigen kann, daß K/L ebenfalls Galoissch ist und sich die Zerlegung eines unverzweigten Primideals $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{o}_k$ in L explizit mit Hilfe von $F_{K/k}(\mathfrak{q})$ und Gal (K/L) beschreiben läßt.

Bei seinem Beweis der Kroneckerschen Vermutung hatte Frobenius folgendes zu zeigen: Ist $\mathcal{S}$ eine bestimmte Menge von Konjugiertenklassen von Gal $(K/\boldsymbol{Q})$ für eine Galoissche Erweiterung K von $\boldsymbol{Q}$, so besitzt die Menge der rationalen Primzahlen p mit $F_{K/\boldsymbol{Q}}(p) \in \mathcal{S}$ eine positive Dichtigkeit. Dies gelang ihm, und so bewies er die Vermutung. Doch war Frobenius davon überzeugt, daß für eine beliebige

Konjugiertenklasse $\mathscr{C}$ von Gal $(K/\boldsymbol{Q})$ die Menge $\{p \mid F_{K/\boldsymbol{Q}}(p) = \mathscr{C}\}$ eine Dichtigkeit besitzt, die gleich $|\mathscr{C}|/[K:\boldsymbol{Q}]$ ist. Diese Vermutung von Frobenius wurde 1925, sogar für Relativ-Erweiterungen, von Čebotarev bewiesen und ist heute als *Čebotarevscher Dichtigkeitssatz* bekannt.[54]

Wir werden nun einige Folgerungen aus dem Čebotarevschen Dichtigkeitssatz in der algebraischen Zahlentheorie anführen. Die wichtigste ist die, daß der Čebotarevsche Beweis Artin den Schlüssel in die Hand gab, sein Reziprozitätsgesetz, das zentrale Ergebnis der Klassenkörpertheorie, zu beweisen (vgl. 5.5.10.).

Mit Hilfe des Satzes von Čebotarev kann man zeigen, daß in einer Galoisschen Erweiterung K/k der Körper K durch die Menge der Primideale von $\mathfrak{o}_k$, die in K voll zerfallen, bestimmt ist.[55] Wird diese Menge mit Spl (K/k) bezeichnet, dann bedeutet dies: Sind L/k und K/k Galoissche Erweiterungen und ist Spl (K/k) $=$ Spl (L/k), so ist $L = K$. Leider weiß niemand, wie die Menge Spl (K/k) zu charakterisieren ist, außer in dem Spezialfall, daß Gal (K/k) abelsch ist. Dies ist genau der Fall der Klassenkörper. Schließlich weisen wir darauf hin, daß dann, wenn K/k und L/k nicht Galoissch sind, Spl (L/k) $=$ Spl (K/k) gelten kann, ohne daß K und L isomorph sind.

Eine andere Anwendung des Čebotarevschen Satzes besteht darin, daß er uns ermöglicht, die Dichtigkeit einer Menge von Primidealen in einem Zahlkörper k zu bestimmen, welche sich in einer bestimmten Weise in einer Erweiterung K/k zerlegen lassen. Ist zum Beispiel K/k eine nicht-Galoissche kubische Erweiterung von k, so zerfällt ein unverzweigtes Primideal $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{o}_k$ auf eine der folgenden drei Arten:

(1) $\mathfrak{q}\mathfrak{o}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$;

(2) $\mathfrak{q}\mathfrak{o}_K = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, wobei $f(\mathfrak{p}_1/\mathfrak{q}) = 1$, $f(\mathfrak{p}_2/\mathfrak{q}) = 2$ ist;

(3) $\mathfrak{q}\mathfrak{o}_K = \mathfrak{p}$.

Man kann zeigen, daß die Dichtigkeiten in diesen drei Fällen gleich $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ sind.

Schließlich erwähnen wir eine Anwendung der Sätze von Frobenius und Čebotarev auf ein Problem, das Kronecker wahrscheinlich im Auge hatte, als er 1880 seine ursprünglichen Vermutungen formulierte. Es sei k ein Zahlkörper.

Ist $f(x) \in k[x]$ so beschaffen, daß sich $f(x)$ modulo $\mathfrak{q}$ *für alle Primideale $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{o}_k$ mit eventueller Ausnahme einer Menge der Dichtigkeit null in Linearfaktoren zerlegen läßt, so zerfällt $f(x)$ in Linearfaktoren über k*; und

Ist $f(x) \in k[x]$ ein nichtlineares Polynom, das für alle Primideale $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{o}_k$ mit eventueller Ausnahme einer Menge der Dichtigkeit null modulo $\mathfrak{q}$ *wenigstens eine Nullstelle besitzt, so ist $f(x)$ in $k[x]$ reduzibel.*

Es mag plausibel scheinen, daß $f(x)$, wenn es für jedes $\mathfrak{q}$ modulo $\mathfrak{q}$ einen Linearfaktor besitzt, einen Linearfaktor in $k[x]$ hat; dem ist aber nicht so. Sind beispielsweise a, b, c ganze Zahlen, von denen keine ein Quadrat ist, für die aber abc ein Quadrat ist, so besitzt für jedes p das Polynom

$$f(x) = (x^2 - a)\,(x^2 - b)\,(x^2 - c)$$

mindestens zwei Linearfaktoren modulo p, aber keinen Linearfaktor in $\boldsymbol{Q}[x]$.

5.5.8.4. Klassenzahlen quadratischer Körper

Wir haben in 5.5.3.8. gesehen, welch enge Relation zwischen dem Residuum von $\zeta_k(s)$ im Punkt $s = 1$ und der Klassenzahl $h(k)$ von k besteht. Der Spezialfall eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers hat ganz besonders Aufmerksamkeit gefunden, und zwar ohne Zweifel auf Grund der Vermutungen von Gauß, nach denen die Klassenzahl der positiv definiten binären quadratischen Formen mit der Diskriminante D mit D gegen unendlich strebt und daß es für die indefiniten binären quadratischen Formen unendlich viele Diskriminanten gibt derart, daß die entsprechende Klassenzahl 1 ist. In moderner Terminologie lauten die Gaußschen Vermutungen folgendermaßen: Die Klassenzahl $h(\sqrt{-d})$ von $Q(\sqrt{-d})$ strebt mit $d > 0$ gegen unendlich, und es gibt unendlich viele $d > 0$ mit $h(\sqrt{d}) = 1$.

Die zweite Gaußsche Vermutung ist noch völlig unentschieden. Der erste Schritt zu einem Beweis der Tatsache, daß $h(\sqrt{-d}) \to \infty$ gilt, wurde 1918 von Hecke getan, als er folgendes zeigte: Wenn alle komplexen Nullstellen von $L(s, \chi)$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ liegen (d. h., wenn die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung zutrifft), ist

$$h(\sqrt{-d}) > \frac{cd^{1/2}}{\log d}$$

für eine passende Konstante $c > 0$. Im Jahre 1933 bewies dann Mordell $h(\sqrt{-d}) \to \infty$, falls $\zeta(s)$ eine komplexe Nullstelle außerhalb $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ besitzt (d. h., wenn die Riemannsche Vermutung falsch ist). Der letzte Schritt wurde 1934 von Heilbronn getan, der zeigte, daß $h(\sqrt{-d}) \to \infty$ gilt, falls die Riemannsche Vermutung richtig ist. Somit war ohne jede zusätzliche Bedingung $h(\sqrt{-d}) \to \infty$ bewiesen. Ein Jahr später bewies Siegel, angeregt durch die Heilbronnschen Arbeiten, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c(\varepsilon) > 0$ gibt derart, daß $h(\sqrt{-d}) > c(\varepsilon)\, d^{(1/2)-\varepsilon}$ für jedes $d > 1$ ist. Allerdings ist der Satz von Siegel in dem Sinne nicht effektiv, daß man bei gegebenem ε nicht in der Lage ist, einen Zahlenwert von $c(\varepsilon)$ explizit zu berechnen und so eine genaue untere Schranke für $h(\sqrt{-d})$ zu erhalten. Man kann also den Satz von Siegel nicht benutzen, um alle imaginär-quadratischen Zahlkörper mit gegebener Klassenzahl zu finden. Eine effektive Version des Siegelschen Satzes zu finden ist eines der großen ungelösten Probleme der analytischen Zahlentheorie.

Die explizite Bestimmung aller imaginär-quadratischen Zahlkörper, deren Klassenzahl gleich 1 oder 2 ist, ist gegenwärtig abgeschlossen, ihre Geschichte ist sehr merkwürdig. Im Jahre 1952 verknüpfte Heegner das Problem der imaginär-quadratischen Zahlkörper der Klassenzahl 1 mit der Untersuchung der Modulfunktionen. Er behauptete, mit Hilfe von Methoden, die auf Weber zurückgehen, bewiesen zu haben, es sei $h(\sqrt{-d}) > 1$ für $d > 163$. Leider ging das Gerücht um, der Heegnersche Beweis sei falsch, und dieses Problem wurde vor 1966 nicht wieder aufgenommen, als sowohl Baker als auch Stark das Problem lösten. Dann stellte

man fest, daß der Beweis von Heegner richtig war. Der Beweis von Stark stützt sich auf die gleichen Prinzipien wie der Heegnersche. Die Lösung von Baker en sprang sowohl älteren Arbeiten von Gel'fond und Linnik als auch seinen eigene Untersuchungen über die effektiven unteren Schranken von Linearformen vo Logarithmen algebraischer Zahlen (vgl. 5.7.). Im Jahre 1949 hatten Gel'fond un Linnik gezeigt, daß man eine solche untere Schranke für die Linearformen in dr Logarithmen dazu benutzen kann, um eine effektive obere Schranke für die d m $h(\sqrt{-d}) = 1$ zu finden. Gel'fond hatte auch eine effektive untere Schranke für d Linearform $|a_1 \log \alpha_1 + a_2 \log \alpha_2|$ mit $a_1, a_2 \in \boldsymbol{Z}$ und algebraischen α_1, α_2 erhalte und kurioserweise hat Stark 1967 durch eine leichte Verallgemeinerung der Übe legungen von Gel'fond und Linnik bewiesen, daß es möglich war, sich des Fall zweier Logarithmen zu bedienen, um eine effektive obere Schranke für d zu erha ten. Es hätte also nicht viel gefehlt, und das Klassenzahl-Eins-Problem wäre 194 gelöst worden! Was die imaginär-quadratischen Zahlkörper der Klassenzahl anlangt, so wurde die Bakersche Methode von Baker und Stark verallgemeinert, d 1972 unabhängig voneinander zeigten, daß $d \leqq 427$ ist, falls $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-d})$ die Klasse zahl 2 hat.

5.5.9. *Die Entwicklung der Theorie der p-adischen und der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen*

Die Begriffe der p-adischen Zahl und der $\mathfrak{p}$-adischen Zahl wurden von Hensel einer Arbeit von 1897 eingeführt. Ehe wir sagen, was die p-adischen Zahlen sin wollen wir sehen, wie Hensel auf diese Idee gekommen ist. Wir erinnern dara daß Kummer und Dedekind bewiesen hatten, daß die Art, in der sich eine rationa Primzahl in einem algebraischen Zahlkörper K zerlegen läßt, davon abhängt, w sich bestimmte Polynome modulo p in Faktoren zerlegen lassen, außer wenn den Index jeder ganzen Zahl γ in $\mathfrak{o}_K$ teilt (vgl. 5.5.3.7.). Insbesondere hatte Ded kind, wie wir gesehen haben, das Beispiel der Zahl 2 in dem von einer Nullstelle d Polynoms $x^3 - x^2 - 2x - 8$ erzeugten Körper angegeben. Beim Studium vo Beispielen dieser Art beobachtete Hensel (bzw. vermutlich Kronecker, dess Schüler Hensel war) die folgende merkwürdige Tatsache. Ist $f(x)$ das Minimalpol nom von $\gamma \in \mathfrak{o}_K$ und teilt p den $C(\gamma)$, so spiegelt die Faktorzerlegung von $f($ modulo p nicht notwendigerweise die von p in K wider; es gibt aber eine gan Zahl $R \geqq 1$ derart, daß die Faktorzerlegung von $f(x)$ modulo p^R in bestimmt Weise die Art der Faktorzerlegung von p in K angibt. Im Dedekindschen Beispi hat man modulo 2

$$x^3 - x^2 \equiv x^2(x + 1) \pmod 2\,,$$

während sich modulo 4

$$x^3 - x^2 - 2x \equiv x(x - 2)(x + 1) \pmod 4$$

ergibt, was der Tatsache entspricht, daß (2) in dem fraglichen Körper vollständ zerfällt. Im allgemeinen Fall fand Hensel folgenden Zusammenhang. Es gibt ste

eine ganze Zahl $R \geqq 1$ derart, daß sich aus

$$f(x) \equiv f_1(x) \cdots f_g(x) \pmod{p^R}$$

mit irreduziblen und paarweise teilerfremden f_i in $\mathfrak{o}_K$ die Zerlegung

$$(p) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_g^{e_g}$$

ergibt, wobei die $\mathfrak{p}_i$ paarweise verschiedene Primideale sind und $e_i f(\mathfrak{p}_i/p)$ der Grad von $f_i(x)$ ist. Darüber hinaus gibt es zu jedem $r \geqq R$ eine analoge Faktorzerlegung. Während der Durchmusterung mannigfacher spezieller Beispiele fand Hensel es zweckmäßig, die Koeffizienten der verschiedenen Polynome, die dabei auftraten, in der Gestalt

$$\pm (a_0 + a_1 p + \cdots + a_m p^m)$$

auszudrücken, wobei $0 \leqq a_i \leqq p - 1$ ist und m von der speziell betrachteten ganzen Zahl abhängt, also beliebig groß sein kann. Der nächste Schritt besteht natürlich darin, alle „formalen Summen" $\pm \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ mit $0 \leqq a_i \leqq p - 1$ zu betrachten, wobei eine solche Summe eine ganze Zahl x darstellt, wenn

$$x \equiv a_0 + a_1 p + \cdots + a_i p^i \pmod{p^{i+1}}$$

für *jedes* i ist. Außerdem ergibt sich: Betrachten wir als Beispiel die Zahl -5, ausgedrückt als Potenzreihe in $p = 3$; diese kann sowohl als $-(2 + 3)$ als auch als formale Reihe $1 + 1 \cdot 3 + \sum_{i=2}^{\infty} 2 \cdot 3^i$ geschrieben werden; dies möge der Leser durch Addition dieser Reihe zu $-(2 + 3)$ verifizieren. Um also eine beliebige positive oder negative ganze Zahl darzustellen, genügt es, die formalen Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$ zu betrachten. (Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß eine beliebige unendliche Reihe nicht immer eine ganze Zahl darstellt.) Hensel wurde sich schnell darüber klar, daß er mit Hilfe negativer Exponenten nicht nur die ganzen Zahlen, sondern auch die rationalen Zahlen darstellen konnte; mit anderen Worten, jede rationale Zahl kann als formale Potenzreihe

$$\sum_{i=r}^{\infty} a_i p^i \quad \text{mit} \quad 0 \leqq a_i \leqq p - 1 \quad \text{und} \quad r \in \boldsymbol{Z}$$

dargestellt werden, und es läßt sich zeigen, daß eine solche Darstellung eindeutig ist. *Die Menge aller dieser formalen Potenzreihen wird mit $\boldsymbol{Q}_p$ bezeichnet und Körper der p-adischen Zahlen genannt*; dieser Körper enthält $\boldsymbol{Q}$ und ist davon verschieden. Wir werden im folgenden einige Eigenschaften der p-adischen Zahlen untersuchen, zunächst aber setzen wir unsere Beschreibung des Werkes von Hensel fort.

Hensel wollte das Ergebnis, das die Zerlegung der Primzahlen mit der von Polynomen verknüpft, auf den Fall der Relativ-Erweiterungen ausdehnen. Dafür brauchte er ein Analogon der oben beschriebenen Darstellung der Elemente von $\boldsymbol{Q}$. Er entdeckte es auf folgende Weise. Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_k$; es gibt ein Element $\pi \in \mathfrak{p}$ mit $\pi \notin \mathfrak{p}^2$. Die Idee besteht darin, zunächst jede ganze Zahl $\alpha \in \mathfrak{o}_K$ auf vernünftige Weise nach Potenzen von π zu

entwickeln. Im Fall $k = \mathbf{Q}$ darf man annehmen, die möglichen Koeffizienten der formalen Potenzreihen seien einem vollständigen Repräsentantensystem für die Klassen von $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ entnommen. Entsprechend wählt man im allgemeinen die Koeffizienten in einer Menge von Repräsentanten der Klassen von $\mathfrak{o}_k/\mathfrak{p}$. Bezeichnet man ein solches Repräsentantensystem mit $\mathcal{R}$, so kann man zeigen, daß jedes Element von k durch eine Summe

$$\sum_{i=r}^{\infty} a_i \pi^i \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathcal{R} \quad \text{und} \quad r \in \mathbf{Z} \text{ (wobei } r < 0 \text{ sein kann)}$$

dargestellt werden kann, und wie für die rationalen Zahlen werden die Menge dieser formalen Summen mit $k_\mathfrak{p}$ bezeichnet und ihre Elemente die $\mathfrak{p}$-*adischen Zahlen* genannt. Mit Hilfe dieser Begriffe bewies Hensel folgendes:

Es sei K/k algebraisch vom Grad n und $\alpha \in \mathfrak{o}_k$ so beschaffen, daß $K = k(\alpha)$ gilt. Ferner sei $f(x)$ das Minimalpolynom von α über k und $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal von $\mathfrak{o}_k$. *Gilt in $k_\mathfrak{p}$*

$$f(x) = f_1(x) \cdots f_g(x)\,,$$

wobei die $f_i(x)$ irreduzibel über $k_\mathfrak{p}$ und paarweise teilerfremd sind, so gilt in K

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}\,,$$

wobei die $\mathfrak{P}_i$ paarweise verschiedene Primideale sind und $e_i f_{K/k}(\mathfrak{P}_i)$ der Grad von $f_i(x)$ ist.

Nach der Entdeckung dieses Ergebnisses bemerkte Hensel, daß er dasselbe Verfahren benutzen könne, um ein anderes offenes Problem zu lösen, nämlich die Bestimmung der höchsten Potenz einer Primzahl, welche die Diskriminante eines gegebenen Körpers teilt (vgl. 5.5.3. und 5.5.5.). Der erste Schritt ist der folgende. Es sei $k/\mathbf{Q}$ eine algebraische Erweiterung vom Grad n und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_k$, das (p) teilt, wobei p seinerseits Teiler der Absolut-Diskriminante D_k von k ist. Statt in die Erweiterung $k/\mathbf{Q}$ aufzusteigen, wie es Dedekind und Hilbert getan hatten, betrachtete Hensel den Körper $k_\mathfrak{p}$ als Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$ und zeigte, daß $k_\mathfrak{p}/\mathbf{Q}_p$ eine algebraische Erweiterung vom Grad $e(\mathfrak{p}/p)\, f(\mathfrak{p}/p)$ ist. Außerdem definierte er die Diskriminante von $k_\mathfrak{p}/\mathbf{Q}_p$ in der gleichen Weise wie D_k und zeigte, daß im Fall $p^m \,\|\, D_k$ die Diskriminante von $k_\mathfrak{p}$ über $\mathbf{Q}_p$ das Produkt von p^m und einer p-adischen Einheit ist.[1]) Er konnte dann den Exponenten m durch Überlegungen innerhalb der Erweiterung $k_\mathfrak{p}/\mathbf{Q}_p$ berechnen; wir werden das Endergebnis nicht anführen, das ohnehin kompliziert genug zu formulieren ist.

Nachdem die p-adischen und die $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen einmal als Werkzeuge zur Lösung dieser Probleme eingeführt worden waren, wurden sie von Hensel und anderen um ihrer selbst willen untersucht. Was dabei überraschend ist, ist die Tatsache, daß sie anfangs nicht vom Standpunkt der Zahlentheorie, sondern vom Standpunkt der Algebra und in geringerem Maße vom Standpunkt der Topologie aus untersucht wurden. Der Grund dafür liegt darin, daß sie Beispiele für Strukturen lieferten, deren Existenz man bis dahin nicht geahnt hatte.

---

[1]) Diese Bezeichnung $\|$ bedeutet, daß p^m die höchste Potenz von p ist, die in D_k aufgeht.

Im Jahre 1907 waren die topologischen Begriffe allgemein bekannt (siehe 8.7.), und Hensel bemühte sich, sie auf $\boldsymbol{Q}_p$ anzuwenden. Zu diesem Zweck definierte er auf $\boldsymbol{Q}_p$ einen Abstand in der gleichen Weise wie für die reellen Zahlen. Der erste Schritt bestand darin, für die Körper $\boldsymbol{Q}_p$ die Analoga des absoluten Betrages auf $\boldsymbol{R}$ zu definieren. Nun kann eine Zahl $\alpha \in \boldsymbol{Q}_p$ in der Gestalt $\sum_{i=r}^{\infty} a_i p^i$ mit $r \in \boldsymbol{Z}$ und $a_r \neq 0$ geschrieben werden. Durch

$$|\alpha|_p = p^{-r}$$

läßt sich eine Funktion definieren, welche der *p-adische Absolutbetrag* genannt wird. Wenn das Hauptideal (α) als $(p^m)(n)$ mit $(n, p) = 1$ geschrieben werden kann, ist $|\alpha|_p = p^{-m}$. Diese Funktion besitzt eine Reihe von Eigenschaften, die denen des üblichen Absolutbetrages auf $\boldsymbol{R}$ analog sind. Beispielsweise ist, wie man leicht verifiziert, $|\alpha|_p = 0$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ ist, ferner $|\alpha\beta|_p = |\alpha|_p \cdot |\beta|_p$ und

$$|\alpha + \beta|_p \leqq \max(|\alpha|_p, |\beta|_p) .$$

Diese letzte Ungleichung ist recht bemerkenswert: Für die reellen Zahlen gilt

$$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta| \quad \text{und} \quad |\alpha + \alpha| > |\alpha| \text{, falls } \alpha \neq 0 \text{ ist}$$

(Archimedisches Prinzip). Für die p-adischen Zahlen gilt aber $|\alpha + \alpha|_p \leqq |\alpha|_p$; aus diesem Grunde werden die p-adischen Absolutbeträge *nichtarchimedisch* (oder auch *ultrametrisch*) genannt. Man definiert dann einen Abstand durch

$$m_p(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|_p.$$

Hensel benutzte den p-adischen Absolutbetrag zur Einführung einer Topologie auf $\boldsymbol{Q}_p$, indem er ein aus den „Scheiben" $\{x \in \boldsymbol{Q}_p \mid |x - \alpha|_p \leqq \varepsilon\}$ bestehendes Fundamentalsystem von Umgebungen von α wählte. In dieser Topologie ist $\boldsymbol{Q}_p$ lokal kompakt, während jede „Scheibe" kompakt ist. Die kompakte Menge $\boldsymbol{Z}_p = \{\alpha \in \boldsymbol{Q}_p \mid |\alpha|_p \leqq 1\}$ ist ein Ring, der $\boldsymbol{Z}$ enthält; seine Elemente werden *ganze p-adische Zahlen* genannt. Eine merkwürdige Eigenschaft der p-adischen Zahlen ist die, daß eine Reihe $\sum_{i=r}^{\infty} \alpha_i$ genau dann konvergiert, wenn $|\alpha_i|_p \to 0$ gilt. Unter Benutzung dieser Tatsache führte Hensel mit Hilfe der üblichen Reihenentwicklungen die p-adische Exponentialfunktion und den p-adischen Logarithmus ein.

Wie schon Cantor gezeigt hatte (vgl. 6.5.3.), ist $\boldsymbol{R}$ die Vervollständigung ([G-H], S. 398) von $\boldsymbol{Q}$ für den durch den gewöhnlichen Absolutbetrag gelieferten Abstand. Im Jahre 1913 bewies ein Schüler von Hensel, daß auch $\boldsymbol{Q}_p$ die Vervollständigung von $\boldsymbol{Q}$ ist, aber für die aus dem p-adischen Absolutbetrag hergeleitete Abstandsfunktion. Naturgemäß erhob sich jetzt die Frage: Welches sind alle möglichen Absolutbeträge auf $\boldsymbol{Q}$, die die gleichen Eigenschaften wie der übliche Absolutbetrag besitzen, und welches sind die Vervollständigungen von $\boldsymbol{Q}$ in bezug auf diese Absolutbeträge? Es ist etwas überraschend (denn der Satz ist nicht schwierig), daß es bis 1918 dauerte, bis Ostrowski bewies, daß nur die Absolutbeträge auf $\boldsymbol{Q}$ eine Topologie liefern, die entweder mit der durch den gewöhnlichen Absolutbetrag oder mit der durch einen der p-adischen Absolutbeträge definierten Topologie übereinstimmt. Dann dauerte es noch bis 1935, bis Ostrowski das analoge Ergebnis

für die algebraischen Zahlkörper veröffentlichte, obwohl dieser Satz fast mit Sicherheit früher bekannt war. Ehe wir diesen Satz bringen, müssen wir einige Definitionen einführen.

Im allgemeinen versteht man unter einem *Absolutbetrag* auf einem Körper K eine auf K definierte Funktion φ mit nichtnegativen Werten, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $\varphi(\alpha) = 0$ genau dann, wenn $\alpha = 0$ ist;

(ii) $\varphi(\alpha\beta) = \varphi(\alpha)\,\varphi(\beta)$;

(iii) $\varphi(\alpha + \beta) \leqq \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ („Dreiecksungleichung“).

Ein Absolutbetrag definiert auf K eine Topologie nach demselben Verfahren wie oben, und zwei Absolutbeträge werden *äquivalent* genannt, wenn sie die gleiche Topologie definieren; jeder Absolutbetrag auf $\boldsymbol{Q}$ ist demnach dem gewöhnlichen Absolutbetrag oder einem p-adischen Absolutbetrag äquivalent. Für einen algebraischen Zahlkörper k vom Grade n ist die Situation ein wenig anders; dies rührt daher, daß k insgesamt r reelle und $2s$ komplexe Einbettungen in $\boldsymbol{C}$ mit $r + 2s = n$ besitzt (vgl. 5.5.1.). Liegt α in k, so bezeichnen wir mit $\alpha^{(i)}$ sein Bild bei einer Einbettung $k \to \boldsymbol{C}$ mit $1 \leqq i \leqq r$ für die reellen und $r + 1 \leqq i \leqq r + 2s$ für die komplexen Einbettungen. Für jede Einbettung definiert man durch $|\alpha|_i = |\alpha^{(i)}|$ einen Absolutbetrag. Man erhält auf diese Weise nur $r + s$ Absolutbeträge; denn wenn $\alpha^{(i)}$ und $\alpha^{(j)}$ zueinander konjugiert-komplexe Zahlen sind, ist offenbar $|\alpha|_i = |\alpha|_j$. Ostrowski hat gezeigt, daß *jeder Absolutbetrag auf k einem der Absolutbeträge* $|\alpha|_i$ *oder einem der $\mathfrak{p}$-adischen Absolutbeträge* $|\alpha|_\mathfrak{p}$, die durch $|\alpha|_\mathfrak{p} = (N\mathfrak{p})^{-r}$ für $(\alpha) = \mathfrak{p}^r\mathfrak{a}$ mit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) = 1$ erklärt sind, *äquivalent ist.* Man kann zeigen, daß die entsprechenden Vervollständigungen von k die Körper $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ bzw. $k_\mathfrak{p}$ sind.

Nachdem die $\mathfrak{p}$-adischen Körper durch ihren Absolutbetrag und ihre Topologie definiert waren, entsprach es dem Geist der Zeit, sie durch bestimmte ihrer Eigenschaften zu charakterisieren. Eines der interessantesten Ergebnisse wurde 1933 von H. Hasse und F. K. Schmidt veröffentlicht. Sie haben bewiesen, daß ein Körper K, der in einer durch einen nichtarchimedischen Absolutbetrag definierten Topologie lokal kompakt ist, eine endliche Erweiterung eines p-adischen Körpers $\boldsymbol{Q}_p$ oder eines Körpers $\boldsymbol{F}_q((t))$ (eines Körpers der formalen Potenzreihen in t über einem endlichen Körper $\boldsymbol{F}_q$) ist. Die Körper $\boldsymbol{F}_q((t))$ sind die Vervollständigungen der Körper $\boldsymbol{F}_q(t)$ von rationalen Funktionen in bezug auf einen in 5.5.12. beschriebenen Typus von Absolutbetrag. Der Satz von Hasse-Schmidt zeigt, daß $\boldsymbol{Q}_p$ und $\boldsymbol{F}_q((t))$ in einem bestimmten Sinn zueinander analog sind. Etwas früher hatten E. Artin und F. K. Schmidt mit der Untersuchung der über $\boldsymbol{F}_q$ definierten algebraischen Kurven begonnen, was auf das Studium der algebraischen Erweiterungen von $\boldsymbol{F}_q(t)$ hinausläuft (siehe [36]). Die Analogien zwischen den algebraischen Zahlkörpern und den algebraischen Erweiterungen von $\boldsymbol{F}_q(t)$ sind stark ausgeprägt; in beiden Fällen sind die gleichen Hauptsätze gültig und können im wesentlichen mit den gleichen Methoden bewiesen werden. Wie wir in 5.5.12. sehen werden, kann man tatsächlich von einem einfachen Axiomensystem ausgehen und daraus die Hauptsätze sowohl für $K/\boldsymbol{Q}$ als auch für $L/\boldsymbol{F}_q(t)$ herleiten.

5.5.10. *Die Klassenkörpertheorie zwischen 1920 und 1930*

Nach dem 1907 von Furtwängler gegebenen Existenzbeweis für den Hilbertschen Klassenkörper gab es bis 1920 kaum Fortschritte in der Richtung auf die Weberschen Vermutungen. Dagegen brachte das Jahrzehnt 1920—1930 den Beweis der Hauptvermutungen und die Entdeckung zahlreicher neuer Sätze von großer Bedeutung. Drei Mathematiker, Takagi, E. Artin und H. Hasse, sind im wesentlichen die führenden Köpfe dieses Wiederaufschwungs.

Im Jahre 1920 hat Takagi die Definition der Kongruenzklassengruppe modifiziert und die Weberschen Vermutungen bewiesen, außerdem die korrekte Version von Kroneckers Jugendtraum.[56] Ein wenig später, 1926, hat Artin sein „Reziprozitätsgesetz" bewiesen, das sich, nachdem es einmal aufgestellt war, als eines der zentralen Resultate der Theorie erwiesen hat. Darauf aufbauend, gelang es H. Hasse, die Sätze zu beweisen, mit denen sich Hilbert beschäftigt hatte (vgl. 5.5.7.); ferner wurde er dazu angeregt, die Erweiterungen der p-adischen Körper zu untersuchen. Seine Arbeiten bereiteten den Boden für eine Umformulierung der Klassenkörpertheorie, die 1940 von Chevalley vorgenommen wurde. Darauf gehen wir in 5.5.11. ein.

5.5.10.1. Die Arbeiten von Takagi

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer genauen Definition einer Kongruenzklassengruppe. Der Bequemlichkeit halber geben wir diese Definition mit Hilfe von *Divisoren*, einem Begriff, der bis zu den zwanziger Jahren in der Zahlentheorie nicht benutzt wurde, aber „in der Luft lag" und unsere Darlegung vereinfachen wird. (Die Vereinfachung ist rein verbal; man kann die Divisoren vermeiden, um den Preis, daß hie und da einige zusätzliche Formulierungen auftreten.)

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper. In 5.5.7. haben wir als bequeme Bezeichnung den Begriff der „unendlichen reellen Primstelle" eingeführt. Wir wollen mit $\mathfrak{p}_{\infty_1}, \dots, \mathfrak{p}_{\infty_r}$ die reellen unendlichen Primstellen von k bezeichnen, ferner sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathfrak{o}_k$. Ein *ganzer Divisor* $\mathfrak{m}$ von k ist ein formales unendliches Produkt

$$\mathfrak{m} = \Pi\, \mathfrak{p}_{i_s}^{n_i},$$

das sich auf *sämtliche* Primstellen, endliche und unendliche, erstreckt, wobei die n_i nichtnegative ganze Zahlen sind, von denen nur endlich viele von null verschieden sind. Für die unendlichen Primstellen ist n_i gleich 0 oder 1, je nachdem, ob eine unendliche Primstelle vorkommt oder nicht. Man kann für die ganzen Divisoren Begriffe wie „größter gemeinsamer Teiler", „kleinstes gemeinsames Vielfaches", „zueinander teilerfremd" usw. in naheliegender formaler Weise einführen.

Es sei $\mathfrak{m}$ ein Divisor von k, ferner bezeichne $A_\mathfrak{m}$ die Gruppe der gebrochenen Ideale, die von den *zu* $\mathfrak{m}$ *teilerfremden* ganzen Idealen von $\mathfrak{o}_k$ erzeugt wird. Schließlich sei $H_\mathfrak{m}$ die Untergruppe von $A_\mathfrak{m}$, die von den Hauptidealen (α) mit $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_i^{n_i}}$ für jedes in $\mathfrak{m}$ vorkommende Primideal $\mathfrak{p}_i$ und $\sigma_i(\alpha) > 0$ für jede reelle unendliche Primstelle des Divisors erzeugt wird, wobei σ_i die entsprechende Ein-

bettung von k in $\boldsymbol{R}$ ist. Üblicherweise faßt man diese Bedingungen für α einfach durch $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ zusammen.

Jedem ganzen Divisor $\mathfrak{m}$ entspricht also eine Faktorgruppe $A_{\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}}$, und man kann zeigen, daß diese Gruppe endlich ist. Mit $H'_{\mathfrak{m}}$ bezeichnen wir eine Untergruppe von $A_{\mathfrak{m}}$, die $H_{\mathfrak{m}}$ enthält. (Wir erinnern daran, daß Weber für $H'_{\mathfrak{m}}$ eine Gruppe von *Haupt*idealen nahm. Die von Takagi vorgenommene Erweiterung der Definition ist, wie wir noch sehen werden, notwendig, um eine umkehrbar eindeutige Entsprechung zwischen den abelschen Erweiterungen von k und den Kongruenzklassengruppen herzustellen.)

Sind $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ zwei ganze Divisoren und $A_{\mathfrak{m}_1}/H'_{\mathfrak{m}_1}$ bzw. $A_{\mathfrak{m}_2}/H'_{\mathfrak{m}_2}$ die entsprechenden Faktorgruppen, so nennen wir diese Gruppen *äquivalent*, wenn für ein bestimmtes gemeinsames Vielfaches $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$

$$A_{\mathfrak{m}} \cap H'_{\mathfrak{m}_1} = A_{\mathfrak{m}} \cap H'_{\mathfrak{m}_2}$$

gilt. Man kann zeigen, daß dies tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist und daß die Faktorgruppen $A_{\mathfrak{m}_i}/H'_{\mathfrak{m}_i}$ einander isomorph sind. Wir nennen eine solche Äquivalenzklasse von Gruppen eine *Kongruenzklassengruppe*. Unter allen Divisoren $\mathfrak{m}_i$ der Gruppen $\{A_{\mathfrak{m}_1}/H'_{\mathfrak{m}_1}, \ldots\}$ in der gleichen Äquivalenzklasse gibt es einen „kleinsten", der in Wirklichkeit der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ ist. Dieser spezielle Modul wird der *Führer* von $\{A_{\mathfrak{m}_1}/H'_{\mathfrak{m}_1}, \ldots\}$ genannt und mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet. Statt mit der gesamten Äquivalenzklasse von Gruppen zu arbeiten, hebt man gewöhnlich eine dieser Gruppen heraus; man wählt dabei immer $A_{\mathfrak{f}}/H'_{\mathfrak{f}}$. Nun erinnern wir an die Webersche Definition eines Klassenkörpers:

Eine abelsche Erweiterung K/k wird ein Klassenkörper über k für die Gruppe $A_{\mathfrak{f}}/H'_{\mathfrak{f}}$ genannt, wenn die Primideale ersten Grades von $\mathfrak{o}_k$, die in $\mathfrak{o}_K$ vollständig zerfallen, genau mit den Primidealen in $H'_{\mathfrak{f}}$ übereinstimmen.

Diese Definition der Klassenkörper ist kein wirklich bequemer Ausgangspunkt, um die Existenz von Klassenkörpern zu beweisen. Es gibt jedoch mehrere Charakterisierungen der Klassenkörper, die sämtlich äquivalent sind. Man kann eine beliebige von ihnen als Definition eines Klassenkörpers nehmen und dann versuchen, die Existenz eines Körpers und einer Gruppe mit den geforderten Eigenschaften zu beweisen. Die Schwierigkeit besteht darin, den richtigen Ausgangspunkt zu finden.

Im Jahre 1920 benutzte Takagi als Definition eines Klassenkörpers die scheinbar gekünstelte Definition, die wir nachstehend beschreiben werden. Ihr großer Vorzug besteht darin, daß sie operativ ist; mit anderen Worten, es gelang Takagi zu zeigen, daß die gesuchten Körper und Gruppen existieren und mit den von Weber postulierten Objekten übereinstimmen [17]. Der wesentliche Unterschied zwischen dem Ansatz von Takagi und dem Ansatz von Weber besteht darin, daß Weber von einer Gruppe ausgeht und einen Körper mit bestimmten Eigenschaften sucht, während Takagi von einem Körper ausgeht und eine Gruppe sucht, die bestimmte Eigenschaften besitzt. Selbstverständlich war Takagis Beweggrund, einen geeigneten Ausgangspunkt für einen Existenzbeweis zu finden, und in dem Maße, wie er sich von der Richtigkeit der Weberschen Vermutungen überzeugte konnte

er es sich erlauben, von einer im Vergleich zu Weber mehr technischen Definition auszugehen.

Ehe wir die Takagische Definition des Klassenkörpers bringen, werden wir die von Takagi untersuchten Gruppen kurz beschreiben. Es seien K/k eine Galoissche Erweiterung und $\mathfrak{m}$ ein ganzer Divisor von k. Aus der Definition der Relativnorm folgt leicht, daß $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{o}_k$ genau dann eine Norm bezüglich K/k ist, wenn $\mathfrak{f}(\mathfrak{P}/\mathfrak{q}) = 1$ für $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{q}$ gilt. Insbesondere erweisen sich diejenigen Primideale, die vollständig zerfallen, (und eventuell bestimmte verzweigte Primideale) als Normen; daher ist es natürlich zu hoffen, daß man die Menge $N_{K/k}(A_\mathfrak{m}(K))$ in ein eventuelles $H'_\mathfrak{m}(k)$ einbetten kann. ($A_\mathfrak{m}(K)$ ist die Gruppe der gebrochenen Ideale von K, die von den zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden ganzen Idealen des Erweiterungskörpers K erzeugt werden. $A_\mathfrak{m}(K)$ ist im allgemeinen von der auf S. 263 definierten Gruppe $A_\mathfrak{m}$ grundverschieden. — *Anm. d. Übers.*). Weiterhin muß $H_\mathfrak{m}(k)$ in $H'_\mathfrak{m}(k)$ enthalten sein; folglich interessierte sich Takagi für die $H'_\mathfrak{m}(k)$ der Gestalt

$$N_\mathfrak{m}(K/k) = H_\mathfrak{m}(k) \cdot N_{K/k}(A_\mathfrak{m}(K)) .$$

Wir setzen nun $h_\mathfrak{m} = h_\mathfrak{m}(K/k) = [A_\mathfrak{m}(k):N_\mathfrak{m}]$

Unter Benutzung der in 5.5.8. diskutierten Heckeschen Arbeit gelang es Takagi, zu zeigen, daß stets die Ungleichung $h_\mathfrak{m}(K/k) \leqq [K:k]$ gilt. Es ist bemerkenswert, daß er auch beweisen konnte — und dies ist wirklich ein sehr tiefliegendes Resultat —, daß es genau dann einen Divisor $\mathfrak{m}$ mit

$$h_\mathfrak{m}(K/k) \geqq [K:k]$$

gibt, wenn K/k ein Klassenkörper im Sinne von Weber ist. Dementsprechend definierte Takagi einen Klassenkörper auf folgende Weise:

Die Erweiterung K/k ist ein Klassenkörper von k, wenn es einen Divisor $\mathfrak{m}$ mit $h_\mathfrak{m} = [K:k]$ gibt.

Ist K/k ein Klassenkörper, so gibt es einen eindeutig bestimmten Divisor $\mathfrak{f}$ von k derart, daß $h_\mathfrak{m} = [K:k]$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{m}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{f}$ ist, und man nennt $\mathfrak{f}$ den Führer des Klassenkörpers K. Mit den oben eingeführten Definitionen hat Takagi die folgenden Sätze bewiesen:

(I) K ist genau dann ein Klassenkörper für k, wenn K/k abelsch ist.

(II) Ist eine bestimmte Gruppe $H'_\mathfrak{m}$ von k gegeben, so gibt es genau einen Klassenkörper K/k derart, daß $H'_\mathfrak{m} = N_\mathfrak{m}(K/k)$ ist.

(III) Ein Primideal $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{o}_k$ verzweigt sich in K genau dann, wenn es ein Teiler von $\mathfrak{f}(K/k)$ ist.

(IV) Im Fall $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{f}(K/k)$ zerfällt das Ideal $\mathfrak{q}$ in ein Produkt von g Primfaktoren von $\mathfrak{o}_K$, von denen jeder den Grad f hat, wobei f die Ordnung der $\mathfrak{q}$ enthaltenden Klasse in der Gruppe $A_\mathfrak{f}/H'_\mathfrak{f}$ und $fg = [K:k]$ ist. Insbesondere zerfällt $\mathfrak{q}$ genau dann vollständig in K, wenn $\mathfrak{q} \in H'_\mathfrak{f}$ gilt.

(V) Es ist Gal $(K/k) \cong A_\mathfrak{f}(k)/H'_\mathfrak{f}(k)$.

Wir können hier wirklich nicht viel zum Beweis dieser Sätze sagen. Was den Satz (I) betrifft, so hat Takagi gezeigt, daß eine Erweiterung genau dann abelsch

ist, wenn $h_{\mathfrak{m}}(K/k) = [K:k]$ für einen gewissen Divisor $\mathfrak{m}$ gilt. Der tiefliegendste Teil des Beweises besteht darin zu zeigen, daß zu jeder zyklischen Erweiterung K/k ein Divisor $\mathfrak{m}$ mit $h_{\mathfrak{m}}(K/k) \geqq [K:k]$ existiert. Sobald einmal dieses Resultat feststeht, ist es verhältnismäßig einfach, es auf eine beliebige abelsche Erweiterung K/k auszudehnen. Der Beweis im zyklischen Fall zieht Konstruktionen heran, welche die Geschlechter benutzen; er wurde unmittelbar von den Hilbertschen Arbeiten über die Kummerschen Körper und die relativ-quadratischen Körper angeregt.

Die Sätze (II) und (IV) zeigen, daß die von Takagi definierten Körper mit den von Weber postulierten Körpern übereinstimmen. Das letzte Resultat, der Satz (V), ist besonders interessant; denn Takagi hat nur gezeigt, daß die beiden Gruppen isomorph sind, aber keinen Isomorphismus zwischen ihnen explizit angegeben. Es war Artin, der 1927 einen solchen Isomorphismus angab; wir werden diesen Punkt im nächsten Abschnitt diskutieren, während wir an dieser Stelle das Endergebnis insoweit formulieren werden, wie es den Satz (V) vervollständigt:

Es sei K/k eine abelsche Erweiterung mit $A_{\mathfrak{f}}/H'_{\mathfrak{f}}$ als Kongruenzklassengruppe. Für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ von k haben wir den Frobenius- oder Artin-Automorphismus $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{q}}\right)$ aus Gal (K/k), wie er in 5.5.8. definiert wurde. Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $A_{\mathfrak{f}}$, etwa $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$, so setzt man

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}_i}\right)^{e_i} \in \mathrm{Gal}\,(K/k)\,.$$

Der Satz von Artin lautet folgendermaßen:

Der Homomorphismus $\mathfrak{a} \to \left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)$ *von* $A_{\mathfrak{f}}$ *in* Gal (K/k) *ist surjektiv, sein Kern ist* $H'_{\mathfrak{f}}$, *so daß er einen Isomorphismus* $A_{\mathfrak{f}}/H'_{\mathfrak{f}} \sim$ Gal (K/k) *definiert.*

Dieser Satz wird gewöhnlich als *Artinsches Reziprozitätsgesetz* bezeichnet; seine Beziehungen zu den mehr klassischen Reziprozitätsgesetzen werden nachstehend erläutert.

Wir erinnern daran (vgl. 5.5.8.), daß Weber auf seinen Begriff des Klassenkörpers geführt worden war, als er versuchte, die Relation

$$\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)} = \prod_{\chi} L(s, \chi, k) \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{q_i^s}\right)$$

zu beweisen. Zu diesem Zweck kann man die Sätze (II) und (III) von Takagi benutzen. In der Tat zeigt die obige Formel einen einfacheren Aufbau, wenn man den Begriff des *primitiven Charakters* einführt: Es sei $A_{\mathfrak{m}}/H'_{\mathfrak{m}}$ die zu dem Klassenkörper K/k assoziierte Kongruenzklassengruppe. In 5.5.8. haben wir $\chi(\mathfrak{a})$ für einen Charakter χ von $A_{\mathfrak{m}}/H'_{\mathfrak{m}}$ und ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ definiert. Wir betrachten die Gruppe $H^*_{\mathfrak{m}} = \{\mathfrak{a} \mid \chi(\mathfrak{a}) = 1\}$; dann gilt $H^*_{\mathfrak{m}} \supset H'_{\mathfrak{m}} \supset H_{\mathfrak{m}}$, und $A_{\mathfrak{m}}/H^*_{\mathfrak{m}}$ definiert eine weitere Kongruenzklassengruppe mit dem Führer $\mathfrak{f}_\chi$ (man nennt $\mathfrak{f}_\chi$ den *Führer des Charakters* χ). Der Charakter χ definiert einen Charakter χ^* auf $A_{\mathfrak{m}}/H^*_{\mathfrak{m}}$ mit

Hilfe von $\chi^*(\mathfrak{a}H_\mathfrak{m}^*) = \chi(\mathfrak{a}H'_\mathfrak{m})$; man nennt χ^* einen *primitiven Charakter*. Ist $H_\mathfrak{m}^* = H'_\mathfrak{m}$, so ist χ primitiv; im Fall $H_\mathfrak{m}^* \neq H'_\mathfrak{m}$ nennt man χ *imprimitiv*. Schränkt man in der Formel für ζ_K/ζ_k das Produkt auf die primitiven Charaktere von $A_\mathfrak{m}/H'_\mathfrak{m}$ ein, so darf man

$$\frac{\zeta_K(s)}{\zeta_k(s)} = \prod_{\chi \text{ primitiv}} L(s, \chi, k)$$

schreiben.

Wir schließen diesen Abschnitt über Takagi ab, indem wir auf Kroneckers Jugendtraum zurückkommen (vgl. 5.5.7.). Als Takagi 1903 alle Klassenkörper über $k = \boldsymbol{Q}(i)$ konstruierte, bemerkte er, daß man mehr Gruppen als Körper erhält, wenn man zu k nur Einheitswurzeln und singuläre Moduln adjungiert, und daß man daher auch noch die Koordinaten der Punkte von endlicher Ordnung auf den zugehörigen elliptischen Kurven adjungieren muß. Später bewies er das entsprechende Ergebnis für einen beliebigen imaginär-quadratischen Zahlkörper k.

5.5.10.2. Die Arbeiten von Artin

Im Jahre 1923 begann E. Artin mit der Veröffentlichung von Arbeiten, die den Quotienten $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ betreffen, wobei K eine endliche Erweiterung von k ist; er hatte wahrscheinlich zwei Hauptgründe, um dieses Problem zu untersuchen. Einmal hatten Dirichlet, Kummer und Dedekind ihre Klassenzahlformeln im wesentlichen durch die Untersuchung dieses Quotienten hergeleitet. Allgemeiner gesagt, wenn man diesen Quotienten kennt, kann man $h(K)$ als Funktion von $h(k)$ ausdrücken und Eigenschaften der einen Zahl aus der Kenntnis der Eigenschaften der anderen Zahl gewinnen. Der zweite Beweggrund rührt von einem Satz her, der — wie wir gesehen haben — von Weber vermutet und von Takagi bewiesen wurde; er lautet: Ist K/k abelsch, so ist

$$\zeta_K(s) = \zeta_k(s) \prod_\chi L(s, \chi) ,$$

wobei das Produkt über die primitiven Nicht-Hauptcharaktere von Gal (K/k) zu erstrecken ist. Artin fragte sich, ob es analoge Sätze gebe, wenn K/k eine beliebige nichtabelsche Galoissche Erweiterung ist.

In seiner ersten Arbeit über den Gegenstand versuchte er zu beweisen, daß $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ eine ganze Funktion ist oder, anders gesagt, daß jede Nullstelle von $\zeta_k(s)$ auch eine Nullstelle von $\zeta_K(s)$ ist. Im Jahre 1900 hatte Dedekind beim Studium der Idealklassenzahl eines kubischen Körpers diese Tatsache für den Spezialfall gezeigt, daß $K/\boldsymbol{Q}$ eine rein-kubische Erweiterung ist. Mit ad-hoc-Methoden gelang es Artin zu zeigen, daß $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ in einigen anderen speziellen Fällen eine ganze Funktion ist. Er vermutete, daß dies auch in allen Fällen zutrifft, was aber bis heute noch nicht bewiesen ist.

Anhand der untersuchten Beispiele versuchte Artin dann, Funktionen zu definieren, die heute *Artinsche L-Funktionen* genannt werden, welche die Weberschen L-Funktionen verallgemeinern und dazu benutzt werden könnten, ein zum Satz von Takagi analoges Ergebnis zu beweisen. Seine Idee bestand darin, die *Charaktere*

der endlichen Gruppe Gal (K/k) im Sinne von Frobenius (vgl. 3.4.2.) zur Definition einer Verallgemeinerung der Weberschen L-Funktionen zu benutzen; dabei ließ er sich von der Darstellung dieser L-Funktionen durch ein Euler-Produkt leiten. Ist K/k abelsch und χ ein Charakter dieser Gruppe, so kann man mit Hilfe der Tatsache, daß χ ein *Homomorphismus* ist, die Webersche Funktion $L(s, \chi)$ für $\operatorname{Re} s > 1$ in den folgenden vier Gestalten schreiben:

$$\sum_{\mathfrak{a} \neq (0)} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}} \exp\left(- \log\left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)\right)$$
$$= \prod_{\mathfrak{p}} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{N(\mathfrak{p})^{ms}}\right).$$

Nimmt man jetzt an, K/k sei eine Galoissche Erweiterung, und ersetzt man in jedem dieser Ausdrücke χ durch einen Charakter im Sinne von Frobenius, so brauchen die auf diese Weise erhaltenen Funktionen nicht mehr übereinzustimmen, weil χ im allgemeinen kein Homomorphismus ist; außerdem muß man sich bei jeder dieser Funktionen davon überzeugen, ob sie eine *brauchbare* Verallgemeinerung der Weberschen L-Funktion ist.

Man muß zunächst wissen, welchen Sinn $\chi(\mathfrak{p})$ bzw. $\chi(\mathfrak{p}^m)$ haben soll. Da χ ein Charakter von Gal (K/k) ist, hat man ein von $\mathfrak{p}$ abhängendes explizites Element dieser Gruppe zu bestimmen. Ist $\mathfrak{p}$ unverzweigt, so ist das sich anbietende Element der Frobenius-Automorphismus $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}_i}\right)$ mit $\mathfrak{P}_i \mid \mathfrak{p}$; denn wenn $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_j$ beide $\mathfrak{p}$ teilen, dann liegen $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}_i}\right)$ und $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}_j}\right)$ in der gleichen Konjugiertenklasse von Gal (K/k), so daß $\chi\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}_i}\right)\right) = \chi\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}_j}\right)\right)$ ist. Demnach hängt $\chi\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)^m\right)$ nur von $\mathfrak{p}$ und nicht vom speziellen Idealteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ ab. Für die verzweigten Primideale $\mathfrak{p}$ existiert der Frobenius-Automorphismus nicht; es scheint keine weitere natürliche Auswahl zu geben, und man vernachlässigt in erster Näherung die (in endlicher Anzahl auftretenden) verzweigten Primideale $\mathfrak{p}$ völlig.

Wenn man dann versucht, auf diese Weise Ausdrücke zu bilden, die den oben angegebenen vier Ausdrücken für die Webersche L-Funktion analog sind, so stellt sich heraus, daß die ersten drei nicht die Eigenschaften besitzen, die für die von Artin angestrebten Anwendungen nützlich sind, und daß nur der letzte diese Eigenschaften besitzt. Deshalb wählte Artin als Verallgemeinerung der Weberschen L-Funktion den Ausdruck

$$L(s, \chi, K/k) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ unverzweigt}} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\chi\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)^m\right)}{N(\mathfrak{p})^{ms}}\right).$$

(Die wichtigste Eigenschaft dieser Funktion, die Artin brauchte, ist die folgende: Ersetzt man χ durch eine Linearkombination $r_1\chi_1 + \cdots + r_h\chi_h$ von Charakteren mit ganzzahligen Koeffizienten, so muß man für die durch die obige Formel defi-

nierte Funktion $L(s, \chi, K/k)$ die Relation

$$L(s, \chi, K/k) = \prod_{i=1}^{h} L(s, \chi_i, K/k)^{r_i}$$

erhalten; dies ist aber offensichtlich.)

Ersetzt man $\chi(t)$ durch $Tr\,(\mathrm{M}(t))$, wobei $t \mapsto \mathrm{M}(t)$ eine beliebige lineare Darstellung von Gal (K/k) vom Grade m ist, so kann man zeigen, daß

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{\chi\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)^m\right)}{N(\mathfrak{p})^{ms}}\right) = \left(\det\left(\mathrm{I}_m - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} \mathrm{M}\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)\right)\right)\right)^{-1}$$

gilt (hierbei ist I_m die Einheitsmatrix der Ordnung m); daher nehmen Artin und viele Autoren im Anschluß an ihn als Definition von $L(s, \chi, K/k)$ das Produkt

$$\prod_{\mathfrak{p}\text{ unverzweigt}} \frac{1}{\det\left(\mathrm{I}_m - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} \mathrm{M}\left(\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)\right)\right)};$$

für die Beweise ist aber der zuerst angegebene Ausdruck der zweckmäßigste.

In seiner Arbeit von 1923 war Artin nicht in der Lage, dieses Produkt durch Faktoren, die den verzweigten Primidealen entsprechen, zu vervollständigen; da aber diese Faktoren in endlicher Anzahl auftreten, berührt diese Tatsache die analytischen Eigenschaften des unendlichen Produkts nicht. Erst 1930 konnte Artin eine vollständige Definition seiner L-Funktionen geben; die Bestimmung der noch fehlenden Faktoren ist jedoch zu aufwendig, als daß wir sie beschreiben könnten (siehe [1]).

Ist nun K/k eine zu einer Kongruenzklassengruppe $A_{\mathfrak{f}}/H'_{\mathfrak{f}}$ gehörende abelsche Erweiterung, so muß sich die Artinsche L-Funktion auf eine Webersche L-Funktion reduzieren. Um zu beweisen, daß dem so ist, hatte Artin zu zeigen, daß die Relationen

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} \in H'_{\mathfrak{f}}$$

äquivalent sind. Artin hatte 1923 nur einige Spezialfälle dieses Satzes beweisen können und erst 1927 einen vollständigen Beweis erbracht, der sich auf Ideen stützte, die Čebotarev beim Beweis der Frobeniusschen Vermutung benutzt hatte. Dieser Satz wird heute das Artinsche Reziprozitätsgesetz genannt; denn wie Artin selbst bemerkte, kann man ihn, wenn K/k eine Kummersche Erweiterung ist, zur Herleitung vieler bekannter „Reziprozitätsgesetze" benutzen (siehe [1]).

Ehe wir auf spätere Entwicklungen der Theorie der Artinschen L-Funktionen zu sprechen kommen, erwähnen wir eine interessante Anwendung des Reziprozitätsgesetzes, die wir Furtwängler und Artin verdanken. Im Jahre 1930 war nur eine einzige von Hilberts Vermutungen über den absoluten Klassenkörper unbewiesen geblieben, nämlich der „Hauptidealsatz", nach dem jedes Ideal von $\mathfrak{o}_k$ im absoluten Klassenkörper von k zu einem Hauptideal wird. Furtwängler hatte im Verlaufe vieler Jahre vergebens nach einem Beweis dieses Satzes gesucht, doch

konnte Artin aus seinem Reziprozitätsgesetz ein entscheidendes Ergebnis herleiten, das gruppentheoretische Begriffe ins Spiel brachte, und dies erlaubte schließlich Furtwängler, im Jahre 1930 die Hilbertsche Vermutung zu beweisen.

Nachdem Artin 1930 zu einer vollständigen Definition seiner L-Funktionen gekommen war, formulierte er einige ihrer Haupteigenschaften, darunter den folgenden Satz:

Für jeden Charakter χ *von* $\mathrm{Gal}(K/k)$ *kann die Artinsche L-Funktion in der Gestalt*

$$L(s, \chi, K/k) = \prod_{i,j} L(s, \psi_{ij}, K/\Omega_i)^{r_{ij}}$$

geschrieben werden, wobei die Ω_i *bestimmte Zwischenkörper mit* $k \subset \Omega_i \subset K$ *und zyklischer Galoisgruppe* $\mathrm{Gal}(K/\Omega_i)$, *die* ψ_{ij} *Charaktere von* $\mathrm{Gal}/(K/\Omega_i)$ *und die* r_{ij} *streng positive rationale Zahlen sind.*

Die Artinschen L-Funktionen sind also mit Hilfe der Weberschen L-Funktionen direkt ausdrückbar. Artin vermutete, daß die Exponenten r_{ij} immer als streng positive *ganze* Zahlen gewählt werden können, doch ist dies noch nicht bewiesen. Immerhin konnte R. Brauer 1947 zeigen, daß man die Ω_i so wählen kann, daß die Exponenten zwar ganzzahlig, aber nicht notwendigerweise streng positiv sind.

Im Jahre 1933 hat Aramata die Arbeiten Artins benutzt, um zu zeigen, daß $\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$, wenn K/k Galoissch ist, eine ganze Funktion ist; 1947 fand R. Brauer einen einfacheren Beweis dieses Satzes. Die Abhandlung von Brauer war von großer Bedeutung; sie führte zum Beweis einer Siegelschen Vermutung über das Verhalten der Idealklassenzahl.

Siegel hatte 1935 folgendes bewiesen: Ist h die Klassenzahl, R der Regulator und d die Diskriminante eines quadratischen Zahlkörpers, so gilt für $|d| \to +\infty$

$$\log (hR) \sim \frac{1}{2} \log |d| \, .$$

Für die reell-quadratischen Zahlkörper ist der Regulator eine sehr unregelmäßig verlaufende Funktion von d, so daß man aus dieser Relation keinerlei Schlüsse über h ziehen kann. Für die imaginär-quadratischen Zahlkörper ist jedoch $R = 1$, und dann folgt aus dem Satz von Siegel, daß $h(\sqrt{-d}) \to \infty$ für $|d| \to \infty$ gilt. In den Jahren 1947 und 1949 dehnte Brauer den Satz von Siegel in zweierlei Weise aus.

Das erste Ergebnis bezieht sich auf alle algebraischen Zahlkörper von *gegebenem* Grad n. Ist d die Diskriminante, R der Regulator und h die Ideal-Klassenzahl eines solchen Körpers k, so gilt für $|d| \to \infty$ die Beziehung

$$\log (hR) = \frac{1}{2} \log |d| + f_n(d)$$

mit $f_n(d)/\log |d| \to 0$ für $|d| \to \infty$.

Die zweite Brauersche Verallgemeinerung bezieht sich auf eine Folge (k_i) von Körpern, deren Grade n_i nicht beschränkt zu sein brauchen.

Ist (k_i) *eine Folge von Galoisschen Erweiterungen von* $\mathbb{Q}$ *derart, daß* $n_i/\log |d_i|$ *gegen null strebt, so ist*

$$\log (h_i R_i) = \frac{1}{2} \log |d_i| + o(\log |d_i|) .$$

Die Sätze von Siegel und Brauer sind nicht effektiv, doch konnte Stark sie 1975 in vielen speziellen Fällen in effektive Sätze verwandeln.

5.5.10.3. Die Arbeiten von H. Hasse

Die wichtigsten Beiträge von Hasse zur Zahlentheorie sind mit drei Hauptthemen verknüpft, die wir im folgenden näher betrachten werden: dem Beweis des Satzes von Hasse-Minkowski, der dem Normensatz von Hilbert eng verwandt ist, der Entdeckung (in einer gemeinsam mit E. Artin verfaßten Arbeit) bestimmter expliziter Reziprozitätsgesetze für p-te und p^m-te Potenzen, schließlich der Verifizierung der Hilbertschen Produktformel für die Normenrestsymbole, die indirekt zu dem Themenkreis führte, der heute als *lokale Klassenkörpertheorie* bezeichnet wird.

Wir haben den Satz von Hasse-Minkowski schon in 5.5.7. unter der Bezeichnung „Satz von Minkowski" wiedergegeben. Dabei haben wir gesehen, daß Hilbert gerade durch den Wunsch, den Satz von Minkowski auf die quadratischen Formen mit algebraischen Zahlen als Koeffizienten zu verallgemeinern, zum Beweis der Existenz bestimmter Klassenkörper geführt wurde. Nachdem Hasse die Ergebnisse von Takagi über die Klassenkörper kennen gelernt hatte, konnte er die Hilbertschen Vorstellungen und die Takagischen Beweise dazu benutzen, den Satz von Minkowski folgendermaßen zu verallgemeinern:

Es sei $f(x_1, \dots, x_n)$ *eine quadratische Form, deren Koeffizienten einem algebraischen Zahlkörper* k *angehören;* $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ *besitze für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{o}_k$ *eine nichttriviale Lösung in jedem* $\mathfrak{p}$*-adischen Körper* $k_\mathfrak{p}$, *und für jede reelle Einbettung* $x \mapsto x^{(v)}$ *von* k *besitze* $f(x_1^{(v)}, \dots, x_n^{(v)}) = 0$ *eine nichttriviale reelle Lösung. Dann besitzt* $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ *eine nichttriviale Lösung in* k.

Es zeigt sich, daß die schwierigen Fälle diejenigen der Formen mit zwei und drei Variablen sind, während sich der allgemeine Fall durch eine leichte Rekursion daraus herleitet. Der Fall $n = 2$ ist eine unmittelbare Konsequenz des Satzes, daß $\alpha \in k$ genau dann ein Quadrat in k ist, wenn es ein Quadrat in jedem $k_\mathfrak{p}$ und in jeder reellen Einbettung von k ist. (Mit anderen Worten, α ist genau dann ein „globales" Quadrat, wenn es an jeder Stelle ein „lokales" Quadrat ist.) Wie wir sehen werden, ist der Fall $n = 3$ ein Spezialfall des sogenannten *Normensatzes* (vgl. 5.5.7.), auf den wir im folgenden eingehen.

Ist die Form $f(x_1, x_2, x_3)$ nicht ausgeartet (d. h. nicht auf eine Form mit weniger als drei Variablen reduzierbar), dann läßt sie sich bekanntlich nach einer einfachen linearen Variablentransformation in der Gestalt

$$f(x) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ aus k, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$ (vgl. 3.2.2.) schreiben. Man bringt die Gleichung $f(x) = 0$ auf die Gestalt

$$-\alpha_1\alpha_2 = \left(\frac{\alpha_2 x_2}{x_1}\right)^2 + \alpha_2\alpha_3\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = y_1^2 + \alpha_2\alpha_3 y_2^2$$
$$= \mathrm{Norm}_{K/k}(y_1 + \sqrt{-\alpha_2\alpha_3}\, y_2)\,,$$

wobei $K = k(\sqrt{-\alpha_2\alpha_3})$ ist. Daher besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn $-\alpha_1\alpha_2$ die Norm eines Elements von K ist. Ebenso folgt aus der Annahme, $f(x) = 0$ besitze eine nichttriviale Lösung in jedem $k_\mathfrak{p}$ (und in $\boldsymbol{R}$, falls nötig), daß $-\alpha_1\alpha_2$ überall eine „lokale" Norm eines Elements von $k_\mathfrak{p}(\sqrt{-\alpha_2\alpha_3})$ bezüglich $k_\mathfrak{p}$ ist.

Im Jahre 1924 zeigte Hasse, daß *v genau dann eine Norm eines Elements von $k(\sqrt{\mu})$ bezüglich k ist, wenn v überall eine lokale Norm ist.* Dies ist der Normensatz, den Hilbert nur in bestimmten Spezialfällen bewiesen hatte.

Ein wenig später, 1930, dehnte Hasse den Normensatz vom Fall der quadratischen Erweiterungen eines Körpers k auf alle *zyklischen* Erweiterungen von k aus. Allerdings ist das Analogon dieses Satzes für die *abelschen* Erweiterungen K/k nicht immer richtig; beispielsweise kann man zeigen, daß sich im Fall $k = \boldsymbol{Q}$, $K = \boldsymbol{Q}(\sqrt{13}, \sqrt{17})$ als Gal $(K/\boldsymbol{Q})$ die Gruppe $(\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}) \times (\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})$ ergibt und die Zahl -1 überall eine lokale Norm, aber nicht Norm eines Elements von K ist. (Die Einführung der homologischen Algebra in die Theorie der algebraischen Zahlen ermöglicht es, für jede abelsche Erweiterung K/k die Faktorgruppe

{Elemente von k, die überall lokale Normen sind}/
{Elemente von k, die Normen von Elementen von K sind}

zu beschreiben, doch können wir hier auf dieses Problem nicht eingehen).

Der Normensatz liefert ein sehr befriedigendes Kriterium dafür, daß ein Element von k die Norm eines Elements einer zyklischen Erweiterung K von k ist; fragt man aber danach, welches die *ganzen* Zahlen von k sind, welche Normen *ganzer* Zahlen von K sind, so erweist sich das Problem als sehr viel schwieriger, und man kennt die Antwort nicht. In Wirklichkeit ist man nicht einmal in der Lage, die quadratischen Zahlkörper zu beschreiben, welche eine Einheit mit der Norm -1 besitzen.

Der Normensatz hat über den Satz von Hasse-Minkowski hinaus Anwendungen auf weitere Probleme gefunden. Beispielsweise benutzt das folgende, von Selmer 1953 bewiesene Resultat den Normensatz für zyklische kubische Erweiterungen:

Es seien a, b, c, d von 0 verschiedene ganze Zahlen mit $ad = bc$. Die Gleichung

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dw^3 = 0$$

besitzt genau dann nichttriviale Lösungen in $\boldsymbol{Q}$, wenn sie in jedem $\boldsymbol{Q}_p$ nichttriviale Lösungen besitzt.

Für weitere Ergebnisse dieses Typs siehe 5.9.

Ein zweiter Aspekt der Arbeiten von Hasse bezieht sich auf die „expliziten" Reziprozitätsgesetze für die p-ten und die p^m-ten Potenzen (p Primzahl), auf die

wir nicht im einzelnen eingehen. Wir haben gesehen, daß es nach der Entdeckung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes von Legendre verschiedene Verallgemeinerungen dieses Gesetzes zu „höheren Reziprozitätsgesetzen" gab (vgl. 5.3.3.). Diese Arbeiten, die bloße Verallgemeinerungen ohne ausreichende Motivation waren, erwiesen sich zunächst als steril. Dann bemerkte Kummer bei seinen Untersuchungen über das Fermatsche Problem, daß er bestimmte technische Lemmata brauchte, welche Verallgemeinerungen früherer Ergebnisse von Gauß, Jacobi und Eisenstein waren; diese Lemmata sind sämtlich als „Reziprozitätsgesetze" bezeichnet worden. Nach Kummer wurde diese Art von Untersuchungen aufgegeben, bis Takagi 1920 eine Verallgemeinerung der Kummerschen Reziprozitätsgesetze publizierte, die wir nicht formulieren.[57] In einer gemeinsam verfaßten Arbeit gaben Artin und Hasse eine weitere Verallgemeinerung der Kummerschen Reziprozitätsgesetze auf bestimmte Spezialfälle. Wir hätten diese Tatsache nicht erwähnt, wenn nicht 1976 Coates und Wiles einen Satz bewiesen hätten, der einen wichtigen Schritt in Richtung auf einen Beweis einer Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer (vgl. 5.9.3.5.) darstellt, wobei sie sich eines technischen Lemmas bedienen, das eine Verallgemeinerung der Reziprozitätsgesetze von Kummer, Artin und Hasse ist.

Der letzte Teil der Hasseschen Arbeiten, mit dem wir uns beschäftigen, bezieht sich auf die Hilbertsche Produktformel für die Normenrestsymbole (vgl. 5.5.7.). Hilbert hatte das Normenrestsymbol für relativ-quadratische und Kummersche Erweiterungen definiert, doch konnte er, wie wir gesehen haben, die Produktformel nur in einigen speziellen Fällen beweisen. Zwischen 1900 und 1930 hatte Furtwängler verschiedene Fälle der Produktformel bewiesen und mehrere Aspekte dieses Problems näher untersucht, auf die wir nicht im Detail eingehen. Hasse wollte das Normenrestsymbol auf jede relativ-abelsche Erweiterung verallgemeinern, und zwar in einer Weise, daß die Produktformel stets gültig sein sollte. Dies gelang ihm 1929—1930 in mehreren Arbeiten. Wir führen seine Definition des Normenrestsymbols, die sehr technisch und recht gekünstelt ist, nicht an. Was uns interessiert, ist die Tatsache, daß man, um bestimmte Eigenschaften dieses Symbols zu sichern, für die $\mathfrak{p}$-adischen Körper $k_\mathfrak{p}$ (die man jetzt *lokale Körper* nennt) Sätze zu beweisen hat, die den Sätzen in Takagis Klassenkörpertheorie analog sind.

Ehe wir diese Sätze formulieren, müssen wir einige wesentliche Eigenschaften der Körper $k_\mathfrak{p}$ anführen. Der Ring $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \{\alpha \in k_\mathfrak{p} \mid |\alpha|_\mathfrak{p} \leqq 1\}$ der *ganzen* Elemente von $k_\mathfrak{p}$ ist stets ein Hauptidealring, wobei es außerdem nur *ein einziges* von null verschiedenes Primideal $\mathfrak{p} = (\pi)$ gibt; dies vereinfacht die Situation außerordentlich, und die Probleme, die sich auf die Zerlegung der Primideale von $k_\mathfrak{p}$ in einer endlichen algebraischen Erweiterung oder auf die Verteilung der Primideale auf verschiedene Klassen beziehen, werden gegenstandslos. Angesichts dieser Tatsachen lauten die Analoga der Takagischen Sätze folgendermaßen (dabei bezeichnet $k_\mathfrak{p}^\times$ die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Elemente von $k_\mathfrak{p}$):

a) *Ist H eine Untergruppe von $k_\mathfrak{p}^\times$ von endlichem Index, so gibt es eine eindeutig bestimmte abelsche Erweiterung $K_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p}$ derart, daß $H = N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(K_\mathfrak{P}^\times)$ ist. Umgekehrt*

ergibt sich jede abelsche Erweiterung $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ für eine eindeutig bestimmte Untergruppe von endlichem Index in $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ in dieser Weise.

b) *Ist $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ eine abelsche Erweiterung, so gilt*

$$\mathrm{Gal}\,(K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}) \cong k_{\mathfrak{p}}^{\times}/N_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}(K_{\mathfrak{P}}^{\times})$$

(wobei $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ und $K_{\mathfrak{P}}^{\times}$ die multiplikativen Gruppen $k_{\mathfrak{p}} \setminus \{0\}$ bzw. $K_{\mathfrak{P}} \setminus \{0\}$ sind), und man kann einen expliziten Isomorphismus mit Hilfe des Hasse-Symbols definieren.

Um diese Sätze zu beweisen, mußte Hasse die von Takagi und Artin aufgestellten Sätze der Klassenkörpertheorie wesentlich benutzen. Nachdem allerdings diese Sätze einmal gefunden und bewiesen worden waren, bemerkte man, daß man, um eine im Vergleich zu den Takagischen Arbeiten logisch einfachere Darstellung der Hauptergebnisse der Klassenkörpertheorie geben zu können, zunächst die Sätze der *lokalen* Klassenkörpertheorie aufstellen mußte, d. h. für den Fall, daß $k_{\mathfrak{p}}$ als Grundkörper genommen wird. In der Folgezeit leitete man aus den lokalen Sätzen die globale Theorie her, d. h. den Fall, daß der Grundkörper k ein algebraischer Zahlkörper ist.

Der Beweis der Sätze von Hasse ohne Benutzung der Takagischen Theorie wurde 1930 von F. K. Schmidt begonnen und 1931—1932 von Herbrand fortgesetzt. Schließlich lieferte 1933 Chevalley eine systematische Darstellung der lokalen Klassenkörpertheorie, ohne irgendein Resultat der globalen Theorie zu benutzen. Wir gehen jedoch auf diese Arbeit, die recht technischer Natur ist, nicht ein (siehe [1] und [38]).

5.5.11. *Chevalley und die Klassenkörpertheorie*

Nachdem die Sätze der lokalen Klassenkörpertheorie unabhängig von denen der globalen Theorie bewiesen worden waren, wollte Chevalley zeigen, daß die globalen Sätze aus den lokalen Sätzen hergeleitet werden können. Das erste Ergebnis in dieser Richtung wurde 1936 erzielt, als er einen Weg fand, die Kongruenzklassengruppen von Takagi mittels eines neuen Begriffes, des *Idels*, auszudrücken.

Ist ein algebraischer Zahlkörper k als endliche Erweiterung von $\mathbf{Q}$ gegeben, so betrachtet man das Produkt *aller* lokalen Körper $k_{\mathfrak{p}}$, wobei $\mathfrak{p}$ sowohl die endlichen als auch die unendlichen Stellen von k durchläuft. Dieses Produkt $\mathbf{P}_k$ besteht also aus „Vektoren"

$$\xi = (\dots, \xi_{\mathfrak{p}}, \dots)$$

mit einer Komponente $\xi_{\mathfrak{p}}$ in jedem $k_{\mathfrak{p}}$. Offenbar enthält $\mathbf{P}_k$ alle Vektoren $\boldsymbol{\alpha} = (\dots, \alpha, \alpha, \alpha, \dots)$ mit $\alpha \in k$; diese Menge, die offensichtlich ein zu k isomorpher Körper ist, wird mit $\mathbf{k}$ bezeichnet. Jedem Divisor

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_g^{r_g}$$

von k kann man die aus allen Vektoren $(\dots, \xi_{\mathfrak{p}}, \dots)$ mit $|\xi_{\mathfrak{p}_i}|_{\mathfrak{p}_i} = N(\mathfrak{p}_i)^{-r_i}$ für $1 \leqq i \leqq g$ und $|\xi_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1$ für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ $(1 \leqq i \leqq g)$ bestehende Teilmenge von $\mathbf{P}_k$ zuordnen

Mit anderen Worten, $\xi_{\mathfrak{p}_i}$ hat die Gestalt $u_{\mathfrak{p}_i}\pi_{\mathfrak{p}_i}^{r_i}$, wobei $u_{\mathfrak{p}_i}$ eine $\mathfrak{p}_i$-adische Einheit ist und $\pi_{\mathfrak{p}_i} \in \mathfrak{p}_i$, $\pi_{\mathfrak{p}_i} \notin \mathfrak{p}_i^2$ für $1 \leqq i \leqq g$ gilt, während $\xi_{\mathfrak{p}}$ für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ eine $\mathfrak{p}$-adische Einheit ist. Umgekehrt muß jedes Element von $\mathbf{P}_k$, das auf diese Weise einem Divisor zugeordnet ist, bestimmten Bedingungen genügen, nämlich zur Menge

$$\mathbf{J}_k = \{\xi \in \mathbf{P}_k \mid \xi_{\mathfrak{p}} \neq 0 \text{ für alle } \mathfrak{p} \text{ und } |\xi_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} = 1 \text{ mit Ausnahme endlich vieler Stellen}\}$$

gehören. Man sagt, $\mathbf{J}_k$ sei die Menge der *Idele* des Körpers k; dies ist eine multiplikative Gruppe unter komponentenweiser Multiplikation; sie enthält als Untergruppe die multiplikative Gruppe $\mathbf{k}^{\times}$. Bezeichnet $A(k)$ die Gruppe der Divisoren von k, so wird durch

$$g(\mathbf{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\alpha_{\mathfrak{p}}}$$

für jedes Idel $\mathbf{a} = (\dots, u_{\mathfrak{p}}\pi_{\mathfrak{p}}^{\alpha_{\mathfrak{p}}}, \dots)$ ein surjektiver Homomorphismus $g\colon \mathbf{J}_k \to A(k)$ definiert, wobei das Produkt über alle Stellen (es ist ja $\alpha_{\mathfrak{p}} = 0$ bis auf endlich viele Stellen) zu erstrecken ist. Der Kern $\mathbf{U}_k$ von g besteht aus denjenigen Idelen, deren sämtliche Komponenten $\mathfrak{p}$-adische Einheiten sind, so daß $\mathbf{J}_k/\mathbf{U}_k$ zu $A(k)$ isomorph ist.

Es sei $H(k)$ die Gruppe der Hauptdivisoren (dies sind die Hauptideale mit einem zusätzlichen Faktor, der den unendlichen Stellen Rechnung trägt); $A(k)/H(k)$ ist isomorph zur Idealklassengruppe, und man sieht leicht, daß $\mathbf{J}_k/\mathbf{k}^{\times} \cdot \mathbf{U}_k$ zu der Gruppe $A(k)/H(k)$ isomorph ist.

Allgemeiner sei $A_{\mathfrak{f}}/H_{\mathfrak{f}}'$ eine Kongruenzklassengruppe mit dem Führer $\mathfrak{f}$. Man definiert eine Abbildung von $A(k)$ auf $A_{\mathfrak{f}}$, indem man in einem Divisor einfach die $\mathfrak{f}$ teilenden Primstellen wegläßt. Der Kern dieses Homomorphismus ist die von den Primdivisorteilern von $\mathfrak{f}$ erzeugte Gruppe $\langle\mathfrak{f}\rangle$. Sind $\langle\mathbf{f}\rangle$ und $\mathbf{H}_{\mathfrak{f}}'$ die Idelgruppen, welche $\langle\mathfrak{f}\rangle$ bzw. $H_{\mathfrak{f}}'$ entsprechen, so ist $A_{\mathfrak{f}}/H_{\mathfrak{f}}'$ isomorph zu $\mathbf{J}_k/\langle\mathbf{f}\rangle\, \mathbf{H}_{\mathfrak{f}}'$; daher kann jede Kongruenzklassengruppe eindeutig einer Faktorgruppe von $\mathbf{J}_k$ zugeordnet werden. Man kann die Gruppe $\langle\mathbf{f}\rangle\, \mathbf{H}_{\mathfrak{f}}'$ auf verschiedene Arten charakterisieren; die brauchbarste entspricht der von Takagi angegebenen Charakterisierung der Kongruenzklassengruppen mit Hilfe der Norm.

Um diese zu definieren, falls eine endliche abelsche Erweiterung K/k von k gegeben ist, definiert man die *Norm*abbildung $\mathbf{N}_{K/k}\colon \mathbf{J}_K \to \mathbf{J}_k$ für die Idele von K durch

$$\mathbf{N}_{K/k}\mathbf{A} = (\dots, \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{P}} N_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{P}}), \dots) .$$

Die aus den Normen der Idele von $\mathbf{J}_k$ bestehende Untergruppe von $\mathbf{J}_K$ wird mit $\mathbf{N}(\mathbf{K}/\mathbf{k})$ bezeichnet. Mit Hilfe der Sätze von Takagi und des Artinschen Reziprozitätsgesetzes konnte Chevalley zeigen, daß die zu der Erweiterung K/k assoziierte Kongruenzklassengruppe $A_{\mathfrak{f}}/H_{\mathfrak{f}}'$ zu $\mathbf{J}_k/\mathbf{k}^{\times} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{K}/\mathbf{k})$ isomorph ist.

Selbstverständlich mußte Chevalley, um das Artinsche Reziprozitätsgesetz anzuwenden, diese Aussage in die Sprache der Idele übersetzen, was auf folgende Weise bewerkstelligt wird. Man zeigt leicht (mit Hilfe des Chinesischen Restklassensatzes), daß jedes Idel $\mathbf{a} \in \mathbf{J}_k$ in der Gestalt $\alpha \cdot \mathbf{a}'$ mit $\alpha \in \mathbf{k}^{\times}$ und $\mathbf{a}_{\mathfrak{p}}' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^r}$

für jede Potenz $\mathfrak{p}^r$, die $\mathfrak{f}$ teilt, dargestellt werden kann. Ist $(\mathbf{b})$ das dem Idel $\mathbf{b}$ assoziierte Ideal, so wird das Symbol $(\mathbf{a}, K/k)$ durch

$$(\mathbf{a}, K/k) = \left(\frac{K/k}{(\mathbf{a}')}\right)$$

definiert, wobei die rechte Seite das klassische Artin-Symbol ist; der so definierte Wert von $(\mathbf{a}, K/k)$ hängt nicht von der Wahl der Zerlegung $\mathbf{a} = \alpha \cdot \mathbf{a}'$ ab. Da die Artin-Abbildung von $A(k)$ in Gal (K/k) surjektiv ist, hat man auf diese Weise einen surjektiven Homomorphismus von $\mathbf{J}_k$ auf Gal (K/k) definiert; aus dem Artinschen Reziprozitätsgesetz folgt dann:

Die Gruppe der Idele $\mathbf{a}$ *mit* $(\mathbf{a}, K/k) = 1$ *ist genau* $\mathbf{k}^\times \cdot \mathbf{N}(\mathbf{K}/\mathbf{k})$, *und es gibt einen kanonischen Isomorphismus von* $\mathbf{J}_k/\mathbf{k}^\times \cdot \mathbf{N}(\mathbf{K}/\mathbf{k})$ *auf* Gal (K/k).

Im Jahre 1940 konnte Chevalley endlich sein Vorhaben abschließen, die Sätze von Takagi ausgehend von den Sätzen der lokalen Klassenkörpertheorie zu erhalten; wir können über diese Abhandlung sehr technischer Natur nichts sagen, möchten nur erwähnen, daß viele Ergebnisse darin vom topologischen Standpunkt aus bewiesen sind [1].

Ein weiterer Aspekt der Arbeiten Chevalleys betrifft die unendlichen abelschen Erweiterungen eines algebraischen Zahlkörpers k. Chevalley nahm ihre Untersuchung 1936 auf und setzte sie in seiner Arbeit von 1940 fort. Alle Sätze der Klassenkörpertheorie, die man verallgemeinern zu können gehofft hatte, lassen sich tatsächlich und mit nur sehr wenigen zusätzlichen Schwierigkeiten in den Beweisen ausdehnen. Die tiefere Untersuchung der unendlichen abelschen Erweiterungen dauert gegenwärtig an.

5.5.12. Die späteren Arbeiten von Artin

Im Jahre 1945 fanden Artin und Whaples eine interessante Charakterisierung derjenigen Körper, für welche die Hauptsätze der Theorie der algebraischen Zahlkörper gelten. Diese Charakterisierung beruht auf dem Begriff des Absolutbetrages (vgl. 5.5.9.). Wir bemerken zunächst, daß für $r \in \mathbf{Q}$ die Beziehung $|r| \cdot \prod_p |r|_p = 1$ gilt, wobei das Produkt über alle Primzahlen erstreckt wird. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß eine analoge Formel für jeden algebraischen Zahlkörper k gilt:

$$\prod_{\mathfrak{p}} |\alpha|_{\mathfrak{p}} \cdot \prod_{\substack{\alpha \to \alpha^{(i)} \\ \text{reell}}} |\alpha^{(i)}| \cdot \prod_{\substack{\alpha \to \alpha^{(i)} \\ \text{komplex}}} |\alpha^{(i)}|^2 = 1 \, .$$

Artin und Whaples stellten fest, daß die Beweise solcher Sätze wie des Dirichletschen Einheitensatzes und des Satzes von der Endlichkeit der Klassenzahl letzten Endes auf gewissen Eigenschaften der Absolutbeträge von k und auf der obigen Formel beruhen. Genauer gesagt, die Bedingungen, unter denen diese Beweisideen anwendbar sind, bestehen in folgendem:

(1) Es gibt eine Familie M_k von Absolutbeträgen $|\ |_p$ auf k derart, daß für $\alpha \in k^\times$ bis auf endlich viele $p \in M_k$ die Beziehung $|\alpha|_p = 1$ gilt und $\prod_{p \in M_k} |\alpha|_p = 1$ ist.

(2) M_k enthält wenigstens eine Stelle p, die entweder archimedisch und durch einen Isomorphismus von k in $\boldsymbol{R}$ oder in $\boldsymbol{C}$ induziert ist oder nichtarchimedisch mit einem endlichen Restklassenkörper und so beschaffen ist, daß die Menge $\{|\alpha|_p \mid \alpha \in k^\times \text{ und } |\alpha|_p < 1\}$ ein maximales Element enthält.

Es ist bemerkenswert, daß die *einzigen* Körper, welche diesen Bedingungen genügen, die endlichen algebraischen Erweiterungen von $\boldsymbol{Q}$ oder von $\boldsymbol{F}_q(t)$ (dem Körper der rationalen Funktionen über einem endlichen Körper $\boldsymbol{F}_q$ mit q Elementen) sind. Für $\boldsymbol{F}_q(t)$ sind die Absolutbeträge die folgenden: Ist $p = p(t) \in \boldsymbol{F}_q(t)$ ein normiertes irreduzibles Polynom, so setzt man für jeden rationalen Bruch

$$\frac{m(t)}{n(t)} = p(t)^{\nu(m/n)} \frac{r(t)}{s(t)}$$

mit zu $p(t)$ primen Polynomen $r(t)$ und $s(t)$:

$$\left|\frac{m(t)}{n(t)}\right|_{p(t)} = q^{-\nu(m/n)\deg(p)} .$$

Der „Absolutbetrag im Unendlichen" $|\ |_\infty$ wird durch

$$\left|\frac{m(t)}{n(t)}\right|_\infty = q^{\deg(n)-\deg(m)}$$

definiert. Es ist leicht nachzuweisen, daß die Axiome von Artin-Whaples von diesen Absolutbeträgen erfüllt werden.

Zwischen 1950 und 1960 bewies Artin in Zusammenarbeit mit Tate zuerst die Sätze der lokalen Klassenkörpertheorie, danach die der globalen Theorie unter alleiniger Benutzung der obigen Axiome; damit dehnte er die Klassenkörpertheorie auf die endlichen algebraischen Erweiterungen von $\boldsymbol{F}_q(t)$ aus. In dieser Weise führten Artin und Tate einen Teil des Kroneckerschen Programms durch, das darin bestand, die Sätze der algebraischen Zahlentheorie und die der algebraischen Geometrie „in einer Dimension" in einem Zuge zu beweisen.

Eine andere Idee von Artin war es, Tate 1950 als Dissertationsthema die Aufgabe zu stellen, einen neuen Beweis der Ergebnisse von Hecke aus dem Jahre 1917 über die Funktionalgleichungen der Weberschen L-Funktionen zu erbringen; dabei sollten sie unter dem Gesichtswinkel des Übergangs vom Lokalen zum Globalen neu betrachtet werden, wie es Chevalley mit den Resultaten von Takagi getan hatte. Es ist interessant zu bemerken, daß eines der Hauptwerkzeuge in der Dissertation von Tate die Einführung eines Haarschen Maßes auf den Gruppen $k_\mathfrak{p}^\times$ und $\boldsymbol{J}_k$ war, was ihm ermöglichte, die Sätze der harmonischen Analysis auf die Zahlentheorie anzuwenden.

Schließlich waren es Artin und Tate, die weitgehend an der Anwendung der Kohomologietheorie auf die Klassenkörpertheorie beteiligt waren, ein Problem, auf das wir hier nicht eingehen können [1].

5.6. Primzahlen

Mit Ausnahme von ein oder zwei isolierten Resultaten ist die Primzahltheorie in der Hauptsache eine Schöpfung des neunzehnten Jahrhunderts. Im eigentlichen Sinne setzte sie 1837 ein, als Dirichlet begann, die Methoden der Analysis auf die Probleme der Zahlentheorie anzuwenden. Wir werden einen recht vollständigen Abriß der vor 1900 erzielten Hauptergebnisse geben, nach diesem Datum aber stark auswählen; denn der technische Charakter des Gegenstands übersteigt das Niveau dieses Buches. Wir werden im Abschnitt 5.11. über die additive Zahlentheorie viele Dinge diskutieren, die mit der Primzahltheorie zusammenhängen.

Die erste systematische Darstellung der ganzen Zahlen und ihrer Teilbarkeitseigenschaften findet sich in Euklids *Elementen*. Dort gab Euklid seinen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier positiver ganzer Zahlen an. Er zeigte auch, daß eine Primzahl p, die Teiler eines Produktes ab ist, mindestens eine der Zahlen a oder b teilt. Euklid hat auch gezeigt, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Er schloß wie folgt. Es sei P das Produkt endlich vieler Primzahlen, und es sei $Q = P + 1$. Hätten P und Q einen gemeinsamen Primfaktor, so wäre dieser ein Teiler von $Q - P = 1$, was unmöglich ist. Da aber Q eine Zahl größer als 1 ist, ist Q durch eine bestimmte Primzahl teilbar; daher gibt es mindestens eine Primzahl, die von den in P aufgehenden Primzahlen verschieden ist. Gäbe es nur endlich viele Primzahlen, so könnten wir als P das Produkt all dieser Primzahlen nehmen; damit haben wir den gewünschten Widerspruch.

Bei Euklid findet sich auch ein Verfahren zum Auffinden der Primzahlen unterhalb einer gegebenen ganzen Zahl N, das unter dem Namen „Sieb des Eratosthenes" (vgl. 5.11.1.) bekannt ist.[57a] Eratosthenes (der übrigens der erste war, der den Erdumfang berechnete) bemerkte, daß man die zwischen $\sqrt{N}$ und N liegenden Primzahlen herausfinden kann, indem man aus der Folge $1, 2, \ldots, N$ jede ganze Zahl streicht, die ein Vielfaches einer ganzen, $\sqrt{N}$ nicht übersteigenden Zahl ist.

Es mag seltsam erscheinen, daß Euklid, der so weit vorgedrungen war, den „Hauptsatz der Arithmetik" nicht bewiesen hat, d. h. den Satz, daß jede ganze positive Zahl als Produkt von Primzahlen dargestellt werden kann und daß diese Darstellung bis auf die Reihenfolge eindeutig ist. Der Grund dafür ist einfach: Euklid verfügte nicht über einen formalen Kalkül für die Multiplikation und die Potenzbildung. Es wäre für ihn unmöglich gewesen, den Satz auszusprechen, geschweige ihn zu beweisen. (Der erste publizierte Beweis dieses Satzes steht in den *Disquisitiones Arithmeticae* von Gauß, obwohl er natürlich seit Jahrhunderten zum mathematischen Allgemeinwissen gehörte.)

Nach Euklid hat man bis 1737 fast nichts über die Verteilung der Primzahlen gefunden; damals veröffentlichte Euler einen neuen Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Primzahlen. Der Beweis, den wir nachstehend wiedergeben, ist für die Zahlentheorie außerordentlich wichtig, denn er bildet den ersten Versuch, die Arithmetik, die Untersuchung der diskreten Größen, mit der Analysis, der Untersuchung der stetigen Größen, zu verknüpfen. Zur damaligen Zeit bereitete diese Vermischung einigen Mathematikern Unbehagen, doch ein Jahrhundert

später, 1837, erzielte Dirichlet den Durchbruch. Seitdem sind Analysis und Zahlentheorie untrennbar miteinander verbunden. Nun zum Prinzip des Beweises von Euler.

Angenommen, $p_1, p_2, \ldots, p_N$ wäre eine vollständige Liste aller Primzahlen. Für $s > 1$ betrachten wir das Produkt

$$\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{N}\left(1+\frac{1}{p_i^s}+\frac{1}{p_i^{2s}}+\cdots\right).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung tritt jedes Produkt von Primzahlen genau einmal auf, und da jede ganze Zahl auf eindeutige Weise als Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann, erscheint jeder Bruch $1/n^s$, $s \geqq 1$, genau einmal in der Entwicklung (der Hauptsatz spielt hier herein, doch beweist ihn Euler nicht explizit). So erhalten wir

$$\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{p_i^s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Für $s = 1$ ist die linke Seite der Gleichung endlich, die rechte Seite eine divergente Reihe. Damit haben wir einen Widerspruch erhalten, es gibt also unendlich viele Primzahlen. Die wesentlichen Punkte des Eulerschen Beweises sind: (1) der Hauptsatz der Arithmetik hängt mit der Unendlichkeit der Menge der Primzahlen zusammen; (2) ein analytischer Sachverhalt, die Divergenz der harmonischen Reihe, wird zum Beweis eines Satzes der Arithmetik benutzt.

Euler drang jedoch weiter vor als bis zum bloßen Beweis der Unendlichkeit der Menge der Primzahlen; er hat auch gezeigt, daß die Summe aller reziproken Primzahlen, d. h. die Reihe $\sum_p 1/p$, divergiert. Durch Logarithmieren der obigen Gleichung erhält man nämlich

$$\begin{aligned}\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s\right) &= -\sum_p \log(1-1/p^s) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}\\ &= \sum_p 1/p^s + \sum_p \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}.\end{aligned}$$

Da die Doppelreihe $\sum_p \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}}$ für $s \geqq 1$ konvergiert, ergibt sich, daß für $s \to 1$ die Differenz

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s\right) - \sum_p 1/p^s$$

beschränkt ist. Für $s \to 1$ strebt der erste Ausdruck gegen unendlich, so daß auch $\sum 1/p^s$ gegen unendlich streben muß; daher ist $\sum p^{-1}$ divergent.

Nach dieser Eulerschen Arbeit war die Verteilung der Primzahlen Gegenstand zahlreicher Spekulationen, bis genaue Hypothesen formuliert wurden. Noch 1751 schrieb Euler selbst: „Die Mathematiker haben sich bis jetzt vergeblich bemüht, irgendeine Ordnung in der Folge der Primzahlen zu entdecken, und man ist geneigt zu glauben, dies sei ein Geheimnis, das der menschliche Geist niemals durchdringen wird. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur einen Blick auf die

Primzahltabellen zu werfen, wobei sich einige die Mühe gemacht haben, diese bis über 100000 hinaus fortzusetzen, und man wird zunächst bemerken, daß dort weder eine Ordnung herrscht noch eine Regel zu beobachten ist."[1])

Angesichts der Meinung von Euler, die auch allgemein geteilt wurde, ist es um so bemerkenswerter, daß Legendre gegen 1785, nachdem er die Anzahl der Primzahlen unterhalb x mit $\pi(x)$ bezeichnet hatte, eine Näherungsformel für $\pi(x)$ angab. Legendre hat nicht versucht, die Feinstruktur der Primzahlen zu erklären; er hat den klassischen Standpunkt verlassen, indem er sich fragte, ob es eine gewisse Regelmäßigkeit in der mittleren Verteilung der Primzahlen gäbe oder nicht. Nachdem die Frage gestellt war, war es zugegebenermaßen leicht, eine Näherungsformel für $\pi(x)$ zu finden. Die Legendresche Formel, die sich auf Tafeln der Primzahlen unterhalb 40000 stützt, besagt, die Zahl $\pi(x)$ sei angenähert gleich $Ax/(B \log x + C)$, wobei A, B, C gewisse numerische Konstanten sind. In der zweiten Auflage seines *Essai sur la théorie des nombres* gab Legendre, ausgehend von zusätzlichem Zahlenmaterial, die folgende Verfeinerung seiner Formel an:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1{,}08366}.$$

Eine ähnliche, aber davon verschiedene Formel wurde von Gauß angegeben, der ebenfalls von numerischen Beobachtungen ausging. Seine Methode bestand aber darin, die Anzahl der Primzahlen innerhalb von Blöcken von je tausend aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen zu ermitteln. Dabei stellte er fest, daß eine gute Näherung für die mittlere Dichte der Primzahlen in der Umgebung einer großen Zahl x durch $1/\log x$ gegeben wird. Auf Grund dessen gab er als Approximation für $\pi(x)$

$$\int_2^x \frac{du}{\log u}$$

an. Dieses Integral wird gewöhnlich mit $\operatorname{li}(x)$ („Integrallogarithmus") bezeichnet. Partielle Integration führt auf

$$\int_2^x \frac{du}{\log u} = \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Somit sind die Formeln von Gauß und Legendre asymptotisch äquivalent.

Gauß scheint seine Beobachtungen gegen 1792, als er vierzehn Jahre alt war, begonnen und sie sein ganzes Leben lang fortgesetzt zu haben. In einem 1849 an den Astronomen Encke gerichteten Brief erzählte Gauß, wie gern er ab und zu ein Viertelstündchen damit verbringe, Primzahlen auszuzählen und daß er bis 3000000 gehe, bevor er aufhören werde. Selbstverständlich unterrichtete Gauß im gleichen Brief Encke vom Zusammenhang mit der Funktion $\operatorname{li}(x)$. Allerdings hat er zu

[1]) Euler, *Opera omnia* (1), vol. 2, p. 241. Der Eulersche Text ist in Französisch abgefaßt.

Lebzeiten seine Ergebnisse nicht veröffentlicht. Als sie schließlich 1863 publiziert wurden, hatten andere Mathematiker wie Dirichlet und Čebyšev die Bedeutung von $\mathrm{li}\,(x)$ schon erkannt.

Man weiß nicht zuverlässig, wie Legendre und Gauß ihre Näherungswerte für $\pi(x)$ ausgehend von ihren Zahlentafeln interpretiert haben. Sowohl der eine als auch der andere berechneten die Differenz zwischen $\pi(x)$ und ihrer Formel; dies geschah jedoch allein deshalb, weil sie glaubten, diese Differenz sei beschränkt. Allerdings hat Gauß vermutet, es sei stets $\pi(x) < \mathrm{li}\,(x)$ (diese Vermutung ist falsch; wir werden darauf noch zurückkommen). Letzten Endes darf man annehmen, daß sie beide gedacht haben, ihre Formel sei asymptotisch äquivalent mit $\pi(x)$, d. h., es sei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x}(\log x - 1{,}08633) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{li}\,(x)} = 1 \, .$$

In dieser Gestalt führen die beiden Behauptungen auf die einfachere Aussage

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1 \, ,$$

die als *Primzahlsatz* bekannt geworden ist. Die Aufgabe, diesen Satz zu beweisen, hat im Verlaufe von hundert Jahren die Arbeit der besten Mathematiker der Welt beflügelt.

Zur gleichen Zeit, als Legendre 1785 die Verteilung der Primzahlen innerhalb der ganzen Zahlen untersuchte, formulierte er folgende Vermutung: Sind l und k zueinander teilerfremd, so enthält die arithmetische Progression $\{kn + l\}$, $n = 1, 2, \ldots$, unendlich viele Primzahlen. Legendre erkannte die Bedeutung dieses Satzes für die Zahlentheorie und machte in seinem Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes sogar davon Gebrauch, bekannte aber, er sei nicht in der Lage, ihn zu beweisen. Mit Hilfe einer heuristischen Überlegung schlug Legendre als Näherungswert für die Anzahl der Primzahlen unterhalb x in der gegebenen Progression die Formel

$$\pi(x; k, l) \approx \frac{1}{\varphi(k)} \frac{x}{\log x - 1{,}08366}$$

vor, wobei $\varphi(k)$ die Anzahl der primen Restklassen modulo k bezeichnet.

Durch Modifikation der Überlegung Euklids konnte man zeigen, daß es für zahlreiche spezielle Werte von k und l in der arithmetischen Progression $\{kn + l\}$ unendlich viele Primzahlen gibt, doch widerstand der allgemeine Fall allen Beweisversuchen, bis Dirichlet 1837 und 1839 einen vollständigen Beweis lieferte. Die Arbeiten Dirichlets waren von großer Bedeutung und markieren den wirklichen Beginn der analytischen Zahlentheorie.

Wie Dirichlet selbst sagt, war sein Ausgangspunkt der Eulersche Beweis der Divergenz der Reihe $\sum p^{-1}$. Dirichlets Ziel war es nachzuweisen, daß im Fall $(k, l) = 1$ die Reihe divergent bleibt, wenn man sich auf Primzahlen p mit $p \equiv l \pmod k$ beschränkt. Um die Primzahlen in der Progression $\{kn + l\}$ zu finden, zog Dirichlet zwei neue Vorstellungen heran. Zuerst führte er die *Dirichlet-*

schen Charaktere ein, die in 5.4.4.2., im Abschnitt über die binären quadratischen Formen, beschrieben wurden. Die zweite Idee Dirichlets bestand darin, mit jedem Charakter χ eine Funktion $L(s, \chi)$ zu verknüpfen, die ursprünglich für reelles $s > 1$ durch

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

definiert ist. Stets dem Gedankengang Eulers folgend, kann man zeigen, daß für $s > 1$

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

gilt, woraus man durch Logarithmieren

$$\log L(s, \chi) = - \sum_p \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p^m)}{mp^{ms}}$$

erhält. Um auf der rechten Seite die Summe $\sum\limits_{p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} p^{-s}$ zu isolieren, multiplizierte Dirichlet die Gleichung mit $\overline{\chi}(l)$ und summierte über alle Charaktere, etwa

$$\sum_\chi \overline{\chi}(l)\, L(s, \chi) = \sum_\chi \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\chi}(l)\, \chi(p^m)}{mp^{ms}}.$$

An eben dieser Stelle des Beweises erkennt man die tatsächliche Bedeutung der Dirichletschen Charaktere; sie sind so konstruiert, daß sie den folgenden Relationen genügen:

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi \overline{\chi}(l)\, \chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k), \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Durch Anwendung dieser Gleichungen erhält man

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_\chi \overline{\chi}(l) \log L(s, \chi) = \sum_{p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} p^{-s} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p^m \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)} \frac{p^{-ms}}{m}.$$

Es ist verhältnismäßig leicht zu zeigen, daß die Doppelsumme für $s \geqq 1$ konvergiert. Strebt die Summe $\sum\limits_\chi \overline{\chi}(l) \log L(s, \chi)$ für $s \to 1$ gegen unendlich, so ist der Satz bewiesen. Nun ist die Funktion $L(s, \chi_0)$ mit χ_0 als dem Hauptcharakter ein Vielfaches der *Zetafunktion*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

strebt also für $s \to 1$ gegen unendlich. Daher ist

$$\lim_{s \to 1} \overline{\chi}_0(l) \log L(s, \chi_0) = +\infty,$$

und um den Beweis abzuschließen, bleibt nur zu zeigen, daß für $\chi \neq \chi_0$ jeder Term $\log L(s, \chi)$ für $s \to 1$ beschränkt bleibt. Durch Einführung des „Dirichletschen Kriteriums" für unendliche Reihen hat Dirichlet gezeigt, daß für $\chi \neq \chi_0$ die Reihe

$L(s, \chi)$ für $s > 0$ konvergiert und eine stetige Funktion darstellt. Folglich ist die Tatsache, daß $\log L(s, \chi)$ für $s \to 1$ *beschränkt ist,* der Tatsache gleichwertig, daß $L(1, \chi) \neq 0$ ist. Im Abschnitt 5.4.4. über die binären quadratischen Formen haben wir gesehen, daß Dirichlet dies bestätigte, indem er seine Klassenzahlformel bewies. Und auf diese Weise haben wir wie im Eulerschen Beweis einen Satz der Arithmetik als Konsequenz eines analytischen Satzes.

Wenden wir uns nun wieder den Fortschritten zu, die in Richtung auf den Beweis des Primzahlsatzes gemacht wurden. Das erste Ergebnis stammt aus dem Jahre 1848, als Čebyšev gezeigt hatte, daß, *falls der Grenzwert*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} \log x$$

überhaupt existiert, sein Wert gleich 1 ist. Jedoch, und dessen war sich Čebyšev wohl bewußt, bewiesen seine Überlegungen die Existenz des Grenzwerts nicht. Zwei Jahre später gelang es ihm, und zwar durch sehr scharfsinnige kombinatorische Überlegungen, zu beweisen, daß

$$0{,}92129 \leqq \liminf_{x\to\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} \leqq 1 \leqq \limsup_{x\to\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1{,}105548$$

ist, und dies legte die Existenz des Grenzwerts nahe. Autoren wie Sylvester verfeinerten die Methode von Čebyšev und verkleinerten die Differenz zwischen der unteren und der oberen Schranke, jedoch bemerkte man, daß kombinatorische Methoden niemals die Existenz des Grenzwerts beweisen können. (Unlängst hat Erdös in einer unveröffentlichten Arbeit folgendes Metatheorem bewiesen: Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ können die Methoden von Čebyšev und Sylvester nur soweit verfeinert werden, daß man die Ungleichungen

$$1 - \varepsilon \leqq \liminf_{x\to\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} \leqq \limsup_{x\to\infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} \leqq 1 + \varepsilon$$

beweisen kann; dazu mußte Erdös aber den Primzahlsatz benutzen.)

Eines der von Čebyšev mit dem Beweis seines Satzes erreichten Ziele war die Lösung eines berühmten Problems, des sogenannten *Bertrandschen Postulats,* das aussagt, daß zu jeder ganzen Zahl $n > 1$ mindestens eine Primzahl zwischen n und $2n$ existiert. Bertrand hatte es 1845 als Vermutung ausgesprochen und sich seiner bei seinen Untersuchungen der Permutationsgruppen nach Belieben bedient, war aber absolut nicht in der Lage gewesen sein, Postulat zu beweisen.

Um das Problem zu lösen, bemühte sich Čebyšev zu zeigen, daß für $n > 1$ die Ungleichung $\pi(2n) - \pi(n) > 0$ gilt. Hat man Ungleichungen des Typs

$$a \leqq \pi(x) \frac{\log x}{x} \leqq A\,,$$

die für jedes $x > x_0$ gelten, so folgt daraus leicht, daß für $n > x_0$ die Beziehung

$$\pi(2n) - \pi(n) \geqq \frac{n}{\log n} (2a - A)$$

besteht. Ist nun $2a > A$, so hat man das Ergebnis für $n > x_0$. Čebyšev gelang es, eine solche Ungleichung aufzustellen, und dann konnte er durch numerische Rechnungen das Bertrandsche Postulat auch für die ganzen Zahlen n unterhalb x_0 bestätigen.

Ganz wie Euler und Dirchlet benutzte Čebyšev als Ausgangspunkt seiner Untersuchungen die Beziehung

$$\zeta(s) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^s} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right)^{-1},$$

wobei s eine *reelle* Variable ist. Es war klar, daß es eine enge Beziehung zwischen der Funktion $\zeta(s)$ und den Primzahlen gab. Riemann zeigte 1859 in einer Arbeit, die wahrscheinlich die wichtigste ist, die je über Primzahlen publiziert wurde, daß der Schlüssel zu einem tiefen Verständnis dieser Beziehung darin liegt, die Funktion $\zeta(s)$ als Funktion der *komplexen* Variablen s anzusehen. Es ist beinahe sicher, daß Riemann dabei an den Beweis des Primzahlsatzes dachte. Es gelang ihm nicht, diesen Beweis zu finden, und tatsächlich hat er in dieser Arbeit sehr wenig bewiesen, aber einige bemerkenswerte Vermutungen formuliert.[58] Diese Vermutungen würden, wenn sie einmal bestätigt wären, eine außerordentlich gute Näherung für $\pi(x)$ liefern. Doch verstrichen mehr als 35 Jahre, ehe eine der Riemannschen Vermutungen bewiesen oder ein spezifisches Resultat über die Primzahlen auf dem von Riemann vorgezeichneten Weg erhalten wurde.

In seiner Arbeit hat Riemann die folgenden beiden Resultate bewiesen:

(a) Die Funktion $\zeta(s)$ läßt sich zu einer auf der ganzen komplexen Ebene meromorphen Funktion fortsetzen, deren einzige Singularität ein einfacher Pol in $s = 1$ mit dem Residuum 1 ist.

(b) Die Funktion genügt der Funktionalgleichung

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s\right)\zeta(1 - s).$$

Diese beiden Ergebnisse sind Folgerungen aus der Darstellung

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2}s-1} + x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\right) dx,$$

die Riemann aus der Eulerschen Formel

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{\frac{1}{2}s-1}\, dt$$

gewann, indem er t durch $\pi n^2 t$ ersetzte, durch n^s dividierte, über n summierte und eine klassische Transformation (siehe 7.1.10.) für die Funktion

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$$

benutzte. Dirichlet hatte in seiner Arbeit von 1837 ein ganz ähnliches Verfahren angewandt, um eine Integraldarstellung von $L(s, \chi)$ zu bekommen, obwohl er s nur als reelle Variable ansah.

Tatsächlich hatte schon Euler einen Spezialfall der Funktionalgleichung erhalten. Er hatte $\zeta(s)$ für eine gerade positive ganze Zahl s und für eine ungerade negative ganze Zahl s berechnet und eine Methode gefunden, um festzustellen, welches der wahre Wert von $\zeta(s)$ im letzteren Fall ist. Er hatte dann die Beziehung zwischen $\zeta(2n)$ und $\zeta(1-2n)$ bemerkt, dabei vermutet, daß die Funktionalgleichung für alle reellen Zahlen gelte, sie jedoch nur in einigen Spezialfällen beweisen können. (Für weitere Information über die Eulerschen Arbeiten über $\zeta(s)$ verweisen wir den Leser auf die ausgezeichnete Arbeit von R. Ayoub [3].) Riemann kannte das Werk von Euler und wurde von ihm beeinflußt.

Riemann hat die folgenden Behauptungen formuliert:

(a) $\zeta(s)$ besitzt unendlich viele komplexe Nullstellen, und diese sind bezüglich der beiden Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Im} s = 0$ symmetrisch angeordnet.

(b) Die Funktion $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\, \pi^{-\frac{1}{2}s}\, \Gamma(s/2)\, \zeta(s)$ kann in der Gestalt

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{p} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{s/\varrho}$$

dargestellt werden, wobei A und B Konstanten sind und sich das Produkt über alle komplexen Nullstellen ϱ von $\zeta(s)$ erstreckt.

(c) Bezeichnet $\mathcal{N}(T)$ [die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Rechteck $0 \leqq \operatorname{Re} s \leqq 1$, $|\operatorname{Im} s| \leqq T$, so ist

$$\mathcal{N}(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)\,.$$

(d) Alle komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ liegen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

(e) Für $x > 1$ definieren wir eine Funktion $\Pi(x)$ durch

$$\Pi(x) = \sum_{p^m \leqq x} \frac{1}{m}\,.$$

Diese Funktion ist eng mit $\pi(x)$ verknüpft, denn es ist

$$\Pi(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \cdots = \pi(x) + O(\sqrt{x})\,.$$

Riemann hat vermutet, daß für nicht-ganzzahlige x die explizite Formel

$$\Pi(x) = \operatorname{li}(x) - \sum_{\varrho} \operatorname{li}(x^{\varrho}) + \int_0^{\infty} \frac{du}{(u^2-1)\, u \log u} - \log 2$$

gilt, wobei sich die Summe über alle komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ erstreckt. In dieser Formel tritt der enge Zusammenhang zwischen den Nullstellen von $\zeta(s)$ und dem Wert von $\pi(x)$ zutage.

Der Wunsch, die von Riemann in seiner Arbeit aufgeworfenen Probleme zu lösen, veranlaßte Hadamard und andere zu ihren Untersuchungen zur (komplexen) Funktionentheorie und insbesondere zur Theorie der ganzen Funktionen. Die Behauptungen (a) und (b) wurden erstmals 1893 von Hadamard bewiesen und spielten in der Folgezeit bei den ersten Beweisen des Primzahlsatzes eine wichtige Rolle. Die Behauptung (c) wurde durch v. Mangoldt 1895 bewiesen, allerdings nicht ganz korrekt, im Jahre 1905 aber durch den gleichen Autor völlig gesichert; v. Mangoldt war es auch, der 1895 die explizite Formel für $\Pi(x)$ bewies.

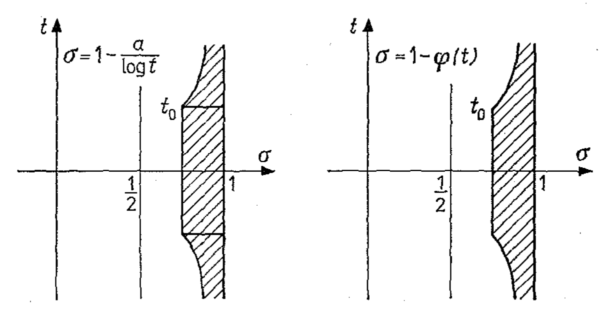
Die einzige offene Behauptung ist (d). Sie ist als *Riemannsche Vermutung* bekannt und eines der berühmtesten ungelösten Probleme der Mathematik. Den ersten bescheidenen Schritt zu einer Lösung verdankt man Riemann selbst, der zeigte, daß $\zeta(s)$ unendlich viele Nullstellen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ besitzt und daß „fast alle" Nullstellen von $\zeta(s)$ „nahe" bei dieser Geraden liegen. Riemann hat aber diese Ergebnisse nicht publiziert; sie wurden erst 1935 von Siegel unter den nachgelassenen Papieren von Riemann entdeckt. Im Jahre 1914 veröffentlichte Hardy einen Beweis der Tatsache, daß es unendlich viele Nullstellen auf der Geraden gibt. Etwas später, 1921, zeigten Hardy und Littlewood, daß es für eine gewisse Konstante $A > 0$ mehr als AT Nullstellen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ gibt, deren Imaginärteil absolut genommen kleiner als T ist. Nach Behauptung (c) folgt hieraus, daß ein nichtverschwindender Prozentsatz B von komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden liegt, und 1974 zeigte Levinson, daß $B > \frac{1}{3}$ ist.

Die in den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts gemachten Entdeckungen in der komplexen Funktionentheorie bereiteten den Boden für einen raschen Fortschritt in der Theorie der Primzahlverteilung. Der Primzahlsatz selbst wurde 1896 von Hadamard und, unabhängig, von de la Vallée Poussin bewiesen. (Die Tatsache, daß es mehr als ein Jahrhundert dauerte, ehe ein Beweis des Primzahlsatzes gefunden wurde, hatte die Vorstellung entstehen lassen, seinen Entdeckern würde das ewige Leben zuteil. Lange Zeit schien diese Legende der Wahrheit zu entsprechen; leider wurde sie 1962 erschüttert, als de la Vallée Poussin mit 96 Jahren starb, und schließlich 1963 völlig zerstört durch den Tod von Hadamard im Alter von 98 Jahren!) Drei Jahre, nachdem er den Primzahlsatz bewiesen hatte, veröffentlichte de la Vallée Poussin eine eingehende Untersuchung der Genauigkeit der Annäherung von $\pi(x)$ durch die beiden Funktionen $\operatorname{li}(x)$ und $x/\log x$. Seine Ergebnisse zeigen, daß $\operatorname{li}(x)$ die bessere Näherung ist und daß tatsächlich

$$\pi(x) - \operatorname{li}(x) = O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right)$$

gilt, wobei c eine kleine positive Konstante ist, die de la Vallée Poussin explizit bestimmte.

Ein entscheidender Punkt des Beweises von de la Vallée Poussin in seiner Abschätzung von $\pi(x) - \mathrm{li}\,(x)$ ist die Konstruktion eines „Gebietes ohne Nullstellen" für $\zeta(s)$. Es ergibt sich folgendermaßen: Er bestimmte zwei Konstanten t_0 und a derart, daß $\zeta(s)$ im schraffierten Bereich der linken Abbildung nicht verschwindet.



Im Jahre 1930 verallgemeinerte Ingham dieses Ergebnis, indem er zeigte, daß man, wenn eine Funktion $\varphi(t)$ bestimmten, wenig einschränkenden Regularitätsbedingungen genügt und ein t_0 existiert derart, daß $\zeta(s)$ im schraffierten Gebiet der rechten Abbildung nicht verschwindet, eine explizite Abschätzung des Fehlers $\pi(x) - \mathrm{li}\,(x)$ angeben kann. Wenn die Riemannsche Vermutung wahr ist, kann man $\varphi(t) = \frac{1}{2} + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ setzen und erhält

$$\pi(x) - \mathrm{li}\,(x) = O(x^{(1/2)+\varepsilon}) .$$

(Als erster hat v. Koch 1901 Ergebnisse dieser Art erhalten, wobei er die Riemannsche Vermutung als zutreffend annahm.)

Nach Inghams Arbeiten wurde naturgemäß die Frage gestellt, ob man, ausgehend von einer expliziten Abschätzung des Fehlers von $\pi(x) - \mathrm{li}\,(x)$, die Existenz eines Bereichs ohne Nullstellen von $\zeta(s)$ beweisen könne. Der Beweis, daß dies möglich ist, ist außerordentlich schwierig; er wurde 1951 von Turán erbracht.

Sobald der Primzahlsatz bewiesen worden war, erwies es sich als verhältnismäßig leicht, den analogen Satz für die Primzahlen in einer arithmetischen Progression aufzustellen. Tatsächlich ließ sich derjenige Teil der komplexen Funktionentheorie, der im Zusammenhang mit $\zeta(s)$ entwickelt worden war, auch auf die Dirichletschen L-Funktionen anwenden. Alle sich auf $\zeta(s)$ beziehenden Aussagen Riemanns haben ihre Analoga für die $L(s, \chi)$, und die Beweise sind naturgemäße Modifikationen der Beweise für $\zeta(s)$. Das Analogon der Riemannschen Vermutung, das besagt, alle komplexen Nullstellen einer L-Funktion lägen auf der Geraden $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$, scheint etwa 1884 von Piltz formuliert worden zu sein.

Sowohl Hadamard als auch de la Vallée Poussin haben 1896 die asymptotische Formel bewiesen, die für $\pi(x; k, l)$ vermutet worden war, nämlich

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x; k, l) \frac{\log x}{x} = \frac{1}{\varphi(k)},$$

und in seiner Arbeit von 1899 hat de la Vallée Poussin seine sich auf $\pi(x) - \mathrm{li}\,(x)$ beziehenden Ergebnisse auf $\pi(x; k, l)$ erweitert. Eine einfache Folgerung aus seiner Arbeit ist die Tatsache, daß im Fall $(l_1, k) = (l_2, k) = 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x; k, l_1)}{\pi(x; k, l_2)} = 1$$

gilt. Somit sind in gewissem Sinne die Primzahlen auf die Restklassen modulo k *gleichverteilt*, wie Dirichlet und Legendre vermutet hatten.

In der Abschätzung des Korrekturgliedes $\pi(x) - \mathrm{li}\,(x)$ wurden im Laufe der Zeit Fortschritte erzielt. Im Jahre 1921 zeigte Littlewood, daß man, ausgehend von Abschätzungen von Summen des Typs

$$\left|\sum_{n=M}^{M+N} n^{-ti}\right|,$$

nichttriviale Korrekturglieder erhalten kann. Littlewoods Methode beruht auf den Ideen, die von H. Weyl in seiner Untersuchung der Gleichverteilung modulo 1 von Folgen reeller Zahlen eingeführt wurden. Diese Methode wurde anschließend durch Landau vereinfacht und dann von Vinogradov beträchtlich weiterentwickelt. Das beste gegenwärtig bekannte Resultat, das 1958 von Vinogradov und Korobov erzielt wurde, lautet

$$\pi(x) - \mathrm{li}\,(x) = O\left(x \exp\left(-\frac{c(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right);$$

von den unter Annahme der Riemannschen Vermutung erzielten Abschätzungen ist man jedoch noch weit entfernt.

Der Primzahlsatz und die zusätzlichen Aussagen über die Korrekturglieder waren ursprünglich durch äußerst komplizierte Verfahren aus der komplexen Funktionentheorie gewonnen worden, so daß ein lebhaftes Verlangen nach Vereinfachung bestand. Sehr frühzeitig haben verschiedene Autoren, unter ihnen vor allem Landau, den Beweis vereinfacht; der Gegenstand ist jedoch zu sehr technischer Natur, als daß wir uns hier damit befassen könnten. Wir möchten wenigstens erwähnen, daß die diversen Methoden, die Landau bei seinen zahlreichen verschiedenartigen Beweisen des Primzahlsatzes ausgearbeitet hat, in der analytischen Zahlentheorie ganz allgemein von großem Nutzen gewesen sind.

Gleichzeitig gab es ein gewisses Unbehagen darüber, daß eine arithmetische Aussage, die nur die reelle Variable betrifft, zu ihrem Beweis komplexe Analysis benötigt. Dies hat dazu geführt, daß man sogenannte „elementare" Beweise des Primzahlsatzes suchte, d. h. Beweise, die nicht die komplexe Funktionentheorie, sondern nur elementare Teile der reellen Analysis benutzen. Außerdem war Hardy davon überzeugt, daß ein elementarer Beweis das bestmögliche Restglied liefern und vielleicht sogar zu einem Beweis der Riemannschen Vermutung führen würde.

Diese Untersuchungen brachten schließlich die Erkenntnis mit sich, daß, wie man gegen Ende der zwanziger Jahre wußte, die einzige Eigenschaft von $\zeta(s)$, die beim Beweis des Primzahlsatzes eine wesentliche Rolle spielt, die Tatsache ist, daß

$\zeta(s)$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ nicht verschwindet. Man konnte auch zeigen, daß diese Tatsache ihrerseits eine einfache Folgerung aus dem Primzahlsatz ist. Somit *gibt es eine Art von Äquivalenz zwischen einer analytischen Eigenschaft von $\zeta(s)$* und dem Primzahlsatz, einer Aussage mit einer rein reellen Variablen. Dies ließ die Mathematiker glauben, es sei unmöglich, beim Beweis des Primzahlsatzes auf die komplexe Funktionentheorie zu verzichten. Doch wie viele rein heuristische Überlegungen war auch diese falsch; denn 1948 publizierten Erdös und Selberg Versionen des so lange gewünschten „elementaren Beweises". Obwohl von beträchtlichem methodischem Interesse, haben die verschiedenen elementaren Beweise des Primzahlsatzes, die man jetzt kennt, unserem Wissen über die Primzahlverteilung nicht viel hinzugefügt, und die Korrekturglieder, die sie liefern, sind nicht so gut wie die mit den analytischen Methoden erhaltenen.

Soweit bisher von den asymptotischen Formeln für $\pi(x)$ und $\pi(x; k, l)$ die Rede war, haben wir nur die Regelmäßigkeit betrachtet, die man bei den Primzahlen finden kann. Doch hat auch die Unregelmäßigkeit der Primzahlverteilung Aufmerksamkeit erregt. Es war Čebyšev, der anscheinend als erster 1853 eine genaue Vermutung formulierte. Auf Grund von Abzählungen in Primzahltafeln hatte er den Eindruck gewonnen, in den arithmetischen Progressionen $\{4n + 1\}$ und $\{4n + 3\}$ gebe es ein deutliches Übergewicht der Primzahlen p mit $p \equiv 3 \pmod 4$. Čebyšev behauptete, es gebe „mehr Primzahlen kongruent 3 modulo 4 als Primzahlen kongruent 1 modulo 4". In dieser Formulierung ist diese Aussage nicht sinnvoll; sie gibt nur den vagen Eindruck wieder, den man aus den Tabellen gewinnt. Čebyšev hat jedoch eine genaue mathematische Aussage formuliert, nämlich die folgende:

$$\lim_{c\to 0} \sum_p (-1)^{(p+1)/2} e^{-pc} = +\infty .$$

Die Primzahlen $p \equiv 3 \pmod 4$ liefern die positiven Glieder der Summe, und die Tatsache, daß die ganze Summe gegen unendlich strebt, bringt in bestimmtem Sinne zum Ausdruck, daß es mehr Primzahlen in der Progression $\{4n + 3\}$ als in der Progression $\{4n + 1\}$ gibt. Čebyšev besaß keinen Beweis dieser Behauptung, doch ist sie wahrscheinlich richtig; denn 1914 zeigten Hardy, Littlewood und Landau, daß die Čebyševsche Behauptung logisch der Aussage gleichwertig ist, alle komplexen Nullstellen der Funktion

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

liegen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Das ist ein Spezialfall der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung.

Man könnte die erste Behauptung Čebyševs als $\pi(x; 4, 1) < \pi(x; 4, 3)$ deuten, wie es viele getan haben. Das ist aber falsch, wie Littlewood 1914 gezeigt hat, als er auf die Funktion $L(s)$ die Methoden verallgemeinerte, die zur Untersuchung der Vorzeichenwechsel von $\pi(x) - \operatorname{li}(x)$ benutzt worden waren. Die Littlewoodschen Untersuchungen über diese Fragen sind von großer Bedeutung; denn wie

wir oben bemerkt haben, vermutete Gauß (und sogar Riemann), daß $\pi(x) < \mathrm{li}\,(x)$ sei. Die Tafeln der ersten zehn Millionen Primzahlen bestätigen diese Ungleichung, und es war sogar gezeigt worden, daß aus dieser Vermutung die Richtigkeit der Riemannschen Vermutung folgen würde. Daher war es eine große Überraschung, als Littlewood bewies, daß es unendliche Folgen von ganzen Zahlen x_r und y_r gibt, die den Ungleichungen

$$\pi(x_r) - \mathrm{li}\,(x_r) > \frac{1}{2}\frac{x_r^{1/2}}{\log x_r}\log\log\log x_r$$

bzw.

$$\pi(y_r) - \mathrm{li}\,(y_r) < -\frac{1}{2}\frac{y_r^{1/2}}{\log y_r}\log\log\log y_r$$

genügen, was selbstverständlich bedeutet, daß $\pi(x) - \mathrm{li}\,(x)$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt. Man kann die gleiche Beweismethode benutzen, um zu zeigen daß $\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1)$ Ungleichungen der obigen Art genügt und daß daher auch $\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1)$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt.

Littlewoods Überlegungen sind indirekter Natur. Zum Beweis der ersten Aussage zeigte er zunächst, daß sich die obigen Ungleichungen ergeben, wenn man annimmt, die Riemannsche Vermutung sei falsch, und dann, daß man diese Ungleichungen auch aus der Annahme herleiten kann, die Riemannsche Vermutung sei wahr. Daher ist die Littlewoodsche Aussage wahr. Mit diesen Methoden läßt sich jedoch nicht feststellen, wann bei $\pi(x) - \mathrm{li}\,(x)$ oder bei $\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1)$ erstmals ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Mehr als vierzig Jahre später bewies Skewes im Anschluß an Arbeiten von Ingham, daß ein $x_0 < \exp\exp\exp\exp\,(7{,}705)$ existiert derart, daß $\pi(x_0) > \mathrm{li}\,(x_0)$ erfüllt ist. Die obere Schranke von Skewes wurde inzwischen wesentlich herabgesetzt; den expliziten Wert von x_0 kennt man jedoch noch immer nicht. Das zweite Problem ließ sich dank dem Fortschritt der elektronischen Rechentechnik leicht lösen: 1957 hat Leech festgestellt, daß $\pi(x_0; 4, 3) = 1472$ und $\pi(x_0; 4, 1) = 1473$ für $x_0 = 26861$ gilt.

Was die Untersuchung der Unregelmäßigkeiten in der Verteilung der Primzahlen betrifft, so war sie bezüglich der $\varphi(k)$ arithmetischen Progressionen $\{kn + l;\ n = 1, 2, \ldots;\ (l, k) = 1\}$ bisher nicht sehr ergiebig. Die wichtige Arbeit von Turán und Knapowski beruht großenteils auf der Annahme, die Nullstellen der verschiedenen L-Funktionen, die dabei auftreten, lägen tatsächlich nicht dort, wo sie nicht liegen dürfen. Selbstverständlich können wir hier nichts Brauchbares über diese Arbeit sagen; wir geben nur folgendes Ergebnis wieder: Trifft die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung zu, so sind die Unregelmäßigkeiten in dem Sinne „regulär", daß jeder Typ von Irregularität, der vernünftig scheint, wirklich auftritt.

Dichtigkeitssätze für $\zeta(s)$ und $L(s, \chi)$

Man hatte erkannt, daß die Kenntnis der Lage der Nullstellen von $\zeta(s)$ und von $L(s, \chi)$ für die Lösung vieler Probleme der Primzahltheorie von Bedeutung ist. Da die Mathematiker die Riemannsche Vermutung weder beweisen noch widerlegen

konnten, haben sie wenigstens zu beweisen versucht, daß $\zeta(s)$ nicht „zu viele“ Nullstellen außerhalb der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ besitzt. Es sei $N(\sigma, T)$ die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ mit $\sigma \leqq \beta \leqq 1$, $0 \leqq \gamma \leqq T$; wenn die Riemannsche Vermutung zutrifft, ist $N(\sigma, T) = 0$ für $\sigma > \frac{1}{2}$.

Im Jahre 1914 zeigten H. Bohr und Landau, daß für $\sigma > \frac{1}{2}$ die Beziehung $N(\sigma, T) = O(T)$ gilt. Da

$$N\left(\frac{1}{2}, T\right) = \frac{1}{2} N(T) = \frac{T}{4\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{4\pi} + O(\log T)$$

ist und für großes T das Glied $\frac{T}{4\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right)$ gegenüber dem Glied $O(T)$ überwiegt, folgt aus dem Satz von Bohr und Landau, daß „die meisten“ Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ liegen. Man sagt heute, eine obere Schranke für $N(\sigma, T)$ sei ein *Dichtigkeitssatz* für die Nullstellen von $\zeta(s)$, obwohl dieser Name nicht gut gewählt ist. In den 20 Jahren, die den Ergebnissen von Bohr und Landau folgten, erzielten andere Mathematiker genauere Dichtigkeitssätze. Beispielsweise zeigte Hoheisel 1930, daß $N(\sigma, T) = O(T^{\sigma(1-\sigma)} \log^6 T)$ ist.

Diese Arbeit von Hoheisel erwies sich als wichtig; Hoheisel war der erste, der gesehen hatte, daß man Dichtigkeitssätze manchmal dazu benutzen kann, um Eigenschaften zu beweisen, die vorher nur unter Annahme der Riemannschen Vermutung bewiesen worden waren. Beispielsweise bewies er die Existenz eines $\theta < 1$ derart, daß die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Primzahlen der Beziehung $p_{n+1} - p_n = O(p_n^\theta)$ genügt. Tatsächlich zeigte er, daß dies für jedes θ mit $\frac{29999}{30000} < \theta < 1$ richtig ist, und spätere Arbeiten dehnten dieses Intervall auf $\frac{7}{12} < \theta < 1$ aus (wenn die Riemannsche Vermutung richtig ist, kann man $\frac{1}{2} < \theta < 1$ nehmen).

Man bemerkte bald, daß analoge Abschätzungen für die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ — die auftretenden oberen Schranken bezeichnete man mit $N(\sigma, T, \chi)$ — ebenfalls nützliche Anwendungen zulassen. Die erste wurde 1941 von Linnik gefunden; er bewies die Beziehung

$$\sum_{\chi} N(\sigma, T, \chi) = O(T^{c(1-\sigma)}),$$

wobei c eine Konstante ist; dann benutzte er diesen „Dichtigkeitssatz“, um daraus zu folgern, daß die kleinste Primzahl $p(k, l)$ in der arithmetischen Progression $\{kn + l, n = 1, 2, \ldots\}$ der Ungleichung $p(k, l) < k^A$ genügt, wobei A eine absolute Konstante ist. Vor Linniks Arbeit war dies nur unter Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung bewiesen worden. Später erhielten Linnik, Čudakov,

Rényi und andere eine Reihe solcher Dichtigkeitssätze, und sie benutzen sie dazu, um Sätze zu beweisen, die mit den Goldbachschen Vermutungen zusammenhängen (siehe 5.11.).

5.7. Transzendente Zahlen

Schon die Mathematiker der Antike hatten zwischen den rationalen und den irrationalen Zahlen unterschieden. Doch hat man, wie wir sehen werden, erst seit verhältnismäßig kurzer Zeit eine weitere Unterscheidung innerhalb der irrationalen Zahlen vorgenommen.

Die bei weitem älteste Untersuchung von Irrationalitäten betrifft die beiden Zahlen π und e; die Geschichte von π geht auf die Zeit vor etwa 4000 Jahren zurück; sie beginnt mit dem Problem, ein zu einem gegebenen Kreis flächengleiches Quadrat zu konstruieren.[58a] Im Papyrus Rhind (etwa 1650 v. u. Z.) wird folgende Regel angegeben: „Nimm $\frac{1}{9}$ von einem Durchmesser weg und konstruiere ein Quadrat über dem, was bleibt, und es wird den gleichen Flächeninhalt wie der Kreis haben." Der so für π erhaltene Wert ist $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16\ldots$, der, obwohl nicht sehr genau, weitaus besser ist als der in der Bibel angegebene Wert 3 für π (1. Könige 7.23 und 2. Chronik 4.2).

Die Geschichte von e ist bei weitem nicht so alt; e wird zum erstenmal gegen 1614 von Napier erwähnt. Zunächst schien e keinerlei Beziehung zu π zu besitzen; Euler bewies aber die bemerkenswerte Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, woraus $e^{i\pi} = -1$ folgt. Seitdem sind die Untersuchungen der beiden Zahlen eng miteinander verknüpft. Tatsächlich folgt der Beweis der Irrationalität (sowie der Beweis der Transzendenz) von π aus dem Beweis der Transzendenz von e.

Im Jahre 1737 bewies Euler die Irrationalität sowohl von e als von e^2, und 1767 bewies Lambert die Irrationalität von π, e^x und $\tan x$ für jede rationale Zahl $x \neq 0$.

Sowohl Euler als auch Lambert haben bei ihren Untersuchungen über e und π ausgiebigen Gebrauch von Kettenbrüchen gemacht. Im achtzehnten Jahrhundert benutzte man die Kettenbrüche zur Approximation von irrationalen Zahlen durch rationale; dabei wurden verschiedene grundlegende Resultate erzielt. Insbesondere hat Lagrange den folgenden Satz bewiesen:

Ist α eine reell-quadratische Irrationalzahl, so ist ihr Kettenbruch von einer bestimmten Stelle an periodisch, und es gibt eine Konstante $c(\alpha) > 0$ derart, daß $|\alpha - (p/q)| > c(\alpha)\, q^{-2}$ für jede rationale Zahl p/q gilt (vgl. 5.8.).

Liouville bewies 1844 folgende Verallgemeinerung dieses Lagrangeschen Satzes:

Ist α Nullstelle eines irreduziblen Polynoms vom Grad $n > 1$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so gibt es eine Konstante $c(\alpha)$ derart, daß $|\alpha - (p/q)| > c(\alpha)\, q^{-n}$ für alle rationalen Zahlen p/q gilt.

Dieser Satz ist an und für sich weder schwierig zu beweisen noch besonders überraschend. Seine Bedeutung liegt darin, daß Liouville bemerkt hat, daß es Zahlen α gibt, zu denen kein solches $c(\alpha)$ existiert. Führen wir das klassische Beispiel an. Es sei $\xi = 0{,}11000100\cdots = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \cdots$, und nehmen wir an, ξ sei Nullstelle eines irreduziblen Polynoms vom Grade n mit ganzen Koeffizienten. Wir bezeichnen mit ξ_r die Summe der ersten r Glieder der Reihe; dann ist $\xi_r = p/10^{r!} = p/q$ und $0 < \xi - \xi_r = 10^{-(r+1)!} + \cdots < 2 \cdot 10^{-(r+1)!} < 2q^{-(r+1)}$. Für *jedes* $c(\xi) > 0$ gilt also die Abschätzung $c(\xi)\, q^{-n} > 2q^{-(r+1)}$ für jeden hinreichend großen Wert von r. Dies bedeutet, daß unendlich viele rationale Zahlen p/q mit $|\xi - (p/q)| < c(\xi)/q^n$ existieren. Folglich ergibt sich aus dem Satz von Liouville, daß ξ nicht Nullstelle eines irreduziblen Polynoms vom Grade n mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann. Da n beliebig ist, kann ξ nicht Nullstelle irgendeines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten sein.

Die Zahlen, die wie ξ keiner Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten genügen, werden *transzendent* genannt; diejenigen, die einer solchen Polynomgleichung genügen, *algebraisch*. Diese Unterscheidung innerhalb der irrationalen Zahlen brachte einen neuen Zweig der Zahlentheorie hervor, die Untersuchung der transzendenten Zahlen.

Die Theorie der transzendenten Zahlen sollte Rückwirkungen auf die ganze Zahlentheorie haben: auf die Theorie der Diophantischen Gleichungen, die Primzahltheorie, die Theorie der algebraischen Zahlen. Was die Schwierigkeit des Gegenstandes anlangt, so bemerken wir, daß nach Liouville im Verlaufe von etwa dreißig Jahren praktisch kein neues Resultat erzielt wurde.

Aus dem Satz von Liouville ergeben sich naturgemäß zahlreiche Probleme. Liouville hatte gezeigt, daß eine bestimmte Klasse von Zahlen, die sich in einem bestimmten Sinne *sehr gut* durch rationale Zahlen approximieren lassen, keine algebraischen Zahlen enthält. Gibt es „viele" transzendente Zahlen? Sind alle transzendenten Zahlen im Sinne von Liouville gut approximierbar? Sind Zahlen wie e oder π algebraisch oder transzendent?

Das erste Problem wurde 1874 von Cantor gelöst, der zeigte, daß „fast alle" Zahlen transzendent sind (vgl. 6.7.1.). Die Antwort auf die zweite Frage ist negativ. Im Jahre 1932 hat nämlich Mahler eine höchst feine Einteilung der transzendenten Zahlen vorgeschlagen, die auf dem Grad der Approximation einer transzendenten Zahl durch algebraische Zahlen beruht, doch ist diese Arbeit zu technisch, als daß sie hier dargelegt werden könnte. Die Tatsache, daß e eine transzendente Zahl ist, wurde 1873 von Hermite festgestellt, und 1882 hat Lindemann einen Beweis der Transzendenz von π veröffentlicht. Das Ergebnis von Lindemann zeigte endgültig, daß man mit Zirkel und Lineal kein Quadrat konstruieren kann, das einem gegebenen Kreis flächengleich ist. Wäre nämlich eine solche Konstruktion möglich, würde dies nach sich ziehen, daß π eine algebraische Zahl wäre.

In seiner Arbeit von 1882 hat Lindemann in Wirklichkeit mehr als die Transzendenz von π bewiesen. Er hat den Beweis des folgenden allgemeineren Ergebnisses skizziert, das dann von Weierstraß vollständig bewiesen wurde:[58b]

Für beliebige paarweise voneinander verschiedene algebraische Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und von null verschiedene algebraische Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ gilt $\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$.

Die Transzendenz von π folgt daraus unmittelbar; denn wenn π algebraisch wäre, gälte dies auch für $i\pi$; es ist aber $e^{i\pi} + 1 = 0$, was dem Satz von Lindemann widerspricht. Nach Lindemann wurde im Laufe von etwa fünfzig Jahren der Theorie der transzendenten Zahlen nichts wesentlich Neues hinzugefügt. Sicher haben sich bedeutende Mathematiker wie Gordan, Hilbert und Hurwitz für die transzendenten Zahlen interessiert, aber sie haben kaum mehr getan, als den Beweis des Lindemannschen Satzes zu vereinfachen.

Auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris (1900) stellte Hilbert die folgende Frage, das siebente seiner 23 Probleme (vgl. 5.5.5.4.): *Ist die Zahl α^β für eine von 0 und 1 verschiedene algebraische Zahl α und eine irrationale algebraische Zahl β transzendent?* Hilbert war der Meinung, die Lösung dieses Problems habe in der Zukunft mehr Konsequenzen als der Beweis der Riemannschen oder der Fermatschen Vermutung.

Der erste bedeutende Fortschritt in dieser Richtung kam 1929 von Gel'fond, der bewies, daß α^β transzendent ist, wenn β eine imaginär-quadratische Zahl ist. Insbesondere bedeutet dies, daß $e^\pi = (-1)^{-i}$ transzendent ist. Ein Jahr darauf dehnte Kuzmin das Gel'fondsche Ergebnis auf den Fall aus, daß β eine reell-quadratische Irrationalität ist; dabei war aber offensichtlich geworden, daß die benutzten Methoden nicht viel weiter führen würden. Im Jahre 1934 lösten Gel'fond und Schneider, unabhängig voneinander, das Problem der Transzendenz von α^β. Beide haben Verfahren benutzt, die denen ähnelten, welche Siegel einige Jahre vorher bei seinen Untersuchungen über die Besselschen Funktionen angewandt hatte. Man kann die von Gel'fond und Schneider erzielten Ergebnisse folgendermaßen formulieren:

Für beliebige von null verschiedene algebraische Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, für welche $\log \alpha_1$, $\log \alpha_2$ über den rationalen Zahlen linear unabhängig sind, gilt

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0 .$$

Mit diesem Satz ist das Hilbertsche Problem gelöst; denn wäre α^β algebraisch, etwa $\alpha^\beta = \gamma$, so wäre $\beta \log \alpha - \log \gamma = 0$, und da β irrational ist, sind also $\log \alpha$ und $\log \gamma$ unabhängig über $\mathbf{Q}$, so daß sich ein Widerspruch zu dem obigen Satz ergibt.

In Analogie zum Satz von Lindemann war es natürlich, daß Gel'fond ein entsprechendes Ergebnis für n Logarithmen vermutete, nämlich:

Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ von null verschiedene algebraische Zahlen derart, daß $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ über den rationalen Zahlen linear unabhängig sind, so ist

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n \neq 0 .$$

Unabhängig davon, daß diese Vermutung an sich interessant ist, hat sie eine sehr wichtige Rolle gespielt, denn Gel'fond und andere haben gezeigt: Wenn man eine *explizite* untere Schranke für $|\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n|$ bestimmen kann, dann kann man so verschiedenartige Probleme lösen wie „Man bestimme alle imaginär-quadratischen Zahlkörper mit der Klassenzahl 1" und „Man bestimme eine obere Schranke für die größte ganzzahlige Lösung der Diophantischen Gleichung $f(x, y) = k$, wobei $f(x, y)$ eine irreduzible binäre Form vom Grade $n \geqq 3$ mit ganzzahligen Koeffizienten ist".

Diese Gel'fondsche Vermutung wurde 1966 von Baker bewiesen, der zugleich eine effektive untere Schranke für den absoluten Betrag der Summe angab. Diese sehr wichtige Arbeit hat Konsequenzen in zahlreichen anderen Zweigen der Zahlentheorie gehabt und die Theorie der transzendenten Zahlen in eines der aktiven Gebiete der aktuellen Forschung verwandelt. Es ist nicht möglich, hier eine Vorstellung von den Methoden zu geben, die benutzt werden, um alle diese Resultate zu erhalten; sie beruhen darauf, daß Werte analytischer Funktionen für passende Werte der Variablen in höchst scharfsinniger Weise nach oben bzw. nach unten abgeschätzt werden ([28], [37], [4]).

5.8. Diophantische Approximationen

In der Theorie der *Diophantischen Approximationen* beschäftigt man sich hauptsächlich mit der Untersuchung der Art und Weise, in der man eine reelle Zahl durch rationale Zahlen approximieren kann. Selbstverständlich gibt es zu jeder reellen Zahl α und jedem $\varepsilon > 0$ stets eine rationale Zahl p/q (wobei p, q nicht zueinander teilerfremd zu sein brauchen) derart, daß $|\alpha - (p/q)| < \varepsilon$ ist. Vom Standpunkt der Zahlentheorie aus geht es darum, die Abweichung $\alpha - (p/q)$ als Funktion des Nenners q einzugrenzen.

Eine ernsthafte Untersuchung dieses Problems begann um die Mitte des achtzehnten Jahrhunderts, als sich die Mathematiker für die numerische Auflösung von Gleichungen und die Geschwindigkeit der Konvergenz der Näherungswerte für Wurzeln interessierten (vgl. 1.9.). Aus der einfachen Suche nach einer praktischen Methode zur Annäherung einer reellen Zahl ist ein ganzer technischer und spezialisierter Zweig der Zahlentheorie hervorgegangen.

Unsere Darlegung (die an der Oberfläche bleiben wird) beginnt mit einigen markanten Ergebnissen der Theorie der Kettenbrüche (in 5.8.1.). Ihre Verallgemeinerung führt in natürlicher Weise zu den Arbeiten von Dirichlet und Kronecker (in 5.8.2.). Danach werden wir eine weitere Verallgemeinerung durch Minkowski beschreiben, der aus diesem Anlaß einen neuen Zweig der Zahlentheorie, den er die Geometrie der Zahlen nannte, entwickelte (in 5.8.3.). Schließlich kehren wir (in 5.8.4.) zum Problem der Approximation einer algebraischen Zahl durch rationale Zahlen zurück, das wichtige Rückwirkungen auf die Theorie der Diophantischen Gleichungen hatte (vgl. 5.9.4.).

5.8.1. Approximation durch Kettenbrüche

Die Idee der Kettenbrüche ist sehr alt; sie kann im alten China, im Griechenland des zweiten Jahrhunderts und im Indien des zehnten Jahrhunderts nachgewiesen werden.[1]) Ihre moderne Theorie begann erst mit der Zeit von Fermat (und Huygens)

[1]) Siehe dazu etwa C.-O. Selenius *[139 bis]; auf die besondere Bedeutung dieser Arbeit weist auch B. L. van der Waerden *[144a] hin. — *Anmerkung des Übersetzers.*

und erreichte ihren Höhepunkt gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts mit den Arbeiten von Lagrange und Legendre. Zu dieser Zeit waren die Hauptergebnisse bekannt; es ist jedoch nicht immer möglich, sie einem bestimmten Mathematiker zuzuschreiben oder ein genaues Datum anzugeben.

Ist $x > 0$ eine reelle Zahl, so kann man als erste Annäherung an x die ganze Zahl $a_0 = [x]$, die größte ganze Zahl unterhalb x wählen, so daß $x = a_0 + \xi_0$ mit $0 \leqq \xi_0 < 1$ ist. Im Fall $\xi_0 \neq 0$ kann man in gleicher Weise $\xi_1^{-1} = a_1 + \xi_1$ mit $a_1 = [\xi_0^{-1}]$ und $0 \leqq \xi_1 < 1$ setzen, so daß

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \xi_1}$$

ist. Bei $\xi_1 \neq 0$ setzt man in gleicher Weise $\xi_1^{-1} = a_2 + \xi_2$ mit $a_2 = [\xi_1^{-1}]$ und $0 \leqq \xi_2 < 1$, woraus sich

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \xi_2}}$$

ergibt. Dieses Verfahren läßt sich offenbar fortsetzen. Es bricht ab, sobald $\xi_n = 0$ für einen Index n ist; anderenfalls geht es unbegrenzt weiter. Der erste Fall tritt genau dann ein, wenn x rational ist. Die endliche oder unendliche Folge $(a_0, a_1, \ldots)$ wird die *Kettenbruchentwicklung* von x genannt, in Zeichen

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

oder auch

$$x = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \cdots;$$

die a_j nennt man die *Teilnenner* dieser Entwicklung, die durch

$$p_0/q_0 = a_0, \qquad p_1/q_1 = a_0 + \frac{1|}{|a_1}, \qquad p_2/q_2 = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2}, \ldots$$

definierten rationalen Zahlen p_n/q_n die *Näherungsbrüche* von x. Offenbar strebt p_n/q_n gegen x, wenn n gegen unendlich strebt.

Man bemerkte rasch, daß die Näherungsbrüche ausgezeichnete Approximationen von x liefern. Tatsächlich kann man zeigen, daß bei $0 < q < q_n$ für jede ganze Zahl p die Ungleichung

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

gilt, so daß p_n/q_n eine „beste Approximation" an x ist, in dem Sinne, daß es keine näher bei x liegende rationale Zahl gibt, deren Nenner kleiner als q_n wäre. Überdies

läßt sich

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)\,q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} q_n^2}$$

beweisen. Insbesondere gilt, wenn x irrational ist, $a_n \geqq 1$ für jedes $n \geqq 1$, so daß man unendlich viele rationale Zahlen p_n/q_n mit

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

erhält, eine Beobachtung, über deren Bedeutung wir in der Theorie der transzendenten Zahlen gesprochen haben (vgl. 5.7.).

Es gibt eine Art Umkehrung dieses Satzes: Ist $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$, so ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch von x.

Ein Kettenbruch wird *periodisch* genannt, wenn es ganze Zahlen $L \geqq 1$ und $k \geqq 1$ gibt derart, daß $a_l = a_{l+k}$ für jedes $l \geqq L$ gilt. Beispielsweise ist

$$\sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cdots}}}}, \qquad \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}.$$

Die periodischen Kettenbrüche tauchten in Zusammenhang mit der (sogenannten Pellschen) Gleichung $x^2 = Dy^2 + 1$ für $D > 0$ auf. Wir haben gesehen (vgl. 5.1., 5.2. und 5.4.), wie diese Gleichung einmal um ihrer selbst willen und dann im Laufe der Lagrangeschen Arbeiten über die binären quadratischen Formen untersucht worden war. Das von Fermat, Wallis, Euler und Lagrange entwickelte Verfahren, das die ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung für einen gegebenen Wert von D liefert, beruht auf folgenden Beobachtungen. Ist (x, y) eine Lösung der Gleichung $x^2 = Dy^2 + 1$ in streng positiven ganzen Zahlen, so ist

$$\frac{x^2}{y^2} = D + \frac{1}{y^2}, \quad \text{also} \quad \frac{x}{y} > \sqrt{D} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} + \sqrt{D} > 2\sqrt{D}.$$

Man schreibt nun die Gleichung in der Gestalt

$$\left(\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right)\left(\frac{x}{y} + \sqrt{D}\right) = \frac{1}{y^2}$$

und erhält

$$\left| \frac{x}{y} - \sqrt{D} \right| = \frac{1}{y^2 \left| \frac{x}{y} + \sqrt{D} \right|} < \frac{1}{2\sqrt{D}\,y^2}.$$

Auf Grund des oben erwähnten Resultats muß x/y ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$ sein. Man wird also darauf geführt, diese Kettenbruchentwicklung anzusetzen und jeweils zu prüfen, ob einer der sukzessiven Näherungs-

brüche eine Lösung liefert. Man erkannte schnell, daß die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$ periodisch ist, und daher stammt das Interesse an diesem Typ von Kettenbrüchen.

Diese Lösungsmethode ist nur dann gerechtfertigt, wenn man beweisen kann, daß es immer eine Lösung von $x^2 = Dy^2 + 1$ in ganzen Zahlen mit $y \neq 0$ gibt; dies wurde schließlich 1770 von Lagrange bewiesen. Er zeigte auch, daß ein Kettenbruch genau dann periodisch ist, wenn er die Entwicklung einer reell-quadratischen Irrationalität darstellt.[59] Eine der obigen analoge Überlegung zeigt, daß jede Lösung von $x^2 = Dy^2 - 1$ mit $y \neq 0$ ebenfalls die Eigenschaft hat, daß x/y ein Näherungsbruch von $\sqrt{D}$ ist; doch besitzt diese Gleichung nicht immer eine Lösung in ganzen Zahlen. Die Charakterisierung derjenigen Werte von D, für die es solche Lösungen gibt, ist ein ungelöstes Problem.

Lagrange hat zahlreiche Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche geliefert. Insbesondere interessierte er sich für die praktischen Verfahren, welche die Kettenbruchentwicklung einer algebraischen Zahl liefern, deren Minimalpolynom man kennt. Ohne Zweifel kam er durch zahlreiche numerische Berechnungen zu der Vermutung, es gebe zu jeder algebraischen Zahl θ eine Konstante $c(\theta)$ derart, daß alle Teilnenner a_n ihrer Kettenbruchentwicklung der Bedingung $0 < a_n < c(\theta)$ genügen. Abgesehen von dem Fall, daß θ eine Zahl aus einem quadratischen Zahlkörper ist, ist diese Vermutung in keiner Weise bewältigt und stellt eines der wichtigsten ungelösten Probleme dieser Theorie dar (sogar der Fall $\sqrt[3]{2}$ ist ungeklärt!).

5.8.2. Die Arbeiten von Dirichlet und Kronecker

Wir haben gesehen, daß es für irrationales α unendlich viele rationale Zahlen p/q mit $|\alpha - (p/q)| < 1/q^2$ gibt. In den dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts entdeckte Dirichlet einen sehr einfachen und scharfsinnigen Beweis dieser Tatsache, der ohne die Benutzung von Kettenbrüchen auskam; dieser Beweis seinerseits legte verschiedene wichtige Verallgemeinerungen nahe und führte Minkowski zur Entwicklung seiner „Geometrie der Zahlen".

Der Satz von Dirichlet lautet: *Ist α irrational und $Q > 1$ eine ganze Zahl, so gibt es ganze Zahlen p, q mit $0 < q < Q$ und*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ} \leqq \frac{1}{q^2}.$$

Der Beweis beruht darauf, das Intervall $[0, 1)$ in Q Teilintervalle

$$\left[\frac{s}{Q}, \frac{s+1}{Q}\right) \qquad (s = 0, 1, \dots, Q-1)$$

zu unterteilen. Wir setzen $(x) = x - [x]$ für jede reelle Zahl x (das ist der sogenannte *gebrochene Teil* von x) und betrachten die $Q + 1$ Zahlen $0, (\alpha), (2\alpha), \dots, (Q\alpha)$; dann gibt es mindestens ein Intervall, das zwei dieser Zahlen enthält („Schubfach-

prinzip"). Daher existieren zwei voneinander verschiedene ganze Zahlen q_1, q_2 in $[0, Q)$ derart, daß $|(q_1\alpha) - (q_2\alpha)| < 1/Q$ ist. Nimmt man beispielsweise an, es sei $q_1 > q_2$, so gilt mit $q = q_1 - q_2$ die Beziehung

$$|q\alpha - ([q_1\alpha] - [q_2\alpha])| = |(q_1\alpha) - (q_2\alpha)| < \frac{1}{Q},$$

was den Satz mit $p = [q_1\alpha] - [q_2\alpha]$ als richtig erweist.

Diese Überlegung läßt sich leicht dahingehend erweitern, daß sie Auskunft gibt über die simultane Approximation mehrerer reeller Zahlen durch rationale Zahlen, was die Kettenbrüche nicht leisten können:

Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ reelle Zahlen, so besitzt das Ungleichungssystem

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+(1/k)}}, \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

stets mindestens eine Lösung $q, p_1, \ldots, p_k$ in ganzen Zahlen. Ist mindestens eines der α_i irrational, so hat das System unendlich viele Lösungen.

Bei diesem Satz ist als wichtig hervorzuheben, daß die rationalen Zahlen, welche die α_i approximieren, sämtlich den gleichen Nenner q besitzen.

Nachdem Dirichlet diesen Satz bewiesen hatte, bemerkte man, daß man ihn aus einem anderen Gesichtswinkel betrachten sollte. Worauf es ankommt, ist, daß man ganzzahlige Werte für x und y_i $(1 \leqq i \leqq k)$ finden kann, für welche die Linearformen $x\alpha_i - y_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$ sämtlich „nahe bei Null" liegen. Naturgemäß tauchte dann die Frage auf, ob es möglich sei, ganzzahlige Werte von x und y_i zu finden, für welche diese Formen sämtlich „nahe" bei beliebig vorgegebenen reellen Zahlen ϱ_i $(1 \leqq i \leqq k)$ liegen.

Im Jahre 1884 zeigte Kronecker[59a] ohne tiefere Hilfsmittel, daß man zu reellen Zahlen α und ϱ, wobei α irrational ist, unendlich viele ganze Zahlen q, p finden kann derart, daß $|q\alpha - p - \varrho| < 3/|q|$ ist. Die Ausdehnung dieses Ergebnisses auf Systeme (α_i), (ϱ_i) reeller Zahlen erwies sich als weitaus schwieriger: Man möchte hoffen, daß es gelänge, die Existenz von unendlich vielen Systemen ganzer Zahlen $q, p_1, \ldots, p_k$ zu beweisen, für welche

$$|q\alpha_i - p_i - \varrho_i| < \frac{C}{|q|^{1/k}} \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq k \tag{1}$$

gilt, wobei C eine nur von den α_i und den ϱ_i abhängende Konstante ist. Es ist aber ausgeschlossen, daß dies ohne jegliche Einschränkung gilt: Angenommen, die Zahlen $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ seien über $\boldsymbol{Q}$ linear abhängig, d. h., es gebe ganze Zahlen $u_1, \ldots, u_k$, die nicht sämtlich gleich null sind und für welche $u_1\alpha_1 + \cdots + u_k\alpha_k$ eine ganze Zahl ist. Wäre die Beziehung (1) immer richtig, so hätte man für unendlich viele Werte von q die Abschätzung

$$\left|q(u_1\alpha_1 + \cdots + u_k\alpha_k) - \sum_i u_i p_i - \sum_i u_i \varrho_i\right| < \frac{C}{|q|^{1/k}}(|u_1| + \cdots + |u_k|).$$

Da aber $\sum_i u_i(q\alpha_i - p_i)$ immer eine ganze Zahl ist, zieht die Tatsache, daß diese Ungleichung für unendlich viele Werte von q gültig ist, nach sich, daß die Zahl

$u_1\varrho_1 + \cdots + u_k\varrho_k$ ebenfalls eine ganze Zahl sein muß. Wenn der Satz gelten soll, muß also für jedes System von nicht sämtlich verschwindenden ganzen Zahlen $u_1, \ldots, u_k$ mit der Eigenschaft, daß $u_1\alpha_1 + \cdots + u_k\alpha_k$ eine ganze Zahl ist, auch $u_1\varrho_1 + \cdots + u_k\varrho_k$ ganzzahlig sein.

Kronecker hat nicht ein so genaues Resultat bewiesen, sondern nur eine ,,qualitative'' Aussage:

Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \varrho_1, \ldots, \varrho_k$ reelle Zahlen derart, daß für jedes System von ganzen Zahlen $u_1, \ldots, u_k$, für welches $\sum_i u_i\alpha_i$ ganzzahlig ist, auch $\sum_i u_i\varrho_i$ ganzzahlig ist. Unter diesen Voraussetzungen gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ von ε abhängende ganze Zahlen q, p_i $(1 \leqq i \leqq k)$ derart, daß

$$|q\alpha_i - p_i - \varrho_i| < \varepsilon \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq k$$

erfüllt ist.

Man kann die Sätze von Kronecker und Dirichlet so deuten, daß sie Eigenschaften des Wertevorrates der Linearformen $x\alpha_i - y_i$ für $1 \leqq i \leqq k$ ausdrücken, falls x und die y_i ganz $\boldsymbol{Z}$ durchlaufen. Man kann sich fragen, ob analoge Tatsachen für allgemeinere Linearformen gelten. Dirichlet und Kronecker haben tatsächlich Linearformen $x_i\alpha_{i1} + \cdots + x_n\alpha_{in} - y_i$ für $1 \leqq i \leqq k$ betrachtet und geeignete Verallgemeinerungen der früheren Resultate für diese Formen bewiesen. Doch hat erst Minkowski tatsächlich die echte Natur dieser Fragestellungen aufgedeckt und den tiefen Sinn der Arbeiten Dirichlets und Kroneckers erkennen lassen.

5.8.3. *Minkowski und die Geometrie der Zahlen*

Um zu verstehen, wie Minkowski zu seiner neuartigen Auffassung der Probleme der Diophantischen Approximation gelangte, gehen wir von der Verallgemeinerung des Dirichletschen Satzes auf beliebige Linearformen aus:

Es sei $L(\mathbf{x}) = \alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n - x_{n+1}$ eine Linearform mit reellen Koeffizienten. Ist $X > 1$, so gibt es ganze Zahlen u_i $(1 \leqq i \leqq n + 1)$ derart, daß

$$|\alpha_1u_1 + \cdots + \alpha_nu_n - u_{n+1}| \leqq 1/X^n \quad \text{und} \quad |u_i| \leqq X \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq n$$

gilt.

Wir betrachten den durch

$$V = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^{n+1} \text{ mit } |\alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n - x_{n+1}| \leqq X^{-n}, \; |x_i| \leqq X \text{ für } 1 \leqq i \leqq n\}$$

definierten Bereich V im $\boldsymbol{R}^{n+1}$. Diese Menge ist ein Parallelotop mit dem Zentrum im Ursprung, und es ist ,,anschaulich'' klar, daß V bei hinreichend großem Volumen einen von 0 verschiedenen Punkt $\mathbf{u}$ enthält, dessen Koordinaten sämtlich ganze Zahlen sind; ein solcher Punkt genügt den Ungleichungen des obenstehenden Satzes.

Das Problem, das sich naturgemäß stellt, ist demnach folgendes: Unter welchen Bedingungen enthält ein gegebener Bereich V des $\boldsymbol{R}^m$ einen vom Ursprung ver-

schiedenen Punkt, dessen Koordinaten sämtlich ganzzahlig sind? Der einfachste Satz von Minkowski, der auf diese Frage eine Antwort gibt, ist der folgende:

Ist V eine abgeschlossene und beschränkte Menge im $\boldsymbol{R}^m$ und ist

a) *V in bezug auf 0 symmetrisch (mit anderen Worten, liegt mit $\mathbf{x}$ auch $-\mathbf{x}$ in V),*

b) *V konvex (mit anderen Worten, liegen mit $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ auch alle Punkte der Verbindungsstrecke von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ in V);*

c) $\mathrm{vol}\,(V) \geqq 2^m$,

so enthält V mindestens einen vom Ursprung verschiedenen Punkt mit ausschließlich ganzzahligen Koordinaten.

Die Beweisidee ist sehr einfach: Genügt V den Bedingungen a) und b) und enthält V außer 0 *keinen* weiteren Punkt mit ganzzahligen Koordinaten, so haben die Mengen $\mathbf{u} + \frac{1}{2} V$, wobei $\mathbf{u}$ ganz $\boldsymbol{Z}^m$ durchläuft, paarweise keinen Punkt gemeinsam; das Volumen der Vereinigung der N^m Mengen $\mathbf{u} + \frac{1}{2} V$, wobei $\mathbf{u}$ die Menge der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten mit $0 \leqq u_i \leqq N$ für $1 \leqq i \leqq m$ durchläuft, beträgt dann $N^m \cdot \mathrm{vol}\left(\frac{1}{2} V\right)$; es ist aber leicht zu sehen, daß eine von N unabhängige Konstante a existiert derart, daß diese Vereinigung in einem Würfel mit der Seitenlänge $N + a$ liegt; daher ist $N^m \cdot \mathrm{vol}\left(\frac{1}{2} V\right) \leqq (N + a)^m$, und wenn man N gegen unendlich streben läßt, ergibt dies die Ungleichung $\mathrm{vol}\,(V) \leqq 2^m$. Daraus folgt die Aussage des Satzes, wenn man die Ungleichung c) durch $\mathrm{vol}\,(V) > 2^m$ ersetzt, und eine einfache Stetigkeitsbetrachtung zeigt, daß das Ergebnis noch richtig ist, wenn man nur $\mathrm{vol}\,(V) \geqq 2^m$ voraussetzt.

Dieser Satz ist einer der Eckpfeiler der von Minkowski geschaffenen „Geometrie der Zahlen". Aus Platzgründen können wir hier nur einige einfache Anwendungen dieses Satzes angeben und leider die allgemeineren und tieferliegenden Sätze Minkowskis nicht zur Sprache bringen. Unser begrenztes Ziel besteht darin, zu zeigen, wie Minkowski den obigen Satz benutzt hat, um Verallgemeinerungen der Sätze von Dirichlet und Kronecker zu erhalten.

Zunächst betrachten wir den durch eine Menge von Linearformen

$$L_r(\mathbf{x}) = \alpha_{1r}x_1 + \cdots + \alpha_{mr}x_m\,, \qquad 1 \leqq r \leqq m\,,$$

mit $\det\,(\alpha_{ir}) = \Delta \neq 0$ und durch positive reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_m$ definierten Bereich

$$V = \{\mathbf{x} \in \boldsymbol{R}^m\colon |L_r(\mathbf{x})| \leqq c_r \text{ für } 1 \leqq r \leqq m\}$$

von $\boldsymbol{R}^m$. Man stellt leicht fest, daß V abgeschlossen, beschränkt und konvex ist und, nach einer kleinen Rechnung, daß $\mathrm{vol}\,(V) = 2^m c_1 \cdots c_m/\Delta$ gilt. Wenn man also $c_1, \ldots, c_m$ so wählt, daß $c_1 \cdots c_m/\Delta \geqq 1$ ist, enthält V einen von null verschiedenen ganzzahligen Vektor $\mathbf{u}$.

Wir zeigen jetzt, wie man dieses Ergebnis dazu benutzen kann, um eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Satzes über die simultane Approximation von k

reellen Zahlen zu beweisen. Es seien k Linearformen

$$\alpha_{1j}x_1 + \cdots + \alpha_{nj}x_n, \qquad 1 \leqq j \leqq k,$$

gegeben. Wir betrachten die Menge der $m = n + k$ Linearformen in $n + k$ Variablen

$$\alpha_{1j}x_1 + \cdots + \alpha_{nj}x_n - x_{n+j} \quad \text{für} \quad 1 \leqq j \leqq k,$$
$$x_i \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq n.$$

Es ist leicht zu sehen, daß der Absolutbetrag der Determinante des Systems gleich 1 ist. Wenn wir also die Zahlen $c_1, \ldots, c_m$ so wählen, daß $c_1 \cdots c_m \geqq 1$ ist, so folgt daraus, daß ein von null verschiedener ganzzahliger Vektor $\mathbf{u}$ mit

$$|\alpha_{1j}u_1 + \cdots + \alpha_{nj}u_n - u_{n+j}| \leqq c_j \quad \text{für} \quad 1 \leqq j \leqq k,$$
$$|u_i| \leqq c_{k+i} \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq n$$

existiert. Die einfachste Wahl besteht darin, $c_{k+i} = X$ für $1 \leqq i \leqq n$ und $c_j = X^{-n/k}$ für $1 \leqq j \leqq k$ zu nehmen, wodurch das Produkt gleich 1 wird; dies ergibt den Satz:

Sind $L_j(\mathbf{x})$, $1 \leqq j \leqq k$, Linearformen in n Variablen mit reellen Koeffizienten und ist $X > 1$, so gibt es nicht sämtlich verschwindende ganze Zahlen $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_k$ derart, daß

$$|L_j(\mathbf{u}) - v_j| \leqq X^{-n/k} \quad \textit{für} \quad 1 \leqq j \leqq k,$$
$$|u_i| \leqq X \quad \textit{für} \quad 1 \leqq i \leqq n$$

gilt.

Minkowski hat den Satz von Dirichlet noch auf eine andere Weise verallgemeinert. Wir kehren noch einmal zum einfachsten Fall zurück. Er besagt, daß es für $\alpha \in \mathbf{R}$ ganzzahlige Werte von x_1, x_2 gibt derart, daß

$$0 < |x_1| \cdot |\alpha x_1 - x_2| \leqq 1$$

gilt. Minkowski hat das Produkt von n allgemeinen Linearformen in n Variablen anstelle dieses Produkts von zwei speziellen Linearformen betrachtet.

Es seien

$$L_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j, \qquad 1 \leqq i \leqq n,$$

diese Linearformen; ferner nehmen wir an, es sei $|\det(\alpha_{ij})| = \Delta > 0$. Minkowski hat den Satz vom konvexen Körper in sehr scharfsinniger Weise benutzt und gezeigt, daß es ganze Zahlen $u_1, \ldots, u_n$ gibt derart, daß

$$0 < |L_1(\mathbf{u}) \cdots L_n(\mathbf{u})| \leqq \frac{n!}{n^n} \Delta$$

gilt. Es ist interessant zu bemerken, daß die obere Schranke $(n!/n^n)\,\Delta$ nicht die bestmögliche ist. Für $n = 2$ kann man zeigen, daß die bestmögliche obere Schranke $\Delta/\sqrt{5}$ ist, und für $n = 3$ hat Davenport gezeigt, daß dies $\Delta/7$ ist. Aber im allgemeinen Fall hat man kaum ein Ergebnis, nicht einmal eine Vermutung.

Wir werden nun sehen, wie Minkowski den Satz von Kronecker verallgemeinert hat. Die einfachste Formulierung dieses Satzes besagt, daß es zu einer irrationalen Zahl α und einer beliebigen reellen Zahl ϱ unendlich viele ganzzahlige Werte von x_1, x_2 gibt derart, daß

$$|x_1| \cdot |\alpha x_1 + x_2 + \varrho| < 3$$

ist. Minkowski hat die beiden Linearformen

$$L_1(\mathbf{x}) = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 , \qquad L_2(\mathbf{x}) = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2$$

mit $|\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}| = \Delta \neq 0$ betrachtet und folgendes gezeigt:

Sind ϱ_1 und ϱ_2 zwei reelle Zahlen, so gibt es ganze Zahlen u_1, u_2 mit der Eigenschaft

$$|L_1(\mathbf{u}) + \varrho_1| \cdot |L_2(\mathbf{u}) + \varrho_2| \leqq \frac{1}{4}\Delta .$$

Ist überdies α_{11}/α_{22} irrational, so existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ ganze Zahlen u_1', u_2', die über die obenstehende Ungleichung hinaus der Abschätzung $|L_1(\mathbf{u}') + \varrho_1| < \varepsilon$ genügen.

Wir sind nicht in der Lage, wirklich eine Vorstellung von dem schwierigen Beweis dieses Satzes zu geben. Minkowski hat vermutet, daß im allgemeinen folgendes gilt: Sind $L_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ Linearformen mit $|\det(\alpha_{ij})| = \Delta > 0$ und $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ reelle Zahlen, so gibt es einen ganzzahligen Vektor $\mathbf{u}$ mit der Eigenschaft

$$|(L_1(\mathbf{u}) + \varrho_1) \cdots (L_n(\mathbf{u}) + \varrho_n)| \leqq \frac{1}{2} n\Delta .$$

In den Fällen $n = 3$ und $n = 4$ ist dies bewiesen, im ersten 1923 durch Remak, im zweiten 1947 durch Dyson. Der allgemeine Fall hat bis heute allen Anstrengungen getrotzt.

5.8.4. *Approximation algebraischer Zahlen durch rationale Zahlen*

Trotz aller im Laufe des achtzehnten Jahrhunderts durchgeführten Untersuchungen über die Lösung von Gleichungen bemerkte man erst 1851, daß es für die Approximation einer algebraischen Zahl durch rationale Zahlen eine bestimmte Grenze gibt. Liouville hat bewiesen, daß es zu jeder algebraischen Zahl α vom Grade n eine Konstante $c(\alpha) > 0$ gibt derart, daß für jede rationale Zahl p/q die Ungleichung $|\alpha - (p/q)| > c(\alpha)/q^n$ besteht. Erst im Jahre 1909 wurde dieser Satz seinerseits durch den norwegischen Mathematiker Axel Thue verbessert. Thue interessierte sich nicht für Diophantische Approximationen als solche. Er wollte zeigen, daß bestimmte Typen von Diophantischen Gleichungen nur endlich viele Lösungen besitzen. Er bemerkte, daß er dafür eine Verfeinerung des Satzes von

Liouville brauchte. Diese Seite des Werkes von Thue wird in 5.9. diskutiert. Der Satz von Thue lautet:

Ist α eine algebraische Zahl vom Grad n und $\varkappa > 1 + (n/2)$, so gibt es eine Konstante $c(\alpha, \varkappa)$ derart, daß für jede rationale Zahl p/q die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha, \varkappa)}{q^{\varkappa}}$$

erfüllt ist.

Für $n > 2$ ist der Satz von Thue also besser als der Satz von Liouville.

Im Satz von Thue muß man einen wichtigen Punkt hervorheben, der die Zahlentheoretiker im Laufe von mehr als sechzig Jahren bewegt hat. Es wird nur gesagt, daß die Konstante $c(\alpha, \varkappa)$ existiert, und der Thuesche Beweis gibt keinerlei Methode, um einen Wert von $c(\alpha, \varkappa)$ effektiv zu berechnen, wenn die Zahlen α und $\varkappa$ gegeben sind. Das rührt daher, daß Thues Beweis indirekt geführt wird; wir können aber hier nicht auf Einzelheiten eingehen. Fast alle Verbesserungen des Satzes von Thue, die wir nachstehend behandeln, weisen den Mangel auf, daß sie nicht konstruktiv sind.

Im Anschluß an das Thuesche Resultat legte man sich naturgemäß die Frage vor, wie weit man den Wert von $\varkappa$ als Funktion von n verkleinern könne, ohne daß die Aussage des Satzes falsch würde. Das Problem erwies sich als außerordentlich schwierig, so daß man nur langsam voran kam. Im Jahre 1921 hat Siegel die Methode von Thue verfeinert und gezeigt, daß $\varkappa > 2\sqrt{n}$ statt $\varkappa > 1 + (n/2)$ gewählt werden kann. Siegels Ergebnis wurde von Dyson (1947) leicht verbessert, er fand $\varkappa > \sqrt{2n}$. Wirklich aufsehenerregend war jedoch das Ergebnis, das Roth[60] 1955 erhielt. Er zeigte, daß man $\varkappa > 2$ nehmen darf, also *unabhängig* vom Grad von α.

In einem bestimmten Sinne ist das Rothsche Resultat das bestmögliche dieses Typs; denn wie wir im Vorangehenden gesehen haben, gibt es unendlich viele rationale Zahlen p/q mit $|\alpha - (p/q)| < q^{-2}$. Wenn die Vermutung zutrifft, daß in der Kettenbruchentwicklung von α alle Teilnenner beschränkt sind, läßt sich die Existenz eines $c(\alpha) > 0$ beweisen, das die Eigenschaft besitzt, für alle rationalen Zahlen p/q der Abschätzung $|\alpha - (p/q)| > c(\alpha)/q^2$ zu genügen. Doch ist diese Vermutung außer im Fall eines α vom Grad 2 völlig offen.

Ebenso wie Dirichlet die Approximation mehrerer reeller Zahlen untersucht hat, kann man sich für die simultane Approximation von k algebraischen Zahlen durch rationale Zahlen mit gleichem Nenner interessieren. Der Beweis dieser Verallgemeinerung, deren Ergebnis leicht zu vermuten ist, hat sich als außerordentlich schwierig herausgestellt. Er wurde schließlich 1970 von W. M. Schmidt erbracht, der folgendes Ergebnis bewiesen hat:

Sind die algebraischen Zahlen $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig und ist $\varepsilon > 0$, so gibt nur endlich viele ganze Zahlen $q > 0, p_1, \ldots, p_k$ mit

$$q^{1+\varepsilon}\,|q\alpha_1 - p_1| \cdots |q\alpha_k - p_k| < 1\,.$$

Als unmittelbare Schlußfolgerung aus diesem Satz ergibt sich, daß nur endlich viele ganze Zahlen $q > 0$, $p_1, \dots, p_k$ existieren, welche den Ungleichungen

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+(1/k)+\varepsilon}}, \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

genügen, was sich auch folgendermaßen formulieren läßt:

Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ Zahlen, die den Voraussetzungen des Satzes von Schmidt genügen. Ist $\varkappa > 1 + (1/k)$, so gibt es ein $c(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ derart, daß für alle ganzen Zahlen $p_1, \dots, p_k$, $q > 0$, die Ungleichungen

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| > \frac{c(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}{q^{\varkappa}}, \qquad 1 \leqq i \leqq k,$$

erfüllt sind.

Daß diese Sätze nicht effektiv sind, wirft Probleme auf, wenn man sie auf die Untersuchung von Diophantischen Gleichungen anwendet, wie wir in 5.9. sehen werden. Ein wichtiges Problem bestand darin, eine *effektive* Verfeinerung des Satzes von Liouville zu finden. Ein solches Ergebnis wurde 1971 von Feldman erzielt. Durch Verfeinerung der Methoden von Baker (vgl. 5.7.) zeigte er, daß es zu einer algebraischen Zahl α vom Grade n effektiv berechenbare Konstanten $c(\alpha)$, $\varkappa(\alpha)$ mit $\varkappa(\alpha) < n$ gibt mit der Eigenschaft, daß für jede rationale Zahl p/q die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha)}{q^{\varkappa}}$$

besteht. Die Konstante $\varkappa(\alpha)$ ist nur wenig kleiner als 1, und der Weg bis zu einer effektiven Version etwa des Satzes von Thue scheint lang. Es ist interessant zu bemerken, daß im Feldmanschen Beweis die ursprüngliche Überlegung von Thue umgekehrt wird. Feldman hat eine Verfeinerung der Bakerschen Methode benutzt, um effektive obere Schranken für die Lösung von bestimmten Diophantischen Gleichungen zu erhalten, und dann dieses Ergebnis über die Diophantischen Gleichungen angewandt, um die effektive Version seines Satzes zu beweisen.

5.9. Diophantische Gleichungen

5.9.1. Allgemeines

Eine Diophantische Gleichung ist einfach eine Gleichung

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

wobei f ein Polynom mit *ganzzahligen* Koeffizienten ist. Das Hauptproblem der Untersuchung von Diophantischen Gleichungen besteht darin, festzustellen, ob ein System von solchen Gleichungen eine aus ganzen bzw. aus rationalen Zahlen bestehende Lösung besitzt.

Bis zur Mitte des neunzehnten Jahrhunderts war das Gebiet der Diophantischen Gleichungen — abgesehen von der Theorie der binären quadratischen Formen — ein Chaos von speziellen Resultaten. Jede Gleichung war durch eine besondere Methode gelöst worden, die sich nur sehr selten auf eine andere Gleichung anwenden ließ, selbst wenn sie sich nur wenig davon unterschied. Die Situation begann sich langsam zu ändern, als Verfahren entwickelt wurden, um ganze Klassen von Gleichungen und nicht mehr nur eine einzelne Gleichung zu behandeln.

In 5.9.2. werden wir kurz die Ergebnisse von H. J. S. Smith über die vollständige Lösung von Systemen linearer Diophantischer Gleichungen erwähnen. Smith lieferte auch sehr wichtige Beiträge zur allgemeinen Theorie der quadratischen Diophantischen Gleichungen, von denen wir in 5.10. sprechen werden.

Gegen 1890 begann man Ideen, die aus der algebraischen Geometrie kamen, auf Diophantische Gleichungen anzuwenden, und dieser Aspekt des Gegenstandes ist heute noch wirksam. Wir werden ihm den Abschnitt 5.9.3. widmen. Das erste und einfachste Beispiel einer Methode verdankt man C. Runge.[(61)] Wir gehen im folgenden auf Begriffe ein, die aus der algebraischen Geometrie stammen, wie etwa birationale Äquivalenz und Geschlecht, um dann die bekannten Hauptergebnisse über die Gleichungen zu beschreiben, welche den algebraischen Kurven entsprechen.

Ein weiteres Werkzeug, das sich in der Entwicklung der Theorie bei der Untersuchung von Diophantischen Gleichungen in zwei Variablen als sehr nützlich erwiesen hat, ist die Theorie der Approximation irrationaler Zahlen; von dieser Anwendung werden wir in 5.9.4. sprechen.

Es ist recht bemerkenswert, daß Verfahren entdeckt wurden, um zu zeigen, daß ausgedehnte Klassen von Diophantischen Gleichungen mit „genügend vielen“ Variablen Lösungen besitzen. Über diese Methoden werden wir in 5.9.5. sprechen. Schließlich werden wir in 5.9.6. zeigen, wie es die Anwendung von Ideen, die aus der mathematischen Logik stammen, gestattete, das 10. Hilbertsche Problem zu lösen, d. h. das Problem, ob es möglich ist, ein Verfahren anzugeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob eine vorgelegte Diophantische Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist oder nicht.

5.9.2. *Lineare Gleichungen*

Das von Smith entwickelte Verfahren zur Lösung eines Systems linearer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten besteht darin, die Matrix des Systems zu „reduzieren“ (vgl. 3.2.2.); kennt man die invarianten Faktoren, so ist es möglich zu entscheiden, ob das System lösbar ist, ohne daß es vorher reduziert werden muß. Smith selbst erweckte den Eindruck, seine Arbeit trage eher den Charakter eines Lehrbuches als eines Originalbeitrags, und tatsächlich hat er nur eine etwas ältere Arbeit von Heger vervollständigt. Vermutlich schrieb Smith seine Arbeit, weil er eine vollständige Behandlung der Frage brauchte, um in seiner Arbeit über die n-ären quadratischen Formen darauf verweisen zu können.

5.9.3. *Nichtlineare Gleichungen*

5.9.3.1. Die Ergebnisse von Runge

Die erste Anwendung der algebraischen Geometrie auf nichtlineare Diophantische Gleichungen in zwei Veränderlichen verdankt man C. Runge (1887). Er faßte die Diophantische Gleichung $f(x, y) = 0$ als eine in der projektiven komplexen Ebene definierte algebraische Kurve auf und verwendete die recht ausgiebigen Kenntnisse, die man damals in der Kurventheorie hatte.

Seine Grundidee ist sehr scharfsinning; es handelt sich um eine Anwendung des Satzes von Bezout (vgl. 2.3.1.). Wenn man eine andere Gleichung $h(x, y) = 0$ mit der Eigenschaft konstruieren könnte, daß die Kurven $f = 0$ und $h = 0$ keine gemeinsame irreduzible Komponente (vgl. 3.3.1.) besitzen und außerdem *jede ganzzahlige Nullstelle von f auch Nullstelle von h ist*, dann würde aus dem Satz von Bezout folgen, daß $f(x, y) = 0$ nur endlich viele ganzzahlige Punkte besitzt, die explizit bestimmt werden können. Außerdem genügt es, ein h von der Art zu konstruieren, daß alle ganzzahligen Nullstellen von f, die außerhalb eines beschränkten Gebietes $|x| > c$, $|y| > c$ (für eine Konstante $c > 0$) liegen, Nullstellen von h sind.

Es gibt verschiedene Kriterien, die garantieren, daß zwei Kurven keine gemeinsame irreduzible Komponente haben. Ist beispielsweise $f = 0$ irreduzibel und vom Grad n in y, so genügt es, ein h zu konstruieren, das die oben genannte Eigenschaft besitzt und in y höchstens vom Grad n ist. Dies ist möglich, wenn man f noch verschiedene zusätzliche Bedingungen auferlegt. Eine typische Bedingung ist die folgende: Setzt man

$$f(x, y) = A_0(x)\, y^n + A_1(x)\, y^{n-1} + \cdots + A_n(x)$$

mit $A_i(x) \in \mathbf{Z}[x]$, so kann man, wie Runge gezeigt hat, das gesuchte Polynom h konstruieren, wenn $A_0(x)$ keine Konstante ist. Runge bewies auch weitere analoge Sätze, sogar ohne jedesmal vorauszusetzen, daß f irreduzibel ist, dann allerdings unter weiteren Bedingungen, welche die Konstruktion von h ermöglichen. Diese Konstruktion ist in allen bekannten Fällen recht kompliziert, jedoch immer *effektiv*, d. h., wenn f einer der Rungeschen Bedingungen genügt, kann man stets die ganzzahligen Punkte von $f = 0$ explizit bestimmen.

5.9.3.2. Birationale Äquivalenz und Geschlecht

Es seien C und D zwei durch irreduzible Gleichungen $f(x, y) = 0$, $g(u, v) = 0$ definierte Kurven, wobei f und g Polynome (nicht notwendig gleichen Grades) sind. Man sagt, es gebe eine *rationale Abbildung* von C auf D, wenn ein Paar von Funktionen

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y)/\varphi_2(x, y)\,, \qquad \psi(x, y) = \psi_1(x, y)/\psi_2(x, y)$$

existiert, wobei $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ Polynome mit rationalen Koeffizienten sind, für welche folgendes gilt:

1. Liegt der Punkt (x, y) auf C, so liegt bis auf endlich viele „Ausnahmepunkte" (siehe unten) der Punkt $(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ auf D.

2. Das Polynom $f(x, y)$ teilt weder φ_2 noch ψ_2 (sonst hätte die Bedingung 1 keinen Sinn).

Aus dem Satz von Bezout folgt, daß die Kurven $f = 0$, $\varphi_2 = 0$ einerseits und die Kurven $f = 0$, $\psi_2 = 0$ andererseits nur endlich viele gemeinsame Punkte besitzen, welche *Ausnahmepunkte* genannt werden und explizit bestimmt werden können.

Zwei Kurven C, D sind *birational äquivalent*, wenn eine rationale Abbildung von C auf D und eine rationale Abbildung von D auf C existieren, die zueinander invers sind. In dem von uns hier untersuchten Zusammenhang ist dieser Begriff deshalb von Interesse, weil dann, wenn eine Gleichung $f = 0$ eine rationale Lösung besitzt, die kein Ausnahmepunkt ist, auch $g = 0$ eine rationale Lösung besitzt; man darf also hoffen, auf diese Weise eine Kurve C durch eine birational äquivalente Kurve zu ersetzen, die leichter zu untersuchen ist.

Das *Geschlecht* einer algebraischen Kurve (vgl. 7.2.7.) hat die Eigenschaft, daß zwei birational äquivalente Kurven das gleiche Geschlecht haben (doch brauchen Kurven gleichen Geschlechts nicht birational zu sein); dies ermöglicht die Klassifizierung der Diophantischen Gleichungen $f(x, y) = 0$ nach dem Geschlecht der Kurve $f = 0$.

5.9.3.3. Kurven vom Geschlecht 0

Im Jahre 1890 zeigten Hilbert und Hurwitz, daß die Kurve $f = 0$ zu einem Kegelschnitt oder einer Geraden birational äquivalent ist, wenn $f(x, y)$ das Geschlecht 0 hat; daher reduziert sich die Lösung der Gleichung auf ein seit dem achtzehnten Jahrhundert gelöstes Problem (vgl. 5.2.).

5.9.3.4. Gleichungen vom Geschlecht 1

Spezialfälle von Diophantischen Gleichungen der Gestalt

$$y^2 = 4x^3 - Ax - B, \tag{1}$$

wobei A und B rationale Zahlen sind, waren schon von Fermat, Euler und anderen untersucht worden. Sie wußten, daß die Verbindungsgeraden zweier rationaler Punkte (a, b) und (c, d) auf der Kurve (bzw. die Tangente, wenn die Punkte zusammenfallen) die kubische Kurve in einem weiteren rationalen Punkt schneiden. Ausgehend von einem rationalen Punkt P_1 erhält man also einen weiteren rationalen Punkt P_2 als Schnitt der Kurve und der Tangente in P_1, und diese Konstruktion kann man iterieren; das Verfahren scheint eine unendliche Folge rationaler Punkte zu liefern, und Euler kannte Beispiele, in denen dies richtig zu sein schien, konnte es aber nicht beweisen (er kannte auch Beispiele, bei denen sich in dieser Weise nur endlich viele Punkte ergaben).

Bekanntlich hatte Clebsch den Gedanken, die elliptischen Funktionen zur Parametrisierung der Kurve (1) mit Hilfe von $x = \wp(u)$, $y = \wp'(u)$ zu benutzen, wobei $\wp$ die Weierstraßsche Funktion (vgl. 7.1.14.) ist. Sind P_1, P_2 zwei den Werten u_1, u_1 des Parameters u entsprechende Punkte, so ist der Punkt mit dem Parameterwern $u_1 + u_2$ das Spiegelbild des Schnittpunktes der Kurve mit der Verbindungsgeradet

von P_1 und P_1 (bzw. der Tangente im Fall $P_1 = P_2$) an der x-Achse; die rationalen Punkte der Kurve (1) bilden also eine *abelsche Gruppe*. In einer Arbeit von 1901 äußerte Poincaré die Vermutung, diese Gruppe habe *endlich viele Erzeugende*. Die von Hurwitz 1917 begonnene Untersuchung dieser Gruppe wurde von Mordell fortgesetzt, der 1922 die Vermutung von Poincaré bewies. In seiner Arbeit von 1901 hatte Poincaré auch gezeigt, daß eine Kurve $f(x, y) = 0$ vom Geschlecht 1 mit rationalen Koeffizienten, die mindestens einen rationalen Punkt besitzt, einer Kurve (1) birational äquivalent ist, so daß die rationalen Punkte auf einer solchen Kurve ebenfalls eine natürliche Struktur einer abelschen Gruppe besitzen.

Die Erzeugenden dieser Gruppe gehören zweierlei Typen an: Es gibt Erzeugende von endlicher Ordnung und Erzeugende von unendlicher Ordnung. Erstere bilden eine endliche Untergruppe, die 1935 von Nagell charakterisiert wurde; er hat beispielsweise folgendes gezeigt: Sind A und B in (1) ganzzahlig, so muß ein Punkt (x_1, y_1) von endlicher Ordnung so beschaffen sein, daß x_1 und y_1 ganze Zahlen sind und außerdem $y_1 = 0$ oder y_1^2 ein Teiler von $4A^3 - 27B^2$ ist. Für gegebene Werte von A und B kann man also immer die Punkte von endlicher Ordnung explizit bestimmen. Im Jahre 1976 bewies B. Mazur eine alte Vermutung, indem er zeigte, daß eine ganze Zahl N_0 existiert derart, daß auf *jeder* über den rationalen Zahlen definierten Kurve vom Geschlecht 1 die Gruppe der Punkte von endlicher Ordnung höchstens N_0 Elemente besitzt.

Weitaus weniger befriedigend ist die Situation für die Erzeugenden von unendlicher Ordnung. Für eine gegebene Kurve vom Geschlecht 1 kennt man keinen Algorithmus zur Entscheidung der Frage, ob die Kurve einen rationalen Punkt von unendlicher Ordnung enthält. Der Beweis des Mordellschen Satzes ist nicht konstruktiv und kann höchstens eine obere Schranke für die *Anzahl* der Erzeugenden von unendlicher Ordnung liefern; er gibt keine Auskunft über die Koordinaten dieser Punkte.

5.9.3.5. Die Vermutungen von Birch und Swinnerton-Dyer

Es gibt allerdings bemerkenswerte Vermutungen, die 1963 von Birch und Swinnerton-Dyer formuliert wurden, welche die Anzahl der Erzeugenden von unendlicher Ordnung mit dem Verhalten der *Zetafunktion* der Kurve verknüpfen. Der Einfachheit halber betrachten wir die Kurve $y^2 = x^3 - Ax - B$ mit *ganzzahligen* A und B. Für jede Primzahl p kann man sich vorstellen, die Kongruenz $y^2 \equiv x^3 - Ax - B \pmod{p}$ definiere eine quadratische Erweiterung des Funktionenkörpers $\boldsymbol{F}_p(x)$, und in einer solchen Erweiterung definiert man das Analogon $\zeta_p(s)$ der Dedekindschen Zetafunktion (vgl. 5.12.). Ist p kein Teiler der Diskriminante $\Delta = 4A^3 - 27B^2$ der Kurve, so läßt sich zeigen, daß

$$\zeta_p(s) = 1 + \frac{N_p - p}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}$$

ist, wobei N_p die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $y^2 \equiv x^3 - Ax - B \pmod{p}$ bedeutet. Für die Primzahlen p, die Δ teilen, hat die Kurve $y^2 \equiv x^3 - Ax - B \pmod{p}$ über $\boldsymbol{F}_p$ nicht mehr das Geschlecht 1, doch kann man auch wieder die

entsprechenden Funktionen $\zeta_p(s)$ definieren, die keinesfalls mehr durch die gleiche Formel wie oben gegeben sind; sie betreffen aber die folgenden Resultate nicht.

Die Zetafunktion der Kurve $C\colon y^2 = x^3 - Ax - B$ ist dann durch

$$\zeta_C(s) = \prod_p \zeta_p(s) = \prod_{p\mid\Delta} \zeta_p(s) \cdot \prod_{p\nmid\Delta} \zeta_p(s)$$
$$= \prod_{p\mid\Delta} \zeta_p(s) \cdot \prod_{p\nmid\Delta} \left(1 + \frac{N_p - p}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)$$

definiert. Der erste Faktor ist ein Produkt von ganzen Funktionen von s; wichtig ist der zweite Faktor. Man kann beweisen, daß das ihn definierende unendliche Produkt für $\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}$ absolut konvergent ist; Hasse hat jedoch vermutet, $\zeta_C(s)$ ließe sich zu einer auf der ganzen Ebene meromorphen Funktion fortsetzen.

Die einfachste der Vermutungen von Birch und Swinnerton-Dyer ist die, daß $\zeta_C(s)$ an der Stelle $s = 1$ eine Nullstelle besitzt, deren Ordnung gleich der Anzahl der Erzeugenden von unendlicher Ordnung in der Gruppe der rationalen Punkte der Kurve $y^2 = x^3 - Ax - B$ ist.(62) Wenn diese Vermutung richtig ist, würde sie ein Mittel in die Hand geben, um zu entscheiden, ob eine gegebene Kurve vom Geschlecht 1 Punkte unendlicher Ordnung besitzt, indem man nachprüft, ob $\zeta_C(s)$ an der Stelle $s = 1$ eine Nullstelle hat; dies würde jedoch noch kein Verfahren liefern, um die Punkte unendlicher Ordnung zu finden, wenn sie existieren.

Diese Vermutung hat sich in sehr vielen Spezialfällen als richtig herausgestellt, und es ist sehr wahrscheinlich, daß alle Vermutungen von Birch und Swinnerton-Dyer zutreffen. Leider können wir hier nicht die anderen Vermutungen formulieren; noch weniger sind wir in der Lage, die heuristischen Überlegungen anzuführen, die sie plausibel machen (siehe [46]).

Im Jahre 1977 haben Coates und Wiles diese Vermutungen dadurch wahrscheinlicher gemacht, daß sie folgendes zeigten: Ist $f(x, y) = 0$ eine elliptische Kurve mit komplexer Multiplikation (vgl. 5.5.6.), dann besitzt die zugehörige Zetafunktion eine Nullstelle an der Stelle $s = 1$, wenn die Kurve einen rationalen Punkt von unendlicher Ordnung hat.

Eine recht erstaunliche Konsequenz der Vermutungen von Birch und Swinnerton-Dyer wurde von Goldfeld 1975 bemerkt. Er hat gezeigt, daß man, wenn diese Vermutungen zutreffen, für die Klassenzahl von $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ eine mit d gegen unendlich strebende effektive untere Schranke finden kann.

5.9.3.6. Gleichungen vom Geschlecht $g > 1$

Der gegenwärtige Zustand unserer Kenntnisse über die ganzzahligen oder rationalen Punkte auf einer Kurve vom Geschlecht $g > 1$ läßt sich leicht beschreiben. Im Jahre 1922 sprach Mordell ohne theoretische Begründung die Vermutung aus, auf jeder Kurve vom Geschlecht $g > 1$ gebe es nur endlich viele *rationale* Punkte; man konnte (vor Faltings *[84 bis] — *Anm. d. Übers.*) diese Vermutung allgemein weder beweisen noch widerlegen, obwohl sie für einige spezielle Kurven bestätigt wurde.

Was die *ganzzahligen* Punkte betrifft, so ist die Situation ganz anders. Im Jahre 1929 bewies Siegel, daß auf einer Kurve vom Geschlecht $g > 0$ nur endlich viele ganzzahlige Punkte liegen; für Kurven vom Geschlecht 0 beschrieb er die Voraussetzungen, unter denen es unendlich viele ganze Punkte geben kann, genau, doch können wir diese Bedingungen, die zu technisch sind, hier nicht wiedergeben. Wir wollen nur so viel sagen, daß Siegels Beweis, der die Anwendung von Sätzen über Diophantische Approximationen (vgl. 5.8.) mit einer Verallgemeinerung des Satzes von Mordell über die endliche Basis kombiniert, eine höchst bemerkenswerte Leistung ist. Es ist interessant anzumerken, daß Poincaré diese Verallgemeinerung in seiner Arbeit aus dem Jahre 1901 vermutet hatte; sie wurde 1928 von A. Weil bewiesen.

Es gibt eine interessante Folgerung aus dem Satz von Siegel und dem von Runge, die überraschenderweise erst 1969 bemerkt wurde; sie wurde von Schinzel bewiesen.

Hat $f(x, y) \in \mathbf{Z}[x, y]$ *den Grad* n, *ist* f *über* $\mathbf{Q}$ *irreduzibel und bedeutet* $f_n(x, y)$ *den homogenen Anteil* n*-ten Grades von* f, *so ist, wenn die Gleichung* $f(x, y) = 0$ *unendlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt,* $f_n(x, y)$ *bis auf einen konstanten Faktor eine Potenz einer Linearform oder einer irreduziblen quadratischen Form.*

Dieser Satz hat seinerseits das folgende Korollar:

Es sei $f(x, y)$ *eine irreduzible Form vom Grad* n *und* $g(x, y)$ *ein Polynom vom Grad* $m < n$. *Dann hat die Diophantische Gleichung* $f(x, y) = g(x, y)$ *nur endlich viele ganzzahlige Lösungen.*

Alle Resultate, die wir eben für Diophantische Gleichungen mit rationalen Koeffizienten angegeben haben, sind auf Diophantische Gleichungen ausgedehnt worden, bei denen die Koeffizienten algebraische Zahlen sind und man Lösungen sucht, die einem gegebenen algebraischen Zahlkörper angehören; diese Verallgemeinerungen sind oft nicht trivial und immer sehr technisch.

5.9.4. *Diophantische Gleichungen und Diophantische Approximationen*

5.9.4.1. Der Satz von Thue

Das zweite wichtige Werkzeug bei der Untersuchung von Diophantischen Gleichungen ist die Theorie der Diophantischen Approximationen (vgl. 5.8.). In Wirklichkeit ist die Aussage, die Theorie der Diophantischen Approximationen würde zur Lösung von Diophantischen Gleichungen angewendet, nicht sehr treffend; denn die Beziehung zwischen den beiden Theorien gleicht eher einer Symbiose, da sich die eine als Funktion der anderen entwickelt.

Während des achtzehnten und des neunzehnten Jahrhunderts wurden viele Anstrengungen zur gründlichen Untersuchung von speziellen Gleichungen der Gestalt $f(x, y) = k$ unternommen, wobei f im allgemeinen eine mehr oder weniger auf gut Glück gewählte irreduzible homogene Form höchstens vierten Grades und k eine beliebige ganze Zahl war. Die benutzten Methoden wurden völlig ad hoc

gewählt, doch fand man in allen Fällen, daß die Gleichungen höheren als zweiten Grades nur endlich viele ganzzahlige Lösungen haben. Im Jahre 1909 schließlich nahm Thue das allgemeine Problem in Angriff und bewies den folgenden Satz:

Ist $f(x, y) \in \mathbf{Z}[x, y]$ eine über $\mathbf{Q}$ irreduzible homogene Form vom Grad $n > 2$, so besitzt für jede ganze Zahl k die Gleichung $f(x, y) = k$ nur endlich viele ganzzahlige Lösungen.

Der Beweis ist sehr einfach, sobald man ein Ergebnis der Theorie der Diophantischen Approximationen heranzieht, und er zeigt klar, wie die beiden Theorien miteinander verknüpft sind. Man beginnt mit der Zerlegung von $f(x, y)$ in Faktoren über $\mathbf{C}$, was

$$\frac{k}{y^n} = \left(\frac{x}{y} - \alpha_1\right)\left(\frac{x}{y} - \alpha_2\right) \cdots \left(\frac{x}{y} - \alpha_n\right)$$

liefert, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Wurzeln von $f(x, 1) = 0$ sind. Das Polynom $F(x) = f(x, 1)$ ist über $\mathbf{Q}$ irreduzibel, so daß die α_i paarweise verschieden sind und $F'(\alpha_i) \neq 0$ für $1 \leqq i \leqq n$ ist.

Angenommen, $f(x, y) = k$ hätte unendlich viele ganzzahlige Lösungen. Dann gibt es darunter unendlich viele, für welche y beliebig groß, also k/y^n beliebig klein wird; folglich wird einer der Faktoren $(x/y) - \alpha_i$ unendlich oft sehr klein; dies sei etwa $(x/y) - \alpha_1$. Insbesondere gibt es eine unendliche Folge von ganzen Zahlen $y_0 < y_1 < \cdots$ mit

(a) $\dfrac{x_0}{y_0} > \dfrac{x_1}{y_1} > \cdots > \alpha_1$ oder $\alpha_1 < \cdots < \dfrac{x_1}{y_1} < \dfrac{x_0}{y_0}$.

(b) Es ist $F'(x) \neq 0$ im Intervall mit den Endpunkten α_1 und x_0/y_0.

Daher ist

$$F(\alpha_1) - F\left(\frac{x_i}{y_i}\right) = \left(\alpha_1 - \frac{x_i}{y_i}\right) F'(\theta_i),$$

wobei θ_i in eben diesem Intervall liegt, und aus $F(\alpha_1) = 0$ und $F(x_i/y_i) = k/y_i^n$ folgt

$$\left|\alpha_1 - \frac{x_i}{y_i}\right| = \frac{k}{y_i^n F'(\theta_i)};$$

da $|F'(x)|$ im betrachteten Intervall ein streng positives Minimum besitzt, ergibt sich

$$\left|\frac{k}{F'(\theta_i)}\right| \leqq A,$$

wobei A eine nur von f und k abhängende Konstante ist. Folglich ist

$$\left|\alpha_1 - \frac{x_i}{y_i}\right| \leqq \frac{A}{y_i^n}.$$

An dieser Stelle wendet man nun den Thueschen Satz über die Diophantischen Approximationen an (vgl. 5.8.):

Ist α eine algebraische Zahl vom Grad n und $\varkappa > (n/2) + 1$, so gibt es eine Konstante $c(\alpha, \varkappa)$ derart, daß für jede rationale Zahl p/q die Ungleichung

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha, \varkappa)}{q^{\varkappa}}$$

erfüllt ist.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also eine Konstante $c = c(\alpha_1, (n/2) + 1 + \varepsilon)$ mit

$$\frac{c}{y_1^{(n/2)+1+\varepsilon}} < \left|\alpha_1 - \frac{x_i}{y_i}\right| \leqq \frac{A}{y_i^n};$$

dies führt aber auf einen Widerspruch, sobald y_i genügend groß ist.

Der große Mangel des Satzes von Thue besteht darin, daß nur die Existenz der Konstante c bewiesen wird. Könnte man sie berechnen, so ließe sich aus der obenstehenden Ungleichung herleiten, daß es eine berechenbare Konstante B gibt, für welche aus $|y| > B$ die Beziehung $f(x, y) \neq k$ folgt; dann könnte man im Prinzip alle Lösungen von $f(x, y) = k$ bestimmen, indem man alle Werte $|x| \leqq B$ durchprobiert. Tatsächlich besteht das beste, was man durch Benutzung der Thueschen Methoden erreichen kann, darin, eine effektive obere Schranke für die Anzahl der ganzzahligen Lösungen zu finden; dies gibt aber keinerlei Auskunft über die Größe dieser Lösungen selbst.

Die Lage änderte sich bis zur Mitte des Jahrzehnts 1940—1950 kaum; dann fand Gel'fond einen anderen Beweis des Satzes von Thue. Auch seine Methode lieferte keine Schranken für die Lösungen, da er keine effektive, von 0 verschiedene untere Schranke für

$$|\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_n \log \alpha_n|$$

hatte finden können, wenn die α_i und die β_i von 0 verschiedene algebraische Zahlen mit der Eigenschaft sind, daß $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_n$ über $\boldsymbol{Q}$ linear unabhängig sind und $n > 2$ ist. Immerhin hatte er für $n = 2$ eine solche effektive untere Schranke gefunden; er war davon überzeugt, daß dies auch im allgemeinen Fall möglich sei.

Der entscheidende Fortschritt kam von Baker, der 1966 die Vermutung von Gel'fond bewies (vgl. 5.7.). Etwas später, 1968, zeigte Baker, daß alle Lösungen von $f(x, y) = k$ der Ungleichung

$$\max(|x|, |y|) \leqq \exp\left((nH)^{10^5}\right) \tag{2}$$

genügen, worin H das größte Element der aus $|k|$ und den Absolutbeträgen der Koeffizienten von f bestehenden Menge ist.

Im Jahre 1970 haben Baker und Coates den Anwendungsbereich des Satzes vergrößert, indem sie folgendes zeigten: Ist $f(x, y) = 0$ eine Kurve vom Geschlecht 1 und vom Grad n (hier braucht f nicht homogen zu sein), so genügen alle ganzzahligen Punkte (x_0, y_0) der Kurve der Ungleichung

$$\max(|x_0|, |y_0|) \leqq \exp\exp\exp\left((2H)^{\alpha}\right) \quad \text{mit} \quad \alpha = 10^{n^{10}},$$

wobei H der größte Absolutbetrag der Koeffizienten von f ist.

Feldman hat 1971 die Abschätzung (2) deutlich verbessert, indem er diese Ungleichung durch

$$\max(|x|, |y|) \leqq k^c$$

ersetzte, wobei c eine nur von f abhängende effektive Konstante ist.

Die für die Lösungen erhaltenen Schranken sind auf den ersten Blick sehr groß; in jedem Fall aber, in dem f und k explizit gegeben sind, ermöglichen es die Benutzung eines Computers und bestimmter numerischer Verfahren, die Bakerschen Methoden zur Lösung der oben betrachteten Typen von Diophantischen Gleichungen anzuwenden.

Diese Probleme werden jetzt erfolgreich angegangen. In den Jahren 1974—1975 haben Tijdeman und Schinzel eine Variante der Verfahren von Baker und Feldman auf bestimmte Klassen von Diophantischen Gleichungen angewandt. Insbesondere hat Tijdeman gezeigt, daß die Gleichung $x^m - y^n = 1$ nur endlich viele ganzzahlige Lösungen (x, y, m, n) mit $m > 1$, $n > 1$ besitzt, und eine explizite (sehr große) Schranke für $\max(|x|, |y|, m, n)$ erhalten; die einzige bekannte Lösung ist $3^2 - 2^3 = 1$. Schinzel hat die Gedankengänge Tijdemans auf Gleichungen der Gestalt $y^m = f(x)$ übertragen, wobei f ein Polynom n-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten ist und x, y, m die Unbekannten sind.

5.9.4.2. Normgleichungen

Wir erwähnen kurz eine völlig andere Anwendung der Diophantischen Approximationen auf Diophantische Gleichungen. Im Jahre 1970 benutzte W. Schmidt seine Verallgemeinerung des Satzes von Roth (vgl. 5.8.) auf n Dimensionen, um die Gleichungen der Gestalt $N(x) = m$ zu untersuchen, wobei N die Norm in einem algebraischen Zahlkörper ist (vgl. 5.5.1.); er bewies den folgenden Satz:

Ist K ein algebraischer Zahlkörper und M ein $\mathbf{Z}$-Modul in K, so existiert genau dann eine ganzrationale Zahl m mit der Eigenschaft, daß die Gleichung $N(x) = m$ unendlich viele Lösungen $x \in M$ besitzt, wenn M ein vollständiger Modul[1]) *in einem Teilkörper von K ist, der weder mit $\mathbf{Q}$ noch mit einer imaginär-quadratischen Erweiterung von $\mathbf{Q}$ übereinstimmt.*

Wir führen einige Anwendungen an, die diesen Satz besser verstehen lassen. Angenommen, α sei eine algebraische Zahl vom Grad $n > 2$, die den Körper $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ erzeugt. Es seien $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n-1)}$ die von α verschiedenen Konjugierten von α, und es sei

$$f(x, y) = (x - \alpha y)(x - \alpha^{(1)} y) \cdots (x - \alpha^{(n-1)} y)$$

für ganzrationale x, y, so daß $f(x, y) = N(x - \alpha y)$ ist; dann ist $N(x - \alpha y) = k$ eine Gleichung vom Thueschen Typus (umgekehrt läßt sich jede Gleichung dieses Typus in dieser Gestalt schreiben). Die Zahl α kann nicht in einem von K verschie-

---

[1]) M ist ein vollständiger Modul in einem Teilkörper L von K, wenn M ein freier $\mathbf{Z}$-Modul ist, dessen Rang gleich dem Grad $[L : \mathbf{Q}]$ ist.

denen Teilkörper von K liegen, und der von $(1, \alpha)$ erzeugte $\mathbf{Z}$-Modul kann wegen $n > 2$ in keinem Teilkörper von K vollständig sein. Der Satz von Schmidt besagt hier, daß $N(x - \alpha y) = k$ nur endlich viele ganzzahlige Lösungen besitzt. Da der Satz von Schmidt nicht effektiv ist, ist auch dieser neue Beweis des Satzes von Thue nicht effektiv.

Als zweites Beispiel kann man mit Hilfe des Satzes von Schmidt zeigen, daß die Gleichung

$$x^5 + 2y^5 + 4z^5 - 10xy^3z + 10x^2yz^2 = N(x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[5]{4}) = 1$$

nur endlich viele Lösungen hat; man kennt drei dieser Lösungen:

$$(1, 0, 0)\,, \qquad (-1, 1, 0)\,, \qquad (1, -2, 1)\,.$$

Die Lösung von Gleichungen der Gestalt $N(x) = k$ geht mindestens bis auf Lagrange zurück, und der Dirichletsche Einheitensatz (vgl. 5.5.1.) ist ein Beispiel dieses Problemtyps. Von 1935 an hat Skolem eine Reihe von Arbeiten publiziert, in denen er Spezialfälle des Satzes von Schmidt bewies.

5.9.5. *Diophantische Gleichungen in mehr als zwei Variablen*

Angesichts der Tatsache, daß sich die Probleme, welche Diophantische Gleichungen in zwei Variablen betreffen, als so schwierig erwiesen haben, ist es erstaunlich, daß man überhaupt etwas über die Diophantischen Gleichungen in mehr als zwei Variablen sagen kann. Selbstverständlich darf man nicht erwarten, daß hier Ergebnisse vorliegen, die ebenso vollständig sind wie für die Gleichungen in zwei Variablen; gewöhnlich ist man schon sehr zufrieden, wenn man die Existenz einer einzigen Lösung beweisen kann, ohne sie explizit bestimmen oder alle Lösungen angeben zu können.

Die Verfahren, die zur Untersuchung Diophantischer Gleichungen in n Variablen für beliebiges n benutzt werden, unterscheiden sich beträchtlich von den oben beschriebenen. Ein erster Schritt zur Lösung einer Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ in ganzen Zahlen $\big($mit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)\big)$ besteht in dem Nachweis, daß die folgende notwendige Bedingung erfüllt ist: Wenn $f(\mathbf{x})$ in $\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ liegt, muß die Kongruenz $f(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{p^r}$ für jede Primzahlpotenz p^r eine Lösung besitzen und die Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ eine Lösung in reellen Zahlen haben. Eines der ersten wichtigen Resultate, die aus dieser Sicht hervorgegangen sind, wurde gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts von Minkowski erzielt:

Es sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten. Wenn die Kongruenz $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^r}$ für jede Potenz p^r jeder Primzahl p eine nichttriviale Lösung besitzt und wenn die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine nichttriviale reelle Lösung hat, dann besitzt die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine nichttriviale ganzzahlige Lösung.

Wir beschränken uns hier auf dieses Ergebnis, was die n-ären quadratischen Formen betrifft, die eine besondere Behandlung verdienen (vgl. 5.10.). In diesem Fall ist die Tatsache, daß die Existenz einer reellen Lösung von $f(\mathbf{x}) = 0$ und von

Lösungen der Kongruenzen $f(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{p^r}$ die Existenz von ganzzahligen Lösungen von $f(\mathbf{x}) = 0$ nach sich zieht, recht bemerkenswert. Man darf nicht erwarten, daß im allgemeinen die Existenz „lokaler" Lösungen die Existenz „globaler" Lösungen einschließt, nicht einmal für eine ausgedehnte Klasse von Gleichungen. Alle bisher erzielten Ergebnisse dieser Art sind im wesentlichen Konsequenzen des Hasseschen Normensatzes (vgl. 5.5.10.). Aus diesem Grund pflegt man zu sagen, das „Hasse-Prinzip" sei erfüllt, wenn die Existenz „lokaler" Lösungen die Existenz „globaler" Lösungen nach sich zieht. Zwei Beispiele, in denen dieses Prinzip erfüllt ist, sind die folgenden:

(1) $f(x, y) = 0$ ist eine Kurve vom Geschlecht 0;

(2) die kubische Fläche $ax^3 + by^3 + cz^3 + dw^3 = 0$, wobei a, b, c, d ganze rationale Zahlen sind und $ac = bd$ gilt.

Für Kurven vom Geschlecht größer als 1 oder für allgemeine kubische Flächen ist jedoch das Hasse-Prinzip gewöhnlich nicht erfüllt (vgl. *[114 bis] — *Anm. d. Übers.*).

Nach diesem Satz von Minkowski wurden vor 1918 nur sehr wenige Resultate erzielt, bis dann Hardy und Ramanujan die Erarbeitung einer Methode begannen, die heute die Hardy-Littlewoodsche Kreismethode genannt wird (vgl. 5.9.9.); wir erwähnen hier nur, daß man mit Hilfe dieser Methode Bedingungen angeben kann, die gewährleisten, daß „Diagonalgleichungen" vom Typus $a_1x_1^k + \cdots + a_nx_n^k = b$ ganzzahlige Lösungen besitzen.

Bezüglich der Existenz von Lösungen der Kongruenzen $f(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{p^r}$ stellte E. Artin zu Anfang der dreißiger Jahre die folgende Vermutung auf:

Es seien $f_i(\mathbf{x})$ $(1 \leqq i \leqq s)$ homogene Formen in n Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten. Besitzt f_i den Grad d_i und ist $n > \sum_{i=1}^{s} d_i^2$, so besitzt das Kongruenzensystem $f_i(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{p^r}$ eine nichttriviale Lösung für jede Primzahlpotenz p^r.

Die Notwendigkeit der Bedingung $n > \sum_i d_i^2$ ergibt sich dadurch, daß man verhältnismäßig leicht Beispiele von Kongruenzensystemen in $n = \sum_i d_i^2$ Variablen konstruieren kann, die für keinen Wert von r eine nichttriviale Lösung besitzen. Obwohl die Artinsche Vermutung in vielen Spezialfällen bestätigt worden war, haben Terjanian und Browkin 1966 gezeigt, daß sie falsch ist; wir werden aber später sehen, daß sie „fast" richtig ist.

Im Jahre 1945 gelang Brauer ein wichtiger Schritt in Richtung auf die Artinsche Vermutung. Durch einfache Variablentransformationen und scharfsinnige Kunstgriffe zeigte er, daß das Kongruenzensystem $f_i(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{p^r}$ in ein System von folgendem Typus transformiert werden kann:

$$a_{i1}y_1^{d_i} + \cdots + a_{it}y_t^{d_i} + g_i(y_{t+1}, \ldots, y_n) \equiv 0 \pmod{p^r}, \qquad 1 \leqq i \leqq s,$$

wobei a_{ij} zu $\mathbf{Z}$ gehört und g_i homogen vom Grade d_i mit ganzzahligen Koeffizienten ist; t ist eine explizite Funktion von $n, s, d_1, \ldots, d_s$ und wächst mit n. Brauer zeigte, daß man aus der Existenz einer nichttrivialen Nullstelle für das transformierte System auf die Existenz einer nichttrivialen Lösung des Ausgangssystems schließen kann. Setzt man nämlich $y_{t+1} \equiv \cdots \equiv y_n \equiv 0$, so reduziert sich das Problem auf

die Lösung eines „Diagonalsystems" von Kongruenzen in t Variablen. Brauer bewies die Existenz einer Funktion $\lambda_0(d_1, \ldots, d_s)$ derart, daß im Fall $t > \lambda_0(d_1, \ldots, d_s)$ jedes Diagonalsystem von Kongruenzen modulo p^r in t Variablen eine nichttriviale Lösung hat. Daraus ergibt sich die Existenz einer Funktion $\lambda(d_1, \ldots, d_s)$ mit der Eigenschaft, daß die Relation $n > \lambda(d_1, \ldots, d_s)$ die Ungleichung $t > \lambda_0(d_1, \ldots, d_s)$ nach sich zieht; hieraus folgt, daß das Ausgangssystem eine nichttriviale Lösung hat, falls $n > \lambda(d_1, \ldots, d_s)$ gilt. Die von Brauer definierten Funktionen λ_0 und λ besitzen außergewöhnlich große Werte.

Das derzeitig beste Resultat zur Artinschen Vermutung wurde 1965 von Ax und Kochen gefunden. Mit Verfahren aus der mathematischen Logik und der Modelltheorie (vgl. 13.4.6.) bewiesen sie den folgenden Satz [7]:

Es seien $f_i(\mathbf{x})$ $(1 \leqq i \leqq s)$ homogene Formen des Grades d_i mit ganzzahligen Koeffizienten. Dann existiert eine ganze Zahl $A(d_1, \ldots, d_n)$ mit der Eigenschaft, daß für $p > A(d_1, \ldots, d_n)$ und $n > \sum_i d_i^2$ das Kongruenzensystem $f_i(\mathbf{x}) \equiv 0 \pmod{p^r}$ $(1 \leqq i \leqq s)$ für jedes $r \geqq 1$ eine nichttriviale Lösung hat.

Der Beweis von Ax und Kochen liefert kein Verfahren, das die explizite Berechnung von $A(d_1, \ldots, d_s)$ ermöglichen würde. P. Cohen gab 1969 einen anderen Beweis an, der diesen Mangel nicht zeigt; die sich dabei ergebenden Zahlen sind jedoch so groß, daß es kaum möglich scheint, nach dieser Methode zum Beispiel den besten Wert von $A(4)$ in einer vernünftigen Zeit zu berechnen. Nach Browkin gilt $\limsup_{d\to\infty} A(d) = +\infty$.

Wir kehren jetzt zu allgemeinen Systemen von Diophantischen Gleichungen $f_i(\mathbf{x}) = 0$ $(1 \leqq i \leqq s)$ zurück. Man kann sich vorstellen, das Verfahren der Diagonalisierung von Brauer anzuwenden, doch scheint dies nicht direkt möglich zu sein. Immerhin konnte Lewis 1957 mit Hilfe von Ergebnissen der algebraischen Zahlentheorie zeigen, daß eine kubische Form hinreichend vieler Variablen mit rationalen Koeffizienten stets eine nichttriviale rationale Nullstelle hat. Unabhängig davon dehnte Birch 1957 die Methode von Brauer auf gewisse Gleichungssysteme aus: Unter der Voraussetzung, daß die f_i Formen *ungeraden* Grades d_i sind, zeigte Birch durch scharfsinnige Modifikation der Brauerschen Ideen, daß man das Gleichungssystem auf die Gestalt

$$a_{i1}y_1^{d_i} + \cdots + a_{it}y_t^{d_i} + g_i(y_{t+1}, \ldots, y_n) = 0\,, \qquad 1 \leqq i \leqq s\,,$$

transformieren kann, wobei die g_i homogen vom Grad d_i sind. Mit Hilfe der Ergebnisse, die für die Diagonalsysteme mittels der Hardy-Littlewoodschen Kreismethode erzielt worden waren, erhielt Birch den folgenden Satz:

Zu jedem Paar k, s von ganzen Zahlen gibt es eine ganze Zahl $n_0(k, s)$ derart, daß für jedes System aus s Formen $f_i(\mathbf{x})$ ungeraden Grades $d_i \leqq k$ mit rationalen Koeffizienten und $n \geqq n_0(k, s)$ Variablen das Gleichungssystem $f_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, f_s(\mathbf{x}) = 0$ eine nichttriviale ganzzahlige Lösung besitzt.

In Wirklichkeit ist dies eine erste Näherung an einen allgemeineren Satz, bei dem keine Voraussetzungen mehr über die Gerad- oder Ungeradzahligkeit der d_i gemacht werden, den Birch 1962 bewiesen hat und den wir später formulieren werden.

Im gleichen Jahr 1957 griff Davenport das Problem einer einzigen Gleichung dritten Grades mit einer völlig anderen Methode an: Mit einer originellen Variante der Methode von Hardy-Littlewood bewies er, daß eine homogene Gleichung dritten Grades $C(x_1, \dots, x_n) = 0$ mit ganzzahligen Koeffizienten stets eine ganzzahlige nichttriviale Lösung besitzt, wenn $n \geqq 32$ ist. Durch Verfeinerung seines Verfahrens drückte er 1962 die Schranke auf $n \geqq 16$ herab; man weiß seit langem, daß es kubische Formen in neun Variablen gibt, die keine nichttriviale ganzzahlige Nullstelle haben, und man vermutet, daß jede kubische Form in zehn Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten stets eine nichttriviale ganzzahlige Nullstelle hat.

Der Gedanke von Davenport besteht darin, die Anzahl der ganzzahligen Punkte abzuschätzen, die der Gleichung $C(x_1, \dots, x_n) = 0$ genügen und in dem zu einem Quader $\mathcal{B}$ in $\boldsymbol{R}^n$ ähnlichen Quader $P\mathcal{B}$ liegen, falls P eine gegen unendlich strebende ganze Zahl ist. Für jede reelle Zahl α_1 setzt man

$$S(\alpha) = \sum_{P\mathcal{B}} \exp\left(2\pi i\alpha C(x_1, \dots, x_n)\right),$$

wobei die Summation über alle zu $P\mathcal{B}$ gehörenden ganzzahligen Punkte zu erstrecken ist. Wegen

$$\int_0^1 \exp(2\pi i\alpha m)\, d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq 0, \\ 1 & \text{für } m = 0 \end{cases}$$

wird die gesuchte Zahl $\mathcal{N}(P)$ durch

$$\int_0^1 S(\alpha)\, d\alpha = \sum_{P\mathcal{B}} \int_0^1 \exp\left(2\pi i\alpha C(x_1, \dots, x_n)\right) d\alpha = \mathcal{N}(P)$$

gegeben. Die Anzahl der zu $P\mathcal{B}$ gehörenden ganzzahligen Punkte ist von der Größenordnung P^n. Die bei der Untersuchung des Waringschen Problems (vgl. 5.11.) erworbene Erfahrung erlaubt zu hoffen, daß die Anzahl dieser Punkte, welche die Bedingung $C(x_1, \dots, x_n) = 0$ erfüllen, von der Größenordnung P^{n-3} ist. Daher versuchte Davenport, eine asymptotische Formel für $\int_0^1 S(\alpha)\, d\alpha$, deren Hauptglied von der Größenordnung P^{n-3} sein sollte, zu erhalten. Doch war alles, was er erreichen konnte, eine Formel dieses Typs, die für $n \geqq 16$ und unter der zusätzlichen Voraussetzung gilt, daß die Gleichung $C(x_1, \dots, x_n) = 0$ *überhaupt keine* nichttriviale ganzzahlige Lösung besitzt!

Schließlich konnte Birch 1961 durch wesentliche Verallgemeinerung der Methode Davenports einen Satz beweisen, den man als die Quintessenz der Untersuchungen dieses Abschnitts ansehen kann [5]:

Es seien $f_1, \dots, f_r$ Formen vom Grad k in n Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten $(n > k \geqq 1)$. Ferner sei V die durch die Gleichungen

$$f_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, f_r(\mathbf{x}) = 0$$

bestimmte algebraische Mannigfaltigkeit (Varietät), und ihre Dimension sei $n - r$. Ferner sei S die Menge der singulären Punkte von V und $s = \dim S$. Unter der Voraussetzung, V enthalte einen nichtsingulären reellen Punkt und für jede Prim-

zahl p einen nichtsingulären p-adischen Punkt (vgl. 5.5.9.), *enthält V im Fall*

$$n - s > r(r + 1)(k - 1)\,2^{k-1}$$

einen von 0 verschiedenen ganzzahligen Punkt.

5.9.6. Das zehnte Hilbertsche Problem

Angesichts der Vielfalt der zur Lösung spezieller Typen von Diophantischen Gleichungen benutzten Methoden fragt man sich natürlich, ob es ein „regelrechtes Verfahren" gibt, das für jede explizit vorgelegte Diophantische Gleichung durch endlich viele Operationen zu entscheiden erlaubt, ob die Gleichung eine ganzzahlige Lösung besitzt oder nicht. In seinem Vortrag auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß 1900 formulierte Hilbert diese Frage als sein zehntes Problem, ohne aber jemals näher anzugeben, was er genau unter einem „regelrechten Verfahren" verstand. Inzwischen ist es den Logikern gelungen, formal einen Begriff zu definieren, der dieser vagen Vorstellung entspricht, und zu zeigen, daß bei dieser Begriffsbestimmung die Antwort auf die Hilbertsche Frage *negativ* ausfällt. Ohne auf die technischen Einzelheiten einzugehen, werden wir versuchen, einen Eindruck von der Entwicklung zu vermitteln, die zu diesem Ergebnis geführt hat.

Bis 1940 gab es unter den Logikern kaum Übereinstimmung darüber, was unter einem „regelrechten Verfahren" zu verstehen sei; allmählich jedoch gelangten die meisten von ihnen dahin, die folgende Formulierung des Problems als akzeptabel anzusehen:

Gibt es ein Rechnerprogramm, das auf jede Diophantische Gleichung anwendbar ist und nach endlich vielen Schritten stets mit „Es gibt eine ganzzahlige Lösung", falls eine solche existiert, bzw. anderenfalls mit „Es gibt keine ganzzahlige Lösung" aufhört?

Beispielsweise würde ein Programm, das nacheinander prüft, ob die Systeme von (in einer Folge angeordneten) ganzen Zahlen der vorgelegten Gleichung genügen oder nicht, nicht der oben aufgestellten Bedingung genügen; denn wenn es keine ganzzahlige Lösung gibt, würde das Programm niemals enden. Die oben angegebene Formulierung läßt sich mit Hilfe der Theorie der rekursiven Funktionen (vgl. 13.4.5.) in eine streng mathematische Form bringen; wir wollen uns hier aber mit einer „naiven" Darstellung begnügen.

5.9.6.1. Berechenbare und halb-berechenbare Mengen

Angenommen, $\mathscr{P}$ sei ein Rechnerprogramm mit endlich vielen Operationen, das auf eine einzige ganze Zahl anwendbar ist und dessen Ziel darin besteht, zu verifizieren, ob diese ganze Zahl eine bestimmte vorgegebene Eigenschaft besitzt. Die Antwort des Rechners sei „ja", wenn die untersuchte ganze Zahl die betreffende Eigenschaft hat. Man sagt dann, die Menge der ganzen Zahlen n,

$$S(\mathscr{P}) = \{n \mid \mathscr{P}, \text{ angewandt auf } n, \text{ liefert die Antwort „ja"}\},$$

sei *halb-berechenbar*. Wenn darüber hinaus das Programm stets mit „ja“ oder „nein“ endet, sagt man, $\mathcal{P}$ sei *effektiv* und die Menge $S(\mathcal{P})$ *berechenbar*.

Es sei beispielsweise $\mathcal{P}$ ein Programm, das die Lösungen von $x^2 + y^2 = n$ unter den Paaren (x, y) von ganzen Zahlen aufsucht, indem es die Antwort „ja“ gibt, wenn eine solche Lösung vorhanden ist, und anderenfalls die Suche unbeschränkt fortsetzt. Dann ist $\mathcal{P}$ nicht effektiv und $S(\mathcal{P})$ halb-berechenbar; doch beweist dies nicht, daß $S(\mathcal{P})$ berechenbar ist. Allerdings wird $S(\mathcal{P})$ auch durch ein Programm $\mathcal{P}'$ bestimmt, das nur die Paare (x, y) mit $|x| \leqq n$, $|y| \leqq n$ durchmustert und eine negative Antwort ausgibt, wenn sich unter diesen Paaren keine Lösung befindet; daher ist $S(\mathcal{P}') = S(\mathcal{P})$ tatsächlich berechenbar. Andere Beispiele berechenbarer Mengen sind die Menge der Primzahlen, die Menge der Quadratzahlen usw.

Die beiden Schlüsselergebnisse über die „Berechenbarkeit“ sind die folgenden:

a) *Eine Menge von nichtnegativen ganzen Zahlen ist genau dann berechenbar, wenn sowohl diese Menge selbst als auch ihr Komplement in* $\boldsymbol{N}$ *halb-berechenbar sind.*

b) *Es gibt eine Menge D, die halb-berechenbar, aber nicht berechenbar ist.*

Der Beweis von a) ist einfach. Der von b) beruht auf folgendem Gedanken. Da ein Programm eine endliche Liste von Befehlen ist und die Befehle in einer aus endlich vielen Symbolen gebildeten Sprache aufgeschrieben sind, ist die Menge der Programme abzählbar, so daß man diese Menge numerieren kann: $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots$. Zu jeder ganzen Zahl n gibt es also ein Programm $\mathcal{P}_n$, und zu jedem Programm $\mathcal{P}$ gibt es eine ganze Zahl n derart, daß $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n$ ist. Es sei $S(\mathcal{P}_k)$ die durch das Programm $\mathcal{P}_k$ definierte halb-berechenbare Menge; wir betrachten die Menge

$$D = \{n \mid n \in S(\mathcal{P}_n)\} .$$

Die Menge D ist halb-berechenbar; denn zu einer gegebenen ganzen Zahl n schreibt man das Programm $\mathcal{P}_n$ auf und wendet es auf die ganze Zahl n an. Dies definiert ein Programm, für welches D halb-berechenbar ist; doch ist D nicht berechenbar. Sonst würde nämlich aus a) folgen, daß das Komplement $\overline{D}$ von D halb-berechenbar ist, und es wäre $\overline{D} = S(\mathcal{P}_k)$ für eine wohlbestimmte ganze Zahl k. Wir betrachten diese Zahl k. Würde k zu $\overline{D}$ gehören, dann wäre $k \in S(\mathcal{P}_k)$, also $k \in D$, was ein Widerspruch ist; wäre $k \in D$, so wäre $k \in S(\mathcal{P}_k) = \overline{D}$, was wiederum ein Widerspruch ist. Also ist D nicht berechenbar.

5.9.6.2. Diophantische Mengen

Die scharfsinnige und fruchtbare Idee, welche diese Begriffe mit dem zehnten Hilbertschen Problem verknüpft, verdankt man Julia Robinson. Sie führte einen neuen Begriff, den der *Diophantischen Menge*, ein. Darunter wird jede Menge $S \subset \boldsymbol{N}$ verstanden, welche die Eigenschaft hat, daß es ein Polynom $f(y; x_1, \ldots, x_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, für welches die Relation $a \in S$ der Tatsache äquivalent ist, daß die Gleichung $f(a; x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine Lösung in $\boldsymbol{Z}^n$ besitzt. Der von Julia Robinson und Matijasevič stammende Hauptsatz lautet: *Jede halb-berechenbare Menge ist Diophantisch.*

Nun zeigen wir, inwiefern die negative Lösung des zehnten Hilbertschen Problems ein einfaches Korollar dieses bemerkenswerten Satzes ist. Der Satz zeigt tatsächlich, daß der oben definierten Menge D ein Polynom $P(y; x_1, \dots, x_n)$ in $n + 1$ Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten entspricht derart, daß $a \in D$ genau dann gilt, wenn die Gleichung $P(a; x_1, \dots, x_n) = 0$ eine Lösung in $\mathbf{Z}^n$ besitzt. Gäbe es ein Programm, das die Entscheidung darüber erlauben würde, ob eine gegebene Diophantische Gleichung eine Lösung besitzt oder nicht, so könnte man dieses Programm auf die Gleichung $P(a; x_1, \dots, x_n) = 0$ für jedes $a \in \mathbf{N}$ anwenden, und D wäre berechenbar.

Schon 1952 faßte Julia Robinson den Gedanken, man müsse den Hauptsatz in zwei Etappen beweisen. In der ersten Etappe würde es sich darum handeln, zu zeigen, daß jede halb-berechenbare Menge eine *exponentiell Diophantische Menge* ist, d. h. eine wie oben definierte Menge, bei der aber bestimmte Variablen x_j in f als *Exponenten* vorkommen dürfen. Die zweite Etappe würde dann darin bestehen, zu zeigen, daß eine exponentiell Diophantische Menge in Wirklichkeit Diophantisch ist. Im Jahre 1952 fand J. Robinson bestimmte Bedingungen, aus denen diese Eigenschaft folgt, und 1961 bewältigte sie in Zusammenarbeit mit M. Davis und H. Putnam die erste Beweisetappe. Doch erst 1970 zeigte Matijasevič, daß es möglich ist, die Bedingungen der Arbeit von J. Robinson aus dem Jahre 1952 zu erfüllen, und damit war der Beweis des Hauptsatzes erbracht.

5.9.6.3. Weitere Anwendungen des Satzes von Robinson-Mantijasevič

Der Beweis des Satzes von Robinson-Matijasevič ist konstruktiv: Ist eine halb-berechenbare Menge S (oder vielmehr das S definierende Programm) gegeben, so kann man die entsprechende Diophantische Gleichung effektiv konstruieren. Durch leichte Abänderung dieser Konstruktion erhält man ein Polynom $g(x_1, \dots, x_m)$ mit ganzzahligen Koeffizienten mit der Eigenschaft, daß S genau die Menge der *streng positiven* Zahlen der Gestalt $g(x_1, \dots, x_m)$ für $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{Z}^m$ ist. Insbesondere kann man für die Menge S der Primzahlen ein Polynom in 21 Variablen aufschreiben derart, daß die Menge der streng positiven ganzen Zahlen, welche Werte dieses Polynoms in $\mathbf{Z}^{21}$ sind, genau die Menge S ist.

Die vielleicht überraschendste Konsequenz des Satzes von Robinson-Matijasevič ist die Existenz einer sogenannten „universellen Gleichung". Man kann die Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten in einer beliebigen Anzahl von Variablen in einer Folge $F_0, F_1, \dots$ anordnen. Die Menge $\mathcal{F}$ derjenigen n, für welche $F_n = 0$ eine ganzzahlige Lösung hat, ist halb-berechenbar, also eine Diophantische Menge; daher gibt es ein Polynom $P(y; x_1, \dots, x_m)$ derart, daß a genau dann in $\mathcal{F}$ liegt, wenn die Gleichung $P(a; x_1, \dots, x_m) = 0$ eine ganzzahlige Lösung besitzt. Mit anderen Worten, die Untersuchung der Lösungen *aller* Diophantischen Gleichungen kann auf die Untersuchung der Polynome $P(y; x_1, \dots, x_m)$ zurückgeführt werden, wobei y als Parameter betrachtet wird. Dieses Polynom kann man wirklich aufschreiben, und J. Robinson und Matijasevič haben gezeigt, daß man $m = 13$ nehmen darf; J. Robinson vermutet sogar, daß man ein solches Polynom mit $m = 3$ finden kann.

Außerdem gilt noch folgende Aussage, die den Gödelschen Unvollständigkeitssatz verschärft: *Zu jeder Axiomatisierung der Arithmetik gibt es eine Diophantische Gleichung, die keine ganzzahlige Lösung besitzt, aber so beschaffen ist, daß dies durch die betrachtete Axiomatisierung nicht bewiesen werden kann.* Wenn die Vermutung von J. Robinson richtig ist, gibt es eine solche Gleichung in drei Veränderlichen.

5.10. Quadratische Formen in *n* Variablen

Nach der umfangreichen Entwicklung der Theorie der binären quadratischen Formen gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts (vgl. 5.4.) erhob sich naturgemäß die Frage, was bei den quadratischen Formen in mehr als zwei Variablen geschieht. Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten, so sind die beiden Grundprobleme, die sämtliche im Verlaufe des neunzehnten Jahrhunderts angestellten Untersuchungen über diesen Gegenstand angeregt haben, die folgenden:

(1) Wann besitzt die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = N$ eine ganzzahlige Lösung?

(2) Wieviel Lösungen besitzt die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n) = N$?

Der Gegenstand ist breit gefächert, und sein Studium wird durch eine Überfülle verschiedenartiger Bezeichnungen und durch das Fehlen einer verständlichen modernen Behandlung erschwert. Wenn man die n-ären quadratischen Formen im Detail studieren möchte, muß man immer auf die *Gesammelten Werke* von Hermite, Smith, Minkowski und Siegel zurückgreifen, ehe man mit einem gewissen Verständnis des Vergangenen die laufende Literatur zur Hand nehmen kann. Alles, was wir in diesem Abschnitt bringen, ist eine kurze Beschreibung der Arbeiten von Smith und Minkowski sowie die Erwähnung von einigen wenigen Resultaten, die sich leicht formulieren lassen.

Bis 1801 hatte man wenige quadratische Formen in $n > 2$ Variablen und sehr spezielle Fälle betrachtet. Die damals bekannten Hauptergebnisse waren:

(a) Der Satz von Lagrange, nach welchem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ jede positive ganze Zahl darstellt.

(b) Der Satz von Legendre, nach welchem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ jede positive ganze Zahl darstellt, die nicht die Gestalt $4^r(8n + 7)$ hat.

(c) Der Satz von Legendre, nach welchem $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ genau dann eine nichttriviale ganzzahlige Lösung besitzt, wenn a, b, c nicht sämtlich das gleiche Vorzeichen haben und wenn für die Legendre-Symbole die Beziehung

$$\left(-\frac{bc}{a}\right) = \left(-\frac{ac}{b}\right) = \left(-\frac{ab}{c}\right) = +1$$

gilt.

In seinen *Disquisitiones Arithmeticae* hatte Gauß mit einer systematischen Untersuchung der ternären quadratischen Formen begonnen. Sein Ziel bestand darin, die Theorie bis zu dem Punkt zu entwickeln, wo sie dazu benutzt werden könnte,

bestimmte Probleme zu lösen, die in der Theorie der binären quadratischen Formen aufgetreten waren. Nachstehend bringen wir das Hauptresultat von Gauß über die ternären quadratischen Formen, über das er nicht hinausgegangen ist.

Wie im Fall von binären quadratischen Formen nennt man zwei ternäre Formen $f(x_1, x_2, x_3)$ und $g(y_1, y_2, y_3)$ mit ganzzahligen Koeffizienten *äquivalent* (über $\mathbf{Z}$), wenn es eine Transformation $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ mit $a_{ij} \in \mathbf{Z}$ und $\det(a_{ij}) = \pm 1$ gibt, die g in f transformiert. Gauß hat gezeigt, daß die Anzahl der Klassen ternärer Formen mit gegebener Diskriminante d bezüglich der Äquivalenz über $\mathbf{Z}$ *endlich* ist. Sein Beweis besteht in dem Nachweis, daß jede Klasse endlich viele „reduzierte" Formen (d. h. Formen, deren Koeffizienten bestimmten Bedingungen genügen; vgl. 5.4. für den binären Fall) enthält und daß es zu einer gegebenen Diskriminante nur endlich viele „reduzierte" Formen gibt.

Im Jahre 1847 hat Eisenstein das Werk von Gauß über die ternären Formen fortgesetzt und einige Schritte in Richtung auf eine Theorie der n-ären quadratischen Formen unternommen. Beispielsweise hat er behauptet, es gebe zu einer gegebenen Diskriminante d nur endlich viele Klassen von n-ären Formen bezüglich der Äquivalenz über $\mathbf{Z}$. Leider waren die Arbeiten Eisensteins nur Ankündigungen von Ergebnissen (die nicht sämtlich richtig waren), ohne jeden Beweis. Die ersten veröffentlichten Beweise bestimmter Behauptungen Eisensteins stammen aus den fünfziger Jahren des vorigen Jahrhunderts, als es Hermite gelang, den Begriff der reduzierten Formen auf den Fall von n Variablen auszudehnen und so zu zeigen, daß die Klassenzahl immer endlich ist. Indessen dauerte es bis 1867, ehe H. J. S. Smith eine vollständige und korrekte Darstellung der anderen Behauptungen Eisensteins mit wichtigen Zusätzen von seiner Seite veröffentlichte. Wir werden nun die Arbeit von Smith kurz beschreiben.

Wie im Fall der binären quadratischen Formen war es notwendig, den Begriff des *Geschlechts* einzuführen, d. h. die Menge der Klassen von n-ären Formen mit gegebener Diskriminante d in disjunkte Teilmengen $\{G_1, \ldots, G_r\}$ einzuteilen, derart daß für jede ganze Zahl N alle Formen, die N darstellen, im gleichen Geschlecht G_i liegen. Eine solche Menge von Klassen wird ein Geschlecht genannt. Die Tatsache, daß eine solche Aufteilung der Klassen in Geschlechter möglich ist, ist ein bemerkenswerter Satz.

Um schließlich die Klassen in den Geschlechtern zu bestimmen, definierte Smith zu gegebener Diskriminante d eine Menge von Funktionen $\{g_i \mid 1 \leqq i \leqq s(d)\}$, welche die *Geschlechtscharaktere* genannt werden. Diese Funktionen sind auf der Menge der Klassen definiert und nehmen die Werte $+1$ oder -1 an; ihre genaue Definition ist recht kompliziert, so daß wir sie hier nicht angeben. Ist $\bar{f}$ eine Klasse von Formen, so ist das Charakterensystem von $\bar{f}$ die Menge der Werte der Charaktere des Geschlechts $\{g_i(\bar{f})\}$. Ein Geschlecht ist eine Menge von Klassen $\bar{f}_j$, die das gleiche Charakterensystem haben, und dieses System von Charakteren wird natürlich das *Charakterensystem* des Geschlechts genannt. Entsprechend der Art und Weise, in der die Charaktere des Geschlechts definiert sind, ergibt sich, daß die Geschlechter G_i die oben verlangte Eigenschaft besitzen.

Smith hat den Satz von Gauß über die Existenz der Geschlechter für die binären quadratischen Formen verallgemeinert, indem er bewies: *Ist eine Folge* $\{a_i\}$ *mit* $a_i = +1$ *oder* -1 *für* $1 \leqq i \leqq s(d)$ *gegeben, so gibt es unter der Voraussetzung* $\prod_i a_i = +1$ *ein Geschlecht, das die Folge der* a_i *als Charakterensystem besitzt.*

Smith hat außerdem einen wichtigen Satz bewiesen, der ein Geschlecht mit Hilfe von Transformationen charakterisiert, nämlich den folgenden:

Zwei n-äre Formen f und g mit der Diskriminante d liegen genau dann im gleichen Geschlecht, wenn es eine Transformation von f in g gibt, deren Matrix rationale Elemente mit zu 2d teilerfremden Nennern und die Determinante +1 hat.

Über diese Charakterisierung der Geschlechter werden wir mehr sagen, wenn wir die Arbeiten von Minkowski besprechen.

Mit seinem System von Geschlechtscharakteren hat Smith alles geleistet, was zum Problem der Darstellung getan werden konnte. Für jede gegebene ganze Zahl N gelang es ihm zu beschreiben, welches Formengeschlecht N darstellt, und bei gegebener Form mit der Diskriminante d war er in der Lage zu entscheiden, ob sie in einem wohlbestimmten Geschlecht liegt. Es gelang ihm aber nicht zu entscheiden, welche Formen in einem Geschlecht eine gegebene ganze Zahl darstellen, abgesehen natürlich in dem Spezialfall, daß das Geschlecht nur eine einzige Formenklasse enthält.

Nach dieser Charakterisierung der Geschlechter für die allgemeinen n-ären quadratischen Formen wandte Smith seine Aufmerksamkeit dem Studium der Anzahl der Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl durch eine gegebene *positiv-definite* Form zu. Der erste Satz, der andeutete, daß es wahrscheinlich diesbezügliche allgemeine Ergebnisse geben muß, ist folgende auf Jacobi zurückgehende Verfeinerung des Lagrangeschen Vier-Quadrate-Satzes. Im Jahre 1829 hat Jacobi gezeigt, daß im Fall $n > 0$, wenn $R(n)$ die Anzahl der Lösungen von $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ in ganzen Zahlen bezeichnet,

$$R(n) = \begin{cases} 8 \sum\limits_{(2d+1)|n} (2d+1) & \text{für} \quad n \equiv 1 \pmod 2\,, \\ 24 \sum\limits_{(2d+1)|n} (2d+1) & \text{für} \quad n \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

gilt. Jacobis in seinen *Fundamenta Nova* veröffentlichter Beweis stützt sich auf die Theorie der elliptischen Funktionen (vgl. Kapitel 7). Der Ausgangsgedanke ist der folgende. Im Fall $|a| < 1$ läßt sich durch direkte Multiplikation leicht zeigen, daß

$$\Big(\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2}\Big)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} R(n)\, q^n$$

gilt. Ausgehend von seiner Untersuchung der Thetafunktionen bewies Jacobi die Beziehung

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2}\Big)^4 &= 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1+(-q)^n} \\ &= 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \big(2 + (-1)^n\big) \Big(\sum_{(2d+1)|n} (2d+1)\Big)\, q^n\,.\end{aligned}$$

Setzt man die Koeffizienten von q^n in den beiden Ausdrücken für $(\sum q^{r^2})^4$ gleich, so erhält man das obige Ergebnis.

Jacobi hat ähnliche, aber kompliziertere Ergebnisse für die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von sechs Quadraten und für bestimmte Werte von n als Summe von acht Quadraten angegeben. Die Methoden, die er benutzte, konnten nicht auf die Darstellung von n als Summe einer ungeraden Anzahl von Quadraten angewandt werden. Insbesondere lassen sie sich nicht auf die Darstellung von n als Summe von fünf Quadraten anwenden. Dies ist eines der Probleme, die Eisenstein 1847 lösen konnte. Doch waren seine Ergebnisse nur Teilresultate und ohne irgendwelche Andeutung eines Beweises ausgesprochen worden. Die Lösung dieses und weiterer ähnlicher Probleme ist ein sehr spezieller Fall der Arbeiten von Smith, die wir nun beschreiben wollen.

Wie wir schon bemerkt haben, ist es nicht möglich, die Unterscheidung zwischen den verschiedenen Formenklassen in einem Geschlecht mit Hilfe der Darstellung einer gegebenen ganzen Zahl zu treffen. Aus diesem Grund betrachteten sowohl Eisenstein als auch Smith die Gesamtheit der Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl N durch alle Klassen eines gegebenen Geschlechts G. Es bezeichne $A(S, N)$ die Anzahl der Darstellungen von N durch die Klasse S, mit anderen Worten, für $f \in S$ sei $A(S, N)$ die Anzahl der Lösungen von $f(\mathbf{x}) = N$. Ist $\mathbf{u}$ eine Lösung von $f(\mathbf{x}) = N$, so erhalten wir für jeden Automorphismus T der Form f eine neue Lösung $T\mathbf{u}$ der Gleichung. Somit ist, wenn $f \in S$ genau $E(S)$ Automorphismen besitzt ($E(S)$ ist endlich, weil wir f als *positiv-definit* voraussetzen), die Anzahl der wesentlich voneinander verschiedenen Darstellungen von N durch die Klasse S gleich $A(S, N)/E(S)$. Folglich ist die Anzahl der wesentlich voneinander verschiedenen Darstellungen von N durch die Klassen des Geschlechts G gleich

$$\sum_{S \in G} \frac{A(S, N)}{E(S)}$$

und die Größe

$$\left(\sum_{S \in G} \frac{A(S, N)}{E(S)}\right) \Bigg/ \left(\sum_{S \in G} \frac{1}{E(S)}\right)$$

mißt die „Dichte“ oder „Dichtigkeit“ der Darstellungen von N durch das Geschlecht G.

Smith gelang es, einen expliziten Ausdruck der Größe $\sum_{S \in G} \frac{1}{E(S)}$, die oft das „Maß“ des Geschlechts genannt wird, durch das Charakterensystem von G zu finden. Für die quadratischen Formen mit der Diskriminante 1 in $n \leqq 7$ Variablen gibt es nur eine einzige Klasse für die ganzzahlige Äquivalenz, nämlich die Klasse der Form $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, und Smith konnte durch Benutzung seiner „Maßformel“ die Anzahl der Darstellungen einer gegebenen ganzen Zahl N als Summe von $n \leqq 7$ Quadraten angeben. (Ist $n \geqq 8$, so wächst die Anzahl der Formenklassen mit der Diskriminante 1 außerordentlich schnell an. Tatsächlich kann man den auf Smith zurückgehenden Ausdruck für das Maß eines Geschlechts dazu benutzen, eine untere Schranke für die Anzahl der Klassen zu erhalten und bei-

spielsweise zeigen, daß bei $n = 32$ und $d = 1$ diese Anzahl der Klassen die Zahl $8 \cdot 10^7$ übersteigt.)

Leider wurden die eleganten und wichtigen Untersuchungen von Smith völlig ignoriert. So konnte es 1881 geschehen, daß die Académie des Sciences de Paris den Beweis der Eisensteinschen Behauptungen über die Anzahl der Darstellungen von N als Summe von fünf Quadraten als Preisthema stellte (mit einem aus einer Medaille im Werte von 3000 Francs bestehenden Preis für die beste Lösung)!

Smith war durch die Ausschreibung des Preises gekränkt und schrieb an Hermite, den Präsidenten des Preiskomitees, um auf seine Arbeit aus dem Jahre 1867 hinzuweisen. Um die Académie aus einer sehr peinlichen Lage zu befreien, erklärte sich Smith auf ausdrückliche Bitte Hermites bereit, sich um den Preis zu bewerben, und legte eine Arbeit vor, in der er das Wesentliche seines Artikels von 1867 nochmals darlegte. Minkowski, damals Student, reichte ebenfalls eine Arbeit ein, in der er das von der Académie gestellte Problem unabhängig löste. Minkowski und Smith erhielten beide den Preis, doch leider starb Smith, ehe er seine Medaille in Empfang nehmen konnte.

Minkowskis preisgekrönte Lösung markiert den Beginn seiner mathematischen Laufbahn. Im Laufe der folgenden vierzehn Jahre lieferte er sehr wichtige Beiträge zur Theorie der n-ären quadratischen Formen. Leider wird der Gegenstand sehr schnell höchst technisch, so daß wir unsere Darstellung auf die elementareren Aspekte dieser Untersuchungen beschränken müssen.

Als Ausgangspunkt seiner Untersuchungen über die quadratischen Formen benutzte Minkowski die von Poincaré 1881 vorgeschlagene Definition des Geschlechts, nämlich: Zwei Formen f und g liegen im gleichen Geschlecht, wenn folgendes gilt:

(1) Es gibt eine Transformation von f in g mit reellen Koeffizienten und der Determinante $+1$;

(2) zu jeder positiven ganzen Zahl m gibt es eine Transformation, deren Matrix A_m ganzzahlige Elemente besitzt, wobei $\det A_m \equiv 1 \pmod m$ ist und A_m: $f \mapsto g_0$ mit $g_0 \equiv g \pmod m$ gilt (dies bedeutet, daß die entsprechenden Koeffizienten von g und g_0 kongruent modulo m sind).

Diese Definition eines Geschlechts ist der Substanz nach die heutzutage übliche, doch wird sie mit Hilfe von p-adischen Zahlen (vgl. 5.5.9.) umformuliert, und zwar folgendermaßen: f und g liegen genau dann im gleichen Geschlecht, wenn sie über $\boldsymbol{R}$ und für jedes p über $\boldsymbol{Z}_p$ äquivalent sind. Minkowski hat bewiesen, daß sich aus der Poincaréschen Geschlechtsdefinition folgendes ergibt: Liegen f und g im gleichen Geschlecht, so gibt es eine Transformation, die f in g überführt, deren Matrix die Determinante 1 und rationale Elemente mit zu $2d$ teilerfremden Nennern besitzt. Daher ist die Poincarésche Geschlechtsdefinition die gleiche wie die von Eisenstein und Smith. Nach dieser Charakterisierung des Geschlechts ging Minkowski dazu über, die von Smith 1867 angegebenen Sätze nochmals zu beweisen.

Die Beziehung zwischen der Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(\mathbf{x}) = N$ und der Anzahl der Lösungen der Kongruenz $f(\mathbf{x}) \equiv N \pmod m$ ist ein wichtiges und interessantes Thema, das von Minkowski in Angriff genommen wurde. Diese Be-

ziehung wurde 1935 von Siegel völlig geklärt. Das einfachste der Siegelschen Ergebnisse ist das folgende. Angenommen, es sei $n > 2$ und $f(x_1, \dots, x_n)$ eine positiv-definite quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten und der Diskriminante d, wobei f zur Klasse S gehören und im Geschlecht G liegen möge. Bezeichnet $A_q(S, N)$ die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $f(\mathbf{x}) \equiv N \pmod{q}$, so ist

$$\left(\sum_{S\in G} \frac{A(S, N)}{E(S)}\right) \Big/ \left(\sum_{S\in G} \frac{1}{E(S)}\right) = \frac{N^{(n/2)-1}\pi^{n/2}}{\Gamma(d/2)\sqrt{d}} \prod \frac{A_q(S, N)}{q^{n-1}} ;$$

dabei ist das Produkt über alle Primzahlpotenzen $q = p^a$ mit $a > 2b$ zu erstrecken, wobei p^b die höchste Potenz von p ist, die $2d$ teilt. Selbstverständlich liefert, wenn es nur eine einzige Klasse in G gibt, die Siegelsche Formel die Anzahl der wesentlich voneinander verschiedenen Darstellungen von N durch $f(\mathbf{x})$.

Lange nachdem die ganze Theorie der quadratischen Formen mit *ganzzahligen* Koeffizienten im Detail entwickelt war, hat Minkowski 1890 das Problem untersucht, wann zwei n-äre quadratische Formen mit *rationalen* Koeffizienten rational äquivalent sind und welches diejenigen rationalen Zahlen sind, die rational durch eine gegebene quadratische Form dargestellt werden können. Er hat schwierige Ergebnisse benutzt, um die folgenden Sätze zu beweisen:

(1) *Es seien f, g zwei n-äre quadratische Formen mit rationalen Koeffizienten mit der Diskriminante d. Dann gibt es genau dann eine Transformation, welche f in g überführt, deren Matrix rationale Elemente besitzt, wenn:*

(a) *es eine Transformation mit reellen Koeffizienten gibt, die f in g überführt, und*

(b) *es zu jeder ganzen Zahl m eine Transformation gibt, deren Matrix A_m rationale Elemente hat und so beschaffen ist, daß* $\det A_m \equiv 1 \pmod{m}$ *und*

$$\mathrm{A}_m : f \mapsto g_0 \quad \textit{mit} \quad g_0 \equiv g \pmod{m}$$

ist.

(2) *Die Gleichung $f(\mathbf{x}) = N$ ist genau dann in rationalen Zahlen $x_1, \dots, x_n$ lösbar* (und dabei auf nichttriviale Weise, falls $N = 0$ ist), *wenn sie in reellen Zahlen lösbar ist und wenn die Kongruenzen $f(\mathbf{x}) \equiv N \pmod{m}$ für jede ganze Zahl m eine nichttriviale Lösung besitzen.*

In moderner Bezeichnungsweise besagt der erste Satz:

Sind f und g über $\mathbf{R}$ und über jedem $\mathbf{Q}_p$ äquivalent, so sind sie über $\mathbf{Q}$ äquivalent,

und der zweite:

Stellt f die Zahl N über $\mathbf{R}$ und über jedem $\mathbf{Q}_p$ dar, so stellt f die Zahl N über $\mathbf{Q}$ dar.

Nachdem Minkowski die oben angeführten Sätze bewiesen hatte, wurde bemerkt, daß die Theorie der quadratischen Formen über $\mathbf{Q}$ weitaus einfacher war als die Theorie über $\mathbf{Z}$ und zuerst untersucht werden müßte. Hurwitz und andere gaben vereinfachte Beweise der Minkowskischen Sätze. Was die Verallgemeinerung betrifft, so schlug Hilbert in seinem Pariser Vortrag vor, die Minkowskische Theorie auf quadratische Formen mit Koeffizienten aus einem beliebigen algebraischen Zahlkörper auszudehnen. Wir haben schon beschrieben, wie dies von H. Hasse geleistet wurde, nachdem sich die Klassenkörpertheorie entwickelt hatte (vgl. 5.5.10.3.).

Im Gefolge der Arbeiten Hasses nahm der „Übergang vom Lokalen zum Globalen" eine wichtige Rolle ein, und es lag nahe, sich die folgende Frage vorzulegen: Ist $f(\mathbf{x})$ eine n-äre quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten derart, daß die Kongruenz $f(\mathbf{x}) \equiv N \pmod{m}$ für jede ganze Zahl m und die Gleichung $f(\mathbf{x}) = N$ in reellen Zahlen lösbar, kann man dann daraus schließen, daß die Gleichung $f(\mathbf{x}) = N$ in *ganzen* Zahlen lösbar ist?

Die Antwort lautete „Nein", aber sie ist fast ein „Ja". Im Jahre 1928 bewies Tartakowsky, daß zu jeder positiv-definiten Form $f(\mathbf{x})$ in $n > 4$ Variablen eine Konstante $c(f)$ existiert mit folgender Eigenschaft: Ist $N > c(f)$, so besitzt die Gleichung $f(\mathbf{x}) = N$ eine ganzzahlige Lösung, falls jede der Kongruenzen $f(\mathbf{x}) \equiv N \pmod{m}$ Lösungen hat. Watson hat 1960 die Hardy-Littlewoodsche Kreismethode (siehe 5.11.) benutzt, um $c(f)$ explizit zu berechnen, und das Ergebnis von Tartakowsky auf indefinite inhomogene quadratische Gleichungen ausgedehnt.

Die Sätze von Minkowski sind in folgendem Sinne qualitativ: Sie bringen zwar zum Ausdruck, daß unter bestimmten Bedingungen ein bestimmter Typus von Transformation existiert oder eine bestimmte Gleichung eine rationale Lösung besitzt, doch liefern sie die Transformation oder die rationale Lösung nicht.

Es ist sonderbar, daß vor 1955 keinerlei quantitatives Ergebnis erzielt wurde. Cassels hat als erster bewiesen, daß bei gegebener n-ärer quadratischer Form $f(\mathbf{x})$ mit ganzzahligen Koeffizienten eine explizite Konstante $c(f)$ existiert derart, daß dann, wenn die Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ eine nichttriviale ganzzahlige Lösung besitzt, auch eine ganzzahlige Lösung $\mathbf{u}$ mit $0 < u_1^2 + \cdots + u_n^2 < c(f)$ existiert. Im Jahre 1970 dehnte Schinzel den Casselsschen Satz auf die Gleichung $f(\mathbf{x}) = N$ aus, wobei nun die obere Schranke für die kleinste Lösung ebenso von N wie von $f(\mathbf{x})$ abhängt.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Diskussion von ein oder zwei isolierten Ergebnissen über die Systeme von quadratischen Formen. Gegenwärtig existiert allerdings keine allgemeine Theorie. Ist ein System von n-ären quadratischen Formen, etwa $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_r(\mathbf{x})$, mit rationalen Koeffizienten gegeben und will man wissen, wann die Gleichungen $f_i(\mathbf{x}) = 0$, $1 \leqq i \leqq r$, eine nichttriviale rationale Lösung besitzen, so liegt es nahe, zuerst die p-adischen Lösungen zu betrachten. Die einzigen bekannten genauen Ergebnisse lauten: Ist $r = 2$ und $n \geqq 9$, so besitzt das System für jedes p stets nichttriviale p-adische Lösungen, und ist $r = 3$, $n \geqq 13$ und sind die Formen sämtlich in Diagonalgestalt gegeben, so hat das System für jedes p immer nichttriviale p-adische Lösungen. Das erste Resultat stammt von Birch, Lewis und Murphy aus dem Jahre 1960, das zweite von F. Ellison aus dem Jahre 1971. Die Suche nach den rationalen Punkten war bisher noch nicht von Erfolg gekrönt; der einzige Satz, der bekannt ist, wurde 1962 von Mordell gefunden. Mordell zeigte: Wenn $r = 2$ und $n \geqq 13$ ist und jede Form des Büschels $\lambda f_1(\mathbf{x}) + \mu f_2(\mathbf{x})$ indefinit ist und mehr als vier Variable hat, so besitzt das System $f_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}) = 0$ eine nichttriviale rationale Lösung. Angesichts des p-adischen Ergebnisses darf man hoffen, die Bedingung $n \geqq 13$ auf $n \geqq 9$ zu reduzieren, doch scheint dies ein schwieriges Problem zu sein.

5.11. Additive Zahlentheorie

Grob gesagt beschäftigt sich die additive Zahlentheorie mit Problemen des folgenden Typus. Ist eine unendliche Menge S von ganzen Zahlen (wie etwa die Menge der Primzahlen oder der Quadratzahlen oder der k-ten Potenzen für einen gegebenen ganzzahligen Exponenten $k > 0$) gegeben, dann untersucht man, ob es möglich ist, jede ganze Zahl als Summe einer *festen* Anzahl von Elementen von S darzustellen. Einige klassische Vermutungen sind von dieser Art:

(1) Die Goldbachschen Vermutungen (1742): Jede gerade ganze Zahl $n > 2$ kann als Summe von zwei Primzahlen geschrieben werden, und jede ungerade ganze Zahl $n > 6$ als Summe von höchstens drei Primzahlen (dies ist noch nicht vollständig bewiesen; siehe 5.11.2.).

(2) Der Satz von Lagrange: Jede streng positive ganze Zahl kann als Summe von höchstens vier Quadraten dargestellt werden (von Lagrange 1770 bewiesen; siehe 5.10.).

(3) Das Waringsche Problem: Zu jeder ganzen Zahl $k > 0$ gibt es eine ganze Zahl $g(k)$ derart, daß jede streng positive ganze Zahl als Summe von höchstens $g(k)$ Potenzen mit dem Exponenten k dargestellt werden kann (formuliert von Waring 1770, bewiesen von Hilbert 1909).

Erst von etwa 1920 an, als hinreichend viele Probleme gelöst und einige recht allgemeine Verfahren entwickelt worden waren, kann man von der additiven Zahlentheorie als einer einigermaßen zusammenhängenden mathematischen Disziplin sprechen. Vor 1915 hatte man nur isolierte Ergebnisse durch ad-hoc-Methoden erhalten. Im Jahre 1909 löste Hilbert zwar das Waringsche Problem für alle Exponenten k, doch war auch dies nur ein isoliertes Ergebnis, weil seine Methode weder auf andere additive Probleme anwendbar noch genügend vieler Verallgemeinerungen fähig war. Erst in den Jahren von 1915 bis 1925 kamen zwei wichtige allgemeine Methoden auf, die wir weiter unten beschreiben werden und die man heute die „Siebmethoden" bzw. die „Kreismethode" von Hardy-Littlewood nennt; wir beschließen diesen Abschnitt mit einer sehr kurzen Darstellung einiger von Schnirelman entdeckten additiven Eigenschaften von Folgen ganzer Zahlen. Für eine ausführliche Darlegung vieler Aspekte der additiven Zahlentheorie verweisen wir auf [24], [15] und [16].

5.11.1. *Siebmethoden*

Die Siebmethoden, die in der modernen Zahlentheorie zu wichtigen Werkzeugen geworden sind, haben ihren Ursprung in einer Beobachtung des griechischen Mathematikers Eratosthenes, der im dritten Jahrhundert v. u. Z. lebte. Um alle Primzahlen in einem Intervall $[1, N]$ zu erhalten, schrieb Eratosthenes die Folge 1, 2, ... , N auf; er kringelte die Zahl 2 ein und strich alle folgenden ganzen Zahlen, welche Vielfache von 2 sind, durch; die erste nicht durchgestrichene ganze Zahl, hier 3, kringelte er wieder ein, strich dann alle folgenden ganzen Zahlen, welche

Vielfache von 3 sind und noch nicht durchgestrichen waren, durch usw. Was schließlich übrigbleibt, nämlich alle eingekringelten Zahlen, sind die gesuchten Primzahlen. Mit anderen Worten, er „siebte" die ganzen Zahlen zwischen 1 und N, und diejenigen ganzen Zahlen, die nicht durch das „Sieb" hindurchfielen, sind die Primzahlen.

Im Laufe seiner Untersuchungen über das Goldbachsche Problem und die Vermutung über die Primzahlzwillinge gab Viggo Brun um 1920 eine Formulierung des Begriffs des „Siebes" in einem viel allgemeineren Zusammenhang an; wir folgen der in [16] gegebenen Beschreibung seiner Gedankengänge.

Ehe wir uns den Brunschen Arbeiten zuwenden, zeigen wir, wie die Vermutung über die Primzahlzwillinge mit dem Siebbegriff ausgedrückt werden kann. Wir betrachten die Menge

$$A = \{a_\nu = \nu(\nu - 2) \mid 1 \leqq \nu \leqq n\}\,.$$

Wenn man in A alle diejenigen a_ν streicht, die durch eine Primzahl $p \leqq \sqrt{n}$ teilbar sind, bleiben die a_ν mit $\sqrt{n} \leqq \nu \leqq n$ übrig, für die weder ν noch $\nu - 2$ durch eine Primzahl $\leqq \sqrt{n}$ teilbar ist; also sind ν und $\nu - 2$ Primzahlen. Mit anderen Worten: Wenn wir die Menge A mit Hilfe der Menge $P = \{p \mid p \leqq \sqrt{n}\}$ „aussieben", dann ist die Anzahl der übrigbleibenden Elemente von A genau die um 1 vermehrte Anzahl der Primzahlzwillinge zwischen $\sqrt{n}$ und n. Könnte man eine mit n gegen ∞ strebende untere Schranke dieser Anzahl gewinnen, so hätte man gezeigt, daß es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Dies ist noch nicht gelungen, doch wir werden sehen, daß Brun eine sehr gute obere Schranke für die betrachtete Anzahl erhielt.

Brun betrachtete allgemeiner eine Menge

$$A = \{a_\nu = h(\nu) \mid 1 \leqq \nu \leqq n\}\,,$$

wobei h ein Polynom ist mit der Eigenschaft, daß $h(\nu)$ für alle ganzen Zahlen ν ganzzahlig ist. Man „siebt" A durch eine Menge P von Primzahlen, die man in der Gestalt $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ schreiben kann. Dies bedeutet, daß man in A alle Vielfachen von wenigstens einem der p_i unterdrückt und daß man die Anzahl der übrigbleibenden Elemente von A abschätzen möchte; diese Anzahl bezeichnet man mit $S(A, P)$. Zu diesem Zweck benutzte Brun einen Gedankengang, der von Legendre entwickelt worden war, als er die Primzahlen mit Hilfe der Siebmethode des Eratosthenes untersuchte. Legendre hatte sehr scharfsinnig eine Funktion benutzt, die heute die *Möbiussche Funktion* $\mu(n)$ genannt wird, ganz analog zu der nachstehend beschriebenen Art und Weise. Diese Funktion wird folgendermaßen definiert:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r, & \text{wenn } n \text{ quadratfrei ist und aus } r \text{ Primfaktoren besteht;} \\ 1, & \text{wenn } n = 1 \text{ ist;} \\ 0, & \text{wenn } n \text{ durch eine von 1 verschiedene Quadratzahl teilbar ist.} \end{cases}$$

Die Möbiussche Funktion taucht oft in technischen Fragen auf, die mit Primzahlen verknüpft sind, und ist Gegenstand verschiedener Vermutungen; wir werden

aber auf diesen recht speziellen Zweig der Zahlentheorie nicht eingehen. Von unserem Standpunkt aus ist folgende Eigenschaft der Möbiusschen Funktion von Interesse:

$$\sum_{d|N} \mu(d) = \begin{cases} 0, & \text{falls } N > 1 \text{ ist}, \\ 1, & \text{falls } N = 1 \text{ ist}. \end{cases}$$

Diese Eigenschaft wird benutzt, um die „Indikatorfunktion" der „durch das Sieb P ausgesiebten" Teilmenge von A zu beschreiben. Es sei

$$\pi(P) = \prod_{p \in P} p;$$

dann kann man diese Indikatorfunktion $a \mapsto S^0(a)$ in der Gestalt

$$S^0(a) = \sum_{d|(a,\pi(P))} \mu(d)$$

schreiben. Es ist also

$$S(A, P) = \sum_{\nu \leqq n} S^0(a_\nu) = \sum_{\nu \leqq n} \Bigl(\sum_{d|(a_\nu,\pi(P))} \mu(d) \Bigr) = \sum_{d|\pi(P)} \Bigl(\sum_{\substack{\nu \leqq n \\ d|a_\nu}} 1 \Bigr).$$

Die nächste Etappe besteht darin, einen brauchbaren Ausdruck für $\sum_{\substack{\nu \leqq n \\ d|a_\nu}} 1$ zu finden. Dies läuft darauf hinaus, die Anzahl der Lösungen der Kongruenz $h(\nu) \equiv 0 \pmod d$ mit $1 \leqq \nu \leqq d$ zu bestimmen; es sei $N(d)$ diese Anzahl; dann ist $N(d)$ eine multiplikative Funktion von d. Würde $N(p) = p$ für ein $p \in P$ gelten, dann hätte man ganz A „ausgesiebt"; deshalb setzen wir noch voraus, daß dies nicht vorkommt. Andererseits tragen die Primzahlen p mit $N(p) = 0$ nichts zum Ausgesiebten bei, können also im folgenden vernachlässigt werden. Man darf also annehmen, es sei $1 \leqq N(p) < p$. Aus Bequemlichkeitsgründen führt man durch die Formel $N(d) = d/f(d)$ eine weitere Funktion $f(d)$ ein; $f(d)$ ist ebenfalls multiplikativ und genügt für alle $p \in P$ den Relationen $1 < f(p) \leqq p$.

Wir erinnern daran, daß man mit $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$ bezeichnet, so daß für eine ganze Zahl n aus $n = md + r$ mit ganzzahligem m und $1 \leqq r < d$ die Beziehung $[n/d] = m$ folgt. Offenbar ist

$$\frac{n}{d} - 1 \leqq \left[\frac{n}{d}\right] \leqq \frac{n}{d}.$$

Unter den Gliedern der Folge $a_\nu = h(\nu)$ mit $1 = \nu \leqq [n/d]$ sind genau $[n/d]\, N(d)$ durch d teilbar, und unter den a_ν mit $[n/d] < \nu \leqq n$ sind höchstens $N(d)$ durch d teilbar. Man kann also

$$\sum_{\substack{\nu \leqq n \\ d|a_\nu}} 1 = \frac{n}{f(d)} + R_d$$

schreiben, wobei das „Fehlerglied" R_d durch

$$|R_d| \leqq \frac{d}{f(d)}$$

abgeschätzt wird. Geht man auf den Ausdruck für $S(A, P)$ zurück, so findet man

$$S(A, P) = n \sum_{d|\pi(P)} \frac{\mu(d)}{f(d)} + \sum_{d|\pi(P)} R_d \mu(d) .$$

Eine Abschätzung von $S(A, P)$ nach oben zu erhalten wirft kein begriffliches Problem auf; wir werden nun sehen, wie dies getan werden kann. Entsprechendes kann man jedoch von der Gewinnung einer Abschätzung nach unten, worauf wir im Augenblick nicht eingehen, nicht sagen.

Ist $\lambda(n)$ eine beliebige Funktion und setzt man

$$S(a) = \sum_{d|(a,\pi(P))} \lambda(d) ,$$

so erhält man zunächst wieder

$$\sum_{\nu \leqq n} S(a_\nu) = n \sum_{d|\pi(P)} \frac{\lambda(d)}{f(d)} + \sum_{d|\pi(P)} \lambda(d) R_d .$$

Insbesondere ergibt sich, wenn man in dieser Weise eine Funktion $S^+(a)$ mit $S^+(a) \geqq S^0(a)$ für alle a definieren kann, die Ungleichung

$$S(A, P) \leqq \sum_{\nu \leqq n} S^+(a_\nu) .$$

In der Praxis versuchte man, die Funktion $S^+(a)$ so zu wählen, daß das Glied $\sum_{d|\pi(P)} |\lambda(d) R_d|$ möglichst klein wird und man gleichzeitig so nahe wie möglich an $S^0(a)$ bleibt. Die sehr scharfsinnige Idee von Brun bestand in der Bemerkung, daß man, weil $\mu(d)$ streng negative Werte annimmt, oft eine Teilmenge D^* der Menge der Teiler von $\pi(P)$ finden kann mit der Eigenschaft, daß für $d \in D^*$ die Beziehung

$$\sum_{d|\pi(P)} \frac{\mu(d)}{f(d)} \leqq \sum_{d \in D^*} \frac{\mu(d)}{f(d)}$$

gilt und gleichzeitig $\sum_{d \in D^*} \mu(d) R_d$ „klein" ist. Brun setzte dann

$$\lambda(d) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad d \notin D^* , \\ \mu(d) & \text{für} \quad d \in D^* . \end{cases}$$

Unter Benutzung dieser Methode zeigte Brun, daß die Anzahl der Primzahlzwillinge unterhalb n von der Größenordnung $O(n/\log^2 n)$ ist, was ihm zu beweisen erlaubte, daß die Summe der reziproken Primzahlzwillinge konvergiert. Mit Hilfe eines etwas anderen Siebes konnte Brun noch zeigen, daß es unendlich viele ganze Zahlen n mit der Eigenschaft gibt, daß n und $n + 2$ jeweils höchstens neun Primfaktoren besitzen. Obwohl dies keine besonders gute Annäherung an die Vermutung über die Primzahlzwillinge zu sein scheint, ist es ein wichtiges Ergebnis, weil es den ersten konkreten Zugang zu diesem Problem darstellte.

Die Goldbachsche Vermutung ist in folgendem Sinne eng mit dem Problem der Primzahlzwillinge verknüpft: Wenn man einen Satz über eines der beiden Probleme durch Benutzung der oben beschriebenen Art von Sieben beweisen kann, hat man

fast automatisch ein entsprechendes Ergebnis für das andere Problem. So hat Brun auch bewiesen, daß jede hinreichend große Zahl Summe von zwei ganzen Zahlen ist, von denen jede höchstens neun Primfaktoren besitzt.

Im Jahre 1947 fand Selberg eine Variante der Brunschen Methode. Statt $\lambda(d)$ und D^* wie Brun zu wählen, zeigte Selberg, daß es oft von Nutzen ist, D^* sehr einfach zu wählen, nämlich als die Menge der $d < z$, welche Teiler von $\pi(P)$ sind, wobei $z < n$ ein Parameter ist, der vom betrachteten Problem abhängt; $\lambda(d)$ wird dann auf recht komplizierte Weise gewählt. Die Selbergsche Methode liefert gewöhnlich bessere Ergebnisse als die Brunsche.

Andererseits fand Kuhn 1941 eine davon völlig verschiedene Verbesserung des Verfahrens der zugrundeliegenden „Aussiebung". Statt zu versuchen, Schranken für $S(A, P)$ zu bekommen, gewann er zuerst eine Methode, um den Elementen der „durch das Sieb hindurchgegangenen" Menge „Gewichte" mit bestimmten nützlichen Eigenschaften zuzuordnen; dann beschrieb er eine Methode, um eine Abschätzung der „Masse" der mit diesen Gewichten versehenen Menge nach unten zu liefern, welche eine Abschätzung von $S(A, P)$ nach unten liefert. Es gibt einen beachtlichen Spielraum für die Wahl der Gewichte, so daß die entsprechenden Ergebnisse vom Spürsinn des Benutzers abhängen.

Die besten bisher bekannten Ergebnisse über das Problem der Primzahlzwillinge und über die Goldbachsche Vermutung wurden 1966 von Chen erzielt. Neben dem oben beschriebenen Siebverfahren wendete Chen das sogenannte „große Sieb" an, von dem später die Rede sein wird. Er zeigte, daß *es unendlich viele Primzahlen p gibt mit der Eigenschaft, daß $p + 2$ Produkt von höchstens zwei Primfaktoren ist*; außerdem bewies er, daß *jede hinreichend große gerade ganze Zahl Summe einer Primzahl und einer ganzen Zahl ist, die höchstens zwei Primfaktoren besitzt.*

Das *Große Sieb* ist von den oben beschriebenen Sieben ganz verschieden, und seine Ursprünge haben mit der additiven Zahlentheorie nichts zu tun. Es entstand aus Untersuchungen von Linnik, der 1941 eine Abschätzung nach oben für den kleinsten quadratischen Nichtrest (vgl. 5.2.) modulo einer Primzahl p als Funktion von p suchte. In den oben betrachteten Sieben strich man aus der Menge A alle Elemente, die durch wenigstens ein $p \in P$ teilbar sind, d. h. alle diejenigen, die kongruent 0 modulo p sind. Im Fall des Großen Siebes streicht man aus A eine Vereinigung von Kongruenzklassen $h_{p,1}, \ldots, h_{p,k(p)}$ modulo p. Linnik fand eine Methode, die eine recht gute Majorisierung der Anzahl der Elemente liefert, die nach der Aussiebung übrigbleiben, vorausgesetzt, daß $k(p)$ im Vergleich zu p hinreichend groß ist. Wir gehen auf die technischen Einzelheiten der Methode nicht ein; für uns interessant ist, daß im Verlaufe der Majorisierung zum erstenmal ein bestimmter Typus von Ungleichung auftauchte, die *Ungleichung des Großen Siebes* genannt wird. Fast immer, wenn gesagt wird, das Große Sieb sei zum Beweis eines bestimmten Ergebnisses benutzt worden, versteht man darunter, daß eine Ungleichung des Großen Siebes im Beweis benutzt worden ist, was allerdings beim Uneingeweihten eine gewisse Verwirrung hervorrufen kann.

Im Jahre 1947 benutzte Rényi sowohl eine Ungleichung des Großen Siebes als auch die üblicheren Methoden der Aussiebung, um die damals bekannten Ergebnisse über die Primzahlzwillinge und die Goldbachsche Vermutung zu verbessern;

er führte auch mehrere Varianten der Ungleichung des Großen Siebes ein. Nach den Arbeiten von Linnik und Rényi gaben viele andere Mathematiker eine Menge von weiteren Varianten dieser Ungleichung an, hauptsächlich als technische Lemmata im Hinblick auf Beweise von Ergebnissen aus der Primzahltheorie. Schließlich gelang es 1969 Bombieri, aus dem Chaos der Spezialfälle die Tatsache herauszupräparieren, daß die Ungleichungen des Großen Siebes nichts anderes sind als Verallgemeinerungen der Besselschen Ungleichung (vgl. 8.5.1.)! Seitdem hat das Studium der Anwendung der Ungleichung des Großen Siebes in der Primzahltheorie wichtige Fortschritte gemacht, die vor allem den Bemühungen von Bombieri, Gallagher, Montgomery und Vaughan zu verdanken sind. Alle diese Arbeiten sind außerordentlich technisch.

5.11.2. DieKreismethode

Bevor wir die Entwicklung der Kreismethode beschreiben, die heute nach Hardy-Littlewood-Vinogradov benannt wird, geben wir das Prinzip an. Sobald viele Probleme wie das der Partitionen (vgl. 5.2.), das Waringsche Problem und seine Varianten und das Drei-Primzahlen-Problem von einem bestimmten Gesichtspunkt aus, der in den nachstehenden Beispielen zutage treten wird, in Angriff genommen wurden; bemerkte man, daß man es mit einem Paar von Funktionen G und g zu tun hatte, die durch

$$G(\alpha) = \sum_{m=0}^{N} g(m)\, e^{2\pi i m\alpha}$$

verknüpft sind. Gewöhnlich sucht man nach einer asymptotischen Formel für $g(m)$, wenn man bestimmte Eigenschaften von G kennt. Die Fourierschen Formeln liefern

$$g(n) = \int_I G(\alpha)\, e^{-2\pi i n\alpha}\, d\alpha\,,$$

worin I ein Intervall der Länge 1 ist. In den meisten Fällen ist die Funktion G zu kompliziert, als daß man das Integral direkt abschätzen könnte. Man unterteilt deshalb das Intervall I in zwei Arten von disjunkten Teilintervallen, die aus historischen Gründen *major arcs* bzw. *minor arcs* genannt werden. Auf jedem der major arcs definiert man eine einfachere Funktion, die eine „gute" Annäherung an die zu integrierende Funktion darstellt, also eine „gute" Approximation für das über dieses Intervall erstreckte Integral liefert. Man beweist, daß das Integral über die minor arcs „klein" ist. Die Auswahl der Teilintervalle in jedem Falle erfordert Erfahrung, Klugheit und einige Versuche. Obwohl die Idee der Methode einfach ist, sind die Details in den meisten Anwendungen recht langwierig [24].

Hardy und Ramanujan kamen 1918 zu einer ersten Annäherung an die Kreismethode, als sie eine asymptotische Formel für $p(n)$, die Anzahl der Partitionen von n, suchten. Ihr Ausgangspunkt war die Eulersche Formel (vgl. 5.2.)

$$\prod_{r=1}^{\infty} (1 - z^r)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)\, z^k\,,$$

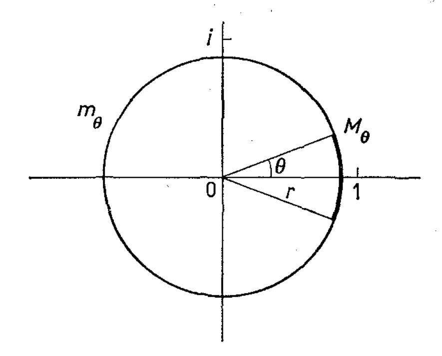
die für $|z| < 1$ gilt. Leider wird die Situation durch die Tatsache kompliziert, daß jeder Punkt des Einheitskreises $|z| = 1$ für die auf der Kreisscheibe $|z| < 1$ durch das Produkt dargestellte analytische Funktion $F(z)$ ein wesentlich singulärer Punkt ist. Die Cauchysche Formel (vgl. 4.4.4.) liefert

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz\,,$$

wobei C_r die Kreislinie $|z| = r$ mit $r < 1$ ist. Hardy und Ramanujan, Virtuosen auf dem Gebiet der analytischen Umformungen (einer Kunst, die leider im Verschwinden begriffen ist) erkannten, daß die Funktion $F(z)/z^{n+1}$ sehr schnell wachsen muß, wenn z längs der reellen Achse gegen 1 strebt, weil nämlich der Punkt $z = 1$ ein Pol jedes Faktors des unendlichen Produkts für $F(z)$ ist. Es mußte ihnen deshalb anschaulich klar erscheinen, daß der wichtigste Beitrag zum Integral längs C_r von einem Bogen M mit dem Mittelpunkt r herrühren muß, falls r genügend nahe bei 1 liegt. Sie unterteilten daher C_r so in zwei Bögen M_θ und m_θ, daß

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_\theta} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{m_\theta} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

gilt, wobei θ im Augenblick ein willkürlicher Parameter ist. Ihre gründliche Kenntnis der analytischen Funktionen lieferte ihnen eine passende Approximation von $F(z)/z^{n+1}$ auf M_θ, wobei der Fehler der Näherung von θ und r abhing; in gleicher



Weise konnten sie das Integral über m_θ durch eine relativ kleine Funktion von θ und r majorisieren. Schließlich trafen sie eine scharfsinnige Wahl von θ als Funktion von r für gegen 1 strebendes r und erhielten die asymptotische Beziehung

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}\,n} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

Die Gedankengänge, die der Lösung des Partitionenproblems durch Hardy und Ramanujan zugrundelagen, wurden von Hardy und Littlewood in einer Reihe zwischen 1920 und 1928 mit dem gemeinsamen Titel *On some problems of partitio numerorum* veröffentlichter Arbeiten weiterentwickelt. In diesen Arbeiten wurde

eine Variante der Kreismethode mit einigem Erfolg auf das Waringsche Problem und die Goldbachschen Vermutungen angewendet. Ihre hauptsächliche Verbesserung bestand darin, mehrere major arcs und mehrere minor arcs anstelle eines einzigen von jeder Art zu nehmen [24].

Die klassische Formulierung des Waringschen Problems und der Goldbachschen Vermutung lautet: Kann eine ganze Zahl n als Summe einer beschränkten Anzahl (mit einer von n unabhängigen Schranke) von k-ten Potenzen bzw. von Primzahlen dargestellt werden? Hardy und Littlewood modifizierten das Problem, indem sie danach fragten, auf wie viele Arten eine solche Darstellung möglich ist und wie eine asymptotische Formel für die Anzahl der Darstellungen aussieht. Dies liefert die folgende Fassung:

Es sei $A = \{a_m\}$ eine beliebige Folge von nichtnegativen ganzen Zahlen und $r_s(A, n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von s Elementen aus A. Die Funktion

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{a_m}$$

ist für $|z| < 1$ wohldefiniert, und es ist

$$f^s(z) = \Big(\sum_{m=0}^{\infty} z^{a_m}\Big)^s = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=0}^{\infty} z^{a_{m_1}+a_{m_2}+\cdots+a_{m_s}};$$

setzt man $n = a_{m_1} + \cdots + a_{m_s}$, so geht dies über in

$$f^s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_s(A, n)\, z^n .$$

Wie beim Partitionenproblem hat man

$$r_s(A, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f^s(z)}{z^{n+1}}\, dz ,$$

wobei C_r ein Kreis vom Radius $r < 1$ ist. Das Waringsche Problem wäre gelöst, wenn man für $A_k = \{m^k \mid m = 0, 1, 2, \ldots\}$ beweisen könnte, daß ein s_0 existiert derart, daß für $s \geqq s_0$ dann $r_s(A_k, n) > 0$ für jedes $n \geqq 1$ ist. Entsprechend wären die Goldbachschen Vermutungen bewiesen, wenn man für

$$P = \{p \mid p \text{ ist eine Primzahl oder } 0\}$$

zeigen könnte, daß $r_2(P, 2n) > 0$ und $r_3(P, 2n + 1) > 0$ für alle $n > 2$ gilt.

Selbstverständlich können wir nicht auf technische Details eingehen, welche die Art und Weise betreffen, in der Hardy und Littlewood diese Probleme behandelten; wir beschränken uns darauf, einige ihrer Ergebnisse anzugeben.

Einer ihrer Sätze zum Waringschen Problem lautet z. B.: *Für* $s > k \cdot 2^k + 1$ *gilt*

$$r_s(A_k, n) \sim S_s(n)\, \frac{\Gamma^s\big(1 + (1/k)\big)}{\Gamma(s/k)}\, n^{(s/k)-1} ,$$

wobei $\Gamma(x)$ die Eulersche Gammafunktion und $S_s(n)$ eine recht komplizierte zahlentheoretische Funktion ist, die der folgenden Bedingung genügt: Es gibt zwei effektiv berechenbare Konstanten $c_1(k, s)$ und $c_2(k, s)$ derart, daß $0 < c_1 \leqq S_s(n) \leqq c_2$ für jede ganze Zahl n gilt.

Hardy und Littlewood berechneten die Werte von c_1 und c_2 für mehrere Exponenten k. Das obige Resultat zieht nach sich, daß es eine effektiv berechenbare Konstante $n_0(k)$ gibt derart, daß $r_s(A, n) > 0$ gilt, sobald $s > k \cdot 2^k + 1$ und $n > n_0(k)$ ist.

Hinsichtlich der Goldbachschen Vermutungen war die Methode von Hardy-Littlewood nur teilweise von Erfolg gekrönt. Bei der Approximation des Integranden auf den major arcs und der Majorisierung des Integrals auf den minor arcs kommen die Dirichletschen L-Funktionen (vgl. 5.4.4.) herein. Hardy und Littlewood konnten nur eine asymptotische Formel für $r_3(P, 2n + 1)$ beweisen, unter der Voraussetzung, daß keine L-Funktion auf der Halbebene $\operatorname{Re} s \geqq \frac{3}{4}$ verschwindet, d. h. unter Annahme einer Art von verallgemeinerter Riemannscher Vermutung (vgl. 5.6.). Unter dieser Annahme bewiesen sie die Beziehung

$$r_3(P, 2n + 1) \sim S(2n + 1) \frac{(2n + 1)^2}{(\log (2n + 1))^3},$$

wobei $S(2n + 1)$ wiederum eine komplizierte zahlentheoretische Funktion ist mit der Eigenschaft, daß es eine explizite Konstante c_1 mit $0 < c_1 \leqq S(2n + 1)$ für jedes ganzzahlige n gibt.

Daraus folgt $r_3(P, 2n + 1) > 0$ für jede hinreichend große ganze Zahl n. Für $r_2(P, 2n)$ konnten Hardy und Littlewood weder eine asymptotische Formel finden noch beweisen, daß $r_2(P, 2n) > 0$ ist, selbst wenn sie die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung als wahr annahmen. Alles, was ihnen zu beweisen gelang, war, daß unter Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung folgendes gilt: Ist $E(x)$ die Anzahl der geraden Zahlen bis x, die nicht Summe zweier Primzahlen sind, so ist $E(x) = O(x^{(1/2)+\varepsilon})$ für jedes feste $\varepsilon > 0$.

Etwa um 1924 begann Vinogradov die Kreismethode auf andere Weise zu benutzen, um beim Waringschen Problem bessere Ergebnisse als Hardy und Littlewood zu erzielen. Er erhielt eine große Anzahl technischer Vereinfachungen, von denen wir nur die einfachste beschreiben werden. Vinogradov bemerkte, daß die größte ganze Zahl in der Darstellung von n als Summe von k-ten Potenzen höchstens gleich $N = [n^{1/k}]$ ist, so daß man statt der Reihe

$$f^s(z) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=0}^{\infty} z^{m_1^k + \cdots + m_s^k}$$

in Wirklichkeit nur die endliche Summe

$$f_N^s(z) = \sum_{m_1=0}^{N} \cdots \sum_{m_s=0}^{N} z^{m_1^k + \cdots + m_s^k}$$

zu betrachten hat. Wie vorher ist

$$r_s(A_k, n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_N^s(z)\, dz}{z^{n+1}},$$

doch gibt es kein Konvergenzproblem mehr, und man darf als Kreis C den Einheitskreis $|z| = 1$ nehmen; dies ergibt

$$r_s(A_k, n) = \int_0^1 \Big(\sum_{m=0}^{N} e^{2\pi m^k i\theta}\Big)^s e^{-2\pi i n\theta}\, d\theta .$$

Vinogradov wählte die major arcs und die minor arcs anders als Hardy und Littlewood; dann bemerkte er, daß er, um gute Majorisierungen für das über die minor arcs genommene Integral zu gewinnen, für die trigonometrischen Summen $\sum_{m=0}^{N} e^{2\pi i m^k\theta}$ schärfere Abschätzungen brauchte, als sie H. Weyl erhalten hatte, der solche Summen erstmals 1916 betrachtet hatte. Zu diesem Zweck führte Vinogradov ein sehr verfeinertes Verfahren ein, das er später (zwischen 1940 und 1950) noch verbesserte, um Majorisierungen für allgemeinere Summen der Gestalt $\sum_{m=N}^{N+M} e^{2\pi i f(m)\theta}$ zu bekommen, wobei $f(n)$ eine bestimmten Bedingungen genügende Funktion ist; diese Ergebnisse waren in der Primzahltheorie von großer Bedeutung, aber auf einem Niveau, welches das unserer Darstellung übersteigt. Bezüglich der Vinogradovschen Ergebnisse zum Waringschen Problem beschränken wir uns auf das folgende: Ist $s > 10k^2 \log k$, so gibt es eine effektiv berechenbare Konstante $n_0(k)$ derart, daß $r_s(A_k, n) > 0$ für $n \geqq n_0(k)$ gilt. Für große Werte von k ist dies ein weitaus besseres Ergebnis als das von Hardy und Littlewood.

Im Jahre 1934 bewies Vinogradov, daß es eine effektiv berechenbare Konstante n_0 gibt derart, daß jede ungerade Zahl $n \geqq n_0$ als Summe von drei Primzahlen dargestellt werden kann, und zwar ohne Annahme der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung. Wir merken nebenbei an, daß auch heute noch niemand den Wert von n_0 abgeschätzt hat; würde man dies jedoch nach der von Vinogradov angegebenen Methode zu tun versuchen, so bekäme man eine außerordentlich große Zahl. Diese Methode unterscheidet sich etwas von derjenigen, die er für das Waringsche Problem benutzt hatte. Statt direkt eine asymptotische Formel für $r_3(P, 2n+1)$ zu suchen, führte er aus technischen Gründen eine Hilfsfunktion $\lambda_3(P, 2n+1)$ ein, die so beschaffen ist, daß $\lambda_3 > 0$ genau dann gilt, wenn $r_3 > 0$ ist, und die außerdem die Eigenschaft hat, daß sich aus der Kenntnis einer asymptotischen Formel für die eine Funktion eine solche Formel für die andere ergibt. Allerdings mußte er noch die Kreismethode benutzen, und er formulierte das Problem so, daß er immer nur mit endlichen Summen umgehen mußte.

Die späteren Anwendungen der Kreismethode benutzten sämtlich endliche Summen; es könnte deshalb verwunderlich erscheinen, daß das Partitionenproblem leichter mit Hilfe von unendlichen Summen und Produkten zu behandeln ist. Dies beruht auf der Tatsache, daß die Funktion $F(z) = \prod_{r=1}^{\infty} (1 - z^r)^{-1}$ eng mit den

Modulfunktionen verknüpft ist (vgl. 7.1.16.). Im Jahre 1937 verstand Rademacher, diese Eigenschaft von $F(z)$ zu benutzen, um eine konvergente Reihenentwicklung von $p(n)$ zu gewinnen. Im wesentlichen lehnte sich seine Arbeit an die Arbeit von Hardy und Ramanujan an, doch benutzte er mehrere major arcs und minor arcs und wendete tieferliegende analytische Eigenschaften von $F(z)$ an. Die Rademachersche Entwicklung ermöglicht eine verhältnismäßig leichte genaue Berechnung von $p(n)$. Lehmer hat so beispielsweise den Wert

$$p(559) = 4353502078403173482700000$$

erhalten. Die Rademachersche Formel ist deshalb interessant, weil sie der einzige Fall zu sein scheint, in dem die Kreismethode mehr als eine asymptotische Formel geliefert hat.

In den Jahren 1940 bis 1950 nahmen Linnik und Čudakov eine neuerliche Untersuchung der ursprünglichen Methode von Hardy-Littlewood für $r_3(P, 2n+1)$ vor; sie vermieden den Rückgriff auf eine Annahme über die Nullstellen der L-Funktionen, indem sie ,,Dichtigkeitssätze" für diese Nullstellen benutzten (falls solche existieren). Da Vinogradov seinen Satz über $r_3(P, 2n+1)$ schon bewiesen hatte, waren ihre Ergebnisse über diese Funktion an sich nur von geringem Interesse; ihre Dichtigkeitssätze und Varianten dieser Sätze wurden jedoch mit Erfolg bei anderen Problemen verwendet. So ermöglichten sie zum Beispiel, bestimmte Summen $\sum_{m=N}^{M+N} e^{2\pi i f(m)\theta}$ von der Art der Vinogradovschen Summen nach oben abzuschätzen. Insbesondere haben Montgomery und Vaughan sie 1973 zum Beweis der Tatsache benutzt — und zwar ohne irgendwelche Annahmen —, daß die Anzahl $E(x)$ derjenigen geraden Zahlen bis x, die nicht Summe von zwei Primzahlen sind, von der Größenordnung $O(x^{1-\delta})$ ist, mit einer effektiv berechenbaren kleinen Zahl $\delta > 0$.

5.11.3. *Allgemeine Folgen ganzer Zahlen*

Eines der allgemeinen Probleme der additiven Zahlentheorie ist das folgende: Ist, wenn A eine vorgegebene Folge streng positiver ganzer Zahlen bezeichnet, jede hinreichend große ganze Zahl $n > 0$ in der Gestalt $n = a_1 + \cdots + a_s$ darstellbar, wobei die a_i zu A gehören und $s \leqq s(A)$ mit einer Konstanten $s(A)$ ist? Man nennt dann A eine *Basis* für die streng positiven ganzen Zahlen. Es liegt nahe, sich zu fragen, ob es hinreichend einfache Bedingungen gibt, welche gewährleisten, daß A eine Basis ist.

Um 1930 fand Schnirelman eine solche Bedingung:

Es sei $A(x) = \text{Card}\,\{a \in A \mid a \leqq x\}$ *und* $\sigma(A) = \inf_{x \geqq 1} A(x)/x$; *ist dann* $\sigma(A) > 0$, *so ist* A *eine Basis.*

Leider ist die Folge P der Primzahlen so beschaffen, daß $\sigma(P) = 0$ gilt. Immerhin zeigte Schnirelman, daß $\sigma(2P) > 0$ ist, wenn $2P$ die Folge derjenigen ganzen Zahlen bezeichnet, welche Summe von höchstens zwei Primzahlen sind; dazu benutzte er das Brunsche Sieb. Daraus folgt die Existenz einer ganzen Zahl $s(2P)$

derart, daß jede streng positive ganze Zahl Summe von höchstens $s(2P)$ Primzahlen ist, ein Ergebnis, das historisch interessant ist, weil es vor der Vinogradovschen Lösung des Dreiprimzahlenproblems erzielt worden war.

5.12. Algebraische Funktionenkörper in einer Variablen über einem endlichen Konstantenkörper

Wie wir gesehen haben (vgl. 3.1., 3.3.2. und 3.4.1.), haben die endlichen Körper seit Gauß und Galois eine große Rolle in der Zahlentheorie und der Gruppentheorie gespielt, obwohl sie bei Dedekind nur in Gestalt der Kongruenzrechnung auftraten. Von 1920 an erkannte man anhand verschiedener Probleme, daß sich die algebraischen Erweiterungen der Körper $\boldsymbol{F}_q(X)$ der rationalen Funktionen *einer* Variablen mit endlichem Körper $\boldsymbol{F}_q$ in vieler Hinsicht so verhalten wie die algebraischen Zahlkörper; übrigens gibt es allerdings evidente Analogien zwischen diesen Körpern und den algebraischen Erweiterungen des Körpers $\boldsymbol{C}(X)$, die nichts anderes sind als die Körper der „rationalen Funktionen auf einer algebraischen Kurve" der Riemannschen Theorie (vgl. 7.2.5.). Aus der Gegenüberstellung dieser Gesichtspunkte entstand die allgemeine Idee der „abstrakten algebraischen Geometrie", wobei der Körper $\boldsymbol{C}$ der klassischen algebraischen Geometrie durch einen beliebigen Körper k ersetzt wird. Wählt man für k einen endlichen Körper, so haben die Ergebnisse dieser Theorie wichtige Konsequenzen in der Zahlentheorie. Beispielsweise stieß man seit den Arbeiten von Gauß bei verschiedenen Gelegenheiten auf das folgende Problem: Man betrachtet homogene Polynome $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ der Grade d_i $(1 \leqq i \leqq r)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und bezeichnet mit $N(p)$ die Anzahl der Lösungen (mod p) des Systems der Kongruenzen

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p}\,, \qquad 1 \leqq i \leqq r\,,$$

wobei p eine Primzahl ist; es geht darum, eine möglichst genaue asymptotische Formel für $N(p)$ bei gegen $+\infty$ strebendem p zu erhalten. Bei Beschränkung auf die einfachsten Fälle werden wir versuchen, verständlich zu machen, wie es die Idee der „algebraischen Geometrie über einem endlichen Körper" ermöglicht hat, dieses Problem auf befriedigende Weise zu lösen (siehe [12]).

5.12.1. *Die Dissertation von E. Artin*

Seit den Arbeiten von Dedekind und Weber (1882) wußte man, daß der Ring $k[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten über einem Körper k und sein Quotientenkörper $k(X)$ Eigenschaften besitzen, die diesen Ring und diesen Körper in die Nähe des Ringes $\boldsymbol{Z}$ der ganzen Zahlen und dessen Quotientenkörpers $\boldsymbol{Q}$ rücken; ist K eine endliche algebraische Erweiterung von $k(X)$, so definiert man in K die „ganzen algebraischen Größen" wie für die Zahlkörper, indem man $\boldsymbol{Z}$ durch $k[X]$ ersetzt, und der Ring $\mathfrak{o}_K$ dieser ganzen Größen besitzt wie die Ringe der ganzen

algebraischen Zahlen in den Zahlkörpern die Eigenschaft, daß seine Ideale eindeutig in Produkte von Primidealen zerlegt werden können (vgl. 5.5.3.4.). Sehr eingehend untersuchte Artin in seiner 1921 geschriebenen Dissertation den Spezialfall, daß k ein Primkörper $\boldsymbol{F}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ ist und man eine quadratische Erweiterung $K_D = \boldsymbol{F}_p(x, \sqrt{D(x)})$ mit $D(x) \in \boldsymbol{F}_p[x]$ betrachtet. Die Analogien zur Zahlentheorie sind dann noch enger: Die Anzahl der Idealklassen ist endlich, es gibt ein quadratisches Reziprozitätsgesetz, und im ersten Teil seiner Arbeit übertrug Artin tatsächlich alle diejenigen Eigenschaften auf K_D, die Dedekind und Hilbert für die quadratischen Erweiterungen von $\boldsymbol{Q}$ nachgewiesen hatten.

Der zweite Teil der Arbeit ist der Untersuchung der analytischen Eigenschaften der Zetafunktion $\zeta_K(s)$ des Körpers $K = K_D$ gewidmet: $\zeta_K(s)$ wurde für $\operatorname{Re} s > 1$ in der gleichen Weise definiert wie die Dedekindsche Zetafunktion (vgl. 5.5.3.8.):

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a} \neq (0)} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s};$$

dabei ist N wie bei den Zahlkörpern die Anzahl der Elemente des Ringes $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{a}$. Man verfügte auch über die Eulersche Formel

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1},$$

wobei das Produkt über alle Primideale von $\mathfrak{o}_K$ erstreckt wird.

Naturgemäß wurde dann untersucht, ob diese Funktionen $\zeta_K(s)$ wie die Zetafunktionen von Dedekind bzw. Riemann einer Funktionalgleichung genügen, und versucht, ihre Nullstellen zu lokalisieren (vgl. 5.6. und 5.5.8.2.). Artin zeigte, daß $\zeta_K(s)$ in der Tat einer Funktionalgleichung genügt, die $\zeta_K(s)$ und $\zeta_K(1-s)$ verknüpft, und daß alle nichtreellen Nullstellen von $\zeta_K(s)$ symmetrisch zu den Geraden $\operatorname{Re} s = 1/2$ und $\operatorname{Im} s = 0$ liegen. Dies legte natürlich die Vermutung nahe, es gebe das Analogon zur Riemannschen Vermutung (vgl. 5.6.), d. h. die Vermutung, alle nichtreellen Nullstellen von $\zeta_K(s)$ lägen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1/2$.

Außerdem gelangte Artin durch eine ins einzelne gehende Untersuchung der Situation zu dem bemerkenswerten (und unerwarteten) Ergebnis, daß $\zeta_K(s)$ eine *rationale Funktion von* p^{-s} ist, genauer, daß

$$\zeta_K(s) = \frac{1}{1 - p^{1-s}} \prod_{\nu=1}^{m-1} (1 - \beta_\nu p^{-s})$$

gilt, wobei die β_ν die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sind. Die Nullstellen von $\zeta_K(s)$ werden also durch

$$s = \frac{\log |\beta_\nu|}{\log p} + i \frac{\arg \beta_\nu}{\log p}$$

gegeben, und die „Riemannsche Vermutung" für $\zeta_K(s)$ ist gleichwertig der Beziehung $\log |\beta_\nu| = \frac{1}{2} \log p$ oder auch $|\beta_\nu| = p^{1/2}$ für $1 \leqq \nu \leqq m$.

Artin konnte zwar für kleine Werte von p und verschiedene Polynome $D(x)$ verifizieren, daß die „Riemannsche Vermutung" zutrifft, es gelang ihm aber nicht,

einen allgemeinen Beweis zu geben; er kam auf diese Frage erst in den vierziger Jahren zurück. Wir verweisen für die damals von ihm unternommenen Untersuchungen auf 5.5.12.

5.12.2. *Das Problem von Davenport*

Littlewood legte im Jahre 1930 Davenport ein recht spezielles Problem über die Verteilung der quadratischen Reste vor; 1906 hatte Jacobsthal gezeigt, daß die Anzahl der Paare von aufeinanderfolgenden quadratischen Resten $n, n+1 \bmod p$ für eine gegen $+\infty$ strebende Primzahl p durch eine asymptotische Formel

$$R_2(p) = \frac{p}{4} + O(p^{1/2})$$

gegeben wird und entsprechend die Anzahl der aus aufeinanderfolgenden quadratischen Resten $n, n+1, n+2 \bmod p$ bestehenden Tripel durch

$$R_3(p) = \frac{p}{8} + O(p^{1/2}) \,.$$

Das von Littlewood gestellte Problem bestand darin, für die Anzahl der Systeme von n aufeinanderfolgenden quadratischen Resten eine Formel des Typs

$$R_n(p) = \frac{p}{2^n} + O(p^\theta)$$

mit einem kleinstmöglichen Exponenten $\theta < 1$ zu finden.

Man führt die Abschätzung von $R_n(p)$ auf die Abschätzung von Summen des Typs

$$S(a_1, \dots, a_n) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(\frac{(x+a_1) \cdots (x+a_n)}{p} \right)$$

zurück, wobei die $a_1, \dots, a_n$ paarweise inkongruent modulo p sind und $\left(\frac{x}{p}\right)$ das Legendre-Symbol ist (vgl. 5.2.); genauer gesagt, man zeigt, daß

$$R_n(p) = \frac{p}{2^n} + O\big(|S(a_1, \dots, a_n)|\big)$$

gilt, und Davenports Bemühungen waren darauf gerichtet, eine „gute" Majorisierung von $S(a_1, \dots, a_n)$ zu erzielen.

Zu diesem Zeitpunkt reiste er zu einem einjährigen Aufenthalt nach Marburg, wo damals Hasse lehrte; im Laufe seiner Diskussionen mit Hasse stellte sich heraus, daß für die Anzahl $N_n(p)$ der Lösungen von

$$y^2 \equiv (x+a_1) \cdots (x+a_n) \pmod p$$

die Formel

$$N_n(p) = \sum_{x=0}^{p-1} \left(1 + \left(\frac{(x+a_1) \cdots (x+a_n)}{p} \right) \right) = p + S(a_1, \dots, a_n)$$

gilt, welche $S(a_1, \dots, a_n)$ mit $N_n(p)$ verknüpft.

Eben zu dieser Zeit begann F. K. Schmidt, die Artinschen Ergebnisse auf beliebige algebraische Erweiterungen von $\boldsymbol{F}_q(X)$ zu verallgemeinern (siehe 5.12.3.); insbesondere hatte er beobachtet, daß es eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den Primidealen vom Grad 1 in $\mathfrak{o}_K$ und den Lösungen der Kongruenz $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p}$ gibt, wenn eine Erweiterung K von $\boldsymbol{F}_p(x)$ durch eine Gleichung $f(x, y) = 0$ erklärt ist.

Diese Beobachtung wurde für Davenport und Hasse bedeutsam, die bemerkten, daß man die Verfahren der Artinschen Arbeit dazu benutzen konnte, einen Ausdruck für die Anzahl $\mathscr{N}_1$ der Primideale von $\mathfrak{o}_K$ vom Grad 1 und demzufolge einen Ausdruck für $S(a_1, \dots, a_n)$ zu gewinnen. Man kann nämlich

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ \deg \mathfrak{p}=1}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ \deg \mathfrak{p}>1}} \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

setzen, woraus sich durch Logarithmieren für reelles $s > 1$

$$\begin{aligned} \log \zeta_K(s) &= - \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ \deg \mathfrak{p}=1}} \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) - \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ \deg p>1}} \log\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{p})^s}\right) \\ &= \frac{\mathscr{N}_1}{p^s} + O\left(\frac{1}{p^{2s}}\right) \end{aligned}$$

ergibt. Unter Benutzung des von Artin gefundenen Ausdrucks für $\zeta_K(s)$ als rationale Funktion von p^{-s} erhält man aber

$$\begin{aligned} \log \zeta_K(s) &= - \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) + \sum_{\nu=1}^{m-1} \log\left(1 - \beta_\nu p^{-s}\right) \\ &= \left(p - \sum_{\nu=1}^{m-1} \beta_\nu\right) p^{-s} + O(p^{-2s}); \end{aligned}$$

setzt man die Koeffizienten von p^{-s} in beiden Ausdrücken gleich, so findet man

$$\mathscr{N}_1 - p + \sum_{\nu=1}^{m-1} \beta_\nu = O(p^{-s}),$$

und wenn man s gegen $+\infty$ streben läßt, liefert dies $\mathscr{N}_1 = p - \sum_{\nu=1}^{m-1} \beta_\nu$. Folglich ist, wenn die „Vermutung von Riemann-Artin" zutrifft, $|\beta_\nu| = p^{1/2}$ für $1 \leqq \nu \leqq m$, also $\mathscr{N}_1 = p + O(p^{1/2})$, und dies impliziert

$$S(a_1, \dots, a_n) = O(p^{1/2}).$$

Davenport hatte am Beweis der Artinschen Vermutung keinen Anteil; er spielte jedoch gewiß eine aktive Rolle, indem er Hasses Interesse an diesem Problem und seinen zahlentheoretischen Anwendungen stimulierte. Eine Anekdote will wissen, daß Davenport, der keine hohe Meinung von abstrakten mathematischen Theorien hatte, wenn sie ihm zur Lösung von Problemen der Zahlentheorie nicht nützlich zu sein schienen, Hasse herausforderte, die Nützlichkeit der „abstrakten Algebra"

zu beweisen. Hasses Antwort bestand 1936 darin, daß er die Artinsche Vermutung für die Kongruenz $y^2 \equiv f(x) \pmod{p}$ für ein Polynom f dritten Grades mit Hilfe der „abstrakten Algebra", der Davenport so mißtraute, bewies![(63)]

5.12.3. *Die Arbeiten von F. K. Schmidt*

F. K. Schmidt scheint der erste gewesen zu sein, der die Möglichkeiten der Wechselwirkung erkannte, welche die beiden zu Anfang dieses Abschnitts erwähnten Interpretationen der algebraischen Erweiterungen eines Körpers $\boldsymbol{F}_q(X)$ boten. Bei der Untersuchung der Methoden, mit denen Dedekind und Weber in ihrer Arbeit von 1882 auf rein algebraische Weise die Theorie der ebenen algebraischen Kurven (in $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{C})$) behandelt hatten, stellte Schmidt fest, daß es möglich ist, diese Methoden fast ohne Modifikation auf den Fall zu übertragen, daß $\boldsymbol{C}$ durch einen beliebigen endlichen Körper $\boldsymbol{F}_q$ ersetzt wird. Insbesondere konnte er das *Geschlecht* einer über dem Körper $\boldsymbol{F}_q$ definierten „algebraischen Kurve" definieren und auf diese „Kurven" den Satz von Riemann-Roch ausdehnen. Dies ermöglichte es ihm, einer solchen als nicht singulär vorausgesetzten Kurve C vom Geschlecht g eine Zetafunktion zuzuordnen, die in der Gestalt

$$\zeta_C(s) = \frac{P_{2g}(q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}$$

geschrieben werden kann, wobei $P_{2g}(u)$ ein Polynom vom Grad $2g$ mit ganzen rationalen Koeffizienten ist. Er zeigte außerdem, daß $\zeta_C(s)$ einer Funktionalgleichung genügt, die $\zeta_C(s)$ und $\zeta_C(1-s)$ miteinander verknüpft, und daß die Nullstellen von $\zeta_C(s)$ symmetrisch in bezug auf die Geraden $\operatorname{Re} s = 1/2$ und $\operatorname{Im} s = 0$ liegen; ferner verallgemeinerte er die „Riemannsche Vermutung" zu der Vermutung, daß die Nullstellen des Polynoms $P_{2g}(u)$ auf dem Kreis $|u| = q^{1/2}$ liegen (siehe [36]). Ist $\mathcal{N}_C$ die Anzahl der Punkte auf C mit Koordinaten in $\boldsymbol{F}_q$, so erkennt man wie in dem von Hasse und Davenport betrachteten Spezialfall, daß die „Riemannsche Vermutung" für $\zeta_C(s)$ die Ungleichung

$$|\mathcal{N}_C - q - 1| \leqq 2gq^{1/2}$$

nach sich zieht.[(64)]

5.12.4. *Die Vermutungen von Weil*

Die Ergebnisse von Schmidt brachten Hasse dazu, im Fall $g = 1$ die von den elliptischen Kurven her bekannten Verfahren auf über $\boldsymbol{F}_q$ definierte „Kurven" zu verpflanzen (vgl. 7.1.14.), was ihm ermöglichte, in diesem Fall die „Riemannsche Vermutung" zu beweisen. Der Beweis dieser Vermutung für die Kurven beliebigen Geschlechts g konnte jedoch erst 1948 von André Weil erbracht werden[(65)], als er in seinem Buch *Foundations of algebraic geometry* die nötigen algebraischen Hilfsmittel geschaffen hatte, um die Resultate der klassischen algebraischen Geometrie, die sich bis dahin wesentlich auf die *topologischen* Eigenschaften der projektiven

Räume $\boldsymbol{P}_n(C)$ gestützt hatten, auf die „abstrakte" algebraische Geometrie auszudehnen. Es ist jedoch völlig unmöglich, im Rahmen unserer Darstellung darüber im weiteren mehr zu sagen (siehe [42] und [12]).(66)

Die Untersuchung der über einem endlichen Körper definierten Kurven legte Weil eine Reihe von Vermutungen über die algebraischen Mannigfaltigkeiten V *beliebiger* Dimension nahe, die über einem solchen Körper $\boldsymbol{F}_q$ definiert sind, und er lenkte die Aufmerksamkeit auf die wichtigen Konsequenzen, die sie in der Zahlentheorie besitzen könnten. Wir können hier darüber nur so viel sagen, daß sie sich um eine „Zetafunktion" $\zeta_V(s)$ gruppieren, welche für V definiert werden kann und die Definition von F. K. Schmidt verallgemeinert; es handelt sich darum zu zeigen, daß diese Funktion in q^{-s} rational ist, einer Funktionalgleichung genügt und daß sich ihre Nullstellen nach Gesetzen verteilen, die eine breite Verallgemeinerung der „Riemann-Artinschen Vermutung" darstellen und die, wie Weil als erster bemerkte, auf unvorhergesehene Weise mit topologischen Eigenschaften der klassischen algebraischen Mannigfaltigkeiten zusammenhängen. Die ersten beiden Vermutungen Weils wurden von Grothendieck bewiesen, der zu diesem Zweck eine gigantische neue Theorie, die Theorie der *Schemata*, entwickelt hat, welche bis heute die gesamte algebraische Geometrie beherrscht; die verallgemeinerte „Riemannsche Vermutung", die sich als die schwierigste Vermutung erwies, wurde schließlich 1973 von P. Deligne bewiesen, der dabei ganz wesentlich die Theorie von Grothendieck benutzte [12].(67)

5.13. Anmerkungen des Übersetzers

(1) Vgl. dazu „Ergänzende Literaturhinweise" [53][1].

(2) Schon Euler hatte in einem Brief an Chr. Goldbach (1690—1764) vom 28. 8. 1742 ein Gesetz formuliert, das dem quadratischen Reziprozitätsgesetz gleichwertig ist. Siehe S. 175 unten und [84], S. 117ff. Publikation von Euler in der Arbeit *Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos* (Eneström 552), Euleri Opera Omnia (1) 3 (1917), S. 497—512 bzw. *Opuscula analytica* 1 (1783), S. 64—84.

(2a) Den ersten lückenlosen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes gab C. F. Gauß. Vgl. dazu 5.3.2. und [131].

(3) Der erste heute bekannte Eulersche Beweis steht in einem Brief vom 12. 4. 1749 an Goldbach. Siehe [84], S. 310.

(4) Vgl. dazu [55].

(5) An dieser Aussage bestehen auf Grund neuerer Archivforschungen erhebliche Zweifel. Siehe die eingehende Diskussion [77], [78] und [127].

(6) Ein gewissenhafter Leser, nämlich Dirichlet, fand eine Vereinfachung des ersten Gaußschen Beweises, die diesen durchaus lesbar macht; siehe Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4. Aufl., Braunschweig 1894, §§ 48—51. Ein weiterer gewissenhafter Leser unserer Tage, J. Tate, fand sogar, daß einige seiner Überlegungen in der algebraischen K-Theorie jenem Gaußschen Induktionsschluß äquivalent seien. Siehe J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*. Princeton, N.J., 1971, § 11.

(7) Diese Frage ist überhaupt nur für Primzahlen p der Gestalt $4n + 1$ interessant, weil man bei Primzahlen p der Gestalt $4n + 3$ auf die quadratischen Reste zurückkommt.

(8) Die Betrachtung der n-ten Potenzreste führt zwangsläufig, wie schon Gauß formulierte (Fußn. zur Selbstanzeige d. 2. Abh. über biquadr. Reste), zum Körper (in heutiger Terminologie) der n-ten Einheitswurzeln, also bei $n = 4$ zum Körper $Q(\sqrt{-1})$. Siehe dazu [65], II, Kap. III.

(9) In diesem Satz ist der Begriff der Primärzahl völlig ohne Belang, weil ohnehin der Einheitenfaktor i^m beliebig sein darf. Die Bedeutung der Primärzahlen zeigt sich erst in der glatten Formulierung des Reziprozitätsgesetzes.

(10) Im französischen Original fehlt dieses (wesentliche) Wort „primär".

(11) Bereits Gauß war spätestens zwischen 1804 und 1807 auf diesen Zusammenhang gestoßen, und zwar mit Hilfe der sogenannten kubischen Gaußschen Summen und der wohl durch Induktion gefundenen Zusammenhänge zwischen dem kubischen Restcharakter z. B. von 2, 3, 5 modulo einer Primzahl p der Gestalt $3n + 1$ und der Darstellbarkeit von p durch bestimmte quadratische Formen. Siehe [14], Bd. VIII; [88] und R. Dedekind, *Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern*, in [10], Bd. II, S. 148—233, insbes. § 11. — Übrigens läßt sich wegen der Identität $\varrho^2 = -1 - \varrho$ jede Zahl der Gestalt $x + \varrho^2 y$ sofort auf die Gestalt $u + \varrho v$ bringen.

(12) Vgl. dazu [126].

(13) Siehe dazu auch [112 bis] und [113] sowie 2.5., [11 bis].

(14) Gauß entdeckte die Auflösung von $x^{17} - 1 = 0$ am 29. 3. 1796, wie die erste Eintragung in sein Tagebuch vom 30. 3. 1796 und sein Brief vom 6. 1. 1819 an Chr. L. Gerling ([14], Bd. X/1, S. 125) zeigen. Vgl. [88].

(15) Ein von Dedekind unabhängiger Beitrag stammt von H. Poincaré: *Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies*, J. Ecole polytechn. 47e cahier (1880), 177—245 = Oeuvres t. V, Paris 1950, 117—180. Poincaré interpretierte wie Dedekind die Komposition der Formen durch Multiplikation von „Gittern" oder „Moduln".

(16) Leider erläutern die Verfasser an der angegebenen Stelle nur den Zusammenhang zwischen den engeren Klassen von Idealen der Hauptordnung von $Q(\sqrt{D_1})$ und denjenigen Klassen von binären quadratischen Formen, deren Diskriminante mit der Körperdiskriminante ($= D_1$ oder $= 4D_1$) übereinstimmt. Sie gehen nicht ein auf den Fall *beliebiger* Diskriminanten D, der von Gauß und seinen Vorgängern behandelt worden war und in dem ebenfalls eine Komposition der Klassen und Geschlechter definiert ist. Dedekind zog zur Bewältigung dieses allgemeinen Falles ganz wesentlich seine Modultheorie heran. Die von den Verfassern hier im Text formulierte Behauptung ist für beliebige D im allgemeinen falsch. Es besteht vielmehr eine umkehrbar eindeutige Entsprechung zwischen den Dedekindschen Modulklassen im engeren Sinne zur Diskriminante D und den Gaußschen Formenklassen zur Diskriminante D. Die Behandlung dieses allgemeinen Falles offenbart auch einige Besonderheiten quadratischer Zahlkörper, die bei Zahlkörpern höheren Grades nicht auftreten. Siehe dazu den letzten Paragraphen des XI. Supplements von Dedekind (vgl. 5.5.3.) und Dedekinds Abhandlung *Über die Anzahl der Idealklassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers* (1877) (= [10], Bd. I, S. 105—157). Man kann auch äquivalente Formulierungen mit Hilfe von H. Webers „Kongruenzklassengruppen" (siehe 5.5.6.) oder D. Hilberts „regulären Ringidealen" (Zahlbericht, §§ 33—34, 89) angeben.

(17) Vermutlich würde dieser Abschnitt bezüglich einiger Details, die sich auf die Zeit bis etwa 1850 beziehen, im Lichte neuerer Arbeiten heute ergänzt bzw. abgeändert werden. Vgl. dazu [77], [78], [79], [81], [126], [127].

(*18*) Das gleiche hatte schon Jacobi getan (ab 1827), insbesondere in seinen 1836/37 gehaltenen, bis heute unveröffentlichten Vorlesungen über Zahlentheorie. Siehe dazu [50], insbesondere S. IV und die 14. Vorlesung.

(*19*) Für diese angebliche Fast-Sicherheit gibt es keinerlei Belege. Vielmehr kann man Kummers Untersuchungsrichtung zwanglos ohne die Fermatsche Vermutung aus den damals aktuellen Problemen der Kreisteilungstheorie und der Suche nach den höheren Reziprozitätsgesetzen erklären. Siehe die in früheren Anmerkungen zu 5.2.3. und zu 5.5. genannte Literatur.

(*20*) Dies trifft nur auf den (sogenannten „ersten") Fall zu, in dem vorausgesetzt wird, keine der Zahlen x, y, z sei durch p teilbar. Der sogenannte „zweite" Fall liegt vor, wenn genau eine dieser Zahlen durch p teilbar ist, und seine Erledigung erfordert das keineswegs „elementar" zu nennende „Kummersche Lemma", das von Kummer erst 1847 bewiesen wurde. Vgl. dazu das Lehrbuch [6].

(*21*) Diese Zeitangabe kann nur indirekt aus den Primärquellen erschlossen werden.

(*22*) D. Hilbert hatte schon 1900 in seinem berühmten Vortrag *Mathematische Probleme* behauptet, Kummer wäre durch das Fermatsche Problem zu den idealen Zahlen gelangt (vgl. [99], S. 24).

(*23*) In Wirklichkeit hatte Kummer schon 1844 gezeigt, daß in dem von einer 23-ten Einheitswurzel erzeugten Ring z.B. die Primzahl 47 keine eindeutige Faktorzerlegung besitzt. Siehe E. E. Kummer, *De numeris complexis, qui radicibus unitatis et numeris integris realibus constant*. In: Gratulationsschrift d. Univ. Breslau zur Jubelfeier d. Univ. Königsberg. Breslau 1844. Wiederabdruck in: J. math. pures et appl. *12* (1847), 185—212, und in [109], Bd. 1, S. 165—192.

(*24*) Kummer begann spätestens 1844 — ohne nachweisbaren Zusammenhang mit der Fermatschen Vermutung — mit der eingehenden Untersuchung der Ringe $\mathbf{Z}[\zeta]$. Im Oktober 1845 teilte er in einem Brief an Kronecker den ersten Entwurf seiner Theorie der idealen Zahlen mit, dem bereits 1846 eine Mitteilung in den Berliner Akademieberichten folgte.

(*25*) Kronecker hatte bereits 1853 den nach ihm und Weber benannten Satz (siehe 5.5.4.) und wenige Jahre später seine ersten Arbeiten zur komplexen Multiplikation veröffentlicht. Eisenstein veröffentlichte 1850 das nach ihm benannte Reziprozitätsgesetz.

(*26*) Kroneckers Abhandlung hatte in den ersten 10 bis 15 Jahren zunächst eine größere Wirkung als Dedekinds Arbeiten, was durch die große Anzahl von Arbeiten, die von Kronecker angeregt oder beeinflußt waren, belegt wird. Dedekinds Überlegungen erschienen den Zeitgenossen sehr „abstrakt".

(*27*) Wie schon früher erwähnt, läßt sich ein Einfluß der Fermatschen Vermutung erst ab 1847 (also nach der Einführung der „idealen Zahlen") nachweisen; der dominierende Einfluß auf Kummer stammt aus Arbeiten von Gauß und vor allem von Jacobi.

(*28*) H. M. Edwards hat in seiner Arbeit [81] (Abschnitt 6) dargelegt, wie man die Existenz und die Eigenschaften der Zahlen ψ_k auch in beliebigen algebraischen Zahlkörpern beweisen kann und dadurch zu einem recht durchsichtigen Aufbau der Teilbarkeitslehre in beliebigen Zahlkörpern gelangt, der dem Kummerschen Ansatz recht nahesteht.

(*29*) E. Selling publizierte 1865 eine Arbeit *Über die idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln einer beliebigen irreductibeln Gleichung rational gebildet sind*, Zeitschr. f. Math. u. Physik *10* (1865), 17—47. Dieser Versuch einer allgemeinen Teilbarkeitslehre für endliche Galoissche Zahlkörper muß allerdings als verfehlt betrachtet werden.

(*30*) Dedekind hat bereits 1856—1858 in seinen Vorlesungen die Körper- und Galoistheorie im wesentlichen in der Form dargestellt, in der sie dann 1894 bei ihm auf-

tritt. Siehe dazu W. Purkert, *Ein Manuskript Dedekinds über Galois-Theorie*, NTM-Schriftenreihe 13. Jg. (1976), H. 2, 1—16. Vgl. vom gleichen Verfasser *Zur Genesis des abstrakten Körperbegriffs*, ebenda *10* (1973) 1, 23—37, u. 2, 8—20.

(*31*) Korrekter: Es gibt nicht immer eine Körpererzeugende θ derart, daß $\mathbf{Z}[\theta]$ die Maximalordnung von $K = \mathbf{Q}(\theta)$ ist. Für quadratische Zahlkörper K kann man natürlich ein solches θ immer finden.

(*32*) Trotzdem hat Kummer in zwei Arbeiten (1846 und 1849) die ganzen Zahlen in quadratischen Zahlkörpern korrekt behandelt, und zwar durch Einbettung dieser Körper in Kreisteilungskörper.

(*33*) Aus Dedekinds *Anzeige der zweiten Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie* (1871; siehe [10], III, S. 404) gewinnt man allerdings den Eindruck, die Schwierigkeit habe nicht im Beweis *dieses* mehr qualitativen Satzes gelegen, sondern im Beweis der genaueren Aussage, daß genau die Diskriminantenteiler verzweigt sind.

(*34*) Diejenigen p, für welche $p \nmid e_i$ für alle i gilt, werden in K *zahm-verzweigt* genannt, während diejenigen p, für welche $p \mid e_i$ für wenigstens ein i gilt, als *wild-verzweigt* bezeichnet werden.

(*35*) Kronecker nannte ursprünglich (1853) nur diejenigen Gleichungen *abelsch*, die man heute als *zyklisch* bezeichnet; erst später wies er expressis verbis darauf hin, daß jede abelsche Erweiterung (im heutigen Sinne) das Kompositum von zyklischen Erweiterungen ist.

(*36*) Die verschiedenen Beweisansätze und -versuche von Kronecker und Weber werden in der Arbeit [128] kritisch diskutiert.

(*37*) Kroneckers ursprüngliche Formulierung (in einem Brief an Dedekind vom 15. 3. 1880) ist nicht völlig klar und daher mehrdeutig; dies wurde bereits von H. Hasse 1930 in [107], Bd. V, S. 510—515, ausführlich diskutiert. Wenn man allerdings eine von Hasse nicht herangezogene Kronecker-Stelle ([107], Bd. IV, S. 120) berücksichtigt, gelangt man zu dem Schluß, daß Kronecker die zweite von Hasse a. a. O. diskutierte Version vermutet hat, die sich dann als richtig erwies.

(*38*) So Kronecker 1886 auf der Versammlung der Deutschen Naturforscher und Ärzte in Berlin. Nach H. Weber, *Leopold Kronecker*. Jahresber. DMV *2* (1893), 5—31. Insbes. S. 19.

(*39*) Kronecker wurde dazu auch von Gauß' zweitem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (1815) angeregt. Siehe Kroneckers *Grundzüge*, § 13.

(*40*) Original in Englisch: [152].

(*41*) Dabei benutzte Hilbert wesentlich auch auf Kronecker zurückgehende Methoden, z. B. in der Untersuchung der Diskriminante und der Zerlegung der Primzahlen. Vgl. *Zahlbericht*, §§ 10—11.

(*42*) Bestimmte indirekte Schlüsse gestatten einige der um 1970 in der Clifford Memorial Library at the University of Evansville (USA) wiederaufgefundenen Briefe von Frobenius an Dedekind. Siehe [75], Appendice LIV.

(*43*) Man muß natürlich noch zeigen, daß beim Übergang von $K_{Z(\mathfrak{p})}$ zu $K_{T(\mathfrak{p})}$ keine Verzweigung auftritt.

(*44*) Den Spezialfall dieses Hilbertschen Satzes für Kreisteilungskörper hatte E. E. Kummer schon 1846 in seiner ersten ausführlichen Darstellung seiner Theorie der idealen Zahlen (mit rein algebraischen Mitteln) bewiesen. Der erwähnte Satz von Dirichlet-Dedekind, der die Existenz von unendlich vielen einzelnen Primidealen vom Grad 1 in jeder Idealklasse behauptet, ist wesentlich schärfer als der Satz von Kummer und Hilbert und erfordert analytische Beweismethoden.

(*45*) Die Reziprozitätsgesetze von Gauß, Jacobi, Eisenstein und Kummer für die l-ten Potenzreste ($l \geqq 3$) beziehen sich auf Zahlen der l-ten Kreisteilungskörper $\mathbf{Q}(\zeta_l)$, weil — wie Gauß schon 1831 hervorhob — die adäquate Behandlung der l-ten

Potenzreste nur möglich ist, wenn man die l-ten Einheitswurzeln heranzieht. Insofern haben diese Gesetze durchaus nichts Gekünsteltes an sich; im Gegenteil, es ist in bestimmtem Maße überraschend, wie glatt die Endresultate aussehen. Die Fälle $l = 3$ und $l = 4$ (kubische bzw. biquadratische Reste) spielen nach einer Bemerkung von Kummer schon deshalb eine Sonderrolle, weil die Körper $\boldsymbol{Q}(\zeta_3) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{-3})$ und $\boldsymbol{Q}(\zeta_4) = \boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})$ imaginär-quadratisch sind, also nur *endlich* viele Einheiten (die sämtlich Einheitswurzeln sind) haben und eine übersichtliche Charakterisierung der sogenannten Primärzahlen (vgl. 5.5.3.) gestatten. Es kommt als günstiger Umstand hinzu, daß beide Körper die Klassenzahl 1 besitzen. Kummer hatte seine Reziprozitätsgesetze der l-ten Potenzreste (1859) nur für reguläre Primzahlen l (vgl. 5.5.2.3.) beweisen können. Den Fall beliebiger Primzahlen l erledigte erst etwa 50 Jahre später Ph. Furtwängler (Math. Annalen *67* (1909), *72* (1912), *74* (1913)). — Vgl. dazu auch [17] und [18]. — Die Verfasser stehen in ihrem Urteil offenbar stark unter dem Eindruck des Hilbertschen *Zahlberichts*. Einige kritische Bemerkungen zum *Zahlbericht* findet man in H. Hasses Vorwort zu seiner Monographie *Über die Klassenzahl Abelscher Zahlkörper*, Akademie-Verlag, Berlin 1952, S. V—IX, insbes. S. VII—VIII. Vgl. noch [81 bis],

(*46*) Nach J. Tate ([1], Chap. VII, § 3.3) besteht der entscheidende Schritt von Hilbert über Kummer hinaus im Übergang von den l-ten Potenzen zu den Normen. Kummers Ergebnisse kann man unter anderem als eine explizite Bestimmung des Normenrestsymbols (die bei Hilbert a.a.O., § 131, Formel (82), als Definition auftritt) deuten. Insofern waren Kummers Arbeiten ein erster Beitrag zu dem allgemeinen Problem der expliziten Berechnung des Normenrestsymbols, die nach Hilbert vor allem durch die Arbeiten von T. Takagi, E. Artin, H. Hasse und in allgemeinster Form durch I. R. Šafarevič (1947/50) geliefert wurde.

(*47*) Vgl. [99], S. 32.

(*48*) Von hier an bis zu einer entsprechend gekennzeichneten Stelle folgt ein Zitat aus Hilberts Vortrag *Mathematische Probleme* (einschließlich der Fußnoten) nach [99].

(*49*) Für die sich an die Hilbertschen Probleme anschließenden Entwicklungen sei hier schon verwiesen auf [47] und auf [99].

(*50*) Der erste Webersche Beweis für diesen Satz (Acta Math. *8* und *9*) war nicht völlig korrekt. Der erste völlig einwandfreie Beweis stammt von D. Hilbert 1896. Zu dieser Frage siehe [128].

(*51*) Diese Bedingung ist jedoch nur hinreichend, aber nicht notwendig für das Vorhandensein von komplexen Multiplikatoren, weil τ nur bis auf gebrochen-lineare unimodulare Transformationen bestimmt ist. Daher sollte es heißen „wenn τ zu einem imaginär-quadratischen Zahlkörper K gehört".

(*52*) Ist $F(z)$ eine elliptische Funktion mit den Fundamentalperioden (ω_1, ω_2), so ist für beliebiges von 0 verschiedenes $\alpha \in \boldsymbol{C}$ die Funktion $F(\alpha^{-1}z)$ ebenfalls elliptisch, mit den Fundamentalperioden $(\alpha\omega_1, \alpha\omega_2)$. Deshalb muß man bei der angegebenen Definition in Kauf nehmen, daß der von (ω_1, ω_2) erzeugte $\boldsymbol{Z}$-Modul im allgemeinen keine Teilmenge des Zahlkörpers K ist, obwohl er sich bei Multiplikation mit den Elementen der gegebenen Ordnung reproduziert. In der Literatur wird meistens vorausgesetzt, daß (ω_1, ω_2) in K liegt.

(*53*) Vgl. dazu die Anmerkung (*37*). Die hier im Text genannte Version wurde von Hasse (1930) als erste von drei möglichen Versionen diskutiert: als in hohem Grade wahrscheinlich sah Hasse seine zweite Version an, die inhaltlich mit dem Takagischen Satz übereinstimmt. Es sei noch darauf hingewiesen, daß Hilbert bei der Formulierung seines 12. Problems (siehe 5.5.5.) und Hasse (1921) in seinem *Klassenkörperbericht*, Teil I [17], die hier im Text angegebene „Jugendtraum"-Formulierung Kronecker zuschrieben, also diejenige Version, von der Hasse 1930 abrückte. — Übrigens besteht der Unterschied der beiden nach Hasse ernsthaft diskutablen Versionen letzten Endes nur in der Beschreibung der Erweiterungen von K vom Zweierpotenzgrad.

(*54*) Die erste Mitteilung von Čebotarev stammt von 1923 und trägt den Titel *Opredelenie plotnosti sovokupnosti prostych čisel, prinadležaščich k zadannomu klassu podstanovok*, Izvest. Akad. nauk *17* (1923), 205–230, 231–250. — Der wohl durchsichtigste Beweis stammt von M. Deuring: *Über den Tschebotareffschen Dichtigkeitssatz*, Math. Annalen *110* (1935), 414–415. Siehe auch [35].

(*55*) Dies folgt auch ohne den Dichtigkeitssatz aus lange bekannten Eigenschaften der Dedekindschen Zetafunktionen von k, K und L. Der Beweis wurde 1916 von M. Bauer publiziert. Siehe [35], Chap. VII, und [6], Chap. V, § 3.2, Satz 2.

(*56*) Vgl. dazu die Anmerkungen *37* und *53*.

(*57*) Es sei bemerkt, daß die „höheren Reziprozitätsgesetze" auch von R. Dedekind 1900 in der wichtigen Arbeit *Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern* (J. f. reine u. angew. Math. *121*, 40–123 = Werke II, S. 148–233) und Furtwängler 1902–1913 in mehreren Arbeiten (vgl. [18]) behandelt wurden. Auf die Arbeit von Dedekind wird in anderem Zusammenhang (vgl. 5.5.10.2.) hingewiesen. Vgl. auch die Anmerkung (*45*).

(*57a*) Nach Nikomachos hat Eratosthenes die Methode erfunden; vgl. B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, 2. Aufl., Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1966, S. 385.

(*58*) Zur Einschätzung von Riemanns analytisch-zahlentheoretischen Ergebnissen siehe auch C. L. Siegel, *Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik *2* (1932), 45–80 = [141], I, S. 275–310.

(*58a*) Ausführliche Angaben dazu in H. Piepers *Einleitung*. *Das antike Problem der Quadratur des Kreises* in [74 bis].

(*58b*) Weierstraß trug Lindemanns Resultat im Juni 1882 in der Berliner Akademie vor. Lindemanns vollständiger Beweis: Annalen *20*(1882), 213–225.

(*59*) Die wörtliche Übersetzung dieser Stelle würde lauten: . . . wenn er die Entwicklung einer Quadratwurzel $\sqrt{D}$ aus einer ganzen Zahl ist"; es wurde sinngemäß korrigiert. (Eine reell-quadratische Irrationalität ist eine Irrationalzahl aus einem reell-quadratischen Zahlkörper.) Vgl. H. Hasses *Vorlesungen über Zahlentheorie*, J. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963, und [105].

(*59a*) Vgl. [107], Bd. 3 (1).

(*60*) Vgl. E. Landau, *Diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen*. Neu herausgegeben von A. Walfisz, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.

(*61*) Es gibt eine an Euler anknüpfende, methodisch interessante Arbeit Jacobis, die sich in heutiger Ausdrucksweise auf die Arithmetik der Kurven vom Geschlecht 1 (siehe 5.9.3.4.) bezieht, aber zu ihrer Zeit kaum beachtet wurde: C. G. J. Jacobi, *De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium abelianorum in analysi Diophantea*. J. reine u. angew. Math. *13* (1835), 353–355. Vgl. dazu [53][1]. Die Jacobische Methode wurde von E. E. Kummer in seiner Arbeit *Über die Vierecke, deren Seiten und Diagonalen rational sind* benutzt (J. reine u. angew. Math. *37* (1848), 1–20).

(*62*) Im Original steht hier und im nächsten Satz statt „Nullstelle" irrtümlich „Pol".

(*63*) Wie P. Roquette *In memoriam Helmut Hasse*, 1980 (deutschsprachig, gekürzt in J. reine u. angew. Math. *314* (1980), S. 1) mitteilt, sagte Davenport aus diesem Anlaß: "Well, Helmut, you *are* a mathematician."

(*64*) Der historisch erste Fall einer solchen Ungleichung, sogar einer Gleichung für die Lösungsanzahl, geht auf Gauß' letzte Tagebucheintragung (Nr. 146) vom 9.7.1814 zurück und besagt: Wenn $a + bi$ eine Gaußsche Primzahl (d. h. eine Primzahl im Ring $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$) ist, für welche $a - 1 + bi$ durch $2 + 2i$ teilbar ist, dann hat die

Kongruenz $1 \equiv x^2 + y^2 + x^2y^2 \pmod{a + bi}$ (hier ist $g = 1$) genau $(a - 1)^2 + b^2$ Lösungen (einschließlich der „unendlich fernen").

(65) A. Weil hatte die entscheidende Idee bereits 1940 geäußert: *Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini,* C.R. Acad. Sci. Paris *210* (1940), 592–594.

(66) Vgl. dazu die Übersichtsvorträge [146] und [147].

(67) Siehe [72].

5.14. Literatur

[1] Algebraic Number Theory, ed. J. Cassels and A. Fröhlich, Academic Press London-New York 1967.

[2] E. Artin, Collected papers, ed. S. Lang and J. Tate, Addison-Wesley, Reading 1965.

[3] R. Ayoub, Euler and the zeta function, Amer. Math. Monthly *81* (1974), 1067–1086.

[4] A. Baker, Transcendental Number Theory, Cambridge University Press, 1975.

[5] B. Birch, Forms in many variables, Proceed. Roy. Soc. A *265* (1961), 245–263.

[6] Z. I. Borewicz i I. R. Šafarevič, Teorija čisel (Russ.), Nauka, [1]Moskva 1964, [2]Moskva 1972. Deutsche Übersetzung von H. Koch: Zahlentheorie, Birkhäuser, Basel-Stuttgart 1966, mit einer Einführung von H. Hasse; englische Übersetzung: Number Theory, Academic Press, New York 1966.

[7] Séminaire Bourbaki, Exposé 299: Équations diophantiennes p-adiques, par G. Terjanian, 1965–1966.

[8] Séminaire Bourbaki, Exposé 383: Relations diophantiennes et la solution négative du 10e problème de Hilbert, par J. P. Azra, 1970–1971. In: Lecture Notes in Mathematics Nr. 244 (1971), 11–28, Springer-Verlag, Berlin-New York 1971.

[9] H. Davenport, Analytic Methods for Diophantine Equations and Diophantine Inequalities, Campus Publishers, Ann Arbor 1962.

[10] R. Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, 3 Bände, Vieweg, Braunschweig 1930–1932.

[11] L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, Publ. N⁰ 256 of the Carnegie Institution, Washington 1919, 1920, 1923, Nachdruck: Chelsea, New York 1974.

[12] J. Dieudonné, Cours de Géométrie algébrique, 2 vol., Coll. SUP, Presses univers. de France, Paris 1974.

[13] W. Ellison et P. Mendès-France, Les nombres premiers, Hermann, Paris 1975.

[14] C. F. Gauß, Werke, Göttingen-Leipzig-Berlin 1870–1933.

[15] H. Halberstam and H. Rickert, Sieve Methods, Academic Press, London-New York-San Francisco 1974.

[16] H. Halberstam and K. F. Roth, Sequences I, Clarendon Press, Oxford 1966.

[17] H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Thoorie der algebraischen Zahlkörper, I, Ia, II, Jahresber. DMV *36* (1926), 1–55; *36* (1927), 233–311; Ergänzungsband VI (1930), 1–204. 3. Aufl. Physica-Verlag, Würzburg-Wien 1970.

[18] H. Hasse, History of class field theory. In: [1], 266–271.

[19] T. Heath, Diophantus of Alexandria, Cambridge 1910; Nachdruck: Dover, New York 1964.

[20] D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, 3 Bde., Springer-Verlag Berlin 1932 bis 1935; Nachdruck: Chelsea, New York 1965.

[21] B. W. Jones, The Arithmetic Theory of Quadratic Forms, Carus Mathematical Monographs N⁰ 10, Wiley, New York 1950.

[22] J. Koksma, Diophantische Approximationen, Springer-Verlag, Berlin 1936; Nachdruck Chelsea, New York.

[23] J.-L. Lagrange, Oeuvres, 14 vol., Gauthier-Villars, Paris 1867—1892.

[24] E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, I, II, III, S. Hirzel, Leipzig 1927; Nachdruck: Chelsea, New York 1947.

[25] S. Lang, Algebraic Number Theory, Addison-Wesley, Reading 1970.

[26] S. Lang, Diophantine Geometry, Interscience, New York 1962.

[27] S. Lang, Introduction to Diophantine Approximation, Addison-Wesley, Reading 1966.

[28] S. Lang, Introduction to Transcendental Numbers, Addison-Wesley, Reading 1966.

[29] A. M. Legendre, Théorie des nombres, 3ᵉ édit., Paris 1830. Blanchard, Paris 1955.

[29][1] Deutsche Übersetzung von H. Maser: Zahlentheorie, 2 Bde., Teubner, [1]Leipzig 1886, [2]Leipzig 1893.

[30] C. G. Lekkerkerker; Geometry of Numbers, Bibl. math. vol. VIII, North Holland, Amsterdam 1969.

[31] W. J. Le Veque, Reviews in Number Theory 1940—1972, Amer. Math. Soc., Providence 1974.

[32] O. T. O'Meara, Introduction to Quadratic Forms, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1963.

[33] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Teubner, Leipzig 1910; Nachdruck: Chelsea, New York 1953.

[34] L. J. Mordell, Diophantine Equations, Academic Press, London-New York-San Francisco 1967.

[35] W. Narkiewicz, Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers, PWN, Warszawa 1974.

[36] F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Zeitschr. *33* (1931), 1—32.

[37] Th. Schneider, Einführung in die transzendenten Zahlen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957; franz. Übersetzung v. J. Eymard: Introduction aux nombres transcendants, Gauthier-Villars, Paris 1959.

[38] J.-P. Serre, Corps locaux, Hermann, Paris 1962.

[39] J.-P. Serre, Cours d'arithmétique, Coll. SUP, Presses univ. de France, Paris 1970.

[40] Th. Skolem, Diophantische Gleichungen, Springer, Berlin 1938; Nachdruck: Chelsea, New York 1950.

[41] H. J. S. Smith, Report on the theory of numbers, Part I—VI, British Assoc. Advancem. Sci. London 1859—1865 = Coll. Math. Papers I, Oxford 1894, 38—364; Wiederabdruck: Number Theory, Chelsea, New York 1965.

[42] H. Swinnerton-Dyer, An application of computing to class field theory. In: [1], 280—291.

[43] G. L. Watson, Integral Quadratic Forms, Cambridge Tracts in Mathematics N⁰ 51, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1960.

[44] H. Weber, Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Math. Annalen *48* (1897), 433—473; *49* (1897), 83—100; *50* (1898), 1—26.

[45] A. Weil, Number of solutions of equations in finite fields. Bull. Amer. Math. Soc. *55* (1949), 497—508.

[46] Number Theory Institute, Proceed. Sympos. in Pure Math., vol. XX, Amer. Math. Soc., Providence (Rh. Isl.) 1971.

[47] Mathematical developments arising from Hilbert Problems, Proceed. Sympos. in Pure Math., vol. XXVIII, Part 1 & 2. Providence (Rh. Isl.) 1976.

[G—H] = [48] H. Griffiths and P. Hilton: vgl. die Fußnote auf S. 1.

Ergänzende Literaturhinweise bei der deutschen Ausgabe

[49] Modular Functions of One Variable, I—VI, Lecture Notes in Mathematics N⁰ 320 (1973), 349 (1973), 350 (1973), 476 (1975), 601 (1977), 627 (1977); Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[50] P. Bachmann, Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehung zur Zahlentheorie, Teubner, Leipzig 1872.

[51] P. Bachmann, Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung, W. de Gruyter, Berlin-Leipzig 1919; Wiederabdruck: Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.

[52] I. G. Bašmakova: Obosnovanie teorii delimosti v trudach Zolotareva. (Russ.) Istor.-mat. issledov. II (1949), 233—351.

[53] I. G. Bašmakova, Diofant i diofantovy uravneniya (Russ.). Nauka, Moskva 1972.

[53][1] Deutsche Übersetzung von L. Boll: Diophant und Diophantische Gleichungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, und Birkhäuser-Verlag, Basel 1974.

[54] I. G. Bašmakova i A. N. Rudakov pri učastii A. N. Paršina i E. I. Slavutina, Algebra i algebraičeskaya teoriya čisel (Russ). In: [106], Glava vtoraya, 39—122.

[55] G. Bergmann: Über Eulers Beweis des großen Fermatschen Satzes für den Exponenten 3. Math. Annalen *164* (1966), 159—175.

[56] K.-R. Biermann: J. P. G. Lejeune Dirichlet. Dokumente für sein Leben und Wirken. Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. zu Berlin, Kl. f. Math., Phys. u. Techn. N⁰ 2, Berlin 1959.

[57] K.-R. Biermann, Vorschläge zur Wahl von Mathematikern in die Berliner Akademie. Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. zu Berlin, Kl. f. Math., Phys. u. Techn. Nr. 3, Berlin 1960.

[58] K.-R. Biermann, David Hilbert und die Berliner Akademie. Math. Nachr. *27* (1964), 377—384.

[59] K.-R. Biermann, Richard Dedekind im Urteil der Berliner Akademie. Forsch. u. Fortschr. *40* (1966), 301—302.

[60] K.-R. Biermann, Zur Geschichte mathematischer Einsendungen an die Berliner Akademie. Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin *9* (1967), 216—222.

[61] K.-R. Biermann, Zu Dirichlets geplantem Nachruf auf Gauß. NTM-Schriftenreihe, Leipzig *8* (1971) 1, 9—12.

[62] K.-R. Biermann, Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität 1810—1920. Akademie-Verlag, Berlin 1973.

[63] K.-R. Biermann, Aus unveröffentlichten Aufzeichnungen des jungen Gauß (zum 200. Geburtstag von C. F. Gauß). Wiss. Zeitschr. TH Ilmenau *23* (1977), Heft 4, 7—24.

[64] J. W. S. Cassels, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, J. London Math. Soc. *41* (1966), 193—291.

[65] J. W. S. Cassels, Rational Quadratic Forms. London Math. Soc. Monographs No. 13, Academic Press, London-New York-San Francisco 1978.

[66] A.-L. Cauchy, Oeuvres, (I) III (1911), IV (1884), V (1885); (II) VI (1887), IX (1891), Gauthier-Villars, Paris.

[67] A.-L. Cauchy, Mémoire sur la théorie des nombres [Datiert 31. 5. 1830. Zum Druck abgegeben 1838]. Mém. Acad. sci. (pour les années 1838—39), vol. 17 (1840), 249—768 = Oeuvres (I) III, Paris 1911, 5—450.

[68] J. W. Dauben (Hrsg.), Mathematical Perspectives, Historical Essays on Mathematics and Its Development (Biermann-Festschrift). Academic Press, London-New York-San Francisco 1981.

[69] R. Dedekind, Bunte Bemerkungen zu Kronecker's Abhandlung: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen (§§ 1—22). Eingeleitet und kommentiert von H. M. Edwards, O. Neumann und W. Purkert. Archive for Hist. of Ex. Sci. *27*(1982), 49—85.

[70] R. Dedekind, Brief (1887. 2.20) an H. Weber über eine Vervollständigung und Vereinfachung von Kronecker's Idealtheorie. (Prager Satz 1887.2.14—15; erschienen 1892). Erscheint als Anhang zu [69].

[71] B. N. Delaunay (i.e. Delone), Raboty Gaussa po teorii čisel. (Russ.) In: C. F. Gauß, Sbornik statej, Moskva 1956, 13—112.

[71 bis] B. N. Delaunay (i. e. Delone), Peterburgskaja škola teorii čisel (Russ.), Izd. akademii nauk SSSR, Moskva-Leningrad 1947. [Würdigung von P. L. Čebyšev, A. N. Korkin, E. I. Zolotarev, G. F. Voronoi, A. A. Markov, I. M. Vinogradov.]

[72] P. Deligne, La conjecture de Weil. I. Publ. math. IHES No. 43 (1974), 273—304.

[73] P. G. Lejeune Dirichlet, Werke, Bd. 1, ed. L. Kronecker, Berlin 1889; Bd. 2, ed. L. Fuchs, Berlin 1897.

[74] P. G. Lejeune Dirichlet, Briefwechsel mit J. Liouville, ed. P. Tannery. 1910.

[74 bis] G. I. Drinfel'd, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980 (Übersetzung aus dem Russischen).

[75] P. Dugac, Richard Dedekind et les fondements des mathématiques. J. Vrin, Paris 1976. [Mit zahlreichen erstveröffentlichten Briefen und anderen Dokumenten von, an und über Dedekind.]

[76] H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Academic Press, New York 1974.

[77] H. M. Edwards, The background of Kummer's proof of Fermat's Last Theorem for regular primes, Arch. Hist. Ex. Sci. *14* (1975), 219—236.

[78] H. M. Edwards, Postscript to "The background of Kummer's proof of Fermat's Last Theorem for regular primes", Arch. Hist. Ex. Sci. *17* (1977) 4, 381—394.

[79] H. M. Edwards, Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory. Graduate Texts in Mathematics 50. Springer-Verlag, Heidelberg-New York-Berlin 1977.

[80] H. M. Edwards, On the Kronecker Nachlass, Histor. math. *5* (1978), 419—426.

[81] H. M. Edwards, The Genesis of Ideal Theory, Arch. Hist. Ex. Sci. *23* (1980), 321—378.

[81 bis] H. M. Edwards, Kummer, Eisenstein, and higher reciprocity laws. In: N. Koblitz (Hrsg.), Number Theory Related to Fermat's Last Theorem. Progress in Mathematics, vol. 26, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1983, S. 31—43.

[Kommentar zu bisher unveröffentlichten Nachlaßstücken Dirichlets, die sich in der Westberliner Staatsbibliothek befinden, u. a. ein Brief Kummers an Dirichlet (1848), sowie zu den Beziehungen zwischen Kummer und Eisenstein.]

[82] G. Eisenstein, Mathematische Werke, ed. by A. Weil, Bd. I, II. Chelsea, New York 1975.

[83] L. Euler, Opera omnia, Series prima, vol. 1. Leipzig-Berlin-Zürich 1911.

[84] L. Euler und Chr. Goldbach, Briefwechsel 1729—1764, hrsg. u. eingeleitet v. A. P. Juškevič und E. Winter. Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. zu Berlin, Kl. f. Philos., Gesch., Staats-, Rechts- u. Wirtschaftswiss. Jg. 1965, Nr. 1, Akademie-Verlag, Berlin 1965.

[84 bis] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern. Invent. math. *73* (1983). 349—366. [Beweis der Mordellschen Vermutung.] — G. Faltings, Die Vermutungen von Tate und Mordell, Jahresber. DMV *86* (1984), 1—13. — G. Faltings, G. Wüstholz et al., Rational points, Sem. Bonn/Wuppertal 1839/84, Publ. Max-Planck-Inst. Bonn, Verlag Vieweg, Braunschweig 1984.

[84 ter] G. Frei, On the development of the genus of quadratic forms, Ann. Sc. Math. Québec *3* (1979), 5—62.

[85] Ph. Furtwängler — H. Hasse — W. Jehne, Allgemeine Theorie der algebraischen Zahlen. Enzykl. math. Wiss. Bd. I 2, Heft 8, Teil II (Art.-Nr. 19), Teubner, Leipzig 1953.

[86] C. F. Gauß, Untersuchungen über höhere Arithmetik, deutsch hrsg. v. H. Maser, Leipzig 1889; Wiederabdruck: Chelsea, Bronx, New York, 1965.

[87] C. F. Gauß, Tagebuch 1796—1814, Festschr. d. K. Ges. Wiss. zu Göttingen, Berlin 1901 = Math. Annalen *57* (1903), 1—13. Faksimile mit Erläuterungen: C. F. Gauß: Werke X/1, 483—574. Französische Übersetzung mit Anmerkungen von P. Eymard und J.-P. Lafon: Le journal mathématique de Gauß, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications *9* (1956), 21—51.

[88] C. F. Gauß, Mathematisches Tagebuch 1796—1814. Mit einer historischen Einführung von K.-R. Biermann. Ins Deutsche übertragen von E. Schuhmann. Durchgesehen und mit Anmerkungen versehen von H. Wußing. 3. Auflage, durchgesehen u. ergänzt v. O. Neumann. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 256. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1981.

[89] Ch. C. Gillispie (Ed.), Dictionary of Scientific Biography. Vol. I—XV. Ch. Scribner's Sons, New York 1970—1978.

[90] H. Hasse, Mathematische Abhandlungen. Hrsg. v. H. W. Leopoldt und P. Roquette. W. de Gruyter, Berlin-New York 1975. Band 1—3.

[91] H. Hasse, Kurt Hensels entscheidender Anstoß zur Entdeckung des Lokal-Global-Prinzips. J. reine u. angew. Math. *209* (1962), 3—4.

[92] H. Hasse, Kurt Hensel zum Gedächtnis. J. reine u. angew. Math. *187* (1950) 1—13.

[93] D. R. Heath-Brown and S. J. Patterson, The distribution of Kummer sums at prime arguments. J. reine u. angew. Math. *310* (1979), 111—130.

[94] E. Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1959.

[95] K. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen, Teubner, Leipzig 1908.

[96] H. Hermes, Die Unlösbarkeit des zehnten Hilbertschen Problems. L'Enseignement math. (2) *18* (1972), 47—56.

[97] Ch. Hermite, Oeuvres, I—IV. Publiées par E. Picard. Gauthiers-Villars, Paris 1905—1917.

[98] Problemy Hil'berta. Sbornik pod obščej redakciej P. S. Aleksandrova (Russ.), Nauka, Moskva 1969. Übersetzung der Kommentare ins Deutsche siehe in [99].

[99] Die Hilbertschen Probleme. Herausgegeben v. H. Wußing. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 252. Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1971.

[100] J. E. Hofmann, Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Eulers, ihre Zusammenhänge und Bedeutung. Arch. Hist. Ex. Sci. *1* (1961) 2, 122—159.

[101] L.-K. Hua, Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Enzykl. math. Wiss., Band I 2, Heft 13, Teil I (Art.-Nr. 29), Teubner, Leipzig 1959.

[102] A. Hurwitz, Mathematische Werke, 2 Bde., Birkhäuser, Basel 1932—33.

[103] C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke, 7 Bde. Hrsg. v. C. W. Borchardt u. K. Weierstraß. Reimer, Berlin 1881—1891.

[104] O.-H. Keller, Geometrie der Zahlen, Enzykl. math. Wiss. Band I 2, Heft 11, Teil III (Art.-Nr. 27), Teubner, Leipzig 1954.

[105] H. Koch und H. Pieper, Zahlentheorie, Ausgewählte Methoden und Ergebnisse, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.

[106] A. N. Kolmogorov i A. P. Yuškevič (Red.), Matematika XIX veka, Matematičeskaya logika, algebra, teoriya čisel, teoriya veroyatnostej. Nauka, Moskva 1978.

[107] L. Kronecker, Werke, 5 Bde., hrsg. v. K. Hensel, Teubner, Leipzig 1895—1931. Wiederabdruck: Chelsea, Bronx, New York, 1968.

[108] L. Kronecker, Vorlesungen über Zahlentheorie, Band 1, hrsg. v. K. Hensel, Teubner, [1]Leipzig 1901, [2]Leipzig 1913. Wiederabdruck: Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1978.

[109] E. E. Kummer, Collected Papers, ed. by A. Weil, Vol. I, II. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1975.

[110] E. E. Kummer, Über die complexen Primfactoren der Zahlen, und deren Anwendung in der Kreistheilung. Archiv Akad. Wiss. DDR [Datiert 20. 4. 1844. Aufgefunden von K.-R. Biermann [60], publiziert von H. M. Edwards [78], kommentiert von H. M. Edwards [78] und O. Neumann [126], [127].]

[111] S. Lang, Introduction to Modular Forms, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Nr. 222, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.

[112] S. Lang, Cyclotomic Fields, Graduate Texts in Mathematics No. 59, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1978.

[112 bis] H. Lebesgue, L'oeuvre mathématique de Vandermonde, L'Enseignem. Math. (2) *1* (1955), 203—223 = Notices Hist. Math., Inst. Math., Univ. Genève 1958.

[112 ter] Ju. V. Linnik, Izbrannye trudy, Teorija čisel, Izd. Nauka, Leningrad 1979.

[113] A. Loewy, Inwieweit kann Vandermonde als Vorgänger von Gauß bezüglich der algebraischen Auflösung der Kreisteilungsgleichungen $x^n = 1$ angesehen werden? Jahresber. DMV *27* (1918), 189—195.

[114] Yu. I. Manin, Desjataja problema Hil'berta (Russ.), Itogi nauki i techniki, Sovremmenyje problemy matematiki, Tom 1, VINITI, Moskva 1973, 5—37.

[114 bis] Ju. I. Manin, Kubičeskie formy: Algebra, geometrija, arifmetika, Izd. Nauka, Moskva 1972. [Engl. bei North-Holland Publ. Co. 1974.]

[115] Yu. V. Matijasevič, Diofantovo predstavlenie perečislimych predikatov, Izvest. Akad. Nauk SSSR, ser. mat., *35* (1971) 1, 3—30 (Russ.).

[116] I. G. Mel'nikov, Euler i ego arifmetičeskie raboty (Russ.), Istor.-mat. issledov. *10* (1957), 211—228.

[117] I. G. Mel'nikov i A. A. Kiselev, K voprosu o dokazatel'stve Eulerom teoremy suščestvovanija pervoobraznogo kornja (Russ.), Istor.-matem. issledov. *10* (1957), 229—256.

[118] I. G. Mel'nikov, Otkrytie Eulerom udobnych čisel (Russ.), Istor.-mat. issledov *13* (1960), 187—216.

[119] I. G. Mel'nikov, Voprosy teorii čisel v tvorčestve Ferma i Eulera, Istor.-mat. issledov. *19* (1974), 9—38.

[120] U. Merzbach, An Early Version of Gauss' "Disquisitiones arithmeticae", in [68].

[121] F. Minding, Anfangsgründe der höheren Arithmetik, Berlin 1832.

[122] H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, 2 Bde., Teubner, Leipzig-Berlin 1911.

[123] H. Minkowski, Briefe an David Hilbert. Mit Beiträgen und herausgegeben von L. Rüdenberg und H. Zassenhaus. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1973.

[124] O. Neumann, Über einige Tagebuchnotizen von C. F. Gauß (Zur Entstehung der Kreisteilungstheorie). In: Festakt und Tagung aus Anlaß des 200. Geburtstages von Carl Friedrich Gauß. Hrsg. v. H. Sachs. Abhandl. Akad. Wiss. DDR. Abt. Math., Naturwiss., Technik, Jg. 1978, Nr. 3 N. Akademie-Verlag, Berlin 1978, 141—150.

[125] O. Neumann, Bemerkungen aus heutiger Sicht über Gauß' Beiträge zu Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie. NTM-Schriftenreihe *16* (1979) 2, 22—39.

[126] O. Neumann, Zur Genesis der algebraischen Zahlentheorie. NTM-Schriftenreihe *17* (1980) 1, 32—48; 2, 38—58.

[127] O. Neumann, Über die Anstöße zu Kummers Schöpfung der „idealen complexen Zahlen". In: [68], 179—199.

[128] O. Neumann, Two Proofs of the Kronecker-Weber Theorem "According to Kronecker, and Weber". J. reine u. angew. Math. *323* (1981), 105—126.

[129] E. P. Ožigova, Razvitie teorii čisel v Rossii (Russ.), Nauka, Leningrad 1972.

[130] E. P. Ožigova pri učastii A. P. Juškeviča, Problemy teorii čisel, In: [106], Glava tret'ja, 123—183.

[131] H. Pieper, Variationen über ein zahlentheoretisches Thema von Carl Friedrich Gauß. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, und Birkhäuser Verlag, Basel 1978.

[132] S. Ramanujan, Collected Papers, ed. by G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar and B. M. Wilson. 1927.

[133] H. Reichardt (Hrsg.), C. F. Gauß, Gedenkband anläßlich des 100. Todestages am 23. 2. 1955, Teubner, Leipzig 1957.

[134] H. Reichardt, Über Dirichlets zahlentheoretische Arbeiten. In: Bericht v. d. Dirichlet-Tagung. Schriftenreihe der Institute f. Math. bei d. Dtsch. Akad. Wiss. zu Berlin. Heft 13. Akademie-Verlag, Berlin 1963, 13—21.

[135] C. Reid, Hilbert. With an appreciation of Hilbert's mathematical work by Hermann Weyl. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[136] P. Ribenboim, 13 Lectures on Fermat's Last Theorem. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1979.

[137] G. J. Rieger, Die Zahlentheorie bei C. F. Gauß. In: [133], 37—77.

[138] P. Roquette: In memoriam Helmut Hasse. 1980.

[139] W. Scharlau und H. Opolka, Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1980.

[139a] W. Scharlau, A historical introduction to the theory of integral quadratic forms. Herrn C. L. Siegel zum 80. Geburtstag. Preprint Univ. Müster 1976.

[139b] W. Scharlau, Über die Beziehungen zwischen der Dedekindschen Zahlentheorie und der Theorie der algebraischen Funktionen von Dedekind und Weber, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. *33* (1982), 225—246.

[139 bis] C.-O. Selenius, Rationale of the chakravāla process of Jayadeva and Bhāskara II. Hist. math. *2* (1975), 167—184.

[140] C. L. Siegel, Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astron. u. Physik *2* (1932), 45—80 = [141] I, 275—310.

[141] C. L. Siegel, Gesammelte Abhandlungen, hrsg. von K. Chandrasekharan und H. Maass, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, Bd. I, II, III: 1966; Bd. IV, with corrections to the first three volumes, 1979.

[142] W. Sierpiński, Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa 1964.

[143] H. J. S. Smith, Collected Mathematical Papers I, II, Oxford 1894.

[144] D. J. Struik, A Concise History of Mathematics, Dover Publications, Inc., Dover 1948.

[144][1] Deutsche Übersetzung von H. Karl: Abriß der Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, [1]Berlin 1960, [6]Mit Ergänzungen und einem Anhang über die Mathematik des 20. Jahrhunderts von I. Pogrebysski, Berlin 1976 (Übersetzung der russischen Teile von W. Purkert).

[144 bis] B. A. Venkov, Izbrannye trudy, Iccledovanija po teorii čisel, Izd. Nauka, Leningrad 1981.

[144 ter] S. G. Vleduts, K istorii kompleksnogo umnoženija. Gauss, Eisenstein i Kronecker, Istor.-matem. issledov. *27* (1983), 190—238.

[144a] B. L. van der Waerden, Uravnenie Pellja v matematike grekov i indijcev, Uspechi matem. nauk *31*:5 (1976), 57—70.

[145] A. Weil, L'avenir des mathématiques. In: Les grands courants de la pensée mathématique, Paris 1962.

[146] A. Weil, Number theory and algebraic geometry. Proceed. Intern. Congr. Math. Cambridge (Mass.) 1950, Vol. II, 90—100.

[147] A. Weil, Abstract versus classical algebraic geometry, Proceed. Intern. Congr. Math. Amsterdam 1954, Vol. 3, 550—558.

[148] A. Weil, La cyclotomie jadis et naguère, Sém. Bourbaki, 26e année, 1973/74, exp. 452, Paris 1974 = L'Enseignement math. (2) *20* (1974), 247—263.

[149] A. Weil, Two lectures on number theory, past and present. L'Enseignem. math. (2) *20* (1974), 87—110.

[150] A. Weil, Sur les sommes de trois et quatre carrés. L'Enseignem. math. (2) *20* (1974), 215—222.

[151] A. Weil, Oeuvres scientifiques. Collected Papers. I (1926—1951), II (1951—1964), III (1964—1978); Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin 1979.

[151 bis] A. Weil, Number Theory, An Approach through History, From Hammurapi to Legendre, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1983.

[152] H. Weyl, David Hilbert and His Mathematical Work, Bull. Amer. Math. Soc. *50* (1944), 612—654 = Bol. Soc. Mat. Sao Paolo *1* (1946), 76—104; *2* (1947), 37—60. Wiederabdruck als Anhang zu [135].

[153] A. P. Juškevič (Red.), Istorija matematiki, Tom tretiĭ, Matematika XVIII stoletija. Nauka, Moskva 1972.

[154] H. G. Zimmer, Computational Problems, Methods, and Results in Algebraic Number Theory, Lecture Notes in Mathematics vol. 262, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[155] E. I. Zolotarev, Sur la théorie des nombres complexes. J. math. pures appl. (3) *6* (1880), 51—84, 129—166.

6. Grundlagen der Analysis

von Pierre Dugac

6.0. Einführung

Der Leitgedanke, der diesem Kapitel zugrunde liegt, besteht darin, die Entwicklung einiger wesentlicher Begriffe der Analysis im neunzehnten Jahrhundert in ihren hervorstechendsten Zügen zu zeigen, indem auf einige der wichtigsten Abhandlungen und Bücher dieser Epoche näher eingegangen wird.

Für eine umfassendere Sicht möge der Leser die Kapitel über Analysis in *Elemente der Mathematikgeschichte* von Nicolas Bourbaki [14][1] heranziehen. Für mathematische Ergänzungen sei auf den *Cours de mathématiques du premier cycle* von Jacques Dixmier ([46] und [47]) verwiesen.

6.1. Bemühungen um Strenge zu Anfang des neunzehnten Jahrhunderts; die Klärung der Begriffe Konvergenz und Stetigkeit

Der umfassendste Versuch vor Beginn des neunzehnten Jahrhunderts, der Mathematik strenge Grundlagen zu geben, wurde von Lagrange[1]) in seinem 1797 erschienenen Buch *Théorie des Fonctions analytiques* unternommen. (Über die Strenge im achtzehnten Jahrhundert siehe 1.2.). Lagrange selbst sagte (nach R. Taton) in einer Vorlesung von 1798, die an der Ecole polytechnique ([76], 17. Vorlesung) gehalten, aber anderweitig nicht veröffentlicht wurde, daß sein Buch zwei Hauptziele habe: Das erste bestehe darin, „die Differentialrechnung von den metaphysischen Betrachtungen unendlich kleiner oder verschwindender Größen zu befreien“, das zweite, „den Calculus (die Differentialrechnung) auf der Algebra in einer Art und Weise aufzubauen, daß dazu nur eine einzige Methode

[1]) Lagrange scheint auch der erste gewesen zu sein, der systematisch Ungleichungen benutzte (siehe 7.1.1.).

benötigt werde". (Die [deutsche] Ausgabe seines Buches von 1813 trägt den Untertitel: Enthaltend die Hauptsätze der Differential-Rechnung, ohne die Vorstellung vom Unendlich-Kleinen, von verschwindenden Größen, von Grenzen und Fluxionen, ganz nach der Art der algebraischen Analysis endlicher Größen vorgetragen. Übersetzt von Dr. L. A. Crelle, G. Reimer, Berlin 1823. — *Anm d. Übers.*)

Diese Konzeption der Analysis, die auf der Entwicklung der Funktionen in Taylorreihen basiert, konnte augenscheinlich den Begriff des Grenzwertes nicht entbehren. Im übrigen wird diese „Algebraisierung" der Analysis[1]) zum Teil in den Arbeiten von Weierstraß und Méray verwirklicht. Worauf jedoch hingewiesen werden sollte, ist ein gewisser Pessimismus, der uns in dieser Lagrangeschen Einführung in seine Theorie entgegentritt; er kommt nämlich zu dem Schluß, es „bleiben wenig Mittel, um mit der Analysis in dem Zustand, in dem sie sich gegenwärtig befindet, große Fortschritte zu machen". Im folgenden werden wir sehen, in welcher Weise eine neue Generation von schöpferischen Mathematikern den Pessimismus des 62jährigen Lagrange widerlegen wird.

6.1.1. Carl Friedrich Gauß

Wie zur Bestätigung dessen, was Lagrange gesagt hatte, schreibt J. Dieudonné ([41], S. 6): „Als Gauß 1797 zu schreiben beginnt, kann man sagen, daß die Mathematiker in einer tiefen Sackgasse sind und gerade eine Periode der Stagnation durchgemacht haben."

Gauß gab auch der Analysis einen neuen Impuls, obwohl sich seine erste unveröffentlichte Arbeit von 1797 auf die Euler so teure divergente Reihe (siehe 1.2.)

$$0! - 1! + \cdots + (-1)^n n! + \cdots$$

bezieht, deren „Summe" er berechnen will ([60], S. 382).

Eine andere unveröffentlichte Arbeit, die um die Wende vom achtzehnten zum neunzehnten Jahrhundert entstanden sein dürfte, zeigt, daß er sich schon für die Grundlagen der Analysis interessierte, worauf im übrigen ihr Titel hinweist: *Grundbegriffe der Lehre von den Reihen.* Gauß begann ([60], S. 390) mit einer sehr allgemeinen Definition einer Reihe: „Der Inbegriff einer jeden Anzahl beliebiger Größen kann im weiteren Sinne des Wortes eine Reihe genannt werden," was übrigens anscheinend darauf hindeutet, daß für ihn jede Menge abzählbar zu sein schien. Gauß hielt diese Ausdehnung des Begriffs einer Reihe für wenig nützlich und definierte eine Folge auch als „den Inbegriff der Werthe einer Function Einer veränderlichen Größe", d. h., er gab die moderne Definition: Eine Folge ist eine Abbildung von $\boldsymbol{N}$ in $\boldsymbol{R}$. Nachdem er eine Majorante λ einer beschränkten Folge ([60], S. 391) definiert und die Existenz einer Zahl a festgestellt hatte, die kleiner als λ und keine Majorante der Folge ist, behauptete Gauß: „Läßt man demnach λ durch alle Zwischengrößen *stetig* abnehmen, so muß man notwendig auf eine kleinste obere Grenze L' kommen." (Allem Anschein nach hatte sich Gauß nicht das Problem gestellt, die Menge $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen zu konstruieren.) Alsdann

[1]) Siehe 6.6.

formulierte er ([60], S. 392) die charakteristische Eigenschaft der oberen Grenze ([46], 1.14.9.) und definierte die untere Grenze. Das interessanteste in dieser unveröffentlichten Arbeit sind aber die Definitionen ([60], S. 394) des limes superior („letzte obere Grenze") und des limes inferior („letzte untere Grenze") einer Folge. Die Gaußsche Definition des oberen Limes entspricht der Formel

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ a_n = \lim_{n\to+\infty}\ (\sup_{p\geqq n} a_p)\,.$$

Gilt für eine Folge

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ a_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}}\ a_n\,,$$

so wird dieser gemeinsame Wert der Grenzwert (bei Gauß: die absolute Grenze) der Folge genannt ([60], S. 394). Es gilt der Satz: Haben zwei Folgen (a_n) und (b_n) die Grenzwerte A bzw. B, so besitzt die Folge $(a_n + b_n)$ den Grenzwert $A + B$.

Am 27. April 1800 notierte Gauß in seinem mathematischen Tagebuch, er habe gerade bewiesen, daß die Reihe mit dem allgemeinen Glied $a_n \cos(b + nx)$ *gegen einen Grenzwert konvergiere*, wenn die Folge a_n für gegen ∞ strebendes n monoton fallend gegen null strebt ([56], S. 41; vgl. auch [56][1], S. 54 bzw. 75). Wie zahlreiche andere Ergebnisse veröffentlichte Gauß auch dieses nicht, getreu seiner Devise, die er in einem französisch geschriebenen Brief vom 30. Januar 1812 an Laplace zum Ausdruck brachte ([60], S. 374): „Ich habe in meinen Papieren viele Sachen, an denen ich vielleicht die Priorität der Veröffentlichung verlieren werde. Sei es drum. Ich lasse die Dinge lieber reifen."

Im Jahre 1813 veröffentlichte Gauß eine große Arbeit [58] über die hypergeometrische Reihe (siehe 1.4.3.)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\,\frac{x^n}{n!}\,,$$

das erste Beispiel einer strengen Untersuchung der Konvergenz einer Reihe, und zwar sowohl für reelle als auch für komplexe Werte der Variablen x. In seiner Selbstanzeige dieser Abhandlung, die 1812 erschien, lenkte Gauß ([57], S. 200) die Aufmerksamkeit des Lesers auf die Tatsache, daß die Konvergenz der Reihe für $x = 1$ und $\gamma - \alpha - \beta > 0$ mit *geometrischer Schärfe* bewiesen worden ist. Gauß bildete zunächst das Verhältnis der Koeffizienten von x^m und x^{m+1} ([58], S. 126):

$$\frac{1 + \dfrac{\gamma+1}{m} + \dfrac{\gamma}{m^2}}{1 + \dfrac{\alpha+\beta}{m} + \dfrac{\alpha\beta}{m^2}}\,.$$

Er setzte das d'Alembertsche (Konvergenz-)Kriterium ([47]; 39.4.7.) als bekannt voraus. Daraus schloß er, daß die Reihe für $|x| < 1$ konvergent ist. Für $|x| > 1$ ist sie divergent, *daher kann man nicht von ihrer Summe sprechen.* Da nämlich „unsere Funktion als die Summe der Reihe definiert ist, muß die Untersuchung ihrer Natur

auf die Fälle beschränkt werden, in denen sie tatsächlich konvergiert", und es ist eine *unvernünftige Frage* (*quaestionem ineptam*, Gauß schrieb lateinisch), welchen Wert sie für $|x| > 1$ hat. (In einem Brief an Bessel vom 5. Mai 1812 wendete sich Gauß ([61], S. 173) gegen die Benutzung divergenter Reihen; er schrieb; sobald eine Reihe „aufhört, convergent zu sein, hat ihre Summe als Summe keinen Sinn".)

Gauß differenzierte dann für $|x| < 1$ die betrachtete Reihe gliedweise nach x und schloß, es sei *evident*, daß die so entstandene Reihe mit der Ableitung der Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ nach x übereinstimmt. Dies gilt entsprechend für die Ableitungen jeder Ordnung von F.

Für $x = 1$ untersuchte Gauß das Konvergenzverhalten der Reihe sehr sorgfältig. Das allgemeine Glied der Reihe hat stets dasselbe Vorzeichen, sobald $n \geqq n_0(\alpha, \beta, \gamma)$ gilt; Gauß wollte zeigen, daß es genau dann gegen null strebt, wenn $\alpha + \beta - \gamma - 1 < 0$ ist, und daß die Reihe genau dann konvergiert, wenn $\alpha + \beta - \gamma < 0$ ist. Zu diesem Zweck untersuchte er ([61], S. 139) die Reihe, bei der sich das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Glieder auf die Gestalt

$$\frac{m^\lambda + am^{\lambda-1} + bm^{\lambda-2} + cm^{\lambda-3} + \cdots + n}{m^\lambda + Am^{\lambda-1} + Bm^{\lambda-2} + Cm^{\lambda-3} + \cdots + N}$$

bringen läßt (im Fall der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist $\lambda = 2$, $A = \alpha + \beta$, $B = \alpha\beta$, $a = \gamma + 1$, $b = \gamma$). Nach einer sehr genauen Analyse kam Gauß zu dem Schluß ([61], S. 141), diese Reihe konvergiere genau dann, wenn $A - a + 1 < 0$ ist.

Diese Untersuchung der Konvergenz bzw. Divergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ hat die Aera der Strenge in der Analysis eröffnet.

6.1.2. Bernard Bolzano

Unter den Mathematikern zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts war es wahrscheinlich Bolzano, der die tiefsten Fragen in bezug auf die Grundlagen der Analysis stellte.

Seinen Zeitgenossen wenig bekannt — Bolzano starb 1848 — wurde er um 1870 von H. Hankel ([64], S. 209—210) wiederentdeckt, der auf die Bedeutung des Bolzanoschen Buches *Der binomische Lehrsatz* hinwies, das 1816 [6] in Prag veröffentlicht worden war. Darin sieht Bolzano ([6], S. III) den binomischen Satz *als eines der wichtigsten Theoreme der ganzen Analysis* an. Dieser Satz war von sehr vielen Mathematikern bewiesen worden, von denen Bolzano u. a. Euler und Lagrange zitierte ([6], S. IV). Er fand jedoch alle diese Beweise unbefriedigend und kritisierte mit besonderer Schärfe den Gebrauch, den sie von unendlichen Reihen machen. (Anscheinend kannte Bolzano die Gaußsche Abhandlung über die hypergeometrische Reihe nicht, deren Strenge und Klarheit der Begriffe und Beweise diese Bolzanosche Arbeit übertrifft). Er machte deutlich ([6], S. VI), daß der binomische Satz, wenn n keine positive ganze Zahl ist, zum Ausdruck bringt, daß „der zwischen beyden Gliedern bestehende Unterschied, d. i.

$$(1 + x)^n - 1 - nx - n\frac{n-1}{2}x^2 - \cdots - n\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-r+1}{r}x^r$$

kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden kann, wenn man die Menge der Glieder in der Reihe genug nimmt" und daß dies nur für $|x| < 1$ sinnvoll ist (Bolzano nimmt x als reell an). Man findet hier in einem Spezialfall eine korrekte Definition der Konvergenz einer Reihe. In einer sehr langen Folge von Beweisen untersuchte Bolzano nacheinander die Fälle $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Q}$ und $n \in \boldsymbol{R}$ und wies in der Schlußanmerkung ([6], S. 143—144) darauf hin, er habe den Fall mit Stillschweigen übergangen, daß x und n imaginär geworden sind. Auch dem Problem, wie eine negative Größe in eine Potenz mit irrationalem Exponenten erhoben werden sollte, hat er sich nicht zugewandt. Das liege daran, sagte Bolzano, daß die Begriffe der komplexen und der irrationalen Zahl noch nicht sicher begründet seien; er kündigte an, bei anderer Gelegenheit darauf zurückzukommen. Trotz allen Interesses, das diese Studie verdient, können wir Hankel ([64], S. 210) nicht zustimmen, der Bolzano für diese Arbeit über die binomische Reihe *auf eine Stufe mit Cauchy* stellte; denn wie wir in 6.1.3. sehen werden, sind Breite und Allgemeinheit der Cauchyschen Begriffsbildungen von einer ganz anderen Tragweite.

In seiner Abhandlung über den Zwischenwertsatz, der aussagt, daß jede auf einem Intervall $[a, b]$ stetige reellwertige Funktion f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt ([46], 14.9.9.), hatte Bolzano, soweit es um veröffentlichte Arbeiten geht, das beste gegeben, was er als Analytiker [7] leisten konnte. Obwohl diese Arbeit bei den Mathematikern vor der Wiederentdeckung Bolzanos keine Beachtung gefunden hatte, stellt sie den ersten entscheidenden Schritt zu dem dar, was später die Arithmetisierung der Analysis genannt werden sollte (siehe 6.6.). Bolzano erwähnte die Beweise seiner mathematischen Vorläufer, die im allgemeinen Methoden benutzten, die der Geometrie entlehnt waren. „Gegen die Richtigkeit sowohl, als auch gegen die Evidenz dieses geometrischen Satzes ist gar nichts einzuwenden. Aber eben so offenbar ist auch, daß es ein nicht zu duldender Verstoß gegen die gute Methode sei, Wahrheiten der reinen (oder allgemeinen) Mathematik (d. h. der Arithmetik, Algebra oder Analysis) aus Betrachtungen herleiten zu wollen, welche in einen bloß angewandten (oder speciellen) Teil derselben, namentlich in die Geometrie gehören" ([7], S. 4—5).

Vor dem Beweis des Hauptsatzes gab Bolzano mehrere Definitionen und bewies einige Hilfssätze. So formulierte er die erste Definition einer stetigen Funktion ([7], S. 8). Zu sagen, eine reellwertige Funktion f der reellen Variablen x sei für alle Werte von x, die einem gegebenen Intervall angehören, stetig, bedeutet „nur so viel, daß wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x + \omega) - f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann". Als Bolzano sich mit der Theorie der Reihen beschäftigte ([7], S. 18), faßte er die konvergenten Reihen als eine Unterklasse derjenigen Klasse von Reihen auf, bei denen jede Partialsumme beschränkt ist. Was die Definition einer konvergenten Reihe betrifft, so wählte er diejenige, die er schon für die binomische Reihe angegeben hatte ([7], S. 18). Was aber bemerkenswert ist, ist die Tatsache, daß Bolzano bei der Betrachtung einer konvergenten Funktionenreihe mit dem allgemeinen Glied $u_n(x)$ und der Folge $(F_n(x))$ mit dem allgemeinen

Glied
$$F_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$$
behauptete, daß $|F_{n+r}(x) - F_n(x)|$ für jedes $r \in \boldsymbol{N}$ „kleiner als jede gegebene Größe bleibt, wenn man erst n groß genug angenommen hat". Das ist die erste Formulierung der notwendigen Bedingung des „Cauchyschen Konvergenz-Kriteriums". Bolzano „bewies" anschließend ([7], S. 21) die Umkehrung (d. h., daß dieses Kriterium eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz ist ([47], 39.3)): Wenn die obige Bedingung erfüllt ist, „gibt es jedesmahl eine gewisse beständige Größe, und zwar nur eine", gegen welche die Partialsummen $F_n(x)$ konvergieren, wenn n gegen unendlich strebt. Sein „Beweis" beruht auf der einfachen Behauptung, die Existenz des Grenzwertes *enthalte nichts Unmögliches*, da es „bey dieser Voraussetzung möglich wird, diese Größe so genau, als man nur immer will, zu bestimmen". Der Zirkelschluß war unvermeidlich, solange die Mathematiker nicht zur Kenntnis nahmen, daß man vor der Definition des Grenzwertes die Objekte definieren mußte, auf die diese Definition anwendbar war, nämlich die Menge $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen.

Man kann in dieser Abhandlung von Bolzano einen anderen Satz finden ([7], S. 25), der auf dem oben genannten beruht und aussagt, daß jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen eine obere Grenze besitzt ([46], 14.2.3.).

Diese kurze Übersicht über die Abhandlung Bolzanos aus dem Jahre 1817 zeigt nicht nur ihren Inhaltsreichtum, sondern auch, welche Ausnahmestellung sie in der mathematischen Literatur dieser Epoche einnimmt.

6.1.3. *Augustin-Louis Cauchy*

Emile Borel, der an der Herausgabe von Cauchys Werken unter der Schirmherrschaft der Akademie der Wissenschaften mitgewirkt hat, schrieb ([12], S. 199), es sei Hermite gewesen, der ihn gelehrt habe, sich mit Cauchy vertraut zu machen und ihn zu bewundern, und daß diese Bewunderung in dem Maße gewachsen sei, je besser er ihn, der wahrhaftig der Schöpfer der modernen Analysis gewesen sei, kennengelernt habe.

Es war der 1821 erschienene *Cours d'Analyse* von Cauchy [26], mit dem der Weg in die moderne Analysis begann[1]), und zwar ebenso sehr wegen der Strenge als wegen der Klarheit und der Eleganz des mathematischen Stils seines Autors. In seiner Einleitung ([26][1], S. V) schrieb Cauchy: „Was die Methoden anbetrifft, so bin ich bemüht gewesen, dieselben mit derjenigen Strenge zu geben, welche man in der Geometrie fordert, wo man keineswegs alle aus der algebraischen Allgemeingiltigkeit entspringenden Beziehungen beachtet." Cauchy kritisierte hier implizit die Methoden von Lagrange, denn er präzisierte, daß diese der Allgemeingültigkeit der Algebra entstammenden Argumente „dazu führen, den algebraischen Formeln

[1]) Der erste Teil erschien in deutscher Sprache unter dem Titel *Algebraische Analysis* [26][1]. Die hier angegebenen Seitenzahlen beziehen sich darauf. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

eine beliebige Ausdehnung zu geben, während in Wirklichkeit die meisten Formeln nur unter gewissen Bedingungen und nur für gewisse Werte der in ihnen enthaltenen Zahlgrössen Gültigkeit behalten. Indem ich diese Bedingungen und diese Werte aufsuche und in ganz bestimmter Weise die Bedeutung der Bezeichnungen, deren ich mich bediene, festsetze, schwindet jede Ungenauigkeit". Cauchy war sich bewußt ([26][1], S. VI), daß er, um diesen Prinzipien treu zu bleiben, gezwungen war, einige Annahmen *zu machen*, welche vielleicht auf den ersten Blick *etwas gewagt scheinen mögen*, etwa diese: Eine divergente Reihe hat keine Summe. Aber, sagte Cauchy ([26][1], S. VI), und damit war er es, der die Grundlagen der Analysis umzukrempeln begann, daß „Annahmen dieser Art, da sie die glückliche Möglichkeit gewähren, den Lehrsätzen grössere Strenge zu geben und nützliche Beschränkungen für zu ausgedehnte Behauptungen herbeizuführen, der Analysis zum Vorteil gereichen und zu Untersuchungen führen, welche von Wichtigkeit sein dürften. So habe ich es für nötig gehalten zu erforschen, in welchen Fällen die Reihen summirbar sind, oder mit anderen Worten, welches ihre Convergenzbedingungen sind".

In dieser Weise brachte Cauchy in diesem Buch, das für den Unterricht gedacht war (und wir werden sehen, daß die den Mathematikern auferlegte Pflicht, zu unterrichten, eine der Quellen zur Erneuerung der Grundlagen war), klar das Ziel zum Ausdruck, das zu erreichen er sich vornahm. Er begann ([26][1], S. 1) mit der *Einleitung*: „Um beim Gebrauch der Sprache und der Schriftzeichen . . . jeglicher Verwirrung vorzubeugen . . .". Zunächst gab er die Definition einer Folge (*veränderlichen Zahlgrösse*) und der *Grenze* einer Folge; besonders bemerkenswert aber ist seine präzise und strenge Definition einer unendlich kleinen Zahlgröße; eine derartige Veränderliche *hat die Grenze Null* ([26][1], S. 3). Ebenso formulierte er die ersten präzisen Definitionen von $+\infty$ und $-\infty$, so wie wir sie heute kennen ([46], 14.4.1.). Besonders interessant ist die Bezeichnung, die Cauchy für die „Häufungspunkte" einer Folge benutzte ([46], E. XXI.8), welche er nicht genau definierte. Er sagte nur, es könne vorkommen, daß dann, wenn eine Folge (a_n) gegen *einen bestimmten Grenzwert* strebe, die Folge $(f(a_n))$ gegen *mehrere von einander verschiedene* Grenzwerte konvergiere. Dies wolle er durch die Bezeichnung lim (( )) andeuten; so habe beispielsweise für $x \to 0$ zwar $\lim (\sin x)$ den Wert 0, aber der Ausdruck $\lim ((1/x))$ die beiden Werte $\pm\infty$ und $\lim ((\sin 1/x))$ gar unendlich viele zwischen -1 und $+1$ gelegene Werte.

In § 1 ([26][1], S. 13), *Allgemeine Betrachtungen über die Funktionen*, des ersten Kapitels, *Reelle Funktionen*, gab Cauchy eine allgemeine Definition einer Funktion; besonders interessant dabei ist seine Charakterisierung ([26][1], S. 14): „Damit eine Funktion einer einzigen Veränderlichen vollständig bestimmt sei, ist notwendig und hinreichend, daß man aus jedem einzelnen der Veränderlichen beigelegten Werte den entsprechenden Wert der Funktion herstellen kann."

Der § 2, *Stetigkeit der Funktionen*, des Kapitels II enthält die Definition der Stetigkeit einer Funktion, die der Bolzanoschen nahekommt. Immerhin treten darin die absoluten Beträge der Funktionswerte und der Variablen auf. Die Funktion f ist im Punkt x stetig, wenn der absolute Betrag (*der numerische Wert*) der Differenz $f(x + \alpha) - f(x)$ „mit α zugleich so abnimmt, dass er kleiner wird als jede endliche Zahl" ([26][1], S. 23).

Es ist jedoch das Kapitel VI, *Convergente und divergente Reihen. Regeln über die Convergenz der Reihen. Summation einiger convergenter Reihen,* das zu den wichtigsten dieses *Cours d'analyse* gehört. Cauchy gab in § 1, *Allgemeine Betrachtungen über die Reihen,* die Definition einer Reihe: Man nennt „Reihe" „eine unbegrenzte Folge von Zahlgrössen

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots,$$

welche nach einem bestimmten Gesetze aus einander entstehen". Nachdem Cauchy die Summe der ersten n Glieder $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ eingeführt hatte, schrieb er ([26][1], S. 85): „Wenn alsdann für stets zunehmende Werte von n die Summe s_n sich einer gewissen Grenze s beliebig nähert, so werden wir die Reihe convergent nennen, und die in Rede stehende Grenze heißt die Summe der Reihe. Nähert sich dagegen, wenn n ohne Ende zunimmt, die Summe s_n keiner gegebenen Grenze, so wird die Reihe divergent genannt, und sie wird nicht mehr eine Summe haben. Sowohl in diesem wie in jenem Falle wird das Glied, welches mit dem Index n behaftet ist, d. h. u_n, das allgemeine Glied genannt. Die Darstellung dieses allgemeinen Gliedes als Funktion des Index n reicht zur vollständigen Bestimmung der Reihe hin."

(Es sei darauf hingewiesen, daß N. Bourbaki ([13], TG III.42) eine Reihe mit dem allgemeinen Glied u_n als *das Paar* der Folgen (u_n) und (s_n) definiert.) Anschließend führte Cauchy das notwendige und hinreichende Cauchysche Kriterium[1]) auf so natürliche Art ein, daß es nicht erstaunlich ist, daß es ihm evident erschien. Und als Anwendung bewies er ([26][1], S. 87), daß die Reihe mit dem allgemeinen Glied $1/n$, die dem Kriterium nicht genügt, divergiert.

In § 2, *Reihen, deren sämmtliche Glieder positiv sind,* findet man ([26][1], S. 91) das „Cauchysche Wurzelkriterium" (*die Grenze der größten Werte*): Ist $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = k < 1$, so ist die Reihe konvergent; für $k > 1$ ist sie divergent. Cauchy gab auch das d'Alembertsche Kriterium an ([26][1], S. 92), und zwar in der Gestalt $\lim\limits_{n\to\infty} (u_{n+1}/u_n) = k$ ([47], 39.4.7.). Für den Fall $k = 1$ bewies Cauchy den folgenden Satz: Strebt u_n für $n \to +\infty$ monoton fallend gegen null, so zeigen die Reihen mit den allgemeinen Gliedern u_n bzw. $2^n u_{2^n}$ dasselbe Konvergenzverhalten ([26][1], S. 93). Als Korollar erhielt er das Konvergenzkriterium für die Reihe mit dem allgemeinen Glied $1/n^s$ (sie konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leqq 1$). Aus diesem Satz kann man auch das Kriterium für die Konvergenz der Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$\frac{1}{n \cdot \log n \cdot \log_2 n \cdots \log_{k-1} n \, (\log_k n)^s}$$

mit

$$\log_p n = \log(\log_{p-1} n) \quad \text{und} \quad \log_1 n = \log n$$

herleiten (worauf übrigens Cauchy später selbst hingewiesen hat ([33], 393)). Schließlich bewies Cauchy ([26][1], S. 96) für die Reihen mit positiven Gliedern den

---

[1]) In unserer Terminologie lautet es ([47]; 39.3): Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein N derart, daß für $n \geqq m \geqq N$ die Ungleichung $|u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n| \leqq \varepsilon$ erfüllt ist.

Satz: Wenn die Reihe mit dem allgemeinen Glied u_n (bzw. v_n) konvergiert und als Summe U (bzw. V) hat, so ist die Reihe mit dem allgemeinen Glied $u_n + v_n$ konvergent und hat die Summe $U + V$. Ebenso ist die „Produkt"reihe mit dem allgemeinen Glied

$$u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0$$

konvergent ([26][1], S. 97).

In § 3, *Von den Reihen, welche sowohl positive als auch negative Glieder enthalten*[1]), führte Cauchy den Begriff ein, den man heute als absolute Konvergenz bezeichnet. Er wies darauf hin ([26][1], S. 98), daß die absolute Konvergenz *stets* die Konvergenz (schlechthin) der Reihe nach *sich zieht*. Der Satz über die alternierenden Reihen ([47], 39.6.2.) bot Cauchy die Gelegenheit, das Beispiel der Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \qquad 0 < s \leqq 1,$$

anzuführen ([26][1], S. 100), die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Cauchy zeigte im Anschluß daran folgendes: Konvergiert die Reihe mit dem allgemeinen Glied u_n (bzw. v_n) und ist ihre Summe U (bzw. V), so konvergiert die Reihe mit dem allgemeinen Glied $u_n + v_n$, und ihre Summe ist $U + V$. Der Satz über die „Produkt"reihe gilt jedoch nur dann, wenn die Reihe mit dem allgemeinen Glied u_n (bzw. v_n) absolut konvergiert ([26][1], S. 102—103). Als Gegenbeispiel führte Cauchy die Reihen mit dem allgemeinen Glied

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

an.

Ohne Zweifel ist dieser *Cours d'Analyse* ein epochemachendes Werk der mathematischen Literatur.

6.1.4. *Niels Henrik Abel*

In der Zeit seines ersten Aufenthaltes in Berlin, Ende 1825/Anfang 1826, ändern sich die Vorstellungen Abels über die Reihen und über die Grundlagen der Analysis. Bis dahin stand Abel, wie L. Sylow ([94], S. 11) bemerkte, in bezug auf Strenge und Methode auf dem Standpunkt, den die alten Mathematiker bezogen hatten. So reproduzierte er in einem Heft ([94], S. 12) die Eulerschen „Gleichungen"

$$1 - 1 + \cdots + (-1)^{n+1} + \cdots = \frac{1}{2}$$

und

$$1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n^2 + \cdots = 0.$$

In Berlin kam Abel dank Crelle mit den Mathematikern und der Mathematik seiner Zeit in Berührung; er las den *Cours d'analyse* von Cauchy und, vermutlich,

[1]) Für Reihen mit komplexen Gliedern siehe 4.4.

die Arbeiten von Bolzano (in einem seiner (norwegisch geschriebenen) Hefte ([94], S. 13) findet man den Satz: „*Bolzano ist ein fähiger Mann*"). In einem (französisch geschriebenen) Brief vom 5. Dezember 1825 an Hansteen ([3], S. 11) schrieb er: „Es ist außergewöhnlich, wie sehr die jungen Mathematiker hier in Berlin, und, soweit ich es gehört habe, überall in Deutschland Gauss in den Himmel heben, um es so auszudrücken. Er ist für sie die Substanz aller mathematischen Perfektion." Der Brief vom 16. Januar 1826 an Holmboe ([3], S. 16) läßt erkennen, daß Abel dahin gelangt war, der Theorie der Reihen ganz große Aufmerksamkeit zu widmen, denn „was es in der Mathematik an wichtigerem gibt, ist ohne Grundlage". Erinnerte er sich an das, was er noch vor gar nicht so langer Zeit geschrieben hatte, als er jetzt formulierte: „Kann man sich etwas Schrecklicheres denken, als zu sagen, es sei $0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n +$ etc, wobei n eine positive ganze Zahl ist"?

Durch seinen Brief vom 12. August 1826 ([3], S. 40) an Hansteen erfährt man, daß er gerade in Paris angekommen war, dem *Zentrum aller seiner mathematischen Wünsche*. Hier lernte er Cauchy kennen ([3], S. 45), der in diesem Moment derjenige Mathematiker war, der wußte, wie man Mathematik treiben muß, ebenso Dirichlet, *einen sehr scharfsinnigen Mathematiker*. (Während Dirichlet von Fourier stark beeinflußt wurde, schrieb Abel, dieser beschäftige sich nur mit *physikalischen Problemen*.)

Im selben Jahr veröffentlichte Abel in *Crelles Journal* [1] eine (französisch geschriebene, von Crelle übersetzte) große Arbeit über die binomische Reihe und erklärte in der Einleitung ([1][1], S. 3), daß „die Zahl derjenigen Sätze von unendlichen Reihen, die als streng begründet angesehen werden können, sehr gering ist. Man wendet gewöhnlich die Operationen der Analysis auf die unendlichen Reihen ebenso an, als wären die Reihen endlich. Dies scheint mir ohne besonderen Beweis nicht erlaubt". Bevor Abel mit der Untersuchung der binomischen Reihe begann, bewies er mehrere Sätze über die Konvergenz der Reihen (auf die wir in 6.2. zurückkommen). In diesem Teil schrieb Abel ([1][1], S. 5): „Das vortreffliche Werk von Cauchy *Cours d'analyse de l'école polytechnique*, welches von jedem Analysten gelesen werden sollte, der die Strenge bei mathematischen Untersuchungen liebt, wird uns dabei zum Leitfaden dienen."

Die ersten beiden Sätze sind Konvergenzregeln, ganz im mathematischen Geist von Abel. So besagt der erste „Lehrsatz" ([1][1], S. 6), in dem eine Reihe mit dem allgemeinen Glied $\varepsilon_n \varrho_n$ mit

$$\varepsilon_n \in \boldsymbol{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = l \neq 0, \quad \varrho_n > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to+\infty} (\varrho_{n+1}/\varrho_n) = \alpha > 1$$

betrachtet wird, daß diese Reihe divergent ist.

Eine sehr detaillierte und sehr strenge Untersuchung der binomischen Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}\,x^n,$$

wobei $x, m \in \boldsymbol{C}$, $x = a + bi$, $m = m_1 + im_2$ ist, führte ihn zu dem Schluß, daß die Reihe für $|x| < 1$ und beliebiges m konvergent ist. Im Fall $|x| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ mit

$a \neq -1$ konvergiert die Reihe für $m_1 \in]-1, +\infty[$, und wenn $a = -1$ ist, konvergiert sie für $m_1 > 0$. In den anderen Fällen ist die Reihe divergent.

L. Sylow hatte recht, als er schrieb ([94], S. 54), daß sich mit dieser bedeutenden Abhandlung Abel als Reformer der Lehre von den unendlichen Reihen an die Seite von Cauchy gestellt und wesentlich dazu beigetragen hat, die moderne Theorie der Funktionen vorzubereiten.

6.2. Trigonometrische Reihen; das Problem der Stetigkeit einer Reihe stetiger Funktionen und die gleichmäßige Konvergenz

Während dieser ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts und während man begann, die Begriffe Konvergenz und Stetigkeit streng zu definieren, stellten sich das aus dem achtzehnten Jahrhundert übernommene und aus der mathematischen Physik stammende Problem, Funktionen durch Reihen stetiger Funktionen anzugeben, sowie das Problem der Stetigkeit dieser Reihen.

6.2.1. *Die Darstellung „willkürlicher" Funktionen durch trigonometrische Reihen. Die Arbeiten von Fourier und Dirichlet*

Gerade das Problem der Darstellung der gewöhnlichen Funktionen der klassischen Analysis und der Funktionen, welche der mathematischen Physik entstammen, durch trigonometrische Reihen hat den Mathematikern des neunzehnten Jahrhunderts die Probleme gestellt, die zur Einführung und Klärung von gleichfalls fundamentalen Begriffen führten, wie Funktion, Integral, gleichmäßige Konvergenz und Menge.

Am 21. Dezember 1807 trug Joseph Fourier der Akademie der Wissenschaften in Paris seine Abhandlung über die *Theorie der Ausbreitung der Wärme in festen Körpern* vor (die erst 1972 veröffentlicht wurde); ihr Ziel war es, die mathematischen Prinzipien der Theorie der Wärme herauszuarbeiten ([52], S. 35). Von 1808 an machte Poisson ([84], S. 219) das Wesentliche der Fourierschen Theorie bekannt, insbesondere die Formel, welche die Koeffizienten (siehe 1.3.4.)

$$a_i = \int_{-1}^{1} \varphi(y) \cos (2i+1) \frac{\pi y}{2} \, dy$$

der Reihenentwicklung der Funktion

$$\varphi(y) = a \cos \frac{\pi y}{2} + a_1 \cos 3 \frac{\pi y}{2} + \cdots + a_i \cos (2i+1) \frac{\pi y}{2} + \cdots$$

liefert. Fourier unterbreitete am 28. September 1811 seine vervollständigte Abhandlung der Akademie der Wissenschaften erneut (diese wurde 1824 veröffentlicht [53]). Lagrange unterstrich sofort ([54], S. VII—VIII), daß *das Thema neu* ist, und wies auf *seine Bedeutung* hin, stellte aber fest, daß die Arbeit *an Strenge zu wünschen übrig lasse*. Schließlich veröffentlichte Fourier 1822 seine *Théorie analytique de la chaleur*[1]) [54]. Das ist, wie Darboux schrieb ([54][1], S. V—VI), eine schöne Arbeit, die man ohne Übertreibung an die Seite der vollendetsten wissenschaftlichen Schriften aller Zeiten stellen kann. In seinem *Vorwort* unterstrich Fourier ([54][1], S. XIII), daß die Probleme der Physik, die er behandele, sich auf „eine ganz specielle auf neuen Theoremen begründete Analyse" zurückführen lassen. So „bildet das tief eingehende Studium der Natur eine ergiebige Quelle für mathematische Entdeckungen". (Siehe in diesem Zusammenhang 1.1.)

Die Temperatur v eines „unendlich dünnen" Plättchens (dessen Punkte die Koordinaten x und y haben) eines festen Körpers genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad ([54]^1, \text{S. } 101;\ [52], \text{S. } 137).$$

Die Funktion $v = \varphi(x, y)$, die der Gleichung (a) genügt, muß die Bedingungen

$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}, x\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}, x\right) = 0 \quad \text{für jedes } x$$

und

$$\varphi(y, 0) = 1 \quad \text{für jedes} \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

erfüllen. Setzt man die Lösungen in der Gestalt $v = F(x) \cdot f(y)$ an, so gelangt man zu $F(x) = e^{-mx}$ und $f(y) = \cos my$. Man „bildet *eine noch allgemeinere Function für v*", indem man

$$\text{(b)} \qquad v = ae^{-x} \cos y + be^{-3x} \cos 3y + \cdots + a_i e^{-(2i+1)x} \cos (2i + 1) y + \cdots$$

betrachtet ([54][1], S. 102; [52], S. 138). Nun folgt aus der Bedingung $\varphi(0, y) = 1$ die Beziehung

$$1 = a \cos y + b \cos 3y + \cdots + a_i \cos (2i + 1) y + \cdots. \tag{1}$$

Fourier benutzte alsdann die Gleichung (1), um die Koeffizienten a_i zu bestimmen. Die erste Methode bestand darin, die Reihe (1) gliedweise beliebig oft zu differenzieren, allerdings ohne daß dies als zulässig bewiesen wurde, dann in den sich ergebenden Gleichungen $y = 0$ zu setzen und ein System unendlich vieler Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten zu lösen ([54][1], S. 105—106), wiederum ohne nähere Begründung des Rechenganges. Fourier erhielt so die Entwicklung

---

[1]) Deutsche Übersetzung: *Analytische Theorie der Wärme* [54][1]. Hierauf beziehen sich die Seitenzahlen. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

([54][1], S. 109; [52], S. 157)

$$\frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3}\cos 3y + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)\,y + \cdots, \tag{2}$$

mit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Anschließend gab Fourier einen zweiten Beweis der Gleichung (2), indem er zunächst die Partialsumme

$$y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \cdots + \frac{(-1)^m}{2m-1}\cos(2m-1)\,x$$

betrachtete. Daraus gewann er durch Differentiation von y die Formel

$$y = \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2mx}{\cos x}\,dx \quad ([54]^1, \text{S. } 112;\ [52], \text{S. } 160).$$

Nun integrierte er partiell ([54][1], S. 113) und ließ m gegen ∞ streben; er erhielt so die Formel (2). Wie G. Darboux ([54], S. 158) anmerkte, folgte Fourier bei dieser Untersuchung einer speziellen Reihe genau der Methode, die es später Dirichlet gestattete, erstmals eine völlig strenge Theorie der trigonometrischen Reihen aufzustellen.

Im Abschnitt VI, *Entwicklung einer beliebigen Funktion in eine trigonometrische Reihe* (siehe in 1.7. den Kommentar nach Formel (35)) betrachtete Fourier ([54][1], S. 133) eine auf $]-\pi/2, \pi/2[$ definierte Funktion φ, deren Entwicklung in eine trigonometrische Reihe die Gestalt

$$\varphi(x) = a\sin x + b\sin 2x + \cdots + a_k \sin kx + \cdots \tag{3}$$

hat. Das Problem besteht darin, die Koeffizienten a_k zu berechnen, sogar wenn φ *unstetig und arbiträr* (d. h. völlig beliebig) *ist* ([54][1], S. 146). Zu diesem Zweck muß man untersuchen, wie die Koeffizienten beschaffen sind, die als Faktoren der $\sin kx$ auftreten ([52], S. 211). Indem er den Ausdruck (3) mit $\sin kx$ multiplizierte ([54][1], S. 148; [52], S. 213) und die Reihe gliedweise integrierte (ohne irgendeine Begründung), gelangte Fourier zu einem *sehr bemerkenswerten Ergebnis*, nämlich zu

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin kx\,dx\,.$$

(Es sei erwähnt, daß Gauß in einer unveröffentlichten, vermutlich 1810 geschriebenen Abhandlung ([59], S. 470) die Koeffizienten der Entwicklung einer beliebigen Funktion, „deren Wert immer endlich bleibt, wenn x zwischen 0 und 2π variiert", in eine trigonometrische Reihe in derselben Weise berechnete.)

Dieses Buch von Fourier, das von neuen Ideen überschäumt, enthält auch ([54][1], S. 422) eine Definition einer *ganz willkürlichen Funktion.* Das ist eine Folge von gegebenen Werten, die „sich nicht nach einem bestimmten, gemeinsamen Gesetz anordnen zu lassen" brauchen und die allen Werten von x in einem Intervall zugeordnet sind.

Es war P. G. Lejeune Dirichlet, der in der Theorie der trigonometrischen Reihen entscheidende Fortschritte erzielte. Er kam im Mai 1822 im Alter von 17 Jahren in Paris an, gerade zu einem Zeitpunkt, zu dem, wie Kummer schrieb ([75], S. 315), Cauchy durch strengere Methoden „den Grund zu einer wesentlichen Verbesserung und Umgestaltung der gesammten Analysis" legte. Dirichlet blieb dort bis 1826 und lernte alle mathematischen Untersuchungen Fouriers kennen, einschließlich der unveröffentlichten ([75], S. 319).

In einer Abhandlung [44], einem echten Teil einer Anthologie, gab Dirichlet den ersten strengen Beweis der Konvergenz einer Fourierreihe, und dies, wie J. Dieudonné ([43], S. 3) schreibt, durch eine Analyse, die für unzählige Untersuchungen im neunzehnten Jahrhundert als Modell dienen sollte. Dirichlet begann ([44], S. 157—158) seine Abhandlung mit einer Überprüfung des 1827 [28] veröffentlichten Cauchyschen Beweises und zeigte, daß dieser unzureichend ist. (Insbesondere bediente sich Cauchy der Äquivalenz der allgemeinen Glieder u_n und v_n zweier Reihen, um daraus „herzuleiten", daß sich aus der Konvergenz der Reihe mit dem allgemeinen Glied u_n auch die Konvergenz der Reihe mit dem allgemeinen Glied v_n ergebe. Als Gegenbeispiel führte Dirichlet die Reihen mit den Gliedern

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$$

an.) Dirichlet betrachtete zunächst eine reellwertige Funktion f, die auf $[0, h]$, $h > 0$, stetig und monoton ist, und versuchte ([44], S. 158—159; Werke I, S. 120)

$$L = \lim_{k\to+\infty} \int_0^h \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} f(\beta)\, d\beta$$

zu bestimmen. Im Laufe eines besonders schönen Beweises (dessen Grundgedanken sich in modernen Beweisen finden ([47], 42.4.8)) schloß Dirichlet ([44], S. 164), daß $L = (\pi/2) f(0)$ ist. Er benutzte anschließend dieses Ergebnis, um zu beweisen ([44], S. 168—169), daß für auf $[-\pi, \pi]$ stückweise stetiges und stückweise monotones f die Fourierreihe dieser Funktion,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\,, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

und

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx\,, \qquad n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\}\,,$$

gegen $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ konvergiert.

Am Schluß seiner Abhandlung untersuchte Dirichlet den Fall, daß es in dem betrachteten Intervall unendlich viele Unstetigkeitsstellen und unendlich viele Maxima und Minima der Funktion gibt. Er war davon überzeugt, daß es möglich sei, den zweiten Fall „auf die soeben betrachteten Fälle zurückzuführen“. Insbesondere glaubte also Dirichlet, die Fourierreihe[1]) einer stetigen Funktion f konvergiere gegen f (was nicht exakt ist, wie wir in 6.6. sehen werden). Was den Fall unendlich vieler Unstetigkeitsstellen betrifft, so stellte er den Begriff des Integrals, wie er von Cauchy definiert worden war, in Frage, ein Problem, das, wie wir in 6.3. sehen werden, von Riemann teilweise gelöst wurde. Das Beispiel einer auf $\boldsymbol{R}$ definierten Funktion mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen (nämlich $f(x) = 0$ für $x \in \boldsymbol{Q}$ und $f(x) = 1$ für $x \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$) sollte der Analysis ein sehr wichtiges Gegenbeispiel liefern (insbesondere ist diese Funktion nicht Riemann-integrierbar) und gab Dirichlet Gelegenheit, implizit den Begriff der Funktion zu definieren: f ist eine Funktion, wenn jedem Wert von x ein wohldefinierter Wert $f(x)$ entspricht. Dirichlet formulierte diese Definition explizit 1837 in einer Abhandlung über denselben Gegenstand (*Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen*, Werke, Bd. 1, Reimer, Berlin 1899, S. 135).[2])

Es war auch Dirichlet, der, ebenfalls 1837, das Problem der unbedingten (kommutativen) Konvergenz aufwarf: Man nennt eine konvergente Reihe unbedingt konvergent, wenn ihre Summe nicht von der Reihenfolge ihrer Glieder abhängt. Er gab (*Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält*; Werke, Bd. 1, S. 318–319) das erste Beispiel einer konvergenten, aber nicht unbedingt konvergenten Reihe: Es ist die Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \qquad n \in \boldsymbol{N} \setminus \{0\};$$

denn die Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{4(n-1)+1}} + \frac{1}{\sqrt{4(n-1)+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

die sich aus der gegebenen Reihe durch Vertauschen der Glieder ergibt, ist nicht konvergent. Riemann, der die Untersuchungen von Dirichlet fortsetzte, zeigte ([86], S. 234–235), daß man die Glieder einer konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe derart umgruppieren kann, daß man eine konvergente Reihe erhält, die gegen eine beliebig vorgegebene Zahl konvergiert.[3])

---

[1]) Für Anwendungen der Fourierreihen siehe 7.1.10.

[2]) Es sei bemerkt, daß es schon 1814 bei Poinsot ([49], S. 118) heißt: Wenn eine Größe y von einer anderen Größe x vermittels eines beliebigen Gesetzes abhängt, ist y das, was man eine Funktion von x nennt. (Vgl. auch den Hinweis auf Lobačevskij in Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. I, 8. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978, S. 70 (Übersetzung aus dem Russischen). — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

[3]) Über die unbedingte Konvergenz und die Arbeiten von Eisenstein siehe 7.1.6.

6.2.2. *Die konvergenten Reihen stetiger Funktionen und ihre Stetigkeit*

In seinem *Cours d'analyse* hatte Cauchy folgendes „bewiesen" ([26][1], S. 90): „Wenn die einzelnen Glieder der Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ Funktionen derselben Veränderlichen x sind, und zwar stetig in Beziehung auf diese Veränderliche in der Umgebung eines besonderen Wertes, für welche die Reihe convergent ist, so ist auch in der Umgebung dieses besonderen Wertes die Summe s der Reihe eine stetige Funktion von x". Es dürfte von Interesse sein, seinen Beweis zu überprüfen; er zeigt nämlich, wie die Mathematiker zwangsläufig zum Begriff der gleichmäßigen Konvergenz gekommen sind. Es sei

$$s(x) - s_n(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x) + \cdots = r_n(x) .$$

Wenn die Funktionen u_i stetig sind, ist die Funktion s_n *offenbar stetig*. Erteilt man x einen unendlich kleinen Zuwachs α, so *wird* sich $r_n(x + \alpha)$ nur *unmerklich* von $r_n(x)$ *unterscheiden*, „wenn man n einen sehr beträchtlichen Wert annehmen läßt", d. h. für $n \geqq N$. Demnach nahm Cauchy stillschweigend an, N hänge nicht von x ab; das trifft aber im allgemeinen nicht zu, wenn die Reihe lediglich schlechthin konvergent ist. Der Irrtum von Cauchy erklärt sich z. T. dadurch, daß Cauchy im allgemeinen nur Potenzreihen betrachtete. So gab er als Anwendung seines Satzes das Beispiel der Reihe

$$s(x) = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots, \qquad x \in]-1, 1[,$$

deren Summe $s(x) = 1/(1 - x)$ tatsächlich eine auf dem betrachteten Intervall stetige Funktion ist.

Abel war es, der als erster die Aufmerksamkeit der Mathematiker darauf lenkte, daß dieser Satz inkorrekt ist. Zunächst gab er in einem Brief an Holmboe ([3], S. 18) vom 16. Januar 1826 als Gegenbeispiel die Reihe

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} + \cdots$$

an, die für $x \in [0, \pi]$ gleich $x/2$ und für $x = \pi$ gleich 0 ist. Der in diesem Zusammenhang von Abel gegebene Kommentar zeichnet sich durch bemerkenswerten Scharfblick aus: Man führt alle Arten von Operationen mit unendlichen Reihen aus, als ob sie endlich wären, aber ist das erlaubt? Niemals im Leben. Wo ist bewiesen worden, daß man die Ableitung einer unendlichen Reihe erhält, wenn man jedes Glied einzeln differenziert? Als Gegenbeispiel differenzierte Abel die obige Reihe für $x \in [0, \pi[$ gliedweise und erhielt ([3], S. 19)

$$\frac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \cdots + (-1)^{n+1} \cos nx + \cdots;$$

das ist absurd, da diese Reihe nicht konvergiert.

In seiner Abhandlung über die binomische Reihe [1][1] bewies Abel zwei Sätze über die Stetigkeit von Reihen stetiger Funktionen, von denen der zweite unexakt ist. Der erste lautet: Ist die Reihe

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots \qquad (v_i \in \boldsymbol{C})$$

konvergent, so konvergiert auch die Reihe

$$f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + \cdots + v_n\alpha^n + \cdots \qquad (\alpha \in [0, 1[) ,$$

und es ist

$$\lim_{\alpha \to 1} f(\alpha) = v_0 + \cdots + v_n + \cdots .$$

Der zweite „Satz" besagt ([1][1], S. 8): Wenn die Reihe

$$v_0(x) + v_1(x)\,\delta + \cdots + v_n(x)\,\delta^n + \cdots ,$$

wobei $\delta > 0$ ist und die v_i auf $[a, b]$ stetige Funktionen sind, konvergiert, so ist auch die Reihe

$$f(x) = v_0(x) + v_1(x)\,\alpha + \cdots + v_n(x)\,\alpha^n + \cdots$$

mit $0 \leqq \alpha < \delta$ konvergent, und f ist eine auf $[a, b]$ stetige Funktion. In seinem „Beweis" betrachtete Abel die Funktionen

$$\varphi(x) = v_0(x) + v_1(x)\,\alpha + \cdots + v_{n-1}(x)\,\alpha^{n-1}$$

und

$$\psi(x) = v_n(x)\,\alpha^n + \cdots + v_{n+p}(x)\,\alpha^{n+p} + \cdots .$$

Es ist $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Man kann

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^n v_n(x)\,\delta^n + \cdots + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{n+p} v_{n+p}(x)\,\delta^{n+p} + \cdots$$

setzen. Ist $\theta(x) = \sup\limits_{p \in \boldsymbol{N}} (|v_n(x)\,\delta^n + \cdots + v_{n+p}(x)\,\delta^{n+p}|)$, so gilt

$$|\psi(x)| \leqq \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^n \theta(x) .$$

Nun sei β ein unendlich kleiner Zuwachs von x. Abel schloß daraus, daß $\psi(x) = \psi(x + \beta) = o(1)$ für $n \to \infty$ gilt,[1]) d. h., er setzte stillschweigend voraus, $\sup\limits_{x \in [a,b]} \theta(x)$ sei endlich. Das ist jedoch im allgemeinen nicht richtig. Es sei die Reihe mit dem allgemeinen Glied

$$v_n(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^n}$$

und $\delta = 1$ gegeben. Für $x \neq 0$ gilt dann

$$\theta(x) = \frac{1}{x^2(1 + x^2)^n} \quad \text{und} \quad \sup_{x \in]0, 1]} \theta(x) = +\infty .$$

Am Ende des Beweises von Abel folgt eine Anmerkung, in der er feststellt, daß der Satz von Cauchy über die Stetigkeit einer Reihe stetiger Funktionen im allgemeinen nicht richtig ist, wobei Abel das Gegenbeispiel aus seinem Brief vom

---

[1]) In der Bezeichnung von E. Landau (siehe ([46], 14.8.)).

16. Januar 1826 anführte. Merkwürdigerweise gab Cauchy nach der 1826 erfolgten Veröffentlichung des Abelschen Gegenbeispiels im Jahre 1833 denselben unrichtigen Satz nochmals an ([30], S. 55—56).

6.2.3. *Die Einführung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz*

Anscheinend hat Christoph Gudermann, der Lehrer von Weierstraß, im Jahre 1838 als erster ([49], S. 47) den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz benutzt, und zwar in einer in *Crelles Journal* veröffentlichten Arbeit. Er schreibt, es sei „ein bemerkenswerther Umstand, dass ... die so eben gefundenen Reihen einen im Ganzen gleichen Grad der Convergenz haben" (d. h. gleichmäßig konvergieren), ein Terminus, den Weierstraß später in seinen Vorlesungen benutzte. Gudermann untersuchte die Entwicklungen elliptischer Funktionen[1]) in Reihen, welche nach Funktionen von Amplitude und Modul fortschreiten, und zeigte, daß ihre Konvergenz nicht von den Amplituden, sondern ausschließlich von den Moduln abhängt. Auf diese Weise hatte Weierstraß Gelegenheit, sich mit diesem Begriff bei Gudermann vertraut zu machen, selbst wenn dieser ihn nur in begrenztem Umfang benutzte. In einer Arbeit, die 1841 in Münster, wo er bei Gudermann studierte, geschrieben und 1894 veröffentlicht wurde, definierte Weierstraß ([97], S. 68—69) den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz einer Reihe ganz klar: Bei jedem positiven δ läßt sich ein aus endlich vielen Gliedern bestehendes Stück der Reihe herausheben derart, daß der Rest der Reihe für alle x des Konvergenzbereichs dem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist.

Um 1847 führten Ph. L. Seidel und G. G. Stokes in verwandten Terminologien einen Begriff ein, welcher der gleichmäßigen Konvergenz einer Reihe entspricht. Ihre Arbeiten scheinen aber keinen Einfluß auf die Herausarbeitung dieses Begriffes gehabt zu haben. Seidel erwähnte zu Beginn seiner Untersuchung den Satz von Cauchy ([91], S. 35) und bemerkte ([91], S. 36), daß ihm der Satz von Dirichlet über die Entwicklung stückweise stetiger und monotoner Funktionen in Fourierreihen entgegenstehe. Seidel bewies ([91], S. 37—38) den folgenden Satz (der dem klassischen Satz ([47], 39.9.1) über die Stetigkeit einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen entspricht): Wenn eine konvergente Reihe stetiger Funktionen im Punkt x_0 unstetig ist, so gibt es *in der unmittelbaren Umgebung von* x_0 Werte von x, für welche die Reihe *beliebig langsam* konvergiert. Die Aussage[2]), eine Reihe konvergiere auf einem Intervall I gleichmäßig, bedeutet, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$ existiert derart, daß für $n \geqq N(\varepsilon)$ die Ungleichung $|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| \leqq \varepsilon$ für alle $x \in I$ erfüllt ist; die Aussage, eine Reihe konvergiere *beliebig langsam*, besagt, daß $N(\varepsilon) = +\infty$ ist oder auch, daß für die $N(\varepsilon, x)$, die in die Definition der Konvergenz im Punkt x eingehen, stets $\sup_{x \in I} N(\varepsilon, x) = +\infty$ gilt.

[1]) Siehe 7.1. (Das Gudermann-Zitat findet sich in *Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale*, III., Crelle's Journal *18*, S. 252. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

[2]) In moderner Terminologie.

In einer Abhandlung, die am 6. Dezember 1847 der Philosophical Society in Cambridge vorgetragen wurde, gab Stokes ([92], S. 280) ein Gegenbeispiel zum Satz von Cauchy an, in dem eine Reihe von gebrochen rationalen Funktionen vorkommt. Er führte anschließend den Begriff der *unendlich langsamen* Konvergenz (*infinitely slow*) einer Reihe ([92], S. 281) ein; dieser entspricht dem von Seidel eingeführten, der aber anscheinend völlig unabhängig von Stokes darauf gekommen war. Stokes bewies den Satz: Wenn eine Reihe stetiger Funktionen konvergiert, aber nicht *unendlich langsam*, so stellt sie eine stetige Funktion dar. Es sei bemerkt, daß Stokes im Unterschied zu Seidel[1]) die „Umkehrung" dieses Satzes aussprach, die aber nicht richtig ist ([92], S. 282).

In einer sehr schönen Arbeit [65] hat G. H. Hardy die unterschiedlichen Definitionen der gleichmäßigen Konvergenz untersucht, die von Weierstraß, Seidel und Stokes angegeben wurden; er schrieb, daß sich nur Weierstraß ihrer außerordentlichen Bedeutung als grundlegendem Begriff der Analysis völlig bewußt war. Allerdings war es Cauchy, der in einer 1853 veröffentlichten Arbeit als erster den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz einführte, indem er die Konvergenz klar definierte, ohne sie aber als gleichmäßig zu kennzeichnen. Cauchy bemerkte ([32], S. 31—32), daß sein Satz über die Stetigkeit eine Reihe stetiger Funktionen unkorrekt ist, aber, fügte er hinzu, es ist leicht zu sehen, wie man die Formulierung des Satzes modifizieren muß. Es sei s die Summe der konvergenten Reihe

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x) = u_n(x) + \cdots + u_{n+p}(x) + \cdots$$

und

$$s_{n'}(x) - s_n(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n'-1}(x)\,, \qquad n' > n\,.$$

Er nahm nun an, für *hinreichend großes* n und *beliebiges* n' *sei* $|s_{n'}(x) - s_n(x)|$ stets kleiner als eine beliebig klein gewählte Zahl ε, d. h., er führte das „Cauchysche Kriterium" für die gleichmäßige Konvergenz von Reihen ein ([47], 39.9.6).

Es war Weierstraß, der als erster in seinen Vorlesungen die Sätze über die Stetigkeit, die Differenzierbarkeit und, wie wir in 6.3. sehen werden, die Integrierbarkeit der Summe einer Reihe von Funktionen richtig formulierte und bewies. In seinen nicht als Buch veröffentlichten Vorlesungen von 1861 ([49], S. 66—67) definierte er die gleichmäßige Konvergenz (*Konvergenz in gleichem Grade*) mit Hilfe des „Cauchyschen Kriteriums" und bewies, daß die Summe einer konvergenten Reihe auf einem Intervall $[a, b]$ stetiger Funktionen eine auf $[a, b]$ stetige Funktion ist, wenn sie dort gleichmäßig konvergiert. Sein Beweis, der sich kaum von demjenigen unterscheidet, den man heute führt ([47]; 39.8.8, 39.9.1), verläuft so, daß „epsilon" in drei Teile geteilt und die Stetigkeit der Funktionen sowie die gleichmäßige Konvergenz der Reihe ausgenutzt wird. Ferner bewies er den Satz über die gliedweise Differentiation einer Reihe von stetig differenzierbaren Funktionen, die nebst der Reihe der Ableitungen dieser Funktionen gleichmäßig konvergiert. Bei dieser Gelegenheit zitierte er Abels Brief vom 16. Januar 1826. Es war also tatsächlich

[1]) Seidel zeigte sogar ([91], S. 44), daß die Reihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, die eine auf $\boldsymbol{R}$ stetige Funktion darstellt, auf $\boldsymbol{R}$ nicht gleichmäßig konvergiert.

Weierstraß, der in seinen Vorlesungen und in seinen Abhandlungen dem Begriff der gleichmäßigen Konvergenz[1]) schließlich Bürgerrecht verschaffte. Im folgenden, insbesondere in 6.6., werden wir sehen, daß er es war, der von den Mathematikern des neunzehnten Jahrhunderts am stärksten dazu beitrug, die Grundlagen der Analysis zu schaffen.

6.3. Die Definition des Integrals

Wieder war es Cauchy, der als erster eine Definition des Integrals einer auf $[a, b]$ stetigen Funktion gab. Dabei tauchte ein neuer wichtiger Begriff auf, der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit, zunächst implizit in der Definition des bestimmten Integrals bei Cauchy, schließlich von Eduard Heine klar herausgearbeitet.

6.3.1. *Das Cauchysche Integral*

Cauchy hatte seine Theorie des bestimmten Integrals in seinem 1823 veröffentlichten *Résumé des leçons données à l'École polytechnique sur le calcul infinitésimal* dargelegt; denn es erschien ihm notwendig, die Existenz von Integralen zu beweisen, bevor man ihre verschiedenen Eigenschaften kennenlernt ([27], S. 10). Interessant dürfte es sein, auf seine Definition ([27], S. 22) der Ableitung einer reellwertigen Funktion in einem Punkt $x \in \boldsymbol{R}$ einzugehen: Diese Ableitung ist der Grenzwert des Quotienten

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

für gegen 0 strebendes i, *wenn er existiert.*

In der 21. Vorlesung ([27], S. 122) gab Cauchy die erste Definition des Integrals. Dort findet sich auch der Ursprung der modernen Integrationstheorie. Es sei f eine auf einem Intervall $[x_0, X]$ stetige reellwertige Funktion und (x_i) eine Folge von Punkten dieses Intervalls $(1 \leqq i \leqq n-1)$ derart, daß $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ $\cdots < x_{n-1} < X$ gilt. Cauchy führte die Summe[2])

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_2) + \cdots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

ein und präzisierte: Die Größe S hängt offenbar erstens von der Anzahl n der Teilintervalle, in die man die Differenz $X - x_0$ geteilt hat, und zweitens von den (Funktions-)Werten in diesen Punkten und damit von der benutzten Art der Einteilung ab. Um zu beweisen, daß der Grenzwert von S für gegen 0 strebende „Schrittweite" $h = \sup\limits_{0 \leqq i \leqq n} (x_i - x_{i-1})$ der Unterteilung nicht von der gewählten

---

[1]) Es sei bemerkt, daß René Baire (im Band II seiner *Leçons sur les théories générales de l'analyse,* Gauthier-Villars, Paris 1908) den Begriff der normalen Konvergenz einführte ([47], 39.9.7).

[2]) Man findet diesen Begriff schon bei Euler (*Institutionum calculi integralis,* Bd. I, Ed. tertia, Petropoli, Acad. Imper. Sci., Kap. VIII, S. 178—183 (1824)).

Unterteilung abhängt, benutzte Cauchy implizit ([27], S. 123—125) die gleichmäßige Stetigkeit der Funktion f auf $[x_0, X]$. Um zu zeigen, daß die Differenz der Summen S und S', die zwei beliebigen Unterteilungen entsprechen, gegen null strebt, wenn h gegen null strebt, schloß er so, als ob sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta = \eta(\varepsilon)$ finden ließe derart, daß für alle (x, x') mit $x, x' \in [x_0, X]$ und $|x - x'| \leqq \eta$ die Ungleichung $|f(x) - f(x')| \leqq \varepsilon$ gilt. Das ist richtig, weil jede auf einem Intervall $[a, b]$, $a, b \in \boldsymbol{R}$, stetige reellwertige Funktion auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist ([46], 14.10.4). Cauchy bewies auf diese Art, daß $\lim_{h\to 0} S$ existiert, wenn f auf $[x_0, X]$ stetig ist, ein Grenzwert, der in eindeutiger Weise ausschließlich von der Funktion $f(x)$ und den Werten x_0, X der Variablen x, den Endpunkten des Intervalls, abhängt. Diesen Grenzwert nennt man bestimmtes Integral. Cauchy bezeichnete es mit $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, eine Bezeichnung[1]), die „*von Herrn Fourier vorgeschlagen*" worden war. Anschließend bewies er die Linearitätseigenschaften des bestimmten Integrals ([46], 16.3.2, 16.3.3) sowie die Eigenschaften in bezug auf das Integrationsintervall ([46], 16.4). Überdies zeigte er ([27], S. 152), daß aus $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ die Beziehung $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, X]$ folgt ([46], 16.5.4).

Wie T. Hawkins ([68], S. 12) mit vollem Recht bemerkte, läßt sich das Cauchysche Integral ohne jegliche Schwierigkeit auf stückweise stetige Funktionen ausdehnen. Übrigens schien für Cauchy eine „gewöhnliche" unstetige Funktion nur endlich viele Unstetigkeitspunkte zu besitzen (obwohl er 1824 schrieb ([34], 550), daß unendlich viele stetige bzw. unstetige Funktionen existieren, die man nicht mit Hilfe der in der Analysis üblichen Bezeichnungen darstellen könne, und daß die Ordinate einer beliebigen geraden oder gekrümmten Linie, die nach einem regulären oder irregulären Gesetz gezeichnet wurde, als eine Darstellung einer Funktion dieser Art aufgefaßt werden kann). Tatsächlich schrieb er 1849 ([31], S. 123): Es ist wichtig zu bemerken, daß die in der Differentialrechnung vorkommenden unstetigen Funktionen ... im allgemeinen nur für gewisse Werte der Variablen, von denen sie abhängen, nicht mehr stetig sind.

Als eine der wichtigsten Anwendungen des bestimmten Integrals bewies Cauchy ([27], S. 212) unter der Annahme, die Funktion f besitze auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung n einschließlich, die Taylorsche Formel

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

([46], 19.1.1). Hieraus leitete er ([27], S. 221) den Taylorschen Satz über die Entwicklung von Funktionen in unendliche Reihen her. In diesem Zusammenhang schrieb Abel 1826 ([3], S. 17) an Holmboe: Der Taylorsche Satz, die Grundlage der gesamten höheren Mathematik, ist alles in allem schlecht begründet. Ich habe dafür nur einen einzigen strengen Beweis gefunden, und zwar den von Cauchy in seinem *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*. Cauchy gab im Anschluß daran

[1]) Zu dieser Bezeichnung siehe F. Cajori, *A history of mathematical notations*, The Open Court, Chicago, Bd. II, S. 249—250 (1930).

(S. 229—230) sein berühmtes Gegenbeispiel, um zu zeigen, daß auch eine im Punkt x konvergente Taylorreihe einer Funktion f nicht mit $f(x)$ übereinzustimmen braucht ([47], 40.4.5). Die Funktion sei durch $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ definiert. Dann gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für jedes $n \in \boldsymbol{N}$, und die Taylorreihe von f, in welche die $f^{(n)}(0)$ eingehen ([47], 40.4.3), ist identisch null, während die Funktion e^{-1/x^2} nicht identisch null ist. Es sei bemerkt, daß dagegen Gauß[1]) glaubte, wie er an Bessel am 5. Mai 1812 schrieb ([61], S. 173), daß eine in einem Punkt x konvergierende Taylorreihe einer Funktion notwendigerweise gegen $f(x)$ konvergiert.

Eine andere Anwendung des bestimmten Integrals gab Cauchy die Gelegenheit, einen weiteren falschen Satz über Funktionenreihen auszusprechen (wie wir sehen werden, befindet er sich hier in guter Gesellschaft, z.B. in der Riemanns; übrigens machte Stokes 1847 denselben Fehler noch einmal ([92], S. 242)): Ist eine Reihe stetiger Funktionen mit dem allgemeinen Glied $u_n(x)$ für $x \in [a, b]$ konvergent, so gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx \qquad ([92], \text{S. } 237)\,.$$

Trotzdem und trotz einiger anderer Ungenauigkeiten, die daher stammen, daß einige der zugrundeliegenden Begriffe noch nicht gekärt waren, kann man Cauchy nur zustimmen, der 1830 über sich ([34], S. 150) schrieb, er sei unter den Mathematikern einer derjenigen, der am nachdrücklichsten darauf bestanden habe, die Formeln streng zu beweisen und sie nur innerhalb exakter Grenzen anzuwenden.

6.3.2. *Das Riemannsche Integral*

Riemann, ein Schüler von Gauß und Dirichlet, übernahm bereits in seinen ersten Arbeiten ([85], S. 3) die Dirichletsche Definition einer Funktion, und was die Stetigkeit betrifft, so schrieb er: „... und wenn, während z alle zwischen zwei festen Werthen gelegene Werthe stetig durchläuft, w ebenfalls stetig sich ändert, so heißt diese Funktion (w von z) innerhalb dieses Intervalls stetig oder continuirlich." Riemann war mit dieser Definition nicht sehr zufrieden; man hat nach seinem Tode 1866 in seinen Manuskripten folgende Anmerkung[2]) ([85], S. 46) gefunden: „Unter dem Ausdruck, die Grösse w ändert sich stetig mit z zwischen den Grenzen $z = a$ und $z = b$, verstehen wir ... für eine beliebig gegebene Größe ε läßt sich stets die Größe α so annehmen, dass innerhalb eines Intervalls für z, welches kleiner als α ist, der Unterschied zweier Werthe von w nie grösser als ε ist." In einer anderen Notiz (aus dem Nachlaß), die vom 7. 11. 1855 ([87], S. 111) stammt, betonte er, daß der Begriff der Stetigkeit mit Hilfe von Ungleichungen ausgedrückt werden sollte, denn nur dadurch können die Methoden, durch welche man sie der Rechnung (Untersuchung) unterwirft, zur völligen Klarheit gebracht werden. Möglicherweise hat sich Riemann an dem folgenden Satz über stetige Funktionen

---

[1]) Wie die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts.
[2]) Diese Definition entspricht der Definition der gleichmäßigen Stetigkeit.

orientiert, den Dirichlet in seinen Vorlesungen über das bestimmte Integral angegeben hatte ([45], S. 4): „Es sei $y = f(x)$ eine in dem endlichen Intervall von a bis b stetige Funktion von x, und unter Teilintervall verstehe man ... jedes beliebige Stück der Abscissenachse zwischen a und b. Dann besteht immer die Möglichkeit, zu einer beliebig klein gewählten absoluten Größe ϱ eine zweite ihr proportionale kleine Größe σ von solcher Beschaffenheit zu finden, daß in jedem Teilintervall, welches $\leqq \sigma$ ist, die Funktion y sich um nicht mehr als höchstens ϱ ändert."

Im Jahre 1854 reichte Riemann bei der Universität Göttingen seine Habilitationsschrift „*Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*" ein. Diese Abhandlung wurde 1867 von seinem Freund Dedekind veröffentlicht und fand erheblichen Widerhall. Sie wurde 1873 von Darboux und Houël ins Französische übersetzt. Darboux schrieb an Houël ([49], S. 150): Diese Abhandlung Riemanns ist ein Meisterwerk, jenen alten Gemälden vergleichbar, bei denen einige Teile bei vollem Licht Schmerz über das empfinden lassen, was die Zeit zerstört oder der Künstler nicht vollendet hat.

Nach sehr gründlichem Studium der Dirichletschen Abhandlung [44] über Fourierreihen kam Riemann ([86], S. 237) zu dem Schluß, daraus ergebe sich, „daß durch eine trigonometrische Reihe jede sich nach dem Intervall 2π periodisch wiederholende Function darstellbar ist, welche

1) durchgehends eine Integration zulässt,
2) nicht unendlich viele Maxima und Minima hat [und
3) wo ihr Werth sich sprungweise ändert, den Mittelwerth zwischen den beiderseitigen Grenzwerthen annimmt"]

(Punkt 3) wurde bei der deutschen Ausgabe aus [86] übernommen. — *Anm. d. Übers.*)

Gerade zur Präzisierung der ersten Bedingung entwickelte Riemann seine Theorie des bestimmten Integrals. Dabei meinte er ([86], S. 237), „dass die Functionen, auf welche sich die Dirichlet'sche Untersuchung nicht erstreckt, in der Natur nicht vorkommen"!

Es sei f eine auf einem Intervall $[a, b]$ definierte reellwertige Funktion und (x_i), $0 \leqq i \leqq n$, eine Folge mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ ([86], S. 239). Ferner sei $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ und

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

mit $0 \leqq \varepsilon_i \leqq 1$. Hat S „nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (bestimmtes Integral)" ([86], S. 239). Nun sei

$$D_i = \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(y)|$$

die Schwankung der Funktion f auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ und $h = \sup\limits_{1 \leqq i \leqq n} \delta_i$ die Schrittweite der Unterteilung. Dann ist die Bedingung

$$\lim_{h \to 0} (\delta_1 D_1 + \cdots + \delta_n D_n) = 0$$

notwendig und hinreichend für die Existenz von A (ein vollständiger Beweis dafür stammt von H. Lebesgue ([77], S. 24—25)).

Riemann ersetzte ([86], S. 240—241) diese Integrabilitätsbedingung durch eine andere ([77], S. 25—26), ein erster Schritt zur modernen Integrationstheorie: „Wenn die Function $f(x)$ immer endlich ist, und bei unendlichem Abnehmen sämmtlicher Grössen δ die Gesammtgrösse s der Intervalle, in welchen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser als eine gegebene Grösse σ sind, stets zuletzt unendlich klein wird, so convergiert die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden."[1]) Es sei bemerkt, daß die auf $[a, b]$ definierte Dirichletsche Funktion, die für rationales x gleich 1 und für irrationales x gleich 0 ist, im Riemannschen Sinne nicht integrierbar ist ([77], S. 31). Immerhin gab Riemann ([86], S. 242) ein Beispiel[2]) einer beschränkten integrierbaren Funktion mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen an, ein Beispiel, dessen Tragweite sich als sehr groß erweisen sollte.

Um die Möglichkeit der Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe zu untersuchen, führte Riemann eine völlig neue Methode ein ([86], S. 245 bis 246): Er betrachtete die Reihe $A_0 + A_1 + \cdots + A_n + \cdots$, wobei $A_0 = a_0/2$ und $A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ für $n \geqq 1$ gilt. Unter der Annahme $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$ integrierte er die betrachtete Reihe zweimal gliedweise. Die Funktion, die er so erhielt, erlaubte es ihm ([86], S. 251—252), die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für „die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, deren Glieder für jeden Argumentwerth zuletzt unendlich klein werden", zu formulieren. (Nebenbei sei bemerkt, daß Riemann in seiner unveröffentlichten Vorlesung über komplexe Funktionentheorie ([50], Anhang XXXVIII) nach einer von Hankel stammenden Ausarbeitung dem gleichen Irrtum wie Cauchy und Stokes unterlag, was die gliedweise Integration einer konvergenten Reihe stetiger Funktionen betrifft. Er ging von

$$\lim_{n\to\infty} \left(u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)\right) = 0$$

aus und wollte zeigen, daß

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b [u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)]\, dx = 0$$

---

[1]) Die Riemannsche Theorie gestattet es, eine Punktmenge zu messen, die kein Intervall zu sein braucht.

[2]) Das Riemannsche Beispiel $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx - [nx]}{n^2}$ zeigt, daß eine Funktion mit einer überall dichten Menge (vgl. 6.8.) von Unstetigkeitsstellen integrierbar sein kann. Von H. J. Smith ([14], S. 277 (1875)) stammt ein Beispiel einer nicht im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktion, deren Unstetigkeitsstellen eine nirgends dichte Menge bilden. (Eine Menge P heißt in einem Intervall I nirgends dicht, wenn jedes offene Teilintervall von I ein offenes Intervall enthält, in dem keine Punkte von P liegen.) Im Jahre 1881 entdeckte V. Volterra eine nirgends dichte Menge streng positiven äußeren Maßes (siehe 6.9.) (vgl. [68], S. 56). Diese Beispiele zeigen, daß die Begriffe nirgends dichte Menge und Menge vom Maße 0 völlig verschieden sind (vgl. 6.9.).

gilt. Zu diesem Zweck behauptete er, aus der Konvergenz der Reihe auf $[a, b]$ ergebe sich $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |u_n(x) + u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| = 0$, d. h., er setzte im Grunde stillschweigend voraus, die Reihe konvergiere gleichmäßig.)

In dieser Abhandlung traf Riemann ([86], S. 255–259) die bedeutsame Unterscheidung zwischen Fourierreihen und trigonometrischen Reihen, deren Koeffizienten a_n und b_n keine Fourierkoeffizienten zu sein brauchen, und er gab Beispiele trigonometrischer Reihen an, die keine Fourierreihen sind.

Diese fundamentale Arbeit Riemanns über die trigonometrischen Reihen ist eine der Quellen, aus welcher sich die moderne Analysis entwickeln sollte.

6.3.3. *Gliedweise Integration einer Reihe stetiger Funktionen und Klärung des Begriffs der gleichmäßigen Stetigkeit*

Eduard Heine (ein langjähriger Freund von Weierstraß, wie aus einem Brief Heines vom 29. April 1862 hervorgeht ([50], Anhang III), der um 1870 zwei ehemalige Schüler von Weierstraß, nämlich H. A. Schwarz und G. Cantor, zu Assistenten hatte) veröffentlichte als erster (im Jahre 1869) den Satz, den Weierstraß seit Jahren in seinen Vorlesungen gebracht hatte ([70], S. 353): Wenn eine Reihe auf $[a, b]$ stetiger Funktionen dort gleichmäßig konvergiert, kann man die Reihe auf $[a, b]$ gliedweise integrieren. Heine benutzte den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz, um zu beweisen, daß die Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \cdots$$

eindeutig ist.

Der wichtigste Satz aus Heines Arbeit von 1869 ist der folgende ([70], S. 355): „Soll eine trigonometrische Reihe ... von $-\pi$ bis π im allgemeinen in gleichem Grade convergieren und im allgemeinen Null vorstellen ..., so müssen alle Coeffizienten a und b verschwinden, und die Reihe stellt dabei überall Null vor.“ Somit tauchen in dieser (durch die Riemannsche Arbeit [86] inspirierten) Abhandlung erstmals die Ausnahmepunkte auf, in denen eine trigonometrische Reihenentwicklung nicht mehr eindeutig ist. Das sind die Punkte, deren Untersuchung zur Entstehung der Cantorschen Mengenlehre führen sollte.[1]

Wir hatten im Zusammenhang mit dem Cauchyschen Integralbegriff darauf hingewiesen (in 6.3.1.), daß Cauchy bei seinem Beweis der Existenz des Grenzwertes, der das bestimmte Integral definiert, stillschweigend den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit benutzt hatte. Wieder war es Heine, der im Jahre 1872 in seiner Arbeit *Die Elemente der Functionenlehre*, in der er die Weierstraßsche Funktionentheorie ([71], S. 184) entwickelte (von der in 6.6. die Rede sein wird), den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit einführte. Heine bewies auch (S. 188),

[1]) Siehe 10.1.

daß eine auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist.

Somit waren erst um 1870 einige der wesentlichen Begriffe der modernen Analysis geklärt.

6.4. Erste Überlegungen über die reellen Zahlen, über eine allgemeine Theorie der Funktionen und über Mengen

6.4.1. *Über einige Theorien der irrationalen Zahlen in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts*

Wie wir schon gesehen haben, benutzten Bolzano im Jahre 1817 und Cauchy im Jahre 1821 das „Cauchysche Kriterium", eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Reihe; doch fordert diese hinreichende Bedingung, daß die Menge der reellen Zahlen schon konstruiert ist. Cauchy hatte in seinem *Cours d'Analyse* ([26][1], S. 3) eine irrationale Zahl (nachdem die rationalen Zahlen ausgehend vom Maß der Größen definiert sind) als „die Grenze aller derjenigen verschiedenen Brüche, welche immer mehr und mehr der irrationalen Zahl angenäherte Werte liefern" definiert. Es ist aber klar, daß die Menge $\boldsymbol{R}$ schon definiert sein muß, ehe von einem Grenzwert rationaler Zahlen gesprochen werden kann ([46], Kap. XIII).

Etwa um 1835 schrieb Bolzano eine Abhandlung über die *Grössenlehre*, die unvollendet und unveröffentlicht geblieben ist; ein Teil dieser Arbeit ist seine *Funktionenlehre*, auf die wir in 6.4.2. eingehen werden. Aus dieser Abhandlung hat Rychlik im Jahre 1962 die Bolzanosche Theorie der reellen Zahlen herauspräpariert ([89]). Diese Bolzanosche Theorie ist der erste Versuch, die Theorie der reellen Zahlen auf rein arithmetischer Basis ([89], S. 5) folgerichtig zu begründen, obwohl die Bolzanosche Theorie, die auf einer Approximationsmethode beruht, keineswegs streng ist ([88], S. 168–169).

Bolzano begann ([89], S. 15) mit der Betrachtung eines *unendlichen Größenausdrucks*: Das ist ein Ausdruck, durch den ein unendlicher Größenbegriff, d. h. ein Zahlenbegriff, in welchem eine unendliche Menge von Verrichtungen (Grundrechenarten) gefordert wird, dargestellt wird. Als Beispiele führte er an:

$$1 + 2 + \cdots + n + \cdots, \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n} + \cdots,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\cdots, \qquad \frac{1}{1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots}.$$

Dann heißt es, daß „(wir) . . . nicht nur (einen) unendlichen, sondern auch (einen) endlichen Zahlenausdrucke S *näherungsweise bestimmen* oder *messen*", wenn zu

jedem $q \geqq 1$ ein $p \in \mathbf{Z}$ gefunden werden kann derart, daß

$$S = \frac{p}{q} + P_1 = \frac{p+1}{q} - P_2$$

gilt, wobei P_1 und P_2 *rein positive* Zahlenausdrücke sind (P_1 kann gleich 0 sein). Akzeptiert man die Interpretation von van Rootselaar ([88], S. 171—173), die mit Bolzanos Konzeption übereinzustimmen scheint, so kann man einen *rein positiven* Größenausdruck als eine Folge (u_n), $n \in \mathbf{N}$, definieren derart, daß ein $n_0 \in \mathbf{N}$ mit $u_n > 0$ für $n > n_0$ existiert. Dann kann eine „*ermeßliche*" Größe oder Zahl in der Gestalt

$$S = (s_n)\,, \quad n \in \mathbf{N}\,, \quad \text{mit} \quad s_n = \frac{p}{q} + P_{1,n} = \frac{p+1}{q} - P_{2,n}$$

geschrieben werden, wobei die Folgen $(P_{1,n})$ und $(P_{2,n})$ durch diese Gleichungen bestimmt sind.

Anschließend bewies Bolzano ([89], S. 20), daß jede rationale Zahl *ermeßlich* ist, und führte den Begriff des unendlich Kleinen ein ([89], S. 27—29), der dem Cauchyschen zu entsprechen scheint. Danach formulierte er den Satz ([89], S. 38), daß die Summe zweier ermeßlicher Zahlen ermeßlich ist. Sein Beweis ist jedoch unvollständig, und in der obigen Interpretation braucht die Summe zweier ermeßlicher Zahlen nicht ermeßlich zu sein ([88], S. 175—177). Darüber hinaus zwang ihn die Art, in der er die Gleichheit zweier ermeßlicher Zahlen definierte ([89], S. 56), dazu, eine unendlich kleine Zahl mit einer Folge zu identifizieren, deren Glieder sämtlich gleich null sind. Das tat er bereits im Jahre 1816 ([6], § 27, S. 27), sah es aber in einem 1847 geschriebenen Buch ([8], S. 10) als falsch an. Überdies gibt es ermeßliche Zahlen A und B, für welche weder $A = B$ noch $A > B$ noch $A < B$ gilt ([88], S. 178).

Von den anderen Definitionen der irrationalen Zahlen, die weniger konsequent als die Bolzanosche sind, seien die 1837 von Hamilton veröffentlichte und die 1849 von J. Bertrand in seinem *Traité d'arithmétique* dargelegte erwähnt ([50], 3.2.2.).

6.4.2. *Das „vollkommen consequente System der Mathematik" von Martin Ohm und die Bolzanosche Funktionenlehre*

Der erste Versuch, im neunzehnten Jahrhundert ein Buch „Elemente der Mathematik" zu schreiben und für die gesamte Mathematik das zu geben, was die *Elemente* des Euklid für die Geometrie sind, stammt von Martin Ohm. Dies erklärte er selbst zu Beginn des ersten Bandes seines Werkes ([80], S. V), dessen erste Auflage 1822 erschien und das 8 bis 9 Bände („Theile") umfassen sollte. Der Grundgedanke ([80], S. VII) des Verfassers ist, daß die unbenannte ganze Zahl „der höhere Begriff ist, welcher das ganze Gebiet der Mathematik umfaßt". Hier findet man das erste Projekt, die gesamte Mathematik ausgehend von der ganzen Zahl aufzubauen, die erste Etappe der Arithmetisierung der Mathematik. Überdies

seien es nicht „Eigenschaften der *Grössen*, die das Wesen des mathematischen Kalkuls ausmachen, sondern Eigenschaften der *Operationen*, welche letztere aus der Betrachtung der *Zahl* mit Nothwendigkeit hervorgehen" ([80], S. VII). „Die Analysis hat es, diesem nach, nicht mit den Grössen zu thun, sondern hat nur die allgemeinern Gesetze der Operationen zu fixiren . . ." ([80], S. VIII).

Zu Anfang seines Werkes ([80], S. 7) nahm Ohm die Existenz der Menge $\boldsymbol{N}$ der positiven ganzen Zahlen als gegeben an. Nachdem er Addition und Multiplikation definiert hatte ([80], S. 7, 8), zeigte er,[1]) daß diese Operationen kommutativ ([80], S. 14), assoziativ ([80, S. 16) und distributiv ([80], S. 96, 97) sind ([46], 2.2, 2.3, 4.1.1). Um den Quotienten a/b zu definieren, wenn a und b zu $\boldsymbol{N}$ gehören und $b \neq 0$ ist, aber nicht in a aufgeht, führte Ohm ([80], S. 72—73) einen *divisen Ausdruck* oder eine *divise Zahl* $1/b$ ein, für welche $b \cdot (1/b) = 1$ ist. Was die irrationalen Zahlen betrifft, so beschränkte er ihre systematische Untersuchung auf den Fall ([80], S. 187), daß $\sqrt[b]{a}$ für $a \in \boldsymbol{Q}_+$ keine rationale Zahl ist.

In seinem Vorwort zu Band 2 der zweiten Auflage wies Ohm darauf hin ([81], S. VI—VII), daß „. . . Franzosen, vorzüglich Cauchy . . . vieles gethan und ihrerseits auf diesen unwissenschaftlichen und dürftigen Zustand der Analysis . . . aufmerksam gemacht . . . dagegen nichts besseres und haltbareres aufgebaut (haben) . . ." Insbesondere habe „. . . der sonst so treffliche Cauchy . . . oft gar nichts Allgemeines an die Stelle des Eingerissenen gesetzt". Cauchy habe sich „. . . zu sehr vereinzelt, so daß nach dem von ihm . . . Gegebenen, ein *allgemeiner* Kalkul, ohne welchen doch der Analyst nicht existiren kann, genau genommen nicht mehr statt findet". Ohm erwähnte auch ([81], S. VIII), er habe „die schönen Sätze der Konvergenz der Reihen von Cauchy und Gauß . . . abermals ausgelassen, weil diese Einzelheiten späteren Theilen dieses Systems vorbehalten bleiben müssen". Es muß jedoch gesagt werden, daß sein Buch an Strenge einiges zu wünschen übrig läßt. So sind seine Definition der Ableitung ([81], S. 120f.) ebenso wie die der Konvergenz einer Reihe ([81], S. 261) keineswegs streng. Dagegen kommt seine Definition der Stetigkeit ([81], S. 138) den Definitionen von Bolzano und von Cauchy sehr nahe.

Einen anderen Versuch, ein Werk zu erarbeiten, das die gesamte Mathematik umfaßt, hatte Bolzano mit seiner unvollendet gebliebenen *Grössenlehre* unternommen; der 1830 geschriebene Teil *Functionenlehre* wurde jedoch erst 1930 veröffentlicht.

Im ersten Abschnitt dieses Buches, *Stetige und unstetige Functionen*, zitierte Bolzano ([9], S. 15) die von Cauchy und Ohm formulierten Definitionen der Stetigkeit; er benutzte, ohne ihn zu beweisen, den Satz ([9], S. 28), der dem später so genannten Satz von Bolzano-Weierstraß entspricht: Jede beschränkte unendliche Menge reeller Zahlen besitzt einen Häufungspunkt. Wir weisen darauf hin (vgl. [9], Anmerkungen, S. 5), daß dieser Satz nach Bolzano und Weierstraß benannt wurde, ehe diese zunächst gar nicht veröffentlichte Arbeit erschienen war und obwohl diese Aussage in keiner der veröffentlichten Schriften Bolzanos enthalten ist.

---

[1]) Die Beweise beruhen auf der Tatsache, daß die betrachteten Ausdrücke aus der gleichen Anzahl von Einheiten zusammengesetzt sind.

In diesem Buch findet sich ein sonderbarer Fehler ([9], S. 39): Bolzano betrachtete die Reihe

$$x^2 + \frac{1}{1-y} + \cdots + \frac{1}{n-y} + \cdots$$

und behauptete, sie stelle eine „für jeden Werth von x stetige Function dar, so lange y nur eben keine derjenigen Werthe annimmt, die in der Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... liegen", ohne zu berücksichtigen, daß die Reihe mit dem allgemeinen Glied $1/(n-y)$ nicht einmal konvergiert. In dieser Arbeit ([9], S. 61ff.) konstruierte er eine auf $[0, 1]$ stetige Funktion, die auf diesem Intervall unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Die Konstruktion dieser Funktion geschieht mit bemerkenswerter Sorgfalt und ganz in modernem Geist. Dagegen ist festzuhalten, daß Bolzano ebenso wie Cauchy den inkorrekten Satz aussprach, ein einfacher Limes stetiger Funktionen sei eine stetige Funktion ([9], S. 68–69).

Im zweiten Abschnitt, *Abgeleitete Functionen*, kritisierte er ([9], S. 96) den Beweis eines Satzes, den im Jahre 1830 der achtzehnjährige Evariste Galois, Schüler der Ecole normale, veröffentlicht hatte; dieser Satz sollte besagen, daß „eine jede Function ihre abgeleitete habe, wenn wir nur einzelne Werthe ausnehmen". Daran anschließend ([9], S. 98) gab Bolzano ein Beispiel einer auf einem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion an, die auf einer in $[a, b]$ dichten Menge nicht differenzierbar ist („... gibt uns einen Beweis, daß eine Function sogar stetig seyn könne und dort keine abgeleitete hat für so viele Werthe ihrer Veränderlichen, daß zwischen je zwey derselben sich noch ein dritter, für welches sie abermahls keine abgeleitete hat, nachweisen läßt"). Es sei darauf hingewiesen, daß Bolzano nicht, wie oft gesagt wird, behauptete, diese Funktion sei in keinem Punkt von $[a, b]$ differenzierbar, sondern nur nachwies, daß sie in keinem Punkte der überall dichten Menge A des Intervalls $[0, 1]$ eine endliche Ableitung besitzt, obwohl sie tatsächlich in keinem Punkte des Intervalls $]0, 1]$ eine endliche oder unendliche Ableitung bestimmten Vorzeichens besitzt ([9], Anmerkungen, S. 16); im Punkt $x = 0$ hat sie eine rechtsseitige Ableitung, die gleich $+\infty$ ist.

Trotz einiger Schwächen ist die Art und Weise, in der Bolzano in seiner Abhandlung die Grundlagen der Analysis betrachtete, für seine Zeit etwas ganz Neues.

6.4.3. *Paradoxien des Unendlichen*

Im Jahre 1851 erschien, von Bolzano 1847, ein Jahr vor seinem Tode, geschrieben, das Buch *Paradoxien des Unendlichen*, das völlig unbeachtet bleiben sollte, bis H. Hankel darauf hinwies ([64], S. 189), daß diese Schrift „Treffliche Bemerkungen über den Begriff des Unendlichen enthält".

Schon zu Anfang seines Buches ([8], S. 1) erweist sich Bolzano als derjenige, der das Problem des Unendlichen am tiefsten durchdrungen hat, denn er schrieb: „... gewiß die meisten paradoxen Behauptungen, denen wir auf dem Gebiete der Mathematik begegnen, sind Sätze, die den Begriff des Unendlichen entweder

unmittelbar enthalten oder doch bei ihrer versuchten Beweisführung in irgendeiner Weise sich auf ihn stützen." Deshalb versuchte Bolzano, diesen Begriff zu klären. Obwohl dieses Buch vornehmlich die philosophischen Vorstellungen Bolzanos zum Ausdruck bringt, darf seine rein mathematische Bedeutung nicht unterschätzt werden.

Dort findet sich ([8], S. 13—14) die später von Dedekind aufgegriffene Aussage über die Existenz einer unendlichen Menge.[1]) Zu diesem Zweck „bewies" Bolzano, daß „die Menge der Sätze und Wahrheiten an sich" (eine Menge, deren mathematische, ja sogar logische Definition gewagt zu sein scheint) unendlich ist. Dabei argumentierte er folgendermaßen: Eine Wahrheit oder eine Aussage, welche besagt, es gebe Wahrheiten, möge mit A bezeichnet werden. Dann ist die Aussage „*A ist wahr*" eine neue Aussage B, die von A verschieden ist (es ist hier nicht die Gelegenheit, in eine „philosophische" Diskussion darüber einzutreten, um zu erkennen, ob A tatsächlich von B verschieden ist), denn sie hat ein ganz anderes Subjekt als A, nämlich die Aussage A selbst. Aus B leitet man auf dieselbe Art eine Aussage C her, und so weiter. Die Menge aller dieser Aussagen ist umfassender als jede endliche Menge. So kommt Bolzano hier tatsächlich wieder auf den klassischen Begriff des Unendlichen und auf die anschauliche Konstruktion der Folge der ganzen Zahlen. Ohne daß die philosophischen Prämissen des Bolzanoschen „Beweises" diskutieren werden sollen, ist klar, daß er die Unendlichkeit der Menge der positiven ganzen Zahlen voraussetzt.

Das wichtigste an diesem Werk besteht jedoch darin, daß Bolzano ([8], S. 28—29) besonders deutlich auseinandersetzt, daß man zwei verschiedene unendliche Teilmengen von $\boldsymbol{R}$ eineindeutig einander zuordnen kann, und das ist ein erster Schritt zur Definition des Begriffs der Gleichmächtigkeit von Mengen ([46], 1.16.1). Unter Benutzung der eineindeutigen Abbildung $x \mapsto y = \frac{12}{5}x$ zeigte Bolzano, daß man jedem Punkt aus $[0, 5]$ einen eindeutig bestimmten Punkt aus $[0, 12]$ zuordnen kann, und umgekehrt. Hieraus ergab sich die Notwendigkeit, den Begriff der Gleichheit für unendliche Mengen neu zu definieren; dies sollte Cantor leisten, der für das Bolzanosche Buch große Bewunderung empfand.

Die Bedeutung dieses Bolzanoschen Werkes[2]) besteht darin, daß es versucht, die unendlichen Mengen und ihre Eigenschaften zu definieren und zu untersuchen. Auch hier war Bolzano seiner Zeit voraus.

6.5. Die Konstruktionen der reellen Zahlen

Abgesehen von den Schwierigkeiten, auf die bereits im Zusammenhang mit den Problemen hingewiesen wurde, in denen der Begriff des Grenzwertes auftauchte, Schwierigkeiten, die eine strenge Definition der Menge $\boldsymbol{R}$ erforderten, lassen sich zwei weitere Gründe anführen, welche die Mathematiker, die über die Grundlagen

[1]) Bolzano benutzt tatsächlich schon das Wort „Menge".
[2]) Trotz zahlreicher Überlegungen, deren Strenge zu wünschen übrig läßt.

nachdachten, anscheinend dazu anregten, die Menge der reellen Zahlen zu „konstruieren". Einmal war ein besseres Verständnis der irrationalen Zahlen vorhanden, einerseits dank dem Beweis, daß im allgemeinen algebraische Gleichungen nicht durch Radikale lösbar sind, andererseits dank dem von Liouville stammenden Beweis, daß die Menge der transzendenten Zahlen unendlich ist (vgl. 5.7.). Daneben gab es die allgemeine Tendenz, welche wohl der entscheidende Grund war, die ganze Analysis ausgehend von den ganzen Zahlen aufzubauen,[1]) die zur Arithmetisierung der Analysis führen sollte. Diesem inneren Zwang der Analysis, ihre Grundlagen streng zu fassen, entsprangen drei verschiedene Theorien der reellen Zahlen, die wir jetzt untersuchen wollen, indem wir sie in ihren mathematischen und historischen Zusammenhang einordnen.

6.5.1. *Karl Weierstraß*

Die Weierstraßsche Theorie der reellen Zahlen ist zwar nicht diejenige strenge Theorie, die als erste konzipiert oder als erste veröffentlicht wurde, aber jedenfalls die erste, um die sich die umfassende Reform der Analysis kristallisierte, die ihr schließlich diejenige Gestalt gab, in der wir sie heute kennen. Weierstraß hatte nach seinem Studium an der Universität Münster von 1842 bis 1855 an Gymnasien gottverlassener Provinzstädte unterrichte; der einzige Kontakt, den er in diesen Jahren mit den Mathematikern seiner Zeit hatte, war eine Begegnung mit Dirichlet während eines Aufenthaltes in Berlin zwischen August und Oktober 1844. Es dürfte interessant sein, die Bemerkung Jacobis über Dirichlet zu erwähnen. In einem Brief vom 21. Dezember 1846 ([49], S. 50) an A. v. Humboldt schrieb er, weder er noch Cauchy, noch Gauß wisse, was ein völlig strenger mathematischer Beweis sei, nur Dirichlet wisse es: „Wenn Gauß sagt, er habe etwas bewiesen, ist es mir sehr wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist eben so viel pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiß." Im Jahre 1856 wurde Weierstraß an die Berliner Universität berufen, und von dieser Zeit an begann er, die Grundlagen der Analysis, wie sie bis dahin für richtig gehalten wurden, systematisch zu durchforsten.

Man kann die Ausarbeitung der Weierstraßschen Theorie der reellen Zahlen auf die Zeit um 1863 datieren ([49], S. 57). Sie wurde erstmals 1872 von E. Kossak [74] nach Aufzeichnungen publiziert, die er im Wintersemester 1865—1866 in der Weierstraßschen Vorlesung *Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen* gemacht hatte. Im wesentlichen legte Weierstraß im Verlauf von mehr als zwanzig Jahren dieselbe Theorie der reellen Zahlen dar. [Das französische Original folgt der unveröffentlichten Ausarbeitung der im Sommersemester 1878 gehaltenen Weierstraßschen Vorlesung *Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen*, die Adolf Hurwitz angefertigt hatte; bei der deutschen Ausgabe wurde die Ausarbeitung (derselben Vorlesung) von Ferdinand Rudio benutzt [99]. — *Anm. d. Übers.*]

---

[1]) Dedekind schrieb, „daß jeder auch noch so fern liegende Satz der Algebra und höheren Analysis sich als ein Satz über die natürlichen Zahlen aussprechen läßt, eine Behauptung, die ich auch wiederholt aus dem Munde von Dirichlet gehört habe" ([39][1], S. VI).

Weierstraß setzte die Menge $\boldsymbol{N}$ der positiven ganzen Zahlen und der Null voraus und begann ([49], S. 96; [99], S. 6) mit der Definition des Begriffs der Gleichheit, der in seiner Theorie der reellen Zahlen eine fundamentale Rolle spielt. Er sagte, zwei ganze Zahlen seien einander gleich, wenn sie aus gleich vielen Einheiten zusammengesetzt sind, und diese mit $a = b$ bezeichnete Beziehung habe die Eigenschaft, daß aus $a = b$ und $b = c$ auch $a = c$ folge. Um die positiven rationalen Zahlen zu definieren, führte Weierstraß ([49], S. 98; [99], S. 11) den Begriff des *genauen Teils der Einheit* an: $1/n$ ist der genaue n-te Teil der (Haupt-)Einheit genau dann, wenn $n \cdot (1/n) = 1$ gilt (diese Definition ähnelt der Ohmschen). Um die Gleichheit zweier rationaler Zahlen zu definieren, welche endliche Linearkombinationen dieser neuen Zahlen (der genauen Teile der Einheit) mit ganzen Koeffizienten sind, benutzte Weierstraß die folgenden Transformationen, die man mit diesen neuen Zahlen ausführen kann: 1° Stets können n Elemente der Gestalt $1/n$ durch die Einheit ersetzt werden; 2° jede Zahl kann durch ihre genauen Teile ersetzt werden (beispielsweise 1 durch $p \cdot (1/p)$). Dann wird eine rationale Zahl durch ein *Aggregat*, d. h. eine endliche Menge, deren Elemente zu $\boldsymbol{Q}_+$ gehören, dargestellt. So könnte beispielsweise $4/3$ durch das Aggregat $\{1/3, 1/3, 1/3, 1/3\}$ dargestellt werden (das ist eine der unendlich vielen möglichen Darstellungen von $4/3$). Nun kann die Gleichheit zweier rationaler Zahlen definiert werden: „Zwei Zahlen sind einander gleich, wenn eine in der angegebenen und gestatteten Weise so transformiert werden kann, daß beide dieselben und nur dieselben Elemente und jedes einzelne in derselben Anzahl enthalten" ([99], S. 13). Ausgehend von der Einheit und ihren genauen Teilen, von denen es unendlich viele gibt, könnte man Aggregate konstruieren, welche unendlich viele Elemente enthalten (d. h. Folgen unendlich vieler rationaler Zahlen). Um aber diese neuartigen, aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzten Zahlen streng zu definieren, müssen diese Elemente in dem Bereich der existierenden Zahlen (der Einheit und ihrer genauen Teile) nach einem bestimmten Gesetz genommen werden ([49], S. 101). Der erste Schritt zur Definition dieser neuartigen Zahlen, welche eine Erweiterung der positiven rationalen Zahlen sind, sollte nun die Einführung des mengentheoretischen Begriffs einer Zahl a' als Bestandteil einer Zahl a sein. Wir sagen, a' sei ein Bestandteil von a, wenn man a' in a'' so transformieren kann, daß alle Elemente von a'' ebenso oft in a wie in a'' vorkommen; dabei kann a auch andere Elemente enthalten. Es ist zu beachten, daß a' ein Bestandteil von a genannt wird, wenn a' nur endlich viele Elemente von a enthält. Dies ermöglichte es, die Gleichheit zweier Aggregate zu definieren, die aus unendlich vielen Elementen von $\boldsymbol{Q}_+$ zusammengesetzt sind. Dieser Begriff gestattete es Weierstraß, die Gleichheit neu zu definieren: „Wir sagen, zwei Zahlen a und b seien gleich, wenn jeder Bestandteil von a in einen Bestandteil von b und umgekehrt jeder Bestandteil von b in einen Bestandteil von a transformiert werden kann." Die so definierte Gleichheit ist symmetrisch und transitiv ([49], S. 103). Diese neue Definition der Gleichheit zieht eine neue Definition der Ungleichheit zweier Zahlen a und b nach sich: Man sagt, es sei $a < b$, wenn jeder Bestandteil von a ein Bestandteil von b ist und eine Zahl c existiert, welche Bestandteil von b, aber kein Bestandteil von a ist.

Um jetzt die aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzten neuartigen Zahlen zu definieren, führte Weierstraß ein Kriterium endlicher Werte ein: Wir sagen, eine Zahl a haben einen endlichen Wert, wenn eine Zahl b existiert, welche größer ist als a und aus endlich vielen Elementen von $\boldsymbol{Q}_+$ zusammengesetzt ist. Auf Grund dieses Kriteriums konnte Weierstraß die neuartigen, aus unendlich vielen Elementen zusammengesetzten Zahlen definieren und zeigen, daß die elementaren Operationen der Arithmetik auch für diese neuartigen Zahlen ausführbar sind. Durch Definition der Subtraktion für diese neuartigen Zahlen erhielt er dann die Menge $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen.

Somit ist schließlich für Weierstraß die reelle Zahl die Äquivalenzklasse bezüglich der durch die Gleichheit der Aggregate, welche dem Kriterium der Endlichkeit genügen, definierten Äquivalenzrelation. Für ein solches Aggregat als Repräsentant seiner Klasse existiert also in $\boldsymbol{Q}$ eine ihm entsprechende Klasse, oder seine Klasse definiert eine neuartige, eine irrationale Zahl.

6.5.2. *Richard Dedekind*

Dedekind hatte im Jahre 1854 seine Habilitationsschrift unter dem Patronat von Gauß abgegeben. Jedoch war die Ankunft Dirichlets in Göttingen, der dort die Nachfolge des 1855 verstorbenen Gauß antrat, für Dedekinds Entwicklung als Mathematiker entscheidend. Es sei für ihn, schrieb er ([50], 1.4.1), ein sehr großes Vergnügen gewesen, seinen [Dirichlets] tiefen und eindringlichen Vorlesungen zu folgen; tatsächlich habe er später alle seine Vorlesungen über Zahlentheorie, Potentialtheorie, über das bestimmte Integral, über partielle Differentialgleichungen gehört, und Dirichlet habe aus ihm sowohl durch seinen Unterricht als auch durch die zahlreichen persönlichen Unterhaltungen, die allmählich immer vertrauensvoller geworden seien, einen neuen Menschen gemacht.[1]) Außerdem übte damals auch Riemann einen erheblichen Einfluß auf Dedekind aus. In einem Brief vom 16. September 1856 an Riemann schrieb Dedekind ([50], 1.4.2): „. . . und meinen Dank für alle vielfache Belehrung zu wiederholen, die ich Ihnen seit einem Jahre verdanke; . . .“

Im Jahre 1858 wurde Dedekind Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule in Zürich; als er dort für das Wintersemester 1858—1859 seine Vorlesung *Elemente der Differentialrechnung* vorbereitete, „fühlte [er] dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik“ ([38][1], S. 1). (Wie auch Weierstraß vor seiner Ankunft in Berlin hatte Dedekind niemals vorher die Anfangsgründe der Analysis unterrichtet.) Nachdem er 1862 nach Braunschweig, seiner Geburtsstadt, zurückgekehrt war — auch Gauß ist dort geboren —, um dort an der Technischen Hochschule zu lehren, las er während des Wintersemesters 1862—1863 eine Vorlesung über Differential- und Integralrechnung ([50], Anhang IV), deren § 1 der Einführung den Titel *Das Gebiet der reellen Zahlen, ihre Stetigkeit* trägt. In § 4 führte er den Begriff des Grenz-

---

[1]) Vgl. dazu auch [89 bis], S. 28—58, insbesondere S. 54. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

wertes ein, also nachdem er die reellen Zahlen definiert hatte, und bewies den Satz, daß jede beschränkte monoton wachsende Folge einen Grenzwert hat ([46], 14.3.2). Aber erst im Jahre 1872 (obwohl er schon 1870 spätestens beabsichtigt hatte, seine Theorie zu veröffentlichen ([50], 3.1.1)) publizierte er *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*

Schon zu Beginn seines Vorwortes ([38][1], S. 3—4) legte Dedekind dar, daß seine Überlegungen vom Herbst 1858 stammen; denn damals habe er den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik" gefühlt (vgl. oben). Dieser Mangel manifestiere sich insbesondere in den Grenzwertproblemen, und namentlich beim Beweis des Satzes, „daß jede Größe, welche beständig, aber nicht über alle Grenzen wächst, sich gewiß einem Grenzwert nähern muß, nahm ich meine Zuflucht zu *geometrischen* Evidenzen". Und als er seine erste Analysisvorlesung vorzubereiten hatte, „war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, daß ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalrechnung gefunden haben würde". In seiner weiteren Kritik der geometrischen Methoden schrieb Dedekind, daß der angegebene Satz mit solchen Mitteln bewiesen werde, doch habe ihn eine genaue Untersuchung davon überzeugt, „daß dieser oder auch jeder mit ihm äquivalente Satz gewissermaßen als ein hinreichendes Fundament für die Infinitesimalanalysis angesehen werden kann". In diesem Punkt stimmt er mit Méray ([48], S. 339) überein, ebenso mit Weierstraß, dessen Endlichkeitskriterium der Aussage dieses Satzes äquivalent ist. Es blieb also Dedekind vorbehalten, „seinen eigentlichen Ursprung in den Elementen der Arithmetik zu entdecken", was ihm am 24. November 1858 gelang (diese genaue Datierung braucht nicht zu erstaunen; denn Dedekind führte ein Tagebuch, das er aber anscheinend vor seinem Tode vernichtet hat).

In § 1 ([38][1], S. 5), *Eigenschaften der rationalen Zahlen*, sagte Dedekind ausdrücklich, er setze die Entwicklung der Arithmetik der Menge Q der rationalen Zahlen hier voraus; diese Menge ist ein Zahlkörper (diesen Begriff hatte Dedekind 1871 eingeführt ([37], S. 224). Für Dedekind war es wichtig herauszuarbeiten, daß Q ein „wohlgeordnetes" unendliches Gebiet ist. Bezüglich dieser Ordnungsrelation in Q gelten die folgenden Eigenschaften: I. Ist $a > b$ und $b > c$, so ist $a > c$. II. Ist $a \neq b$, so existieren unendlich viele rationale Zahlen zwischen a und b. (Bemerkenswerterweise hob Dedekind auch die Bedeutung der Tatsache hervor, daß die Menge der rationalen Zahlen dicht ist, und führte so, auf der Grundlage der Analysis, eine wichtige topologische Eigenschaft ein.) III. Ist a ein Element von Q, so kann man alle Zahlen von Q so in zwei Klassen A_1 und A_2 einteilen, daß für jedes $a_1 \in A_1$ die Beziehung $a_1 < a$ gilt und für jedes $a_2 \in A_2$ die Beziehung $a_2 > a$; dabei kann die Zahl a nach Belieben zu A_1 oder zu A_2 gerechnet werden. (Diese Definition des Schnittes in der Menge der rationalen Zahlen, die eine Einteilung von Q in zwei Teilmengen heranzieht, gründet die Dedekindsche Definition der Zahlen auf den Begriff der Menge. Überdies geht in diese dritte Eigenschaft die Vorstellung von der Gesamtheit der rationalen Zahlen, d. h. die Vorstellung von der Gesamtheit der Elemente einer unendlichen Menge ein.)

Der Paragraph 4 ([38][1], S. 11) ist überschrieben mit *Schöpfung der irrationalen Zahlen.* Somit ist man von vornherein darauf orientiert, daß es sich darum handeln wird, diese Zahlen „zu erschaffen". Dedekind bemerkte zunächst, daß jede rationale Zahl a eine Zerlegung der Menge aller rationalen Zahlen in zwei Klassen ermöglicht, welche den oben beschriebenen A_1 und A_2 entsprechen. Es sei nun eine Einteilung von $\boldsymbol{Q}$ in zwei Klassen A_1 und A_2 gegeben derart, daß jede Zahl aus A_1 kleiner ist als jede Zahl aus A_2; dann nennt man eine solche Einteilung einen *Schnitt,* in Zeichen (A_1, A_2). So kann man sagen, eine rationale Zahl erzeuge einen Schnitt oder vielmehr zwei Schnitte, „welche wir aber nicht als wesentlich verschieden ansehen wollen". Außerdem besitzt dieser Schnitt folgende Eigenschaft: Entweder enthält A_1 ein größtes Element oder A_2 ein kleinstes. Und umgekehrt ([38][1], S. 12), besitzt ein Schnitt diese Eigenschaft, so wird er durch die größte Zahl von A_1 oder durch die kleinste Zahl von A_2 erzeugt. Dedekind gab anschließend ein Beispiel an, das zeigt, daß unendlich viele Schnitte existieren, die nicht von rationalen Zahlen erzeugt werden ([46], E XIII.8). Für Dedekind steckte gerade in dieser Tatsache, daß nicht alle Schnitte von rationalen Zahlen erzeugt werden, die *Unvollständigkeit* oder *Unstetigkeit* des Bereichs der rationalen Zahlen. „Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so *erschaffen* wir eine neue, eine *irrationale* Zahl α, welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) vollständig definiert ansehen" ([38][1], S. 13). Ausgehend von dieser Definition entspricht jedem Schnitt eine und nur eine rationale oder irrationale Zahl, und Dedekind sah „zwei Zahlen stets und nur dann als *verschieden* oder *ungleich* an, wenn sie wesentlich verschiedenen Schnitten entsprechen" ([38][1], S. 13).

Dedekind zeigte dann ([38][1], S. 15), daß sich die Ordnungsrelation von $\boldsymbol{Q}$ auf $\boldsymbol{R}$ fortsetzen läßt; der Körper $\boldsymbol{R}$ ist *stetig* ([38][1], S. 16) (d. h. in moderner Terminologie *zusammenhängend*).

6.5.3. *Die Theorien von Charles Méray und von Georg Cantor*

Als erster veröffentlichte 1869 Charles Méray eine strenge Theorie der irrationalen Zahlen [79]. Er kam dahin, indem er die Grundidee seiner Auffassung von der Analysis folgerichtig anwendete, die ihr auch als vereinheitlichendes Werkzeug diente, nämlich die Entwicklung von Funktionen in Taylorreihen. Diese Auffassung, die erstmalig von Lagrange im Hinblick auf die Algebraisierung der Analysis zum Ausdruck gekommen war, wurde von Méray 1868 [78] weiterentwickelt und in seinen späteren Arbeiten verfolgt.

In seiner Abhandlung über die irrationalen Zahlen betonte Méray zunächst ([79], S. 280—281), daß zwei *Prinzipien* in dieser Epoche die wesentliche Grundlage aller Gebiete der Mathematik seien, in denen der Grenzwertbegriff eine Rolle spielt. Das erste Prinzip laute: Eine nach oben beschränkte monton wachsende Folge (bzw. eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge) strebt gegen einen Grenzwert. Das zweite Prinzip heiße: Eine „Cauchy-Folge" besitzt einen Grenzwert. Bis jetzt habe man diese Sätze als Axiome angesehen, doch enthebe diese Art

des Vorgehens uns nicht der Notwendigkeit, die ziemlich unklare Vorstellung von inkommensurablen Zahlen in die Überlegungen einzuführen. Deshalb beschloß Méray, einen *Umweg*, aber *sichereren Weg* zu gehen, der ihn dazu führte, zunächst die irrationalen Zahlen zu definieren und eben dadurch den Begriff des Grenzwerts zu klären.

Es sei eine *fortschreitende Variable* (d. h. eine Folge) $v = (v_n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, $v_n \in \boldsymbol{Q}$, gegeben, die gegen einen Grenzwert $v \in \boldsymbol{Q}$ strebt ([79], S. 284—285); dann ist v eine „Cauchy-Folge" ([46], 13.2.2). Ist nun v eine „Cauchy-Folge" und existiert keine rationale Zahl, gegen welche v konvergiert, so sagt man, eine solche Folge konvergiere gegen einen *fiktiven Grenzwert*. Die Einführung neuer Zahlen, der *fiktiven Grenzwerte*, erlaubte es Méray, $\boldsymbol{Q}$ zu vervollständigen. Méray definierte nämlich zunächst den Begriff *äquivalenter* Folgen rationaler Zahlen ([46], 13.2.3). Man sieht nun sofort, daß zwei Variable, die einer dritten äquivalent sind, einander äquivalent sind. Somit handelt es sich nach heutiger Terminologie um eine Äquivalenzrelation. Mérays Definition der irrationalen Zahl entspricht „einem Übergang zu Quotienten" ([46], 13.2.5) bezüglich dieser Äquivalenzrelation. Tatsächlich behauptete er, daß ein *beliebiges Zeichen* den fiktiven Grenzwert einer Folge v bezeichnen könnte und daß dasselbe Zeichen jede *zu v äquivalente* Folge repräsentieren könnte. Ist a beispielsweise ([79], S. 288) eine positive rationale Zahl, zu der keine p, $q \in \boldsymbol{Z}^*$ mit $a = (p/q)^2$ existieren, so bezeichnet $\sqrt{a}$ in unserer Ausdrucksweise diese fiktive Wurzel und in den Rechnungen jede fortschreitende Variable, deren Quadrat gegen a konvergiert.

Méray zeigte auch, daß die mit Hilfe der „Cauchy-Folgen" konstruierte Menge $\boldsymbol{R}$ ([46], Kap. XIII), die (Total-)Ordnung von $\boldsymbol{Q}$ erhält.

Eine ähnliche Theorie wurde von Georg Cantor ausgearbeitet. Sie wurde 1872 zunächst von E. Heine ([71], S. 176—180) veröffentlicht, danach auch von Cantor selbst [18]. (Wir weisen darauf hin, daß Cantor von 1863 bis 1866 in Berlin studierte, als Weierstraß dort seine Theorie der reellen Zahlen darlegte.) Um einen Eindeutigkeitssatz für die trigonometrischen Reihen zu beweisen, fühlte sich Cantor „genötigt, ... Erörterungen voraufzuschicken, welche dazu dienen mögen, Verhältnisse in ein Licht zu stellen, die stets auftreten, sobald Zahlengrößen in endlicher oder unendlicher Zahl gegeben sind" ([23], S. 92). Von dieser Abhandlung wird noch in 6.7. und 6.8. die Rede sein; hier beschränken wir uns darauf, die Cantorsche Theorie der reellen Zahlen darzulegen.

Es sei $A = \boldsymbol{Q}$ und

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen. Cantor formulierte diese Eigenschaft der Folge (1) in den Worten ([23], S. 93): „*Die Reihe* (1) *hat eine bestimmte Grenze b,*" wobei b nichts anderes besagt, als „daß wir mit der Reihe (1) ein besonderes Zeichen b verbinden". Nun sei eine zweite Folge

$$(1') \qquad a_1', a_2', \ldots, a_n', \ldots$$

gegeben, „*welche eine bestimmte Grenze b' hat*". Sind (1) und (1') äquivalent, so setzte Cantor $b = b'$; wenn nicht, so definieren sie entweder $b > b'$ oder $b < b'$.

Existiert eine Folge rationaler Zahlen (a_n') mit $a_n' = a$ für jedes n, welche zu (a_n) äquivalent ist, so setzte er $b = a$; anderenfalls gilt entweder $b > a$ oder $b < a$.

Cantor fuhr dann fort ([23], S. 93): „Aus diesen und den gleich folgenden Definitionen ergibt sich als *Folge*, daß, wenn b die Grenze der Reihe (1) ist, alsdann $b - a_n$ mit wachsendem n unendlich klein wird, womit *nebenbei* die Bezeichnung ‚Grenze der Reihe (1)' für b eine gewisse Rechtfertigung findet." Allerdings ist hier nicht ganz klar, was die Folge mit dem allgemeinen Glied $b - a_n$ in dem Falle bedeutet, daß (a_n) nicht gegen eine rationale Zahl strebt, da ja die irrationalen Zahlen von Cantor noch nicht definiert sind. Cantor hatte die Schwierigkeit selbst empfunden; denn in der 1883 veröffentlichten französischen Übersetzung, die er selbst redigiert hatte, fügte er nach dem Wort „*résulte* („ergibt sich als Folge") hinzu: „(et on peut démontrer rigoureusement cette consequence)" (und man kann diese Folgerung streng beweisen). Im Original ([23], S. 93) fehlt dieser Einschub. Im Jahre 1883 gab Cantor eine genauere Darstellung seiner Theorie ([23], S. 186–187), in der er sagte, b werde durch die äquivalenten Folgen (a_n) bestimmt, d. h., daß die Menge A durch neue Gebilde vervollständigt wird, welche Äquivalenzklassen von „Cauchy-Folgen" sind. Im Anschluß daran dehnte Cantor die Elementaroperationen (elementaren arithmetischen Operationen), die in $A = \boldsymbol{Q}$ definiert sind, auf die Menge $B = \boldsymbol{R}$ aus ([23], S. 94).

6.6. Die Weierstraßsche Strenge

Wir haben bereits den unwiderstehlichen Aufstieg dieser Bewegung gesehen, die zur Arithmetisierung der Analysis führte (der Terminus Arithmetisierung der Mathematik stammt von Felix Klein) und die durch „die Forderung ausschließlich arithmetischer Beweisführung" ([73], S. 233) charakterisiert wird. Ihr Vorbild ist *die Weierstraßsche Strenge*. Für den Erfolg dieser Bewegung war es jedoch erforderlich, daß nicht nur strengere und rein arithmetische Methoden verwendet wurden, sondern daß auch die Arithmetik selbst solider begründet wurde. (Das Problem der Grundlegung der Arithmetik wird in 6.10. behandelt werden.)

Felix Klein erhielt (im Anschluß an sein Exposé von 1895 über die Arithmetisierung der Analysis [73], in dem er besonders den Beitrag von Weierstraß würdigte) einen Brief von Georg Cantor vom 8. 12. 1895 ([50], Anhang XII), in dem dieser schreibt, daß er mit Klein nicht einverstanden sei, „namentlich nicht mit der präponderirenden Stellung, welche von Ihnen bei der ‚Arithmetisierung der Mathematik' Weierstrass zuerkannt wird. Man muss, m. E., bei Weierstrass Dasjenige, was er wirklich gemacht hat, von dem Mythus unterscheiden, mit welchem ihn seine Schüler, zur Befestigung und Erhöhung ihres eigenen Ansehens, gleichsam wie in einen dicken Nebel eingehüllt haben". Ohne daß wir uns der Kritik Cantors anschließen, scheint uns doch die folgende Bemerkung angebracht: Wenn auch Weierstraß Gewaltiges geleistet hat, um die Analysis auf solidere Grundlagen zu stellen, so sollte man doch, wie wir es übrigens auch in dieser hier vorgelegten Dar-

stellung tun, die Plejade der Mathematiker nicht vergessen, die neben ihm dazu beigetragen haben. Unter diesen sind insbesondere Lagrange, Gauß, Bolzano, Cauchy, Abel, Dirichlet, Riemann, Dedekind, Méray und Cantor zu nennen.

Im Laufe des Winters 1859—1860 hielt Weierstraß eine Spezialvorlesung von fünf Stunden pro Woche über das Thema *Einleitung in die Analysis* und setzte sie als Privatissimum im Sommersemester 1860 fort. Ein Widerhall dieser Vorlesungen findet sich in einer im Sommersemester 1861 unter dem Titel *Differentialrechnung* gehaltenen Vorlesung, die von H. A. Schwarz ausgearbeitet wurde. Es scheint auch interessant zu vermerken, daß am 8. Mai 1861 die erste Sitzung des von Kummer und Weierstraß an der Berliner Universität begründeten Mathematischen Seminars stattfand. Dort wurden die neuen Theorien und Ideen vorgestellt, die in diesem von dem Genie eines Kronecker, eines Kummer und eines Weierstraß befruchteten Milieu im Entstehen begriffen waren.

Die von Schwarz ausgearbeitete Weierstraßsche Vorlesung von 1861 ([49], S. 119) beginnt mit der Definition einer Funktion nach Dirichlet. Anschließend werden die unendlich kleinen Änderungen der Variablen und der Funktion mit Hilfe von δ und ε definiert, aus der sich die moderne Definition des Grenzwertes und der Stetigkeit direkt herleitet: „Ist es nun möglich, für h eine Grenze zu bestimmen, so daß für alle Werte von h, welche ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ sind, $f(x+h) - f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so sagt man, es entspreche einer unendlich kleinen Aenderung des Arguments eine unendlich kleine Aenderung der Funktion."

Nachdem er den Begriff der Stetigkeit ([49], S. 120—121) eingeführt hatte, im übrigen als einfache Anwendung des Begriffs der unendlich kleinen Änderung, bewies er den folgenden Satz[1]: Ist f stetig und $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$, so existiert zu jedem $y_3 \in [y_1, y_2]$ ein $x_3 \in [x_1, x_2]$ mit $y_3 = f(x_3)$. Alsdann führte Weierstraß den Begriff der *Nachbarschaft* (Umgebung) des Punktes x_0 ein. Sie besteht aus allen x, für welche die Differenz $x - x_0$ ihrem absoluten Betrage nach eine bestimmte Grenze nicht überschreitet. Weierstraß beendete diesen Paragraphen mit der Aussage (in heutiger Ausdrucksweise), daß das stetige Bild einer kompakten Menge kompakt ist ([47], 46.1.4).

Interessanterweise definierte Weierstraß neben der klassischen Art die Ableitung auch durch die Formel

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(h) \quad \text{mit} \quad \varphi(h) = o(1)$$

und machte so augenscheinlich, daß sich die Differenz $f(x+h) - f(x)$ als Summe zweier Glieder schreiben läßt, deren erstes, linear von h abhängendes Glied das Produkt von h mit einem von h unabhängigen Element ist, während das zweite nach Division durch h für gegen null strebendes h ebenfalls gegen null strebt.

In dem Kapitel über die Funktionen mehrerer Variabler dieser Vorlesung aus dem Jahre 1861 bewies Weierstraß folgenden Sachverhalt: Ist f nebst seinen ersten

---

[1]) Nachdem er gezeigt hatte, daß jede auf einem beschränkten abgeschlossenen ntervall stetige Funktion ihre obere und ihre untere Grenze annimmt.

und zweiten partiellen Ableitungen stetig, so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

Dieser Satz wurde von H. A. Schwarz 1873 verallgemeinert (Ueber ein vollständiges System von einander unabhängiger Voraussetzungen zum Beweise des Satzes

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right),$$

Gesam. math. Abhand. II. Band, Springer, Berlin, S. 275—284) unter der Voraussetzung, daß f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ stetig sind ([49], S. 284).

Die Definition einer unendlich kleinen Größe entspricht genau der heutigen ([46], 14.7.1): Eine unendlich kleine Größe ist eine Funktion φ der Variablen h derart, daß man zu gegebenem ε immer ein δ mit der Eigenschaft finden kann, daß für alle Werte von h, deren absoluter Betrag kleiner als δ ist, $\varphi(h)$ kleiner als ε ist.

Es sei darauf verwiesen, daß für Weierstraß „der wirklich grundlegende Satz der gesamten Analysis" der folgende war (er wurde von Cauchy ([29], S. 313) formuliert): Wenn eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen auf einem offenen Intervall I, das x_0 enthält, n-mal stetig differenzierbar ist und wenn alle Ableitungen bis zur $(n - 1)$-ten Ordnung im Punkt x_0 null sind, so gilt

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta \cdot (x - x_0)), \qquad 0 < \theta < 1, \quad x \in I \quad ([46], 19.2).$$

Nachdem Weierstraß darauf hingewiesen hatte, daß es „nun aber auch Größen gibt, die sich durch die Einheit und Teile der Einheit nicht ausdrücken lassen", d. h., daß sie keine rationalen Zahlen sind, und daß man „bei ihnen . . . die Formen der unendlichen Reihe anwendet" (was zeigt, daß Weierstraß bereits 1861 das Modell für die Konstruktion der irrationalen Zahlen hatte, das er ausarbeiten sollte und das wir hier in 6.5.1. untersucht haben), definierte er die Summe einer Reihe und die gleichmäßige Konvergenz (die wir bereits in 6.2.3. behandelt haben).

Die Neuartigkeit dieser Vorlesung ist unbestritten, und diese Ausarbeitung von Schwarz zeigt, daß Weierstraß schon 1861 einige der Begriffe eingeführt und benutzt hat, welche der Analysis zugrunde liegen.

Wie wir bereits in 6.5.1. gesehen haben, wurde die Weierstraßsche Theorie der reellen Zahlen 1872 von E. Kossak [74] veröffentlicht, und zwar nach Aufzeichnungen, welche im Laufe des Wintersemesters 1865—1866 in der Vorlesung über die Theorie der analytischen Funktionen gemacht worden waren. In einer anderen, von M. Pasch stammenden Ausarbeitung dieser Vorlesung findet man die erste Formulierung des Begriffs Häufungspunkt ([51], S. 1), eines Begriffs, der anschließend (1872) von G. Cantor (bei Cantor: Grenzpunkt) eingeführt wurde ([18], S. 97); doch wies Cantor selbst darauf hin ([21], S. 149), es sei Weierstraß gewesen,

der als erster, in seiner Funktionentheorie, den Satz ausgesprochen und angewandt habe, daß jede beschränkte unendliche Menge reeller Zahlen wenigstens einen Häufungspunkt besitzt.

In seinen Vorlesungen an der Berliner Universität trug Weierstraß seine Funktionentheorie in einem Zyklus vor, der sich im allgemeinen über zwei Jahre erstreckte, und zwar vom Sommersemester 1857 bis zum Wintersemester 1887. Der allgemeine Plan dieser Vorlesung umfaßte:

- Die Theorie der analytischen Funktionen,
- Die Theorie der elliptischen Funktionen,
- Anwendungen der elliptischen Funktionen in Geometrie und Mechanik,
- Die Theorie der Abelschen Funktionen.

Zum Aufbau dieses mathematischen Gebäudes behandelte Weierstraß zunächst seine Theorie der reellen Zahlen und die arithmetischen Operationen mit diesen Zahlen. Danach führte er die komplexen Zahlen, die Polynome, die rationalen Funktionen, die Potenzreihen und schließlich die analytischen Funktionen ein und definierte die arithmetischen Operationen mit ihnen (siehe Kapitel 4). Bei seinen Beweisen benutzte er zahlreiche Sätze der allgemeinen Topologie. So verwendete er zum Nachweis der Existenz einer oberen und einer unteren Grenze einer beschränkten Menge reeller Zahlen ([49], S. 74) einen Beweis, der dem Beweis für den Satz von der Intervallschachtelung und der Existenz eines Häufungspunktes entspricht. Er definierte im $\boldsymbol{R}^n$ ([49], S. 75) die Begriffe Umgebung (Nachbarschaft), beschränkte offene Menge (Gebiet), äußerer Punkt und Begrenzungspunkt einer Menge (eines Gebietes) sowie den Begriff des Zusammenhangs.

Nach der Untersuchung der analytischen Funktionen wird die Weierstraßsche Vorlesung mit der Behandlung der elliptischen und der Abelschen Funktionen fortgesetzt.[1])

Es sei erwähnt, daß Weierstraß im Jahre 1872 als erster das Beispiel einer auf $\boldsymbol{R}$ stetigen Funktion angab, die in keinem Punkt von $\boldsymbol{R}$ differenzierbar ist [96]. Es handelt sich um die durch die trigonometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos b^n x$ mit $0 < a < 1$, $b \geqq 2$ ganzzahlig und $ab \geqq 10$ dargestellte Funktion.[2]) Dieses Beispiel wurde erstmalig 1875 von du Bois-Reymond veröffentlicht. Dieser war es auch, der im Gegensatz zur allgemeinen Überzeugung, insbesondere entgegen der Überzeugung Dirichlets, Riemanns, Weierstraß' ([49], S. 169) und Dedekinds ([50], 1.7), eine stetige Funktion konstruierte, deren Fourierreihe in einem Punkt, in dessen Umgebung diese Funktion *unendlich viele Maxima* besitzt ([5], S. 574—578), nicht gegen den Funktionswert in diesem Punkt konvergiert.

6.7. Die Anfänge der Mengenlehre

Es waren Richard Dedekind und Georg Cantor, denen das Verdienst zukommt, die Mengenlehre geschaffen zu haben. In diesem Punkt können wir J. Dieudonné voll

[1]) Siehe 7.1.12. und 7.2.6.
[2]) Siehe 4.6.

und ganz zustimmen, wenn er schreibt ([50], Vorwort), auf diesem Gebiet sei es nur gerecht, Dedekind und Cantor gemeinsam zu nennen und einzuschätzen, daß ihnen zu gleichen Teilen das Verdienst zukomme, die „mengentheoretischen" Grundlagen der modernen Mathematik geschaffen zu haben.

6.7.1. *Die Dedekindsche Schöpfung*

Bereits in seinen ersten Abhandlungen, im Anschluß an Arbeiten von Gauß[1]), rechnete Dedekind mit Mengen, als ob es sich um Zahlen handelt. So betrachtete er in einer 1857 veröffentlichten Untersuchung zunächst zwei Elemente f und g des Ringes der Polynome $\mathbf{Z}[x]$ und eine Primzahl p ([50], 1.5). Er nannte dann f kongruent g modulo p, wenn alle Koeffizienten von $f - g$ durch p teilbar sind. Diese Definition ermöglichte es Dedekind, in $\mathbf{Z}[x]/p\mathbf{Z}[x]$ Sätze zu erhalten, die denen der Teilbarkeit von Zahlen entsprechen, dank der Tatsache, daß „... das ganze System der unendlich vielen einander nach dem Modulus p kongruenten Funktionen einer Variablen sich hier verhält, wie eine einzige bestimmte Zahl in der Zahlentheorie ..." (Bd. I, S. 46/47).

Erst als Dedekind im Jahre 1871 seine Idealtheorie [37] veröffentlichte, wurde sein Beitrag zur Schaffung der Grundlagen der Mengenlehre erkennbar. Nachdem er den Körperbegriff definiert hatte, führte er die Operationen mit Mengen ein, welche die Übersetzung der algebraischen Operationen mit Zahlen darstellen ([37], S. 223 ff.). Er nannte einen Körper A einen Teiler des Körpers M oder M ein Vielfaches von A, wenn alle Zahlen, die zu A gehören, auch zu M gehören, d. h., wenn $A \subset M$ gilt.[2]) Die Menge der Zahlen, die sowohl zum Körper A als auch zum Körper B gehören (mit anderen Worten $A \cap B$), ist wieder ein Körper D, den er den größten gemeinsamen Teiler von A und B nannte. Anschließend definierte er ([37], S. 251) den Idealbegriff, und mit Hilfe der vorher definierten mengentheoretischen Operationen formulierte er die elementaren arithmetischen Operationen mit den Teilmengen von Idealen, mit dem Ziel, das Problem der Eindeutigkeit der Zerlegung der ganzen algebraischen Zahlen (in Primfaktoren) zu lösen (siehe 5.5.).

Auf die ersten Elemente der Mengenlehre kam er in seiner 1888 erschienenen Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?* ([39], [39][1]), deren erster Entwurf zwischen 1872 und 1878 geschrieben wurde ([50], Anhang L), zurück; dort werden diese Grundlagen viel systematischer in einer Art und Weise dargelegt, die schon derjenigen nahekommt, wie man sie etwa im ersten Kapitel einer heutigen Anfängervorlesung oder eines modernen Mathematiklehrbuches findet [46].

Der Paragraph 1 ([39][1], S. 1), *Systeme von Elementen*, beginnt mit der Definition eines Dinges: „Im folgenden verstehe ich unter einem *Ding* jeden Gegenstand unseres Denkens." Bezeichnet man es mit a, so schreibt man $a = b$, wenn „alles, was von a gedacht werden kann, auch von b, und wenn alles, was von b gilt, auch von a gedacht werden kann". Gilt $a = b$ und $b = c$, so ist auch $a = c$. Werden die ver-

---

[1]) Siehe 5.3.

[2]) Im folgenden benutzen wir die Bezeichnungen von Bourbaki.

schiedenen Dinge $a, b, c, \ldots$ als unter demselben Aspekt vereinigt angesehen, so sagt man, daß sie ein *System* (eine *Menge*) S bilden, und nennt $a, b, c, \ldots$ die *Elemente* von S. Eine solche Menge ihrerseits kann, da sie ein Objekt unseres Denkens ist, ebenfalls als ein Ding angesehen werden. Dedekind brachte also klar zum Ausdruck, daß eine Menge als Element einer anderen Menge aufgefaßt werden kann. Er schrieb ([39][1], S. 1—2): „Ein solches System $S \ldots$ ist vollständig bestimmt, wenn von jedem Ding bestimmt ist, ob es Element von S ist oder nicht." Danach definierte Dedekind die Gleichheit zweier Mengen: Zwei Mengen S und T sind gleich, und man schreibt $S = T$, wenn jedes Element von S ein Element von T ist und umgekehrt. Er vermerkte, es sei „für die Gleichförmigkeit der Ausdrucksweise ... vorteilhaft", auch die Mengen zu betrachten, die aus einem einzigen Element bestehen. Allerdings bezeichnete er sowohl die aus einem einzigen Element bestehende Menge als auch dieses Element selbst gleichermaßen mit a, was er dann schon seit dem Erscheinen seines Buches bedauerte ([50], 7.1). Die leere Menge (das leere System) jedoch schloß er aus, „obwohl es für andere Untersuchungen bequem sein kann, ein solches zu erdichten" ([39][1], S. 2). Dann definierte er den *Teil* A einer Menge S: A ist ein Teil von S, „wenn jedes Element von A auch Element von S ist" ([39][1], S. 2). Gilt $A \subset B$ und $B \subset A$, so ist $A = B$; im Fall $A \subset S$ und $A \neq S$ nannte er A einen *echten* Teil von S. Nachdem er auf die Transitivität der Inklusion von Mengen hingewiesen hatte ([39][1], S. 3), definierte Dedekind die Vereinigung von Mengen (*zusammengesetztes* System) (dabei betonte er, daß man zwischen der Menge $A \cup B \cup C \cup \cdots$ und der Menge mit den Elementen A $B, C, \ldots$ unterscheiden müsse) und den *Durchschnitt* (die „*Gemeinheit*") der Mengen $A, B, C, \ldots$.

Der Paragraph 2 ([39][1], S. 5), *Abbildung eines Systems*, ist einer der wichtigsten dieses Buches, und zwar nicht nur deshalb, weil Dedekind darin seine Theorie der ganzen Zahlen um die zentrale Idee der Abbildung herum aufbaute, sondern vor allem deshalb, weil er zum ersten Mal Zweckmäßigkeit und Bedeutung der Untersuchung allgemeinster Abbildungen herausstellte.

Als erstes gab Dedekind die von Dirichlet stammende Definition einer Abbildung: „Unter einer Abbildung φ eines Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das *Bild* von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird ..." ([39][1], S. 5). „Ist nun T irgendein Teil von S, so ist in der Abbildung φ von S zugleich eine bestimmte Abbildung von T enthalten ..." ([39][1], S. 5). (Dedekind definierte in dieser Weise die Einschränkung einer Funktion φ auf T.) Er bewies unter Verwendung der Bezeichnungen $f(s) = s'$ und $f(T) = T'$, daß aus $A \subset B$ die Beziehung $A' \subset B'$ folgt. Andererseits gilt

$$f(A \cup B \cup C \cup \cdots) = A' \cup B' \cup C' \cup \cdots$$

und

$$f(A \cap B \cap C \cap \cdots) \subset A' \cap B' \cap C' \cap \cdots$$

([39][1], S. 6). Sind eine auf S definierte Abbildung f und eine auf T definierte Abbildung g gegeben, so kann man eine Abbildung θ auf S definieren, die sogenannte *zusammengesetzte* Abbildung von f und g, für welche $\theta(s) = g(t) = g[f(s)]$ gilt.

Dedekind lenkte die Aufmerksamkeit darauf, daß θ nur für $f(s) \subset T$ definiert ist. Er zeigte anschließend, daß die Zusammensetzung von Abbildungen assoziativ ist. In seinen nachgelassenen Schriften ([50], 7.1) schlug Dedekind vor, die Bezeichnungen af und Af zu benutzen, die er für natürlicher hielt als $f(a)$ und $f(A)$!

Die Überschrift von § 3 ([39][1], S. 7) lautet: *Ähnlichkeit einer Abbildung. Ähnliche Systeme* (in heutiger Terminologie: *Injektivität einer Abbildung. Gleichmächtige Mengen*). Da Dedekind hier nur eine Abbildung f von S auf $S' = f(S)$ betrachtete, ist die Definition einer injektiven (ähnlichen) Abbildung (d. h. einer Abbildung f, welche verschiedenen Elementen a und b stets verschiedene Bilder $a' = f(a)$ und $b' = f(b)$ zuordnet) in Wirklichkeit die einer bijektiven Abbildung. Daher besitzt f eine *inverse* (*umgekehrte*) *Abbildung*, die mit $\bar{f}$ bezeichnet wird, für welche $\bar{f}(s') = \bar{f}[f(s)] = s$ gilt. In diesem Fall folgt aus $G = A \cap B \cap C \cap \cdots$ die Beziehung $f(G) = G' = A' \cap B' \cap C' \cap \cdots$. Sind f und g bijektive Abbildungen, so genügen sie der Relation $\overline{g \circ f} = \bar{f} \circ \bar{g}$ ([39][1], S. 8). Zwei Mengen S und R werden *ähnlich* (*gleichmächtig*) genannt, wenn eine injektive Abbildung existiert derart, daß $f(S) = R$ gilt. Diese Ähnlichkeits (= Gleichmächtigkeits-)-relation ist transitiv (n° 33). Daraus ergibt sich (n° 34), daß man alle Mengen in *Klassen* einteilen kann, und zwar in der Art, daß einer bestimmten Klasse alle Mengen angehören, welche einer gegebenen Menge R, „dem *Repräsentanten* der Klasse" ähnlich sind. Dedekind spürte offenbar nicht, daß man hier mit einem Paradoxon konfrontiert ist, das mit dem Begriff der Menge aller Mengen zusammenhängt, auf welcher er die betrachtete Äquivalenzrelation definiert.

In § 4, *Abbildung eines Systems in sich selbst*, führte Dedekind den Begriff der *Kette* ein, von dem in 6.10.2. die Rede sein wird.

6.7.2. *Die ersten Arbeiten von Georg Cantor*

Während Dedekind die mengentheoretischen Begriffe einführte, um algebraische und zahlentheoretische Probleme zu lösen und den Begriff der ganzen Zahl zu begründen, stammen die mengentheoretischen Vorstellungen Cantors aus seinen Untersuchungen über trigonometrische Reihen, Untersuchungen, die er auf Anregung von E. Heine begonnen hatte und die durch die Riemannsche Abhandlung [86] zum gleichen Thema beeinflußt worden waren.

Der erste bedeutende Satz, den Cantor bewies, lautet: „Wenn zwei unendliche Größenreihen: $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n \ldots$ so beschaffen sind, daß die Grenze von

$$a_n \sin nx + b_n \cos nx$$

für jeden Wert von x, der in einem gegebenen Intervalle ($a < x < b$) des reellen Größengebietes liegt, mit wachsendem n gleich Null ist, so konvergiert sowohl a_n wie b_n mit wachsendem n gegen die Grenze Null" ([23], S. 71). Bereits für seinen Beweis benutzte Cantor typische Überlegungen aus der allgemeinen Topologie. So gab er ([23], S. 76) ein Lemma an, das der folgenden Aussage entspricht: Wenn eine beschränkte unendliche Folge in $\boldsymbol{R}$ einen einzigen Häufungspunkt besitzt, so ist sie konvergent.

Danach formulierte er ([16], S. 83) den folgenden Eindeutigkeitssatz: „Wenn eine Funktion $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x durch eine für jeden Wert von x konvergente trigonometrische Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

gegeben ist, so gibt es keine andere Reihe von derselben Form, welche ebenfalls für jeden Wert von x konvergiert und die nämliche Funktion $f(x)$ darstellt."

Der Beginn der Cantorschen Mengenlehre kann in Cantors Abhandlung von 1871 [17] gefunden werden, in der er eine trigonometrische Reihe mit $f(x) = 0$ für jedes x betrachtet. Nach dem obigen Eindeutigkeitssatz muß $a_n = b_n = 0$ für jedes $n \in \boldsymbol{N}$ sein. Nun schwächte Cantor die Voraussetzungen seines Eindeutigkeitssatzes ab. Er nahm an ([17], S. 85), daß es in einem beschränkten Intervall endlich viele Punkte gibt, in denen entweder die trigonometrische Reihe nicht konvergiert oder in denen $f(x) \neq 0$ ist. Er bewies, daß sein Eindeutigkeitssatz auch für diesen Fall gültig bleibt, und fügte hinzu, „diese Erweiterung des Satzes ist keineswegs die letzte", denn er sei zu einer um vieles weitergehenden Ausdehnung gekommen.

Diese Verallgemeinerung legte Cantor in der Abhandlung [18] vor, die in 6.5.3. im Zusammenhang mit seiner Theorie der reellen Zahlen erwähnt worden ist. Er ging dort von der Menge $A = \boldsymbol{Q}$ aus, betrachtete die Menge der Klassen äquivalenter Cauchy-Folgen von A und konstruierte die Vervollständigung B von A, welche die Menge $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen ist. Indem er von A und B ausging und die Äquivalenzklassen der Cauchy-Folgen von A und B betrachtete, konstruierte Cantor auf dieselbe Weise die Menge C ([23], S. 94—95) usw. (Die Elemente der Menge L werden die Zahlen λ-ter Art genannt.) Offenbar tragen die so konstruierten Mengen $C, D, \ldots$ zu der Eigenschaft, vollständig zu sein, welche schon B besitzt, nichts mehr bei. Cantor schrieb aber, es sei „in der hier dargelegten Theorie . . . wesentlich", die durch diesen Iterationsprozeß erhaltenen verschiedenen Mengen zu unterscheiden. Er fügte hinzu, wobei er hier seine spätere Theorie der transfiniten Zahlen ankündigte, daß „der Zahlenbegriff, soweit er hier entwickelt ist, den Keim zu einer in sich notwendigen und absolut unendlichen Erweiterung in sich trägt" ([23], S. 95).

Danach führte Cantor[1]) den Begriff des Häufungspunktes einer beschränkten Teilmenge P von $\boldsymbol{R}$ ein: Der Punkt $x \in \boldsymbol{R}$ ist ein Häufungspunkt von P, wenn jedes offene Intervall, das x enthält, auch unendlich viele Punkte von P umfaßt. Die Menge P' der Häufungspunkte von P wird *erste abgeleitete Punktmenge von P* ([23], S. 98) genannt. Wenn P' nicht aus endlich vielen Elementen besteht, kann man gleichermaßen die Menge P'' der Häufungspunkte von P', die *zweite abgeleitete Punktmenge von P* betrachten, usw. Wenn man im Laufe dieser Iteration auf eine Menge $P^{(\nu)}$ mit endlich vielen Elementen trifft, ist also $P^{(\nu+1)}$ leer. Dann sagte er, P sei . . . eine Menge *von der ν-ten Art* ([23], S. 98). Cantor fuhr fort: „Es wird also bei dieser Auffassungsweise das Gebiet aller Punktmengen bestimmter Art als ein besonderes Genus innerhalb des Gebietes aller denkbaren Punktmengen betrachtet,

[1]) Im Anschluß an Weierstraß.

von welchem Genus die sogenannten Puntmengen ν-ter Art eine besondere Art ausmachen" ([23], S. 98). Man stößt auch hier auf den Begriff der Menge aller Mengen und, wie es scheint, den Einfluß von Bolzano [8], dessen Werk Cantor bereits 1870 ([49], S. 77) kannte.

Mit Hilfe des Begriffs der Menge der ν-ten Art verallgemeinerte er ([23], S. 99) seinen Eindeutigkeitssatz über die Entwicklung in trigonometrische Reihen: „Wenn eine Gleichung besteht von der Form

$$0 = C_0 + C_1 + \cdots + C_n + \cdots, \tag{1}$$

wo $C_0 = \frac{1}{2} d_0$; $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$, für alle Werte von x mit Ausnahme derjenigen, welche den Punkten einer im Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ gegebenen Punktmenge P der ν-ten Art entsprechen, wobei ν eine beliebig große ganze Zahl bedeutet, so ist $d_0 = 0$, $c_n = d_n = 0$" ([23], S. 99).

In dieser Arbeit Cantors hat man, wie Zermelo sagte ([23], S. 102), „die Geburtsstätte der Cantorschen Mengenlehre . . ." zu erblicken.

6.8. Die Mengenlehre und die allgemeine Topologie[1])

Wir haben bereits feststellen können, wie stark in den ersten Arbeiten Cantors mengentheoretische und topologische Begriffe miteinander verknüpft waren. Eine klare und erschöpfende Darlegung dieses engen Zusammenhangs geben die Ausführungen von René Baire über die Mengenlehre in der *Encyclopédie des Sciences mathématiques* [4]. Man kann auf eine parallele Entwicklung in den Arbeiten Dedekinds verweisen ([50], § 10).

6.8.1. *Die Cantorsche Schöpfung*

Der entscheidende Schritt, den Cantor zur Mengenlehre tun sollte, ist untrennbar mit einem zufälligen Zusammentreffen zwischen ihm und Dedekind verbunden, das nach der Veröffentlichung der Dedekindschen Schrift *Stetigkeit und irrationale Zahlen* und der Theorie der reellen Zahlen von Cantor im Jahre 1872 in der Schweiz stattfand. Aus dieser Begegnung erwuchs ein für das Verständnis des Entstehens einer mathematischen Theorie höchst instruktiver Briefwechsel zwischen Mathematikern (vgl. [24] und, für die bisher unveröffentlichten Briefe, [50], Appendix XL).

Am 29. November 1873 ([24], S. 12) schrieb Cantor an Dedekind: „Gestatten Sie mir, Ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses theoretisches Interesse hat, die ich mir aber nicht beantworten kann . . ." Es handelte sich darum festzustellen, ob zwischen $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{R}$ eine bijektive Abbildung existiert. Cantor teilte Dedekind mit ([24], S. 12), daß eine derartige Bijektion zwischen $\boldsymbol{N}$

[1]) Bis gegen Ende 1930 umfaßte die Topologie die Mengenlehre, allgemeine Topologie, Maßtheorie (siehe 6.9.) und die eigentliche Topologie (siehe Kapitel 10).

und $\boldsymbol{Q}$ existiert und, allgemeiner, zwischen $\boldsymbol{N}$ und $(\boldsymbol{N})^k$, $k > 0$. (Es sei bemerkt, daß das Problem einer bijektiven Abbildung zwischen $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{Q}$ bereits während des Weierstraßschen Seminars in Berlin behandelt wurde ([90], S. 99)). Dedekind antwortete ([24], S. 18) postwendend, indem er die Aussage, „daß sogar der Inbegriff aller algebraischen Zahlen" in eine bijektive Korrespondenz zu $\boldsymbol{N}$ gebracht werden kann, formulierte und vollständig bewies ([46], E.I. 22). Das Problem einer bijektiven Abbildung zwischen $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{R}$ ([24], S. 13–14) läßt sich auf die Frage nach der Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen $\boldsymbol{N}$ und der Menge der positiven reellen Zahlen zurückführen. Der Brief Cantors vom 7. Dezember 1873 ([24], S. 14–15) enthält den ersten, von ihm soeben gefundenen Beweis dafür, daß es keine eineindeutige Abbildung zwischen $\boldsymbol{N}$ und $I =]0, 1[$ gibt. Ausgehend von der Annahme, die Menge der reellen Zahlen von I könne in einer Folge $\omega = (\omega_i)$, $i \in \boldsymbol{N}$, angeordnet werden, gruppierte Cantor die ω_i in eine Doppelfolge (ω_k^λ) derart, daß $\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}$ ist. Dann konstruierte er eine Folge von Intervallschachtelungen $[p_n, q_n]$ derart, daß zu jedem k ein n existiert, für welches $[p_n, q_n]$ kein ω_h^λ mit $h \leq k$ enthält. Der gemeinsame Punkt der $[p_n, q_n]$ kann folglich nicht zu einem der ω_i gehören. In seinem Brief vom 8. Dezember ([24], S. 19) gratulierte Dedekind Cantor *zu diesem schönen Erfolg* und schickte ihm eine vereinfachte Fassung des Beweises. Es dürfte interessant sein, die Geschichte dieses Satzes, der von so ungeheurer Tragweite ist, zu verfolgen; er führt nämlich völlig neue Betrachtungsweisen in die Analysis ein und eröffnet den Weg zur Klassifizierung der unendlichen Mengen.

Unmittelbar, nachdem er seinen Satz an das *Crellesche Journal* [19] geschickt hatte, schrieb Cantor ([24], S. 20) am 5. Januar 1874 an Dedekind, um ihm ein neues Problem zu stellen, eine jener Fragen, die das Wesen eines Teiles der Mathematik verändern sollten und einer tiefgehenden Umgestaltung ihres Charakters entsprechen. Cantor schrieb nämlich: „Was die Fragen anbetrifft, mit denen ich in der letzten Zeit mich beschäftigt habe, so fällt mir ein, dass, in diesem Gedankengange auch die folgende sich darbietet: Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluß der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluß der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?" Erst etwa drei Jahre später, am 20. Juni 1877, schickte Cantor ([24], S. 25–26) Dedekind seinen ersten Beweis, den er gefunden hatte, über die bijektive Abbildung zwischen $[0, 1]$ und $[0, 1] \times [0, 1]$. Dieser Beweis ist unvollständig, wie Dedekind in seinem Brief vom 22. Juni ([24], S. 27–28) nachwies. Am 25. Juni ([24], S. 29–34) sandte Cantor Dedekind einen neuen Beweis zusammen mit Kommentaren, die seine eigene Verwirrung widerspiegeln; denn in einer seiner Schlußfolgerungen, die er aus seinem Satz zog, scheint er den Begriff der Mächtigkeit mit dem der Dimension zu verwechseln. Er schrieb nämlich: „Vielmehr wird der Unterschied, welcher zwischen Gebilden von *verschiedener* Dimensionszahl liegt, in ganz anderen Momenten gesucht werden müssen, als in der für charakteristisch gehaltenen Zahl der unabhängigen Coordinaten" ([24], S. 34). Da Dedekind nicht antwortete, wahrscheinlich weil er selbst über die tiefliegenden Konsequenzen dieses Satzes nachdachte, bestürmte Cantor ihn am

29. Juni in fast pathetischer Form, ihm zu antworten, denn „die Ihnen jüngst von mir zugegangenen Mitteilungen sind für mich selbst so unerwartet, so neu, dass ich gewissermassen nicht eher zu einer gewissen Gemüthsruhe kommen kann, als bis ich von Ihnen, sehr verehrter Freund, eine Entscheidung über die Richtigkeit derselben erhalten haben werde. Ich kann so lange Sie mir nicht zugestimmt haben, nur sagen: je le vois, mais je ne le crois pas" ([24], S. 34). Dedekinds Antwort vom 2. Juli 1877 ([24], S. 37) sollte Cantors Ruhe dadurch wiederherstellen, daß sie Dedekinds Überzeugung von der Richtigkeit des Cantorschen Satzes zum Ausdruck brachte. Dedekind schrieb ([24], S. 37): „Hiergegen erkläre ich (trotz Ihres Satzes, oder vielmehr in Folge der durch Ihren Satz veranlassten Betrachtungen) meine Ueberzeugung oder meinen Glauben (ich habe noch nicht die Zeit gehabt, auch nur einen Versuch eines Beweises zu machen) dahin, dass die Dimensionenzahl einer stetigen Mannigfaltigkeit nach wie vor die erste und wichtigste Invariante derselben ist ..." Er halte vorläufig den folgenden Satz für wahr: „Gelingt es, eine gegenseitig eindeutige und vollständige Correspondenz zwischen den Puncten einer stetigen Mannigfaltigkeit A von a Dimensionen einerseits und den Puncten einer stetigen Mannigfaltigkeit B von b Dimensionen andererseits herzustellen, so ist diese *Correspondenz selbst*, wenn a und b *ungleich* sind, nothwendig eine *durchweg unstetige*" ([24], S. 38). Das ist die erste Formulierung des Satzes, daß es keine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung zwischen $\boldsymbol{R}^n$ und $\boldsymbol{R}^p$ geben kann, wenn $n \neq p$ ist.

Cantor veröffentlichte seinen Satz in einer Abhandlung [20], die mit einer Einleitung beginnt, in der er den Begriff der Mächtigkeit definierte ([20], S. 119): Zwei Mengen M und N haben die gleiche Mächtigkeit, wenn eine eineindeutige Abbildung von M auf N existiert. Dann sagt man, M und N seien *äquivalent* (*gleichmächtig*). Cantor unterstrich die schon von Bolzano erwähnte Tatsache ([8], § 19), daß eine unendliche Menge nicht notwendigerweise die Eigenschaft der endlichen Mengen zu haben braucht, daß ihre Mächtigkeit größer ist als die jeder ihrer echten Teilmengen. Er nannte die zu $\boldsymbol{N}$ äquivalenten Mengen Mengen der ersten Klasse oder Mengen der ersten Mächtigkeit. Dann gilt der folgende Satz ([20], S. 120): „Ist M eine Mannigfaltigkeit von der Mächtigkeit der positiven, ganzen Zahlenreihe, so hat auch jeder unendliche Bestandteil von M die gleiche Mächtigkeit mit M." Außerdem bewies er, daß die Vereinigung abzählbar vieler Mengen der ersten Klasse eine Menge der ersten Klasse ist ([46], 1.16.8). In dieser Abhandlung stellte Cantor die Frage ([20], S. 132) nach der Klassifizierung aller unendlichen Teilmengen von $\boldsymbol{R}$ nach ihren Mächtigkeiten. Er glaubte bewiesen zu haben, verschob den Beweis jedoch auf später, daß es nur zwei Klassen unendlicher Mengen von $\boldsymbol{R}$ gibt: die der zu $\boldsymbol{N}$ äquivalenten Mengen und die der zu $\boldsymbol{R}$ äquivalenten Mengen ([20], S. 133). (Siehe 13.4.7.)

In einer Reihe von Arbeiten [21] *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten*, die zwischen 1879 und 1884 erschienen, legte Cantor seine Theorie der unendlichen Teilmengen von $\boldsymbol{R}$ allgemein dar, wobei er sie nach gewissen gemeinsamen Charakteristiken[1]) gruppierte und als Ausgangsbegriff den Begriff der abgeleiteten

[1]) Dabei ist $\boldsymbol{R}$ mit seiner natürlichen Topologie versehen ([46], 21.6.10).

Menge benutzte, den er in seiner Arbeit von 1872 über die trigonometrischen Reihen eingeführt hatte [18]. Ist für ein $\nu \in \boldsymbol{N}$ die ν-te abgeleitete Punktmenge von P, also $P^{(\nu)}$, so beschaffen, daß $P^{(\nu+1)}$ leer ist, so sagte Cantor nun, P sei *von der ersten Gattung* (1872 hatte er gesagt, P sei eine Punktmenge ν-ter Art); ist dagegen $P^{(\nu)}$ für kein $\nu \in \boldsymbol{N}$ leer, so nannte er P eine Menge von der zweiten Gattung.[1] Für jedes $\nu \in \boldsymbol{N}$ gilt $P^{(\nu)} \subset P^{(1)}$; doch braucht x im Fall $x \in P^{(1)}$ nicht zu P zu gehören. Um die Teilmengen von $\boldsymbol{R}$ zu untersuchen, führte Cantor den Begriff der in einem Intervall *I überall dichten* Menge P ein; P wird in I überall dicht genannt, wenn jedes offene Teilintervall von I Punkte von P enthält.[2] Dann gilt also $P^{(1)} \supset I$, so daß P notwendigerweise eine Menge von der zweiten Gattung ist ([23], S. 141); eine Menge von der ersten Gattung ist in einem Intervall nicht überall dicht. Nach der Einführung des Begriffs der leeren Menge[3] ([23], S. 146) definierte Cantor ([23], S. 147) die Menge $R = \bigcap_{n \in \boldsymbol{N}^*} P^{(n)} = P^{(\infty)}$ (die er später mit $P^{(\omega)}$ bezeichnete), eine abgeleitete Menge von P der Ordnung ω. Man kann dann im allgemeinen die abgeleitete Menge $P^{(\omega+1)}$ von $P^{(\omega)}$ definieren, ebenso die abgeleitete Menge der Ordnung ω von $P^{(\omega)}$, die mit $P^{(2\omega)}$ bezeichnet wird, und so fort, um schließlich die Menge $P^{(\omega^2)} = \bigcap_{n \in \boldsymbol{N}^*} P^{(n\omega)}$ zu definieren. Weiterhin ([23], S. 148) werden die Mengen $P^{(\omega^\omega)}$, $P^{(\omega^{\omega^\omega})}$, ... konstruiert. Die Mengen der ersten Gattung sind dadurch charakterisiert, daß $P^{(\omega)}$ leer ist. Hat eine Menge P von der zweiten Gattung die Eigenschaft, daß $P^{(n_0\omega^\nu + n_1\omega^{\nu-1} + \cdots + n_\nu)}$ aus endlich vielen Punkten besteht, so ist sie in keinem Intervall überall dicht und gehört zur ersten Klasse.

Die obige Konstruktion sollte Cantor ([23], S. 168) ganz naturgemäß zu dem Begriff der *wohlgeordneten Menge* führen. Während der Begriff der Kardinalzahl dem der Mächtigkeit einer Menge entspricht, einem Begriff, der von der Ordnung der Elemente unabhängig ist, entspricht der Begriff Ordnungszahl der Existenz einer Wohlordnung auf den betrachteten Mengen. Eine Menge wird wohlgeordnet genannt, wenn die Elemente dieser Menge durch eine „bestimmte vorgegebene Sukzession miteinander verbunden sind", die ein erstes Element hat und in welcher, falls die Menge nicht endlich ist, jedem Element ein anderes, wohlbestimmtes folgt. Was die Definition dieser *Sukzession* betrifft, so wurde sie von Cantor nie genau angegeben. Die endlichen Ordnungszahlen bilden die Klasse I der Ordnungszahlen ([23], S. 169), während die Ordnungszahlen der Mengen der ersten Klasse (der abzählbaren Mengen) die Klasse II der Ordnungszahlen und die Ordnungszahlen der überabzählbaren Mengen die Klasse III bilden. Cantor kam auf seine Theorie der wohlgeordneten Mengen in seiner Abhandlung *Beiträge zur Begründung der*

---

[1]) Der Cantorsche Text lautet: ... „sagen wir von der Punktmenge P, daß sie von der *ersten Gattung* und von der n-ten *Art* sei", d. h., Cantor führte Gattung als zusätzlichen Begriff ein und nicht als Ersatz für Art. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) Außerdem führte er den Begriff der perfekten Menge ein, und zwar nannte er eine Menge P perfekt, wenn $P = P^{(1)}$ gilt.

[3]) Der Terminus „leere Menge" selbst kommt bei Cantor nicht vor, er sprach von einem Zeichen, „welches die Abwesenheit von Punkten ausdrückt ..." — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

transfiniten Mengenlehre [22] zurück, die zwischen 1895 und 1897 veröffentlicht wurde. Er zeigte darin ([22], S. 321), daß die Menge der Ordnungszahlen der wohlgeordneten Mengen ebenfalls wohlgeordnet ist.

6.8.2. *Der Beitrag Richard Dedekinds zur allgemeinen Topologie*

In seiner 1872 erschienenen Schrift *Stetigkeit und irrationale Zahlen* hatte Dedekind untersucht, inwieweit die Eigenschaften der für die Arithmetik von $\boldsymbol{Q}$ gültigen Rechenregeln für die reellen Zahlen erhalten bleiben. In der für sein Denken charakteristischen Art ordnete er dieses Problem in einen viel allgemeineren Rahmen ein, denn hinter dem Problem steckt die Tatsache, „daß die arithmetischen Operationen selbst eine gewisse Stetigkeit besitzen" ([38][1], S. 19). Darin steckt ein Keim zukünftiger topologischer Theorien, welche sowohl die Strukturen der Algebra als auch der Analysis benutzen. Dedekind formulierte sogar den folgenden sehr allgemeinen Satz: „Ist die Zahl λ das Resultat einer mit den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ angestellten Rechnung und liegt λ innerhalb des Intervalls L, so lassen sich Intervalle $A, B, C \ldots$ angeben, innerhalb deren die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ liegen, und von der Art, daß das Resultat derselben Rechnung, in welcher die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ durch beliebige Zahlen der Intervalle $A, B, C, \ldots$ ersetzt werden, jedesmal eine innerhalb des Intervalls L liegende Zahl wird" (ebenda).

Um 1871 war Dedekind ([50], § 10) zur allgemeinen Theorie der metrischen Räume vorgedrungen (in einer zunächst unveröffentlichten Arbeit, die aber in seinen gesammelten mathematischen Werken enthalten ist). Seine Arbeit *Allgemeine Sätze über Räume* [40] stellt einen Versuch dar, wie es Dedekind selbst in seinem Brief an Cantor vom 19. Januar 1879 bezeichnete ([24], S. 225), eine Theorie der Räume $\boldsymbol{R}^n$ ab ovo zu konstruieren, „ohne die geometrische Anschauung zuzuziehen" ([40], S. 355).

Dedekind begann ([40], S. 353) mit der Definition einer offenen Menge, die er *Körper* nannte, ein Wort, das er schließlich 1871 auf die übliche algebraische Struktur beschränkte ([37], S. 223).

Dedekind schrieb: „Ein System P von Punkten $p, p', \ldots$ bildet einen Körper, wenn für jeden Punkt p desselben sich eine Länge δ von der Beschaffenheit angeben läßt, daß alle Punkte, deren Abstand von p kleiner als δ ist, ebenfalls dem System P angehören" ([40], S. 353). Danach zeigte er, daß eine offene Kugel ([46], 21.6.7) eine offene Menge ist (§ 3). Er definierte (implizit) die inneren Punkte sowie die äußeren Punkte ([40], S. 354) und formulierte (§ 5) den Satz, der für seine rein topologischen Überlegungen charakteristisch ist: „Ist P ein Körper, und existiert wenigstens ein Punkt m außerhalb P, so gibt es auch unendlich viele solche Punkte außerhalb P, und dieselben bilden einen Körper" ([40], S. 354). Nun definierte er, was ein Randprodukt (Grenzpunkt) von P ist (§ 6), was der Rand (die Begrenzung) von P ist (§ 7), und zeigte, daß die Menge der Randpunkte einer offenen Menge keine offene Menge ist (§ 9).

Diese Arbeit Dedekinds zur allgemeinen Topologie, zur damaligen Zeit eine Ausnahmeerscheinung, ist eine Skizze der ersten Elemente der Theorie der metrischen Räume.

6.9. Maßtheorie

Nach N. Bourbaki ([14][1], S. 258) legt „die Form, die Riemann der Integrierbarkeitsbedingung gegeben hatte" (siehe 6.3.2.), nahe, „ein ‚Maß' für die Menge der Unstetigkeitsstellen einer Funktion in einem Intervall einzuführen". Um jedoch den Begriff des Maßes exakt definieren zu können, mußten die ersten Elemente der Mengenlehre und der allgemeinen Topologie die mathematische Forschung durchdrungen haben. Wir werden die Entwicklung dieser Vorstellungen am Beispiel einiger wichtiger Aspekte verfolgen. Die ausführliche Beschreibung ihrer Entstehung und weiteren Entwicklung kann man in dem Buch von Th. Hawkins über das Lebesguesche Integral finden [68].

6.9.1. *Die ersten Entwicklungen*

A. Harnack, der die Arbeit von Riemann über das bestimmte Integral [86] fortsetzte und die Arbeiten Cantors über die Punktmengen benutzte [18], definierte 1881 eine *diskrete Menge* ([66], S. 260): „... eine unendliche Menge von Punkten (soll) eine *discrete Menge oder Mannigfaltigkeit* heißen, wenn es möglich ist, sämmtliche Punkte dieser Menge in Umgebungen einzuschließen, deren Summe kleiner gemacht werden kann als eine beliebige kleine Zahl, während die Anzahl der Umgebungen dabei beliebig wachsen kann." So ist f auf $[a, b]$ integrierbar, wenn für jedes $\sigma > 0$ die Menge, auf der die Oszillation (Schwankung) der Funktion größer als σ ist, *diskret* ist. Er führte 1882 ([67], S. 263) den Begriff der Gleichheit *im allgemeinen* zweier Funktionen ein: f und φ werden *im allgemeinen* gleich genannt, wenn für jedes $\delta > 0$ die Menge der Punkte x, in denen $|f(x) - \varphi(x)| > \delta$ ist, *diskret* ist.

Im Jahre 1884 ([93], S. 153) zeigte O. Stolz, daß man einer Teilmenge E von $[a, b]$ eine Zahl L zuordnen kann mit folgender Eigenschaft: Ist (δ_i), $1 \leqq i \leqq n$, eine Zerlegung von $[a, b]$ und S die Summe der Längen der durch die betrachtete Zerlegung bestimmten Intervalle, welche die Punkte von E enthalten, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Delta > 0$ derart, daß $|S - L| < \varepsilon$ gilt, sobald die Schrittweite der Zerlegung kleiner als Δ ist. Insbesondere ([93], S. 154) werden die *diskreten* Mengen durch die Eigenschaft $L = 0$ charakterisiert.

Im selben Jahr definierte Cantor ([23], S. 229—231) den *Inhalt* bzw. das *Volumen* einer beschränkten Teilmenge P von $\boldsymbol{R}^n$. Es sei $K(\varrho, p)$ die Kugel mit dem Mittelpunkt p und dem Radius ϱ, und es sei $\Pi(\varrho, P) = \bigcup_p K(\varrho, p), p \in \overline{P}$, wobei $\overline{P}$ die Abschließung von P, d. h. die Menge der Punkte p ist, für welche jede Umgebung von p Punkte von P enthält. Dann besteht $\Pi(\varrho, P)$, „wie man leicht sieht" ([23], S. 230), aus einer *endlichen Anzahl* von Stücken, deren Volumen durch das Mehrfachintegral $F(\varrho, P) = \int_{\Pi(\varrho,p)} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$ gegeben ist, das Cantor als definiert annahm. Das n-dimensionale Volumen $I(P)$ wird durch $I(P) = \lim_{\varrho \to 0} F(\varrho, P)$ definiert. Jedoch ist „mit dieser Definition", wie N. Bourbaki bemerkte ([14][1], S. 259), „das

‚Maß' einer Menge gleich dem ihrer Hülle, und daraus ergibt sich insbesondere, daß das Maß der Vereinigung zweier Mengen ohne gemeinsamen Punkt echt kleiner sein konnte als die Summe der ‚Maße' dieser beiden Mengen."

6.9.2. *Die Arbeiten von Peano und von Jordan*

In seinem Buch *Applicationi geometriche del calcolo infinitesimale*, das 1887 erschien, definierte Peano ([82], S. 152) zunächst den Begriff des *Feldes* (*Gebietes*) *von Punkten* (campo di punti) oder einer *Figur* (figura): Das ist eine endliche oder unendliche Menge von Punkten des $\boldsymbol{R}^n$. Dann definierte er die Begriffe innerer Punkt, äußerer Punkt und Randpunkt für die Gerade ([82], S. 153), für die Ebene ([82], S. 155) und für den Raum ([82], S. 158). Anschließend definierte er die *innere* und die *äußere* Länge (bzw. den *inneren* und den *äußeren* Flächeninhalt bzw. das *innere* und das *äußere* Volumen) einer beschränkten Teilmenge von $\boldsymbol{R}$ (bzw. $\boldsymbol{R}^2$ bzw. $\boldsymbol{R}^3$). Zu diesem Zwecke betrachtete er ([82], S. 154, 156 und 158) eine Teilmenge P von $\boldsymbol{R}$ (bzw. $\boldsymbol{R}^2$ bzw. $\boldsymbol{R}^3$) und eine endliche Anzahl beliebiger Intervalle I_j, $1 \leqq j \leqq n$ (bzw. Polygone bzw. Prismen), die in P enthalten sind (bzw. deren Vereinigung, die P enthält). Ist dann $L(I_j)$ die Länge (bzw. der Flächeninhalt bzw. das Volumen) der in P enthaltenen I_j (bzw. der Vereinigung, die P enthält), so setzte er $\mu_i(P) = \sup \sum_{j=1}^{n} L(I_j)$ $\left(\text{bzw. } \mu_e(P) = \inf \sum_{j=1}^{n} L(I_j)\right)$ für jede endliche Familie derartiger Intervalle (bzw. Polygone bzw. Prismen). Ist $\mu_i(P) = \mu_e(P) = \mu(P)$, so wird diese Zahl die *Länge* (der *Flächeninhalt* bzw. das *Volumen*) von P genannt.[1]) Sind P_1 und P_2 zwei meßbare Mengen ohne gemeinsamen Punkt, so existiert $\mu(P_1 \cup P_2)$ und stimmt mit $\mu(P_1) + \mu(P_2)$ überein. Doch braucht, wie N. Bourbaki bemerkte ([41][1], S. 259), eine beschränkte offene Menge nicht meßbar (quadrierbar) zu sein, und die Menge der rationalen Zahlen in einem beschränkten Intervall ist ebenfalls nicht meßbar.

Zur selben Zeit arbeitete Camille Jordan eine Maßtheorie aus, die der Peanoschen stark ähnelt. Es sei bemerkt, daß es Jordan war, der (in der zweiten Auflage des ersten Bandes seines 1893 erschienenen Buches *Cours d'analyse*) die neue, vor allem von Weierstraß, Dedekind, Cantor und ihm selbst entwickelte Analysis in das Lehrprogramm einführte. Damit leistete er einen Beitrag zum Aufblühen der französischen Analysis-Schule der folgenden Generation, deren bedeutendste Vertreter Borel, Baire und Lebesgue werden sollten.

In seiner Arbeit von 1892 *Remarques sur les intégrales définies* betrachtete Jordan eine in $\boldsymbol{R}^n$ beschränkte Menge (*champ*, Gebiet). Er schreibt ([72], S. 69), der Einfluß des Gebietes sei bisher in den Problemen der Mehrfachintegrale nicht sorgfältig untersucht worden. Alle Beweise beruhten auf diesem zweifachen Postulat, daß jedes Gebiet E einen bestimmten n-dimensionalen Inhalt besitze und daß bei einer Zerlegung des Gebietes in mehrere Teile $E_1, E_2, \ldots$ die Summe der n-dimensionalen Inhalte dieser Teile mit dem n-dimensionalen Gesamtinhalt von E überein-

[1]) Man sagt dann, P sei im Peanoschen Sinne meßbar.

stimmt. Was Jordan bewies ([72], S. 70), ist folgendes: Ist E ein beliebiges Gebiet, so kann man ihm zwei *Zahlen* E' und E'', seinen *inneren* n-dimensionalen *Inhalt* und seinen *äußeren* n-dimensionalen *Inhalt*, zuordnen. Ist $E' = E''$, so nennt man E *meßbar*[1]) und sagt, E besitze den n-dimensionalen *Inhalt* $E' = E''$.

Jordan veranschaulichte seine Ideen in der mit rechtwinkligen Achsen versehenen (zweidimensionalen) u,v-Ebene ([72], S. 76). Es sei E eine beliebige Menge von $\boldsymbol{R}^2$. Man zerlegt die Ebene durch Parallelen zu den Achsen ([72], S. 77) in Quadrate der Seitenlänge r. Es sei S die Vereinigung derjenigen Quadrate, deren sämtliche Punkte innere Punkte von E sind, und $S + S'$ die Vereinigung der Quadrate, welche Punkte von E enthalten. Dann gilt offenbar $S \subset E \subset S + S'$. Sind $\mu(S)$ und $\mu(S + S')$ die (zweidimensionalen) Flächeninhalte von S bzw. $S + S'$, dann existieren die Grenzwerte $\mu_i(E) = \lim_{r\to 0} \mu(S)$ und $\mu_e(E) = \lim_{r\to 0} \mu(S + S')$. Sie werden *innerer* bzw. *äußerer*[2]) *Flächeninhalt* von E genannt ([72], S. 78). Ist $\mu_i(E) = \mu_e(E)$, so nennt man E *quadrierbar* und die Zahl $\mu_i(E) = \mu_e(E)$ den *Flächeninhalt* von E.

Die Jordansche Theorie, deren Prinzipien dieselben sind wie die der Peanoschen, hat daher auch die oben angedeuteten Mängel.

6.9.3. *Emile Borel*

Wie Borel in seiner *Notice sur les travaux scientifiques* ([12], S. 121—122) selbst sagte, hatte er „erstmals im Jahre 1894 auf implizite Art den Begriff einer Menge vom Maß Null eingeführt" (eine Menge von Punkten (auf einer Geraden) wird Menge vom Maß Null genannt, wenn man alle Punkte der Menge in (endlich oder unendlich viele) Intervalle einschließen kann, deren Summe kleiner ist als jede beliebig vorgegebene Zahl ε), um zu zeigen, daß jede Menge, die ein von null verschiedenes Maß hat, überabzählbar ist ([10], S. 256). Diesen Begriff erläuterte er 1897, mit der Bemerkung, zur gleichen Zeit habe er eine allgemeine Definition des Maßes von Mengen angegeben, die von allen bisher benutzten Definitionen völlig verschieden sei.

Tatsächlich entwickelte Borel in seinen *Leçons sur la théorie des fonctions*, einem anderen bedeutenden Buch in der Geschichte der mathematischen Analysis, seine Theorie der *meßbaren Mengen* ([11], S. 46—48). Er betrachtet dort die Teilmengen E von $[0, 1]$. Ist E die Vereinigung abzählbar vieler disjunkter Intervalle der Gesamtlänge s, so sagte er, die Menge habe das Maß s. Sind s und s' die Maße von E bzw. E' und ist $E \cap E'$ leer, so ist das Maß von $E \cup E'$ gleich $s + s'$. Allgemeiner, ist (E_i), $i \in \boldsymbol{N}$, eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Mengen mit den Maßen s_i, so hat $\bigcup_{i\in \boldsymbol{N}} E_i$ das Maß $\sum_{i=1}^{\infty} s_i$. Diese Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Definition des Maßes. Anschließend formulierte Borel die folgende Definition: Hat E das Maß s und ist s' das Maß der Teilmenge $E' \subset E$, so habe die Mengendifferenz $E \setminus E'$ definitionsgemäß das Maß $s - s'$. In diesem

---

1) Im Jordanschen Sinne.

2) In 6.9.1. handelte es sich um das äußere Maß.

Fall werden die Mengen, die auf Grund dieser Definitionen ein Maß besitzen, meßbare Mengen genannt. Somit ist jede offene Menge von $\mathbf{R}$, da sie Vereinigung einer abzählbaren Familie paarweise disjunkter Intervalle ist, meßbar. In dieser Weise erhält man, ausgehend von den offenen Mengen, eine umfangreiche Klasse meßbarer Mengen, durch Iteration der Operationen der „Differenzbildung" $E \setminus E'$ und der abzählbaren Vereinigung. Diese Mengen sollten später *Borelsche Mengen* genannt werden ([47], 49.1). Auf dieser Klasse kann man also ein Maß μ definieren derart, daß für $E' \subset E$ die Beziehung $\mu(E \setminus E') = \mu(E) - \mu(E')$ besteht und für $E = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n$, wenn die E_i paarweise disjunkt sind, $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ gilt. „Diese Definition", schrieb N. Bourbaki ([14][1], S. 260), „sollte der Anfang einer neuen Ära in der Analysis sein". (Es sei angemerkt, daß es ebenfalls Borel war, der 1895 ([10], S. 218) als erster den sogenannten Satz von Borel-Lebesgue für die Gerade formulierte: Aus jeder Überdeckung eines abgeschlossenen und beschränkten Intervalls F durch offene Intervalle O_i, $i \in I \subset \mathbf{N}$ (mit anderen Worten, $F \subset \bigcup_{i \in I} O_i$) kann man eine endliche Überdeckung des Intervalls (mit anderen Worten, $F \subset \bigcup_{i \in J} O_i$, $J \subset I$, J endlich) aussondern.

Die Borelsche Maßtheorie sollte den Weg für das Lebesguesche Integral öffnen, deren wichtige Säule („Eckstein", vgl. [14][1], S. 260) das Majorantenkriterium ([68], S. 120—178) werden sollte, das unter sehr allgemeinen Voraussetzungen die Beziehung

$$\int \lim f_k(x)\, dx = \lim \int f_k(x)\, dx$$

liefert (siehe Kapitel 11).

6.10. Begründungen der Arithmetik

Die verschiedenen Definitionen der reellen Zahlen setzten die Menge der ganzen Zahlen als vorliegend („konstruiert") voraus. Daher erwies es sich als unumgänglich, eine korrekte Theorie der ganzen Zahlen zu erarbeiten, um die Mathematik der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts auf eine sichere Grundlage zu stellen.

6.10.1. Hermann Graßmann

Es war Graßmann, der als erster versuchte, die Grundlagen der Arithmetik auszuarbeiten, womit er den Weg zu ihrer Axiomatisierung ([95], S. 147) eröffnete. Eine Etappe dieses Weges soll hier analysiert werden (siehe Kapitel 13).

In seinem 1861 erschienenen Buch über die Arithmetik begann Graßmann mit der Definition der Addition ([63], S. 300); dabei benutzte er die Operation, welche einer Zahl $x \in \mathbf{Z}$ die Zahl $x + 1$ zuordnet. Überdies verwendete er implizit sogar ([14][1], S. 37) das Prinzip der vollständigen Induktion, um die Assoziativität

([63], S. 304) und die Kommutativität ([63], S. 305) der Addition zu beweisen. Ferner definierte er die Multiplikation ([63], S. 314) und zeigte, daß sie distributiv ([63], S. 318–319), assoziativ ([63], S. 320) und kommutativ ([63], S. 321) ist. (Schon M. Legendre hatte am Beginn seines Werkes *Essai sur la théorie des nombres*, 2. Auflage, Paris (Courcier), 1808, die Kommutivität der Multiplikation bewiesen. Deutsche Übersetzung, von H. Maser, Teubner, Leipzig 1886, S. 1.)

Die Hauptkritik, die man bei Graßmann anbringen könnte ([95], S. 149), die aber keineswegs die große Tragweite seines Versuches mindert, besteht darin, daß er nicht explizit sagte, daß zwei verschiedene positive ganze Zahlen zwei verschiedene Nachfolger haben und daß 1 nicht Nachfolger einer positiven ganzen Zahl ist; diese Aussagen finden sich unter den Axiomen, welche den Axiomensystemen von Dedekind und von Peano zugrunde liegen.

6.10.2. Die Theorie der ganzen Zahlen von Richard Dedekind

In seinem zwischen 1872 und 1888 verfaßten Büchlein *Was sind und was sollen die Zahlen?* [39][1] stellte Dedekind seine Theorie der ganzen Zahlen vor. Es sei bemerkt, daß die unveröffentlichte erste Fassung dieser Schrift ([50], Anhang LVI), die zwischen 1872 und 1878 entstand, den Titel *Überlegungen über die Zahlen* trug, dem der sehr bezeichnende Untertitel *Versuch einer Analyse des Zahlbegriffes von einem naiven Standpunkt aus* folgte.

Der Begriff, der Dedekinds Theorie zugrunde liegt, ist der Begriff der Kette ([39][1], S. 9): Es sei f eine Abbildung der Menge S in sich. Dann wird eine Teilmenge K von S eine *Kette* genannt, wenn $f(K) = K' \subset K$ gilt.[1]) Alsdann führte Dedekind ([39][1], S. 10–11) den Begriff der *Kette der Menge A* ein (im folgenden sagte er dafür einfach Kette von A), einen für seine Theorie der vollständigen Induktion wesentlichen Begriff. Es sei A eine Teilmenge von S und A_0 der Durchschnitt (bei Dedekind: „die Gemeinheit") aller Ketten, die A enthalten; er nannte A_0 die Kette der Menge A. Auf Grund der Eigenschaften der Kette einer Menge konnte Dedekind den folgenden Satz von der vollständigen Induktion aussprechen: „Um zu beweisen, daß die Kette A_0 Teil irgendeines Systems Σ ist — mag letzteres Teil von S sein oder nicht —, genügt es zu zeigen,

ϱ. daß $A \mathfrak{z} \Sigma$, und

σ. daß das Bild jedes gemeinsamen Elementes von A_0 und Σ ebenfalls Element von Σ ist" ([39][1], S. 11–12).

Nachdem Dedekind ([39][1], S. 13) den Begriff der unendlichen Menge (erstmals in der Geschichte der Mathematik!) definiert hatte („Ein System S heißt *unendlich*, wenn es einem echten Teil seiner selbst ähnlich ist ...") wollte er den Satz beweisen ([39][1], S. 14): „Es gibt unendliche Systeme" (dieser „Beweis" wird in [50], § 7.1, im Detail untersucht). Für die weitere Theorie reicht es aus, diese Aussage als Axiom anzunehmen, wie es später Zermelo getan hat; denn sie ist für die Kon-

[1]) Dedekind benutzte statt $\subset$ das Zeichen $\mathfrak{z}$. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

struktion von $\boldsymbol{N}$ nicht zu entbehren. Dedekind nannte eine Menge N *einfach unendlich* ([39][1], S. 16), wenn eine injektive Abbildung f von N in sich existiert derart, daß N die Kette eines seiner Elemente (genauer: die Kette der Menge, die nur aus diesem Element besteht) ist, das nicht zu $f(N)$ gehört. (Ein Beispiel dafür wird angegeben, wobei $\boldsymbol{N}$ als konstruiert vorausgesetzt wird, nämlich durch die durch $f(n) = n + 1$ definierte Abbildung f von $\boldsymbol{N}^*$ in sich.) Dieses Element, welches *Grundelement* genannt wird, wird mit dem Symbol 1 bezeichnet. Dedekind sagte nun, die unendliche Menge sei durch die Abbildung *f geordnet.*

Diese Menge N kann durch die Existenz einer Abbildung f von N in sich und eines Elements 1 wie folgt charakterisiert werden:

a) $N' = f(N) \subset N$;
b) $N = 1_0$; [1])
c) 1 gehört nicht zu N';
d) f ist injektiv.

Wenn man ([39][1], S. 17) während der Betrachtung einer durch eine Abbildung f geordneten einfach unendlichen Menge N von der Natur ihrer Elemente abstrahiert (man interessiert sich nur dafür, daß sie verschieden sind) und nur ihre gegenseitigen Beziehungen untersucht, die sich aus der Abbildung f ergeben, nennt man die Elemente von N *natürliche* Zahlen oder *Ordinalzahlen.*

Dedekind bewies die Existenz von „einfach unendlichen" Teilmengen in jeder unendlichen Menge und behandelte danach ([39][1], S. 18) *größere und kleinere Zahlen.* Die Ordnungsrelation zwischen zwei Elementen von N wird auf Grund ihrer Ketten definiert ([39][1], S. 20). Man nennt n größer als m, wenn $n_0 \subset m'_0$ gilt (m'_0 ist das Bild der Kette von m vermöge f). Mit dieser Definition der Ordnung ist N total geordnet (n° 90). Anschließend definierte er die Menge Z_n aller Zahlen, die *nicht größer als n* sind ([39][1], S. 22), d. h. der Zahlen, die nicht in n'_0 enthalten sind. In diesem Fall gilt $N = Z_n \cup n'_0$ für jedes n (n° 103).

Nachdem Dedekind die Ordnung auf der Menge N beschrieben hatte, untersuchte er in § 8 „*Endliche und unendliche Teile der Zahlenreihe*". Er zeigte zunächst ([39][1], S. 25), daß die Menge Z_n endlich ist und daß für $m \neq n$ die Mengen Z_m und Z_n nicht gleichmächtig sind (n° 120). Eine Teilmenge T von N ist endlich oder einfach unendlich ([39][1], S. 26), je nachdem, ob sie ein größtes Element besitzt oder nicht.

Die Definitionen und Sätze der vorhergehenden Paragraphen gestatteten es Dedekind, in dem sehr wichtigen Paragraphen 9 die *Definition einer Abbildung der Zahlenreihe durch Induktion* ([39][1], S. 27) zu behandeln: Es sei Ω ein beliebiges System. „Ist eine beliebige (ähnliche oder unähnliche) Abbildung θ eines Systems Ω in sich selbst und außerdem ein bestimmtes Element ω in Ω gegeben, so gibt es eine und nur eine Abbildung ψ der Zahlenreihe N, welche den Bedingungen I. $\psi(N) \mathrel{3} \Omega$, II. $\psi(1) = \omega$, III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$ genügt, wo n jede Zahl bedeutet" ([39][1], S. 28). Hier ist $n' = f(n)$, wobei f die Abbildung ist, vermöge derer die Menge N als einfach unendliche Menge geordnet wurde. Die restlichen Paragraphen des Büchleins sind eine Anwendung dieses Satzes aus n° 126.

[1]) D. h. die Kette von 1.

Der Paragraph 10 ist der *Klasse der einfach unendlichen Systeme* gewidmet ([39][1], S. 33); denn alle einfach unendlichen Mengen (Systeme) sind gleichmächtig zu $\boldsymbol{N}$, also auch untereinander gleichmächtig. Daraus ergibt sich (in n° 134; vgl. [39][1], S. 34—35), daß die Sätze über die Zahlen (d. h. die Elemente einer durch eine Abbildung f geordneten einfach unendlichen Menge), die aus dieser Ordnungsstruktur resultieren, auch für jede andere durch eine Abbildung θ geordnete einfach unendliche Menge W gelten. Das gestattet „... die Übersetzung eines arithmetischen Satzes aus einer Sprache in eine andere" ([39][1], S. 35)! Es ist die in n° 126 definierte Abbildung ψ, welche diesen Isomorphismus zwischen den Ordnungsstrukturen von N und W vermittelt; N *repräsentiert* dabei die Menge der (ganzen) natürlichen Zahlen, „den Gegenstand der Lehre von den Zahlen".

Dedekind definierte schließlich die Addition (§ 11), die Multiplikation (§ 12) und die Potenzierung natürlicher Zahlen (§ 13). Der § 14 (S. 41) behandelt die *Anzahl der Elemente eines endlichen Systems* (einer endlichen Menge). Dedekind zeigte hier (S. 43), daß eine Menge endlich oder unendlich ist, je nachdem, ob sie mit einer Menge Z_n gleichmächtig ist oder nicht. (Der Beweis dieses Satzes benutzt implizit das Auswahlaxiom für abzählbare Mengen.) Am Schluß zeigte er (S. 44), daß zu einer endlichen Menge T eine eindeutig bestimmte Zahl n existiert derart, daß T zu Z_n gleichmächtig ist; dann nennt man n die *Anzahl* der in T enthaltenen Elemente. Wenn man die Zahlen benutzt, um diese Eigenschaft auszudrücken, so nennt man sie *Kardinalzahlen*, und zwar Kardinalzahlen der endlichen Mengen.

6.10.3. *Guiseppe Peano*

In seinem Buch *Arithmetices principia nova methodo exposita* [83], das 1889 erschien, legte Peano seine Theorie dar. In seinem Vorwort präzisierte er, daß er alle Begriffe, die in den grundlegenden Sätzen der Arithmetik auftreten, durch Symbole ausgedrückt hat, die der Logik und der Arithmetik angehören. Dank dieser Bezeichnungen nimmt jeder Satz die Gestalt einer algebraischen Gleichung an. Die anderen Sätze lassen sich daraus mit Methoden ableiten, die den Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen ähneln. Deshalb muß man, um dieses Werk Peanos lesen zu können, die Aussagen in die gewöhnliche mathematische Sprache „übersetzen".

Peano definierte zunächst alle benutzten Symbole mit Ausnahme der folgenden vier: N (positive ganze Zahl), 1 (Einheit), $a + 1$ (Nachfolger von a) und $=$ (gleich) (§ 1). Er führte hier das Symbol für die Zugehörigkeit zu einer Menge (ϵ) ein, das er von dem (Inklusions-) Symbol „ist enthalten in" unterscheidet (dafür verwendet er den umgeklappten Großbuchstaben C, im Unterschied zu dem heutigen Gebrauch des Zeichens $\subset$). Peano vermerkte auch, daß er für seine Beweise der arithmetischen Sätze das Buch von H. Graßmann *Lehrbuch der Arithmetik* [63] benutzt habe und daß ihm das Büchlein von Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* [39][1] bei der Abfassung seines Buches *nützlich* gewesen sei.

In § 1 führte Peano neun Axiome ein, auf denen die gesamte Artihmetik beruht; allerdings gehören die Axiome 2, 3, 4 und 5 zu den grundlegenden Prinzipien der

Logik ([69], S. 83). Die fünf anderen Axiome[1]) lauten in der Sprache der heutigen Mathematik (([62], S. 966), wobei S die Funktion bezeichnet, welche der naiven Vorstellung entspricht, die der ganzen Zahl a die Zahl $a + 1$ zuordnet):

1. $\boldsymbol{N}^*$ ist eine Menge,
2. $1 \in \boldsymbol{N}^*$;
3. S ist eine injektive Abbildung von $\boldsymbol{N}^*$ in $\boldsymbol{N}^*$;
4. 1 ist nicht Nachfolger einer Zahl;
5. Jede Teilmenge A von $\boldsymbol{N}^*$, welche 1 und $S(A)$ enthält, stimmt mit $\boldsymbol{N}^*$ überein.[2])

(Im Jahre 1891 sagte Peano, daß die Axiome, welche der Arithmetik zugrunde liegen, Dedekind zu verdanken sind und aus n° 71 des Buches von Dedekind stammen ([50], 13.3)). (Siehe 13.1.7.)

Von seinen Axiomen ausgehend definierte Peano in den Paragraphen 1 bis 7 die üblichen arithmetischen Operationen.

Die mathematische Logik (siehe Kapitel 13) spielt in dem Werk Peanos eine große Rolle. Sein Brief an Felix Klein vom 15. September 1894 ([50], Anhang XLVI) zeigt, daß sie für ihn ein wenig die Rolle gespielt hat, welche später der Strukturbegriff übernahm; denn, so schrieb Peano, die Untersuchung der mathematischen Begriffe und Schlußweisen gestatte es, die grundlegenden Ideen zu finden, mit deren Hilfe sich alle anderen ausdrücken lassen.

6.11. Literatur

[1] N. H. Abel, Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots$ J. reine und angew. Math. *1* (1826), S. 311—339 = Oeuvres complètes, Bd. 1, S. 219—250, Hrsg. Sylow und Lie, Grøndahl, Kristiania 1881.

[1]¹ Deutsche Übersetzung, von A. L. Crelle, Untersuchungen über die Reihe ..., Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 71, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1921.

[2] N. H. Abel, Oeuvres complètes, Bd. 2, Hrsg. Holmboe, Grøndahl, Christiania 1839.

[3] N. H. Abel, Correspondance, Mémorial, Dybwad, Kristiania 1902.

[4] R. Baire, Théorie des ensembles, exposée d'après l'article allemand de A. Schoenflies, Encycl. des Sci. math., Bd. 1, 1, S. 469—531, Gauthier-Villars, Paris 1909.

[5] P. du Bois-Reymond, Über die Fourierschen Reihen, Nachr. K. Gesell. Wiss. Gött. (1873), S. 571—584.

[6] B. Bolzano, Der binomische Lehrsatz, und als Folgerung aus ihm der polynomische, und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erwiesen, Enders, Prag 1816.

[7] B. Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Abh. K. Böhm. Gesell. Wiss. 3, Bd. 5, S. 1—60

---

[1]) Die sogenannten Peanoschen Axiome.

[2]) Das ist das Prinzip der vollständigen Induktion.

(1817) = Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 153, Wilh. Engelmann, Leipzig 1905. Französische Übersetzung, von J. Sebestik, Revue d'Hist. des Sci. *17* (1964), 136—164.

[8] B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, Reclam, Leipzig 1851 = Meiner, Leipzig 1920. Englische Übersetzung, von D. A. Steele, Yale Univ. Press, New Haven 1950.

[9] B. Bolzano, Functionenlehre, Schriften, Bd. 1, K. Böhm. Gesell. Wiss., Prag 1930.

[10] E. Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions, Ann. Ec. Norm. Sup. (3) *12* (1895), 9—55 = Oeuvres, Bd. 1, S. 239—285. C.N.R.S., Paris 1972.

[11] E. Borel, Leçons sur la théorie des fonçtions, Gauthier-Villars, Paris 1898.

[12] E. Borel, Notices sur les travaux scientifiques, Gauthier-Villars, Paris 1912 = Oeuvres, Bd. 1, S. 119—191, C.N.R.S. Paris 1972.

[13] N. Bourbaki, Topologie générale, Kapitel 1—4, Hermann, Paris 1971.

[14] N. Bourbaki, Eléments d'historie des mathématiques, neue Aufl., Hermann, Paris 1974.

[14][1] Deutsche Übersetzung der 1. Auflage, von Anneliese Overschelp, Elemente der Mathematikgeschichte, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen und Zürich 1971.

[15] G. Cantor, Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz, J. reine und angew. Math. *72* (1870), 130—138 = Gesamm. Abh., Springer, Berlin 1932, S. 71—79. Nachdruck in [23], S. 71—79.

[16] G. Cantor, Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen läßt, J. reine und angew. Math. *72* (1870), 139—142, in [23], S. 80—83.

[17] G. Cantor, Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt, J. reine und angew. Math. *73* (1871), 294—296 = [23], S. 84—86.

[18] G. Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Ann. *5* (1872), 123—132 = [23], 92—101. Französische Übersetzung: Acta Math. *2* (1883), 336—348.

[19] G. Cantor, Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, J. reine und angew. Math. *77* (1874), 258—262 = [23], S. 115—118. Französische Übersetzung: Acta Math. *2* (1883), 305—310.

[20] G. Cantor, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J. reine und angew. Math. *84* (1878), 242—252 = [23], S. 119—133; Französische Übersetzung: Acta Math. *2* (1883), 311—328.

[21] G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, Math. Ann. *15* (1879), 1—7; *17* (1880), 355—358; *20* (1882), 113—121; *21* (1883), 51—58, 545—591; *23* (1884), 453—488 = [23], S. 139—244; teilweise französische Übersetzung in Acta Math. *2* (1883), 349—408.

[22] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann. *46* (1895), 481—512; *49* (1897), 207—246 = [23], S. 282—351; französische Übersetzung von F. Marotte, Hermann, Paris 1899.

[23] G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Springer, Berlin 1930, Nachdruck: Olms, Hildesheim 1962.

[24] G. Cantor und R. Dedekind, Briefwechsel, Hermann, Paris 1937; französische Übersetzung in J. Cavaillès, Philosophie mathématique, Hermann, Paris 1962, S. 177—249 (vgl. [35]).

[25] A. L. Cauchy, Mémoire sur les intégrales définies, Vortrag vor der Académie am 22. 8. 1814, dem Sekretariat zum Druck übergeben am 14. 9. 1825, Oeuvres complètes (1), Bd. 1, Gauthier-Villars, Paris 1882, S. 319—506.

[26] A. L. Cauchy, Cours d'analyse de l'école royale polytechnique, Debure, Paris 1821; = Oeuvres complètes (2), Bd. 3, Gauthier-Villars, Paris 1897.

[26][1] Deutsche Übersetzung des ersten Teils: Algebraische Analysis, deutsch herausgegeben von Carl Itzigsohn, Springer, Berlin 1885.

[27] A. L. Cauchy, Résumés des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal, Debure, Paris 1823 = Oeuvres complètes (2), Bd. 4, Gauthier-Villars, Paris 1899, S. 5—261.

[28] A. L. Cauchy, Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques, Mémoires Acad. Sci. *6* (1823), 603—612 Didot, Paris 1827 — Oeuvres complètes (1), Bd. 2, Gauthier-Villars, Paris 1908, S. 12—19.

[29] A. L. Cauchy, Leçons sur le calcul différentiel, Debure, Paris 1829 = Oeuvres complètes (2), Bd. 4, Gauthier-Villars, Paris 1899, S. 265—609.

[30] A. L. Cauchy, Résumés analytiques, Imprimérie royale, Turin 1833 = Oeuvres complètes (2), Bd. 10, Gauthier-Villars, Paris 1895, S. 5—184.

[31] A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions discontinues, C.R. Acad. Sci. *28* (1849), 277—282 = Oeuvres complètes (1), Bd. 11, Gauthier-Villars, Paris 1899, S. 120 bis 126.

[32] A. L. Cauchy, Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données, C.R. Acad. Sci. *36* (1853), 454—459 = Oeuvres complètes (1), Bd. 12, Gauthier-Villars, Paris 1900, S. 30—36.

[33] A. L. Cauchy, Observations sur une Note publiée dans le Compte rendu de la dernière séance par M. Catalan, C.R. Acad. Sci. *43* (1856), 637—639 = Oeuvres complètes (1), Bd. 12, Gauthier-Villars, Paris 1900, S. 391—394.

[34] A. L. Cauchy, Oeuvres complètes (2), Bd. 15, Gauthier-Villars, Paris 1974.

[35] J. Cavaillès, Philosophie mathématique, Hermann, Paris 1962.

[36] P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *50* (1963), 1143—1148; *51* (1964), 104—110.

[37] R. Dedekind, Über die Komposition der binären quadratischen Formen, Supplement X von P. G. Lejeune Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., Vieweg, Braunschweig 1871, S. 423—462 = Gesamm. math. Werke, Bd. 3, Vieweg, Braunschweig 1932, S. 223—261.

[38] R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 7. Aufl., Vieweg, Braunschweig 1969 = 1. Aufl. 1872 = Gesamm. math. Werke, Bd. 3, Vieweg, Braunschweig 1932, S. 315—334. Italienische Übersetzung von O. Zariski, Stock, Roma 1926; Englische Übersetzung von W. W. Beman, Dover, New York 1963.

[38][1] R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 8. Aufl., in [39][1], Vieweg, Braunschweig/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[39] R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 10. Aufl. Vieweg, Braunschweig 1969 = 1. Aufl. 1888 = Gesamm. math. Werke, Bd. 3, Vieweg, Braunschweig 1932. Italienische Übersetzung, von O. Zariski, Stock, Roma 1926; Englische Übersetzung, von W. W. Beman, Dover, New York 1963.

[39][1] R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 11. Aufl., zusammen mit [38][1] (Seitenzahlen der beiden Arbeiten beginnen jeweils neu!), Vieweg, Braunschweig/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967.

[40] R. Dedekind, Allgemeine Sätze über Räume, Gesamm. math. Werke, Bd. 2, Vieweg, Braunschweig 1931, S. 353—355.

[41] J. Dieudonné, L'oeuvre mathématique de C. F. Gauß, Palais de la Découverte, Paris, D79, 1962.

[42] J. Dieudonné, Richard Dedekind, in: Encycl. Universalis, Bd. 5, Paris 1969.

[43] J. Dieudonné, Histoire de l'analyse harmonique, Nauka, Moskau 1971.

[44] P. G. Lejeune Dirichlet, Sur la convergence des séries *trigonométriques* qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, J. reine und angew. Math. *4* (1829), 157—169 = Werke, Bd. 1, Reimer, Berlin 1889, S. 117—132.

[45] P. G. Lejeune Dirichlet, Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, Vieweg, Braunschweig 1904.

[46] J. Dixmier, Cours de mathématiques du premier cycle, première année, 2. Aufl., Gauthier-Villars, Paris 1973.

[47] J. Dixmier, Cours de mathématique du premier cycle, deuxième année, Gauthier-Villars, Paris 1968.

[48] P. Dugac, Charles Méray (1835—1911) et la notion de limite, Revue d'Hist. des Sci. *23* (1970), 333—350.

[49] P. Dugac, Eléments d'analyse de Karl Weierstrass, Arch. for Hist. of Exact Sci. *10* (1973), 41—176.

[50] P. Dugac, Richard Dedekind et les fondements de l'analyse, Préface de J. Dieudonné, Vrin, Paris 1976.

[51] P. Dugac, Problèmes de l'histoire de l'analyse mathématique au dix-neuvième siècle. Cas de Karl Weierstrass et de Richard Dedekind, Proceedings Nr. 4, XIVth intern. Congress Hist. Sci., Sci. Council Japan, Tokio 1975, S. 172 bis 186.

[52] J. Fourier, Théorie de la chaleur dans les solides, Vortrag vor der Académie am 21. 12. 1807, veröffentlicht in I. Grattan-Guiness, Joseph Fourier, The MIT-Press, Cambridge (Mass.) 1972, S. 33—440.

[53] J. Fourier, Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides, Mémoire Acad. Sci. *4* (1819—1820) S. 185—555; Didot, Paris 1824.

[54] J. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Didot, Paris 1822; = Oeuvres, Bd. 1, Gauthier-Villars, Paris 1888.

[54][1] Deutsche Übersetzung von B. Weinstein: Analytische Theorie der Wärme, Springer, Berlin 1884.

[55] E. Galois, Démonstration d'un théorème d'analyse, Ann. de math. de Gergonne *21* (1830/31), 182—183 = Ecrits et mémoires math., Gauthiers-Villars, Paris 1962, S. 382—385.

[56] C. F. Gauß, Tagebuch 1796—1814, Math. Ann. *57* (1903), 6—34. Französische Übersetzung von P. Eymard und J. P. Lafon, Revue d'Hist. des Sci. *9* (1956), 23—51.

[56][1] C. F. Gauß, Mathematisches Tagebuch 1796—1814, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 256, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1976.

[57] C. F. Gauß, Anzeigen, Gött. gelehrt. Anz., 10. Februar 1812; = Werke, Bd. 3, Göttingen 1866, S. 197—202.

[58] C. F. Gauß, Disquisitiones generales circa seriem infinitum

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} xx + \frac{\alpha(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,\beta(\beta+1)\,(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)\,(\gamma+2)} x^3 + \text{etc.}$$

Comm. soc. reg. sci. Gott. rec. *2* (1813) = Werke, Bd. 3, Göttingen 1866, S. 123—162.

[59] C. F. Gauß, Développement des fonctions périodiques en séries, Werke, Bd. 7, Göttingen 1906, S. 469—472.

[60] C. F. Gauß, Werke, Bd. 10, 1. Teil, Göttingen 1917.

[61] C. F. Gauß und W. Bessel, Briefwechsel, Engelmann, Leipzig 1880.

[62] G. Glaeser, Axiomatique, Encycl. Universalis, Bd. 2, Paris 1968, S. 965—966.

[63] H. Grassmann, Stücke aus dem Lehrbuche der Arithmetik, Gesamm. math. und phys. Werke, Bd. 2, 1. Teil, Teubner, Leipzig 1904, S. 295—349 = Lehrbuch der Arithmetik, Enslin, Berlin 1861, S. 1—55.

[64] H. Hankel, Grenze, Allg. Encykl. der Wiss. und Künste, 1. Sect., neunzigster Theil, Brockhaus, Leipzig 1871, S. 185—211.

[65] G. H. Hardy, Sir George Stokes and the concept of uniform convergence, Proc. Cambr. Philos. Soc. *19* (1916—1919), 148—156.

[66] A. Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralrechnung, Teubner, Leipzig 1881.

[67] A. Harnack, Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihen, Math. Ann. *19* (1882), 235—279.

[68] T. Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration, The Univ. of Wisc. Press, Madison 1970.

[69] J. van Heijenoort, From Frege to Gödel, Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.) 1967.

[70] E. Heine, Über trigonometrische Reihen, J. reine und angew. Math. *71* (1869), 353—365.

[71] E. Heine, Die Elemente der Functionenlehre, J. reine und angew. Math. *74* (1872), 172—188.

[72] C. Jordan, Remarques sur les intégrales définies, J. Math. (4) *8* (1892), 69—99 = Oeuvres, Bd. 4, Gauthier-Villars, Paris 1964, S. 427—457.

[73] F. Klein, Über Arithmetisierung der Mathematik, Nachr. K. Gesell. Wiss. Gött., Gesch. Mitt. (1895), S. 82—91 = Ges. math. Abh., Bd. 2, S. 232—240. Französische Übersetzung von Vassilief und L. Laugel: Nouv. Ann. Math. (3) *16* (1897), 114—128.

[74] E. Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Programm Friedr.-Werder Gymn., Berlin 1872.

[75] E. E. Kummer, Gedächtnisrede auf Gustav Peter Lejeune Dirichlet, abgedruckt in P. G. Lejeune Dirichlet, Werke, Bd. 2, Reimer, Berlin 1897, S. 311—344.

[76] J. L. Lagrange, Suite du supplément à la théorie des fonctions dérivées. Continuation du théorème de Taylor et de la manière de terminer les séries infinies, Vorlesungen an der Ecole polytechnique, ausgearbeitet von Le Gentil, Paris 1798, Manuskript 1323 an der Ecole des ponts et chaussées de Paris.

[77] H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Gauthier-Villars, Paris 1904 = Oeuvres scientifiques, Bd. 2, L'Enseign. Math., Genève 1972, S. 1—138.

[78] Ch. Méray, Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie du développement des fonctions en séries, Revue des Soc. Savantes, Sci. math. phys. nat. 2, *3* (1868) 37, 133—138.

[79] Ch. Méray, Remarques sur la nature des quantités définies de servir de limites à des variables données, Revue des Soc. Savantes, Sci. math. phys. nat. 2, *4* (1869), 280—289.

[80] M. Ohm, Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, Erster Theil, Arithmetik und Algebra enthaltend, 2. Aufl., Riemann, Berlin 1828.

[81] M. Ohm, Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, Zweiter Theil, Algebra und Analysis des Endlichen enthaltend, 2. Aufl., Riemann, Berlin 1829.

[82] G. Peano, Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, Bocca, Torino 1887.

[83] G. Peano, Arithmetices principia nova methodo exposita, Bocca, Torino 1889 = Opere scelte, Bd. 2, Ed. Cremonese, Roma 1958, S. 20—55. Englische Übersetzung von H. C. Kennedy in: Selected works, Univ. Press, Toronto 1973, S. 101—134.

[84] S. D. Poisson, Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, présenté le 21 décembre 1807 à l'Institut national, Nouv. Bull. Sci. Soc. philomath., Paris, *1* (1807), 112—116 = Oeuvres de Fourier, Bd. 2, Gauthier-Villars, Paris 1890, S. 215—221.

[85] B. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, Diss. Göttingen 1851; = Gesamm. math. Werke, 2. Aufl. B. G. Teubner, Leipzig 1892, S. 3—48. Nachdruck: Dover, New York 1953. Französische Übersetzung von L. Laugel in: Oeuvres mathématiques, Gauthier-Villars, Paris 1898, S. 1—60.

[86] B. Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Abh. K. Gesell. Wiss. Gött., Math. Classe, *13* (1866—1867), 87—132 = Gesamm. math. Werke, B. G. Teubner, Leipzig 1892, S. 227—271; Nachdruck: Dover, New York 1953. Französische Übersetzung in Bull. Soc. Math. de France *5* (1873), 20—48, 79—96 = Oeuvres mathématiques, Gauthier-Villars, Paris 1898, S. 225—279.

[87] B. Riemann, Nachträge, Gesamm. math. Werke, Bd. 2, B. G. Teubner, Leipzig 1902.

[88] B. van Rootselaar, Bolzano's theory of real numbers, Arch. Hist. of Exact Sci. *2* (1962—1966) 168—180.

[89] K. Rychlik, Theorie der reellen Zahlen im Bolzanos handschriftlichen Nachlasse, Verlag der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften, Prag 1962.

[89 bis] W. Scharlau (Hrsg.), Richard Dedekind 1831/1981, Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag, Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1981.

[90] A. Schoenflies, zur Erinnerung an Georg Cantor, Jahresber. DMV *31* (1922), 97—106.

[91] Ph. L. Seidel, Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen, München Akad. Wiss. Abh. *51* (1847), 379—394 = Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 116, Engelmann, Leipzig 1900, S. 35—45.

[92] G. G. Stokes, On the critical values of the sums of periodic series, Trans. Cambr. Philos. Soc. *8* (1847), 533—583 = Math. and phys. papers, Bd. 1, The Univ. Press, Cambridge 1880, S. 236—313.

[93] O. Stolz, Über einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth, Math. Ann. *23* (1884), 152—156.

[94] L. Sylow, Les études d'Abel et ses découvertes, in: N. H. Abel, Mémorial, Dybwad, Kristiania 1902.

[95] H. Wang, The axiomatization of arithmetic, J. symb. Logic *22* (1957), 145—158.

[96] K. Weierstrass, Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, Math. Werke Bd. 2, S. 71—74, zuerst veröffentlicht in J. reine und angew. Math. 79 (1875), 29—31.

[97] K. Weierstrass, Zur Theorie der Potenzreihen, Math. Werke, Bd. 1, Mayer und Müller, Berlin 1894, S. 67—74.

[98] K. Weierstrass, Math. Werke, Bd. 3, Mayer und Müller, Berlin 1903.

[99] K. Weierstrass, Theorie der analytischen Functionen, Vorlesung, ausgearbeitet von F. Rudio, handschr., Bibliothek der Sektion Mathematik der Humboldt-Universität Berlin.

7. Elliptische Funktionen und Abelsche Integrale

von Christian Houzel

7.0. Einführung

Die Theorie der elliptischen Funktionen, die aus Problemen hervorgegangen ist, welche schon im achtzehnten Jahrhundert im Zusammenhang mit der Rektifizierung von Kurven gestellt worden waren, hat in der mathematischen Forschung des neunzehnten Jahrhunderts eine zentrale Rolle gespielt. Dadurch, daß sie zur Untersuchung der Abelschen Integrale verwendet wurde, hat sie entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung der algebraischen Geometrie und anderer wichtiger aus ihr hervorgegangener Theorien ausgeübt: auf die Entwicklung der Thetafunktionen und der Abelschen Mannigfaltigkeiten sowie auf die der Theorie der Modulfunktionen und der automorphen Funktionen.

Seit Beginn des achtzehnten Jahrhunderts hat man zahlreiche Anwendungen der elliptischen Integrale gefunden: die Anwendungen in der Mechanik — hauptsächlich von Legendre, Jacobi und Hermite entwickelt (unter anderem auch, um das Interesse für die elliptischen Funktionen zu rechtfertigen, indem sie deren Wirksamkeit zeigten) —, aber auch die Anwendungen in der Wärmelehre, der Potentialtheorie und der Theorie der elektrischen Leitfähigkeit, die Anwendungen in der Geodäsie und bei der Untersuchung von Minimalflächen (siehe 7.1.15.). Die am engsten mit der Theorie der elliptischen Funktionen verknüpfte mathematische Disziplin ist die Zahlentheorie; durch diese Verbindung mit der Arithmetik ist sie bis in unsere Tage ein außerordentlich ergiebiger Forschungsgegenstand geblieben.

Dieses Kapitel beschreibt die Geschichte der elliptischen Funktionen und der Abelschen Integrale bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts. Diese Geschichte ist in der Hauptsache durch die folgenden Stationen gekennzeichnet:

1751: das Studium der Fagnanoschen Arbeiten durch Euler, dem die Entdeckung des Additionstheorems der elliptischen Integrale folgte (nach Jacobi war dies die Geburtsstunde der Theorie der elliptischen Funktionen);

1827: die ersten Publikationen von Abel und Jacobi, mit denen die eigentliche Theorie der elliptischen Funktionen und die Theorie der Abelschen Integrale ihren Anfang nahmen;

1857: Riemanns Abhandlung über die Abelschen Funktionen;

1881: Poincarés Arbeiten über die Fuchsschen Funktionen.

Dieses Kapitel ist jedoch nicht nach dieser chronologischen Entwicklung, sondern nach den Hauptthemen der Theorie gegliedert.

7.1. Elliptische Funktionen

Seit den Anfängen der Infinitesimalrechnung im siebzehnten Jahrhundert haben die Mathematiker versucht, die Länge von Kurvenbögen zu berechnen: Das ist das Problem der *Rektifizierung*. Schon Archimedes hatte sich mit dem Fall des Kreises beschäftigt. Das allgemeine Problem hatte sich schnell als schwierig herausgestellt, und Descartes hielt die Rektifizierung algebraischer Kurven in geschlossener Form für unmöglich, aber einzelne Resultate wurden erzielt. Man hatte zunächst die Rektifizierung gewisser Kurven auf die anderer Kurven zurückgeführt[1]) oder auf Quadraturen (Flächenberechnungen), gemäß einer vagen allgemeinen Idee von Fermat;[2]) einige Rektifizierungen konnten ohne jede transzendente Konstruktion durchgeführt werden (vgl. [21], S. 226–227).[3])

7.1.1. *Reihenentwicklung der elliptischen Integrale*

Die Berechnung der Länge eines Ellipsenbogens wurde von Wallis 1655 versucht; das Bogenelement lautet

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{a^2 - ex^2}{a^2 - x^2}}\, dx \quad \text{mit} \quad e = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

---

[1]) Roberval und Torricelli (1640) führten die Rektifizierung der archimedischen Spirale auf die der Parabel zurück (dank einer Konstruktion von Cavalieri). Fermat übertrug dieses Resultat auf Spiralen mit der Polargleichung $r^n = a\theta$, deren Rektifizierung auf die von „verallgemeinerten Parabeln" mit der kartesischen Gleichung $x^{n+1} = a\left(1 + \frac{1}{n}\right)y$ führt. Pascal führte (1658) die Rektifizierung eines Bogens der verlängerten oder verkürzten Zykloide auf die einer halben Ellipse zurück.

[2]) Huygens behandelte (1656) in dieser Weise die Rektifizierung der Parabel und der Zissoide des Diokles mit Hilfe der Quadratur der Hyperbel, d. h. mit Hilfe der Logarithmusfunktion.

[3]) Torricelli rektifizierte schon 1645 die logarithmische Spirale. Die semikubische Parabel mit der Gleichung $y^2 = x^3$ wurde gegen 1657–1660 von Neil, van Heuraet und Fermat rektifiziert (Neil gab für das Bogenelement $ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$ eine äquivalente geometrische Form an). Wren, Roberval und Huygens haben fast gleichzeitig (1658) die Zykloide rektifiziert, während für Epizykloiden und Hypozykloiden das Problem der Rektifizierung von Newton (1687) gelöst wurde.

(a und b sind die Halbachsen der Ellipse), und dies ist keineswegs das Differential einer „elementaren“ Funktion: Die Rektifizierung der Ellipse mußte daher den Anstrengungen der Analytiker widerstehen. Sie mußten sich mit Reihenentwicklungen für die Bogenlänge begnügen (Potenzreihe in x, Newton 1669; Potenzreihe in e, Euler 1733 ([28], (1), Bd. XX, S. 4) und Maclaurin 1742); Lambert erhielt 1772 demgegenüber schneller konvergierende trigonometrische Reihen, indem er von der Beziehung $ds = a\sqrt{1 - e\sin^2\varphi}\,d\varphi$ ausging, die sich durch die Variablensubstitution $x = a\sin\varphi$ ergibt. Mit diesen Reihenentwicklungen berechnete er die Poldistanz und die Länge eines Grades auf einem Meridian für verschiedene Breiten auf der Erde, die er als abgeplattetes Rotationsellipsoid auffaßte.

Andere Probleme als das der Rektifizierung der Ellipse hatten auf Integrale des gleichen Typs geführt. Beispielsweise hat die Gleichgewichtskurve (elastische Linie, Elastika) eines elastischen Balkens, an dessen Enden Kräfte angreifen und Momente auftreten und dessen Querschnitte bei der Biegung eben bleiben, die Gleichung

$$y = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^4}},$$

wie Jakob Bernoulli 1694 gezeigt hatte; er hielt übrigens die Integration für nicht ausführbar. Das Bogenelement dieser Kurve ist $ds = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$, und das entsprechende Integral diente auch dazu, die „parazentrische Isochrone“ zu konstruieren, auf welcher sich ein Massenpunkt mit konstanter Radialgeschwindigkeit von einem festen Mittelpunkt entfernt; dieses Problem war von Leibniz gestellt worden. Das Flächenelement eines schiefen Kreiskegels wurde von Euler berechnet (postum veröffentlicht); er setzte $dS = \dfrac{c}{2}\sqrt{a^2 + (c + b\cos\varphi)^2}\,d\varphi$, wobei a die Höhe, b der Abstand des Mittelpunkts des Basiskreises von der Projektion der Kegelspitze auf die Grundfläche und c der Radius des Basiskreises ist. Euler gab Reihenentwicklungen für den gesuchten Flächeninhalt an ([28], (1), Bd. XXI, S. 119–141).

Lagrange studierte systematisch die Integrale

$$\int \frac{M(x)\,dx}{\sqrt{(1 \pm p^2x^2)(1 \pm q^2x^2)}}$$

(M eine rationale Funktion) in der wichtigen Arbeit *Sur une nouvelle méthode de calcul intégral* (1783) ([29], Bd. II, S. 253–312); er leitete daraus Reihenentwicklungen her, wobei er sich bemühte, explizite Schranken für den Fehler anzugeben, der durch Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung entsteht. Die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\cos^2\varphi}} = \sum_{n\geqq 0} \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^2 k^{2n}$$

erlaubte es Gauß (1800) ([32], Bd. III, S. 367—371), eine Formel zu beweisen, die er bei der numerischen Berechnung im Spezialfall $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ entdeckt hatte, und auch den (schon von Lagrange gefundenen) Zusammenhang (vgl. 7.1.8.) zwischen den elliptischen Integralen und der Theorie des *arithmetisch-geometrischen Mittels* $M(a, b)$ zweier Zahlen a und b $(a > b > 0)$ wiederzufinden; Gauß versicherte, dieses Mittel habe ihn seit seinem vierzehnten Lebensjahr beschäftigt. Es ist der gemeinsame Grenzwert der durch die Rekursionsformeln

$$a^{(0)} = a\,, \qquad b^{(0)} = b\,,$$

$$a^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(a^{(n)} + b^{(n)}\right) \quad \text{und} \quad b^{(n+1)} = \left(a^{(n)}b^{(n)}\right)^{1/2}$$

definierten Folgen $(a^{(n)})$ und $(b^{(n)})$; mit Hilfe der Funktionalgleichung

$$M(1 + k, 1 - k) = \frac{1}{1 + t^2} M(1 + t^2, t - t^2) \qquad \left(k = \frac{2t}{1 + t^2}\right)$$

erhielt Gauß die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{M(1 + k, 1 - k)} = \sum_{n \geqq 0} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}\right)^2 k^{2n}\,,$$

die mit der des oben genannten elliptischen Integrals übereinstimmt. Gauß fand später einen anderen Beweis dieser Beziehung, und zwar mit Hilfe der Transformation zweiter Ordnung des elliptischen Integrals (vgl. 7.1.8.).

7.1.2. *Differentialgleichungen, denen die elliptischen Integrale genügen*

In seiner ersten Abhandlung über die elliptischen Integrale (1733) ([28], (1), Bd. XX, S. 5—6) bemerkte Euler, daß die Reihenentwicklung des Integrals, das die Länge E eines Viertelbogens der Ellipse angibt, nach Potenzen von $k = \left(1 - (a^2/b^2)\right)^{1/2}$ der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung[1])

$$k(k^2 - 1)\frac{d^2E}{dk^2} + (k^2 - 1)\frac{dE}{dk} - kE = 0$$

genügte. Er benutzte eine durch Differenzieren unter dem Summenzeichen entstehende Variante dieser Gleichung, um E als Funktion von a für festes b (beispielsweise $b = 1$) zu untersuchen (1736). In einer späteren Arbeit (1749) ([28], (1), Bd. XX, S. 21—55) stieß Euler auf einige Schwierigkeiten, als er die Kurvenlänge E in der Umgebung von $a = 0$, also für $k = 1$ (einen singulären Punkt der

---

[1]) Euler setzte $y = d(\log E)/d(\log k)$ und führte diese Gleichung in die verallgemeinerte Riccatische Gleichung $y' + (y^2/k) = k/(k^2 - 1)$ über. Dabei interessierte ihn die Tatsache, daß die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung, deren Variablen sich nicht trennen lassen, auf die Rektifizierung der Ellipse zurückgeführt werden kann.

Differentialgleichung) berechnen wollte. Er bemerkte, daß E keine Entwicklung nach Potenzen von a besitzt, sondern nur eine Entwicklung der Gestalt $E = f - g \log a$ mit

$$f = 1 + Aa^2 + \cdots \quad \text{und} \quad g = \alpha a^2 + \beta a^4 + \cdots \tag{0}$$

(auf diese Idee kam Euler durch die angenäherte Differentialgleichung, die entsteht, wenn a^2 vernachlässigt und E durch 1 ersetzt wird; der Wert $A = \log 2 - \frac{1}{4}$ ergibt sich, wenn die Schmiegparabel der Ellipse betrachtet wird); dies ist eines der ersten Beispiele für die Untersuchung einer Gleichung vom Fuchsschen Typ in einem singulären Punkt, wobei die Differenz der charakteristischen Exponenten eine ganze Zahl ist (im vorliegenden Fall ist diese Differenz gleich 2; vgl. 1.5. und 8.2.1.).

Legendre erhielt lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung für seine als Funktionen von k aufgefaßten elliptischen Integrale zweiter Gattung

$$E(\varphi, k) = \int d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

(welche die Länge eines Ellipsenbogens angeben) sowie für die elliptischen Integrale erster Gattung

$$F(\varphi, k) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}\,.$$

Die von φ abhängende rechte Seite verschwindet für $\varphi = \pi/2$ (das ist der Fall der „vollständigen Integrale"; man integriert von $\varphi = 0$ an): Man findet für E wieder die von Euler angegebene Gleichung und für F die Differentialgleichung

$$k(k^2 - 1)\frac{d^2F}{dk^2} + (3k^2 - 1)\frac{dF}{dk} + kF = 0\,.$$

Diese Gleichung bleibt bei der Variablensubstitution $k' = (1 - k^2)^{1/2}$ invariant, also ist $F(k')$ eine zweite, von $F(k)$ unabhängige Lösung ([31], Bd. I, S. 63). Dieselbe Gleichung wurde von Gauß in seinen (erst 1868, nach seinem Tode, veröffentlichten) Arbeiten über das arithmetisch-geometrische Mittel gefunden ([32], Bd. III, S. 370). Gauß verglich sie mit der hypergeometrischen Gleichung und erhielt

$$\frac{a}{M(a, b)} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{c^2}{a^2}\right),$$

wobei $c^2 = a^2 - b^2$ ist und F die hypergeometrische Funktion bezeichnet (siehe 1.4.3.).

Ausgehend von den obigen Differentialgleichungen zeigte Liouville (1840), daß $F, E, \frac{dF}{dk}$ und $\frac{dE}{dk}$ „nichtelementare" transzendente Funktionen des „Moduls" k sind.

7.1.3. *Das Additionstheorem der elliptischen Integrale*

Mit Hilfe der Formel $ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2\, d\theta^2$ war es Jakob Bernoulli gelungen (1679), die Rektifizierung der parabolischen Spirale mit der Polargleichung $(1-\varrho)^2 = 2p\theta$ auf eine Quadratur zurückzuführen, die sich durch ein elliptisches Integral ausdrücken läßt: Das Bogenelement hat die Gestalt $ds = \frac{1}{p}\sqrt{\varrho^2(1-\varrho)^2 + p^2}\, d\varrho$. Er bemerkte, daß es die Symmetrie dieses Ausdrucks bezüglich $\varrho = \frac{1}{2}$ erlaubt, jedem Bogen der im Ursprung beginnenden Spirale einen im Punkt $\varrho = 1$, $\theta = 0$ beginnenden (aber nicht ähnlichen) Bogen gleicher Länge zuzuordnen. Sein Bruder Johann entdeckte (1698) ein anderes Phänomen der gleichen Art; er transformierte eine Kurve γ mit der kartesischen Gleichung $y = f(x)$ mit Hilfe der Formeln $X = xy'^3$, $Y = \frac{1}{2}(3xy'^2 - \int y'^2\, dx)$ in eine Kurve Γ, so daß die entsprechenden Bogenelemente ds und dS durch die Beziehung $ds \pm dS = d\left(x\left(\frac{ds}{dx}\right)^3\right)$ verknüpft sind. Ist γ die kubische Parabel $y = x^{1/3}$, so stimmt die transformierte Kurve Γ mit ihr überein, und die Transformationsformeln lauten $X = \frac{1}{27x}$, $Y = \frac{1}{3y}$; jedem Bogen der kubischen Parabel ordnen sie einen anderen Bogen zu, dessen Länge sich von der des ersten um eine (in x) *algebraische* Größe unterscheidet.

Das Problem, eine analoge Konstruktion auf die Parabel $y = x^4$ anzuwenden, wurde 1714 von C. G. Fagnano in einer unbedeutenden Zeitschrift in Sinigaglia (heute Senigallia, an der Adria) und im *Giornale dei letterati di Venezia* vorgelegt. Im Jahre 1715 gab Fagnano in dem zuletzt genannten Journal eine Lösung an, die sich auf alle verallgemeinerten Parabeln $y = x^q/q$ bezieht, wobei q der Quotient zweier aufeinanderfolgender ungerader Zahlen oder auch der Quotient zweier nicht durch 3 teilbarer Zahlen mit der Differenz 3 (beispielsweise $q = \frac{1}{4}$ oder 4) ist. Das Bogenelement ist

$$ds = \sqrt{1 + x^{2q-2}}\, dx = \left(1 - \frac{1}{q}\right)\frac{dx}{\sqrt{1 + x^{2q-2}}} + \frac{1}{q}\, d(x\sqrt{1 + x^{2q-2}}),$$

und Fagnano führte es durch die Variablensubstitution $t = x^m$ ($m \in \mathbb{Q}$)[1]) auf die Summe eines Differentials eines algebraischen Ausdrucks und eines Differentials der Gestalt

$$\frac{dt}{\sqrt{t(t^2 + at + b)}} \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{t}\sqrt{\frac{t^2 + at + b}{t}}$$

[1]) Fagnano erhielt mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten eine Konstante $G \neq 0$, eine ganze Zahl e und ein Polynom P derart, daß

$$(Gx^{cm} + 1)\,(x^m + 1)^{f-1}\, dx = d\big(x^{em+1}P(x^m)\,(x^m + 1)^f\big)$$

ist, wenn c eine ganze Zahl und m, f gegebene reelle Zahlen bezeichnen; er verwendete dieses Resultat mit $f = \frac{1}{2}$ bzw. $\frac{3}{2}$.

zurück (welche auf elliptische Integrale führen). Diese beiden Ausdrücke wechseln das Vorzeichen, wenn in ihnen t durch b/t ersetzt wird, wodurch man zur Lösung des Problems gelangt [27]. Fagnano löste dasselbe Problem für die Ellipse, die Hyperbel und allgemeiner für Kurven, deren Bogenelement $ds = \sqrt{\frac{ax^2 + b}{cx^2 + d}}\, dx$ ist (z.B. für die verlängerte Epizykloide, nach Nicole 1708). Er gab drei Transformationen $x \mapsto x'$ an, die durch die Gleichungen

$$acx^2x'^2 + ad(x^2 + x'^2) + bd = 0\,,$$

$$acx^2x'^2 + bc(x^2 + x'^2) + bd = 0$$

bzw.

$$xx' = \sqrt{bd/ac}$$

definiert sind, deren entsprechende Bogenelemente durch

$$ds \pm ds' = \sqrt{-\frac{a}{d}}\, d(xx')\,, \qquad \frac{a}{\sqrt{-bc}}\, d(xx')$$

bzw.

$$\frac{1}{c}\, d\sqrt{(cx^2 + d)\left(a + \frac{b}{x^2}\right)}$$

verknüpft sind [27].

Schließlich interessiert sich Fagnano (1716) für die Bernoullische Lemniskate mit der Polargleichung $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$, deren Bogenelement

$$ds = \frac{a^2\, d\varrho}{\sqrt{a^4 - \varrho^4}} \quad \text{oder} \quad \frac{a^2\, dt}{2\sqrt{t(a^4 - t^2)}} \quad \text{für} \quad t = \varrho^2$$

ist; es hat dieselbe Gestalt wie das der elastischen Linie (siehe 7.1.1.), und Bernoulli hatte die Lemniskate für eine neue Konstruktion der parazentrischen Isochrone benutzt. Partielle Integration erlaubt es, den Lemniskatenbogen als Summe eines Ellipsenbogens, eines Bogens einer gleichseitigen Hyperbel und eines algebraischen Ausdrucks anzugeben (dieses Resultat wurde 1742 unabhängig von Maclaurin wiedergefunden). Fagnano bemerkte außerdem, daß die durch $(t + a^2)(t' + a^2) = 2a^4$ definierte Transformation $t \mapsto t'$, nämlich

$$\varrho^2\varrho'^2 + a^2(\varrho^2 + \varrho'^2) - a^4 = 0 \qquad (\varrho, \varrho' \text{ Radiusvektoren})\,, \tag{1}$$

die Beziehung $ds + ds' = 0$ liefert; die entsprechenden Bogen auf der Lemniskate (die im Ursprung bzw. im Scheitelpunkt beginnen) besitzen also die gleiche Länge. Fagnano setzte $\varrho = \varrho'$ und fand eine biquadratische Gleichung, deren Lösung die Teilung des Lemniskatenviertels in zwei Bogen gleicher Länge angibt. Schließlich erhielt Fagnano mit Hilfe der Variablensubstitutionen

$$\varrho^2 = \frac{2u^2}{1 + u^4} \quad \text{und} \quad u^2 = \frac{2v^2}{1 - v^4}$$

die Beziehungen

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho^4}} = \pm \frac{du\sqrt{2}}{\sqrt{1+u^4}} = \pm \frac{2\,dv}{\sqrt{1-v^4}},$$

die ihm erlaubten, einen Lemniskatenbogen zu verdoppeln oder (nach Lösung zweier biquadratischer Gleichungen) ihn zu halbieren. Daraus leitete er Formeln zur Multiplikation mit 2^n oder zur Division durch 2^n her. Er ersetzte in Gleichung (1) den Radiusvektor ϱ' durch denjenigen, der sich aus ϱ mit Hilfe der Verdopplungsformel (oder der Formel der Multiplikation mit 4) ergibt, und gelangte so zu einer algebraischen Gleichung in ϱ, welche die Zerlegung des Lemniskatenviertels in drei (oder in fünf) Teile gestattet [27].

Fagnano faßte seine Arbeiten in einem 1750 in Pesaro (an der Adria) veröffentlichten Buch zusammen, das Euler durch die Berliner Akademie kennenlernte. Die Bedeutung der Fagnanoschen Ergebnisse war Euler sofort klar, und er berichtete darüber der Berliner Akademie (1752). Dabei ergänzte er diese Ergebnisse durch eine Rekursionsformel für die Multiplikation der Länge eines Lemniskatenbogens mit einer beliebigen ganzen Zahl n. Schon 1752 (Briefe an Goldbach) hatte Euler die Relation (1) als ein partikuläres algebraisches Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \tag{2}$$

interpretiert (wobei x und y statt ϱ und ϱ' geschrieben und $a = 1$ gesetzt ist). Euler bediente sich des offensichtlichen Integrals $x^2 - y^2 = 0$ und der Analogie zur Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, deren allgemeines Integral die Gestalt

$$x^2 + y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^2}$$

(c Integrationskonstante) hat, um das allgemeine Integral der Gleichung (2), nämlich

$$x^2 + y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4} - c^2x^2y^2 \quad (c \text{ eine willkürliche Konstante}),$$

zu „erraten".

Euler fand auch das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$$

für $n = 3$ und 6 in algebraischer Form, aber nicht für $n = 5$. Die Integration von (2) gestattet es, zu jedem Lemniskatenbogen einen Bogen der gleichen Länge zu konstruieren, der in einem beliebig vorgegebenen Punkt beginnt; mit anderen Worten: Es gibt (algebraische) Formeln für die *Addition* von Lemniskatenbogen. Die Arbeit, die Euler diesen Integrationen gewidmet hat (1757) ([28], (1), Bd. XX,

S. 58—79), zeigt allgemeiner, daß das allgemeine Integral von

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P(y)}}, \tag{3}$$

wobei P ein Polynom vierten Grades ist, die Gestalt $f(x, y) = 0$ besitzt; dabei ist f ein Polynom zweiten Grades in jeder der Variablen x und y, und es gilt $f(x, y) = f(y, x)$. Man bestimmt das Polynom f durch die Bedingung, daß seine Diskriminante bezüglich y gleich $P(x)$ ist, wodurch man fünf algebraische Gleichungen in den sechs Koeffizienten von f erhält; es bleibt also eine willkürliche Konstante übrig. Ist P gerade, so enthält f nur Monome, die in x und y symmetrisch sind. Man erhält y dann leicht aus dem allgemeinen Integral

$$y = A\,\frac{x\sqrt{P(c)} + c\sqrt{P(x)}}{A - Ec^2x^2} \tag{4}$$

(c Integrationskonstante; A und E sind die Koeffizienten von $x^0 = 1$ bzw. x^4 in $P(x)$). Dies ist das Additionstheorem für das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$; das Integral zwischen 0 und y ist die Summe der Integrale über die Intervalle $[0, x]$ und $[0, c]$.

Euler hatte sich mit seiner etwas gekünstelten Integrationsmethode, bei der die Gestalt des Integrals vorgegeben sein muß, niemals ganz zufrieden gegeben. Lagrange gelangte (1766) zu einer direkteren Methode ([29], Bd. II, S. 5—33) und erregte damit Eulers Bewunderung; er führte durch

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P(y)}}$$

eine Variable t ein, setzte $p = x + y$, $q = x - y$ und erhielt

$$q\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = q^3\left(\frac{1}{2}D + Ep\right),$$

wobei D und E die Koeffizienten von x^3 bzw. x^4 in $P(x)$ sind. Das allgemeine Integral folgt hieraus leicht: Es hat die Gestalt

$$\frac{\sqrt{P(x)} + \sqrt{P(y)}}{x - y} = \sqrt{G + D(x + y) + E(x + y)^2}$$

mit der Integrationskonstanten G.

Zur gleichen Zeit hatte Lagrange ([29], Bd. II, S. 68—121) die Bewegung eines Körpers untersucht, der von zwei festen Punkten mit den Kräften a/r^2 und a'/r'^2 angezogen wird, wobei r und r' die Abstände des Körpers von diesen beiden Punkten bezeichnen (a und a' sind den in diesen Punkten angebrachten Massen proportional). Setzt man $x = r + r'$ und $y = r - r'$, so wird man auf die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + B'y + Cy^2 + D'y^3 + Ey^4}}$$

geführt, wobei

$$B = a + a', \qquad B' = a - a', \qquad D = -Bf^2, \qquad D' = -B'f^2$$

(f der Abstand zwischen den festen Punkten) ist und A, C, E Integrationskonstanten bezeichnen (die von den Anfangsbedingungen abhängen). Auf eine solche Gleichung war Euler schon (1760) gestoßen, wobei er die Annahme gemacht hatte, die betrachtete Bewegung verlaufe in einer Ebene. Lagrange stellte fest, daß man im Fall $a' = 0$ die Relationen $B = B'$ und $D = D'$ erhält, also das Problem eines einzigen Anziehungspunktes, das man durch Integration lösen konnte. Lagrange fand also das Integral der Gleichung (3) in der oben angegebenen Gestalt; vielleicht entdeckte er seine Integrationsmethode gerade an diesem Problem aus der Mechanik. in Durch Anwendung seiner Methode auf die Gleichung

$$\frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}} = \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

gelangte Lagrange (*Théorie des fonctions analytiques*, 1797) ([30], S. 82—90, und [29], Bd. IX, S. 135) zum Integral

$$\cos z \cos u + \cos M \sin z \sin u = \cos m\,, \tag{5}$$

wobei m die Integrationskonstante und $\sin M = k \sin m$ ist. Er interpretierte es mit Hilfe eines sphärischen Dreiecks mit den Seiten z, u und m, in welchem M der der Seite m gegenüberliegende Winkel ist, und er entwickelte daraus eine geometrische Konstruktion für die Multiplikation des Integrals $\int \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 z}}$ mit einer ganzen Zahl n (Newton hatte eine ähnliche Konstruktion mit Hilfe ebener Dreiecke zur Bestimmung von $\sin nM$ gefunden). Jacobi gab (1829) ([34], Bd. I, S. 280—293) eine andere bemerkenswerte geometrische Interpretation des Eulerschen Additionstheorems in Verbindung mit den Ponceletschen Polygonen an; diese Polygone sind einem gegebenen Kreis einbeschrieben und einem anderen gegebenen Kreis umbeschrieben. Hat der erste Kreis den Mittelpunkt O und den Radius R, während der zweite Kreis den Radius r und den Mittelpunkt in Polarkoordinaten) $(a, 0)$ besitzt, so sind die Polarwinkel φ und φ' in den Punkten, in denen eine Tangente an den zweiten Kreis den ersten trifft, durch die Beziehung

$$\cos \varphi \cos \varphi' + \big((R - a)/(R + a)\big) \sin \varphi \sin \varphi' = r/(R + a)$$

miteinander verknüpft, die mit (5) (für $z = \varphi$ und $u = \varphi'$) identisch ist, falls

$$\cos m = r/(R + a) \quad \text{und} \quad \cos M = (R - a)/(R + a)$$

gilt, was $k^2 = 4Ra/\big((R + a)^2 - r^2\big)$ entspricht.

Die Gleichung (3) mit geradem Polynom P sechsten Grades hat ebenfalls ein algebraisches allgemeines Integral, das von Euler mit Hilfe der Lagrangeschen Methode gefunden wurde (man kommt übrigens auf den vierten Grad zurück, indem man $u = x^2$, $v = y^2$ setzt). Aber Euler zeigte (1765), daß für ein beliebiges

Polynom höheren als vierten Grades kein algebraisches allgemeines Integral existiert — außer in einigen sehr speziellen Fällen.

Die Fagnanoschen Resultate über die Bogen von Kegelschnitten oder verallgemeinerten Parabeln ordnen sich einem anderen Satz von Euler unter (1758) ([28], (1), Bd. XX, S. 153—200): Ist P ein biquadratisches und Q ein gerades Polynom (beliebigen Grades) und sind x und y durch die Differentialgleichung (3) verknüpft, so existiert eine *algebraische* Funktion V von x und y derart, daß $\frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}} - \frac{Q(y)\,dy}{\sqrt{P(y)}} = dV$ gilt. Ist beispielsweise $Q(x) = x^2$, so erhält man $V(x, y) = -cxy/\sqrt{A}$, in den Bezeichnungen von (4). Erst sehr viel später (1775) studierte Euler den Fall, daß Q eine gebrochen rationale (gerade) Funktion ist: Er fand ein analoges Resultat, doch war V nun Summe einer algebraischen Funktion und einer Linearkombination von *Logarithmen* algebraischer Funktionen ([28], (1), Bd. XXI, S. 39—56). Auf jeder Kurve, deren Bogenelement die Gestalt $ds = \frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ hat (z. B. auf einem Kegelschnitt), kann man also, von einem gegebenen Punkt ausgehend, einen Bogen abtragen, der sich von einem gegebenen Bogen um eine Größe V unterscheidet, die man berechnen kann. Im Fall von Kegelschnitten wurden zahlreiche geometrische Interpretationen dieser Konstruktion viel später (von Graves, Chasles, Salmon um 1844) mit Hilfe konfokaler Kegelschnitte gefunden.

7.1.4. *Reduktion der elliptischen Integrale auf die kanonische Form*

Noch beeinflußt von dem geometrischen Ursprung der elliptischen Integrale versuchte Euler, einige dieser Integrale auf die Rektifizierung der Ellipse und der Hyperbel zurückzuführen; schon d'Alembert und Maclaurin hatten gegen 1740 einige Vorstöße in diese Richtung unternommen. Euler interessierte sich in der Hauptsache für Integrale vom Typ $\int \sqrt{\frac{f + gx^2}{h + kx^2}}\,dx$; durch verschiedene Variablentransformationen führte er sie auf drei Fälle zurück, wobei sich die Berechnung auf einen Kegelschnittbogen, auf die Summe eines Kegelschnittbogens und einer algebraischen Funktion bzw. auf die Summe zweier Kegelschnittbogen und einer algebraischen Funktion stützt (1759) ([28], (1), Bd. XX, S. 256—301). Übrigens hat Euler bemerkt, daß eine Variablensubstitution $x \mapsto y$, wobei y mit x durch eine Relation $f(x, y) = 0$ (f ein nichtsymmetrisches Polynom zweiten Grades in jeder Variablen) verknüpft ist, die Transformation von $\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ (P ein Polynom vierten Grades) in $\frac{dy}{\sqrt{P_1(y)}}$ gestattet; dabei ist P_1 ein anderes Polynom vierten Grades, das man einer gewissen Anzahl von Bedingungen (vier Gleichungen) unterwerfen kann. Beispielsweise kann man verlangen, daß P_1 gerade ist ([28], (1), Bd. XX, S. 256—301). Euler fand später (1765), daß eine homographische Va-

riablentransformation[1]) genügt, aus P die ungeraden Potenzen der Variablen zu eliminieren ([28], (1), Bd. XX, S. 302—317).

Auf anderem Wege versuchte Euler in den Jahren vor seinem Tode (1775—1782), algebraische Kurven zu bestimmen, deren Bogenelement die gleiche Form hat wie das eines Kegelschnitts oder einer Lemniskate ([28], (1), Bd. XXI, S. 163, 208, 241). Noch lange Zeit haben Mathematiker versucht, die elliptischen Integrale mit Hilfe der Rektifizierung gewisser Kurven zu interpretieren (beispielsweise Legendre 1811, Serret 1845).

Lagrange war der erste, der die allgemeinsten elliptischen Integrale betrachtete (1784) ([29], Bd. II, S. 254—312); dies sind Integrale der Gestalt $\int R(x, y)\,dx$ mit einer gebrochen rationalen Funktion R in x und y, wobei $y = \sqrt{P(x)}$ ist und P ein Polynom vierten (oder dritten) Grades ohne mehrfachen Faktor bezeichnet. Lagrange beschränkte sich offenbar auf den Fall reeller Koeffizienten und zeigte, daß man durch ähnliche Variablentransformationen, wie Euler sie benutzt hatte, ein solches Integral auf die Summe eines elementaren Ausdrucks (Stammfunktion einer gebrochen rationalen Funktion) und eines Integrals vom Typ

$$\int \frac{N(x)\,dx}{\sqrt{(1 \pm p^2x^2)\,(1 \pm q^2x^2)}},$$

wobei N eine gerade gebrochen rationale Funktion ist, zurückführen kann.

Legendre, der Tafeln der elliptischen Integrale aufstellen wollte, reduzierte diese Integrale auf eine minimale Anzahl kanonischer Formen, die er in seinem *Mémoire sur les transcendantes elliptiques* (1793) angab. Er ging von der Form $\frac{Q(x)\,dx}{y}$ aus, wobei Q eine rationale Funktion und $y = \sqrt{P(x)}$ (P ein Polynom vierten Grades) ist, und zerlegte Q in einfache Elemente der Gestalt x^m ($m \in \mathbf{Z}$) oder $1/(1 + nx)^p$ (p ganzzahlig, $\geqq 1$). Durch Betrachtung von $d(x^m y)$ zeigte er, daß alle Integrale $\Pi_m = \int x^m \frac{dx}{y}$ Summen eines algebraischen Ausdrucks und einer Linearkombination von Integralen Π_m mit $-1 \leqq m \leqq 2$ sind. Legendre erhielt, indem er für die Terme mit $1/(1 + nx)^p$ auf die gleiche Art vorging, die Beziehung

$$\int Q(x)\frac{dx}{y} = V(x) + \int (A + Bx + Cx^2)\frac{dx}{y} + \sum_i N_i \int \frac{dx}{(1 + n_i x)\,y};$$

dabei ist V eine algebraische Funktion, und A, B, C, N_i, n_i sind Konstanten. Wie Euler eliminierte auch Legendre die ungeraden Potenzen im Polynom P und führte $\frac{dx}{y}$ durch verschiedene Variablensubstitutionen auf die Gestalt $\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$ (bis auf einen konstanten Faktor) zurück $(0 < k < 1)$. Schließlich gestattet eine

---

[1]) Der heute gebräuchliche Ausdruck für Homographie ist Kollineation.

zur vorhergehenden analoge Umformung, die obige Beziehung in der Gestalt

$$\int Q(\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = V + \int (A + B\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \sum_i N_i \int \frac{d\varphi}{(1 + n_i\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}$$

(mit $\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$) zu schreiben. Auf diese Art und Weise lassen sich die elliptischen Integrale auf drei kanonische Formen bringen, auf die heute so genannten *Legendreschen Normalintegrale* erster, zweiter und dritter Gattung:

$$F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}, \qquad E(\varphi) = \int_0^\varphi \Delta(\varphi)\,d\varphi$$

bzw.

$$\Pi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\,\Delta(\varphi)}\,.$$

($E(\varphi)$ liefert die Länge eines Ellipsenbogens.) Setzt man $x = \sin\varphi$, so nehmen sie die Gestalt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}, \qquad \int \sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\,dx$$

bzw.

$$\int \frac{dx}{(1 + nx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

an. Legendre ([31], Bd. I, S. 4—18) nannte φ die *Amplitude* des Integrals, k dessen *Modul* und n im Integral dritter Gattung den *Parameter*. War die Amplitude gleich $\pi/2$, so sprach Legendre von *vollständigen Integralen*:

$$F^1 = F(\pi/2)\,, \qquad E^1 = E(\pi/2)\,, \qquad \Pi^1 = \Pi(\pi/2)\,.$$

Die Eulerschen Additionstheoreme für die drei Legendreschen Normalintegrale lauten: Sind φ, ψ und μ durch die Beziehung

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\mu) = \cos\mu$$

verknüpft (vgl. 7.1.3., Gleichung (5)), so gilt

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu)\,, \qquad E(\varphi) + E(\psi) = E(\mu) + c^2\sin\varphi\sin\psi\sin\mu$$

und

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) = \Pi(\mu) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\frac{n\sqrt{\alpha}\sin\varphi\sin\psi\sin\mu}{1 + n - n\cos\varphi\cos\psi\cos\mu}\,,$$

wobei α durch $\alpha = (1 + n)\left(1 + (k^2/n)\right)$ als Funktion des Parameters n gegeben ist (man setzt n als reell und α als positiv voraus; im Fall $\alpha < 0$ ist das Zusatzglied ein Logarithmus) ([31], Bd. I, S. 75).

Zwischen den Normalintegralen dritter Gattung verschiedener Parameter stellte Legendre Relationen auf, z.B.

$$\Pi(n, \varphi) + \Pi\left(\frac{k^2}{n}, \varphi\right) = F(\varphi) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arctan \frac{\sqrt{\alpha} \tan \varphi}{\Delta(\varphi)}$$

([31], Bd. I, S. 68). Durch Differentiation von $\Pi(n, \varphi)$ nach n erhielt er bemerkenswerte Symmetrieeigenschaften bezüglich Amplitude und Parameter: Der Ausdruck

$$k^2 \sin a \cos a \, \Delta(a) \int \frac{\sin^2 \varphi \, d\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 a \sin^2 \varphi) \, \Delta(\varphi)} - F(\varphi) \, E(a)$$

ist in φ und a symmetrisch ([31], Bd. I, S. 133).

Schließlich wies Legendre Zusammenhänge zwischen den vollständigen Integralen nach. Euler hatte durch geschickte Reihenentwicklungen schon bewiesen (1782) ([28], (1), Bd. XXI, S. 91–118), daß

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\pi}{4}$$

ist. Legendre zeigte, indem er die Integrale

$$\int_0^1 \frac{z^r \, dz}{\sqrt{1 - z^2}} \qquad \left(r = \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3} \text{ oder } 0\right),$$

die sich mit Hilfe der Eulerschen Betafunktion leicht berechnen lassen, in elliptische Integrale mit dem Modul

$$k = \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \text{oder} \quad k' = \sqrt{1 - k^2} = \cos\frac{\pi}{12}$$

überführte ([31], Bd. I, S. 60–61), die Gültigkeit von

$$F^1(k) \, E^1(k') + F^1(k') \, E^1(k) - F^1(k) \, F^1(k') = \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

für diese speziellen Werte von k und k' (er bemerkte, daß für diese Werte die Beziehung $F^1(k') = F^1(k)\sqrt{3}$ gilt). Da die Ableitung der linken Seite von (6) nach k gleich null ist, schloß Legendre, daß diese Relation für jedes Paar „komplementärer" Moduln k und $k' = \sqrt{1 - k^2}$ $(0 < k < 1)$ gültig bleibt.[1]) Die von Euler entdeckte Relation ist für $k = k' = 1/\sqrt{2}$ zu (6) äquivalent. Wir werden später den von Weierstraß angegebenen Beweis der Beziehung (6) und seine Übertragung auf die Perioden der Abelschen Integrale kennenlernen (siehe 7.1.12. sowie 7.2.4. und 7.2.6.).

---

[1]) Legendre hat etwas später einen anderen Beweis von (6) angegeben, indem er von der Vertauschungsformel für den Parameter und das Argument in den Integralen dritter Gattung ausging ([31], Bd. I, S. 132–135).

Die Legendreschen Resultate sind in seinen *Exercices de calcul intégral* (1811) und in seinem *Traité des fonctions elliptiques* (1825) zusammengefaßt. Abel und Jacobi, die Begründer der Theorie der elliptischen Funktionen, haben sich mit diesen Fragen vertraut gemacht, als sie das erste dieser beiden Bücher studierten, das daher von besonderer Bedeutung war.

Die Rückführung der elliptischen Integrale wurde in der (zwischen 1823 und 1825 verfaßten, aber erst postum veröffentlichten) Abelschen Abhandlung *Théorie des transcendantes elliptiques* erschöpfend untersucht ([33], Bd. I, S. 87—138). Abel zeigte zunächst, daß das Integral eines Ausdrucks

$$\frac{Q(x)\,dx}{\sqrt{P(x)}} \tag{7}$$

(P ein Polynom vierten Grades, Q eine rationale Funktion), wenn es eine algebraische Funktion in x ist, in der Gestalt

$$A(x) + B(x)\sqrt{P(x)} \qquad (A,\,B \text{ rationale Funktionen}) \tag{8}$$

dargestellt werden kann. Daraus zog er die Schlußfolgerung (hier in moderner Ausdrucksweise): Der Quotientenraum des Vektorraumes der Formen (7), wobei Q ein Polynom ist, nach dem Teilraum derjenigen dieser Formen, welche Differentiale algebraischer Funktionen sind, besitzt als Basis

$$\left(\frac{dx}{\sqrt{P(x)}},\, \frac{x\,dx}{\sqrt{P(x)}},\, \frac{x^2\,dx}{\sqrt{P(x)}}\right).$$

Für jedes ganzzahlige m ist $\dfrac{dx}{(x-a)^m\sqrt{P(x)}}$ Linearkombination (modulo der Differentiale algebraischer Funktionen) der drei vorhergehenden Formen und von $\dfrac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}$. In dem Quotientenraum des Raumes der Formen (7) nach dem Teilraum, der erzeugt wird durch diejenigen Formen, in denen Q ein Polynom ist, und durch diejenigen Formen, die Differentiale algebraischer Funktionen sind, ist die Familie $\left(\dfrac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}\right)_a$ frei; dabei nimmt a alle Werte an, für die $P(a) \neq 0$ ist. Abel präzisierte die linearen Beziehungen zwischen diesen Formen dritter Gattung, wenn a eine Nullstelle von P ist. Er bewies dann: Ist das Integral einer Form (7) Linearkombination von Logarithmen algebraischer Funktionen, so sind diese algebraischen Funktionen vom Typ (8). Abel rechnete modulo der Differentiale dieser Logarithmen und erhielt neue Relationen zwischen den Formen (7): Beispielsweise läßt sich $\dfrac{x\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ auf eine Linearkombination zweier Formen $\dfrac{dx}{(x \pm a)\sqrt{P(x)}}$ dritter Gattung zurückführen. Für spezielle Werte des Parameters a kann man $\dfrac{dx}{(x-a)\sqrt{P(x)}}$ auf die Form $\dfrac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ erster Gattung bringen. Abel

gab noch einige Beziehungen zwischen Formen dritter Gattung mit verschiedenen Parametern an, vom Typ derjenigen, die schon von Legendre gefunden worden waren. Aber die Form $\frac{x^2\,dx}{\sqrt{P(x)}}$ zweiter Gattung ist von den Formen erster und dritter Gattung unabhängig: Man findet also wieder die drei Legendreschen Normalformen, indem man darüber hinaus zeigt, daß sie sich nicht ineinander umformen lassen. Das beweist insbesondere, daß man die elliptischen Integrale nicht mit Hilfe algebraischer Funktionen oder mit Hilfe von Logarithmen solcher Funktionen berechnen kann. Liouville zeigte (1833), daß sich die elliptischen Integrale nicht durch „elementare" Funktionen ausdrücken lassen, wovon die Mathematiker seit langem überzeugt waren (ohne es allerdings bewiesen zu haben).

Die heute gedruckten Tafeln der elliptischen Integrale basieren noch auf denen von Legendre ([31], Bd. II) und benutzen dieselben Bezeichnungen. Für die allgemeine Theorie bedient man sich jedoch seit Weierstraß anderer kanonischer Formen, auf welche die Invariantentheorie geführt hat (siehe 3.2.3.). Cayley und Boole haben (1845) jeder binären Form vierten Grades

$$f(x, y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4b'xy^3 + a'y^4$$

zwei fundamentale Invarianten

$$g_2 = aa' - 4bb' + 3c^2 \quad \text{und} \quad g_3 = aca' + 2bcb' - ab'^2 - a'b^2 - c^3$$

zugeordnet. Durch eine in der Form f vorgenommene lineare Variablentransformation mit der Determinante δ werden diese Invarianten zu $g_2\delta^4$ und $g_3\delta^6$. Sylvester hat (1850) festgestellt, daß jede Invariante, die die Gestalt eines Polynoms in den Koeffizienten von f hat, ein Polynom in g_2 und g_3 ist. Neben diesen Invarianten hat Cayley die *Kovarianten* von f und von (x, y) betrachtet: die Hessesche Determinante $144h$, die eine Form vierten Grades ist, und die Funktionaldeterminante $-8r = \frac{D(f, h)}{D(x, y)}$ (eine Form sechsten Grades); sie sind mit f durch die Relation

$$4h^3 - g_2f^2h - g_3f^3 = r^2$$

verknüpft, die unabhängig voneinander von Cayley und Hermite bewiesen wurde. Hermite hatte (1854) die Idee, sie auf die elliptischen Integrale anzuwenden ([36], Bd. I, S. 359—360): Setzt man $z = \frac{h(x, y)}{f(x, 1)}$, so ergibt sich

$$\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} = M\frac{dx}{\sqrt{f(x, 1)}} \qquad (M \text{ konstant}) .$$

Mit der neuen Variablen $u = z(g_2/g_3)$ geht die Form erster Gattung in $\frac{du}{\sqrt{\varrho u^3 - u - 1}}$ über, wobei $\varrho = 4g_3^2/g_2^3$ eine absolute Invariante ist, die die Rolle des „Moduls" im elliptischen Integral spielt. In seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen (seit 1862) ([42]; [43], Bd. V, S. 228—234) nahm Weierstraß für die drei Gattungen

folgende kanonische Formen an:

$$\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}, \quad \frac{z\,dz}{\sqrt{P(z)}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{P(z)}+\sqrt{P(a)}}{z-a}\,\frac{dz}{\sqrt{P(z)}}$$

mit $P(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3$. Offenbar ist die Form dritter Gattung im Parameter a und in der Variablen z symmetrisch.

Die Diskriminante Δ einer binären Form f vierten Grades läßt sich als Funktion der Fundamentalinvarianten von f schreiben: $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Dedekind und Klein haben im Anschluß an F. Müller (1867) die Hermitesche Invariante ϱ durch die Invariante $J = g_2^3/\Delta$ ersetzt, die (wegen $\Delta \neq 0$) nicht unendlich wird. Wir werden später (vgl. 7.1.16.) die Eigenschaften dieser absoluten Invarianten J als Funktion des Periodenverhältnisses kennenlernen. Hier sei nur erwähnt, daß sie von den Koeffizienten von f rational abhängt. Im Gegensatz dazu ist das Doppelverhältnis λ der Wurzeln von $f(x, 1) = 0$ eine irrationale Invariante, die mit J durch die Beziehung $J = \frac{4}{27}\,\frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$ verknüpft ist. Ihr entspricht die kanonische Form $\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)}}$ erster Gattung, die Riemann in seinen Vorlesungen benutzte (1861—1862) [40]. Man gelangt von der Legendreschen zu der Riemannschen Form, wenn man $x = t^2$ und $\lambda = k^2$ in $\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ setzt.

7.1.5. *Umkehrfunktionen und doppelte Periodizität*

Euler hatte zwar bemerkt, daß die Elastika $y = \int\limits_1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ (vgl. 7.1.1.) bei den Amplitudenverschiebungen $4ma$ (mit $a = \int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$ und $m \in \mathbf{Z}$) parallel zur y-Achse periodisch ist, hatte aber die Untersuchung ihrer Analogie zu der „mehrdeutigen Funktion"

$$\arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

nicht weiter voran getrieben ([28], (1), Bd. XXI, S. 91—92). Von dieser Analogie ließ sich ohne Zweifel Gauß in seiner Untersuchung der Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale leiten, wie man aus seinen (postum veröffentlichten) Arbeiten erkennt: die Umkehrung von $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ im Jahre 1796 ([32], Bd. VIII, S. 93—95), dann die von $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ im Jahre 1797 ([32], Bd. III, S. 405), die zur Definition

der *lemniskatischen* Funktionen führte. Der lemniskatische Sinus $\operatorname{sl} u = x$ ist durch $u = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$ definiert, der lemniskatische Cosinus durch $\operatorname{cl} u = \operatorname{sl}\left((\tilde{\omega}/2) - u\right)$ mit $\frac{\tilde{\omega}}{2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$; sie sind durch die Fagnanosche Relation

$$\operatorname{sl}^2 u + \operatorname{cl}^2 u + \operatorname{sl}^2 u \operatorname{cl}^2 u = 1$$

miteinander verknüpft. Das Eulersche Additionstheorem liefert $\operatorname{sl}(u + v)$ und $\operatorname{cl}(u + v)$ als rationale Funktionen von $\operatorname{sl} u$, $\operatorname{cl} u$, $\operatorname{sl} v$ und $\operatorname{cl} v$. Das gestattet, die lemniskatischen Funktionen, die zunächst nur für $|u| \leqq \tilde{\omega}/2$ definiert sind, auf alle reellen Werte von u fortzusetzen; es ergeben sich Funktionen mit der Periode $2\tilde{\omega}$.[1]) Gauß führte dann die imaginären Werte der Variablen ein, was Legendre stets sorgfältig vermieden hatte; es sei erwähnt, daß die Teilung der elliptischen Integrale, die in jedem Fall imaginäre Lösungen besitzt (vgl. 7.1.3. und 7.1.7.), auf natürliche Weise die Einführung der komplexen Variablen zur Folge hat. Ersetzt man x durch ix, so erhält die Form $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ den Faktor i, was Gauß veranlaßte, $\operatorname{sl}(iu) = i \operatorname{sl} u$ zu setzen. Er konnte nun $\operatorname{sl}(u + iv)$ $(u, v \in \boldsymbol{R})$ mit Hilfe des Additionstheorems definieren. Die lemniskatischen Funktionen sind jetzt für alle komplexen Werte der Variablen definiert, und es gilt $\operatorname{sl}(z + 2m\tilde{\omega}) = \operatorname{sl} z$ für jede ganze Gaußsche Zahl $m = a + bi$ mit $a, b \in \boldsymbol{Z}$ (siehe Kapitel 5). Gauß hat daraufhin (1799) ([32], Bd. III, S. 433, und Bd. X[1], S. 194) seine Untersuchung auf das (dem Legendreschen Normalintegral erster Gattung analoge) Integral $u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \mu^2 \sin^2 \varphi}}$ ausgedehnt, dessen Umkehrfunktion $u \mapsto Su = \sin \varphi$ er für jedes $u \in \boldsymbol{C}$ definierte; diese Funktion hat eine reelle und eine rein imaginäre Periode (vgl. 7.1.10.).

Abel hat die Idee, die Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale zu bilden, wiederentdeckt, als er sich (um 1823) für deren Theorie interessierte. In seinen *Recherches sur les fonctions elliptiques* (1827) ([33], Bd. I, S. 263—388) definierte er die Funktion $u \mapsto \varphi(u) = x$ durch $u = \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1 - c^2t^2)(1 + e^2t^2)}}$ (c, e reelle Konstanten) und die Hilfsfunktionen $f = \sqrt{1 - c^2\varphi^2}$, $F = \sqrt{1 + e^2\varphi^2}$. Das Additionstheorem liefert die Werte dieser drei Funktionen in $u + v$ rational als Funktion ihrer

[1]) Gauß berechnete den Wert von $\tilde{\omega}/2$ auf 24 Dezimalen mit Hilfe einer auf dem Additionstheorem beruhenden Formel: $\int\limits_0^1 = \int\limits_0^{7/23} + 2 \int\limits_0^{1/2}$ (vgl. die Machinsche Formel für π; Euler hatte sechs Dezimalen mit Hilfe einer weniger wirksamen Formel gleichen Typs erhalten). Legendre hat diese Zahl mit Hilfe der Gammafunktion ausgedrückt, $\tilde{\omega} = \frac{\pi}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2$, und Siegel hat (1930) gezeigt, daß sie transzendent ist.

Werte in u und in v. Ersetzt man x durch ix, so geht

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \quad \text{in} \quad \frac{i\,dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

über. Daraus ergibt sich eine Fortsetzung von φ, f und F auf die ganze komplexe Ebene, und zwar mit den beiden durch

$$\frac{\omega}{2} = \int_0^{1/c} \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \quad \text{und} \quad \frac{\tilde{\omega}}{2} = \int_0^{1/e} \frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}}$$

definierten Perioden 2ω und $2i\tilde{\omega}$ (tatsächlich ist $\omega + i\tilde{\omega}$ eine Periode von φ, $i\tilde{\omega}$ eine Periode von f und ω eine Periode von F). Die Punkte $m\omega + ni\tilde{\omega}$ sind einfache Nullstellen von φ, und $\left(m+\frac{1}{2}\right)\omega + \left(n+\frac{1}{2}\right) i\tilde{\omega}$ sind einfache Pole $(m, n \in \mathbf{Z})$ von φ.

Auch Jacobi hat (1827, ohne Zweifel von Abels Artikel inspiriert) die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals erster Gattung $u = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$ gebildet, indem er $\varphi = \operatorname{am} u$ („Amplitude von u") setzte; mit dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung $K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ ergibt sich

$$\operatorname{am}(u+2K) = \operatorname{am} u + \pi\,,$$

so daß $\sin \operatorname{am} u$ die Periode $4K$ besitzt. Die von Jacobi eingeführten Funktionen $\cos \operatorname{am} u$ und $\Delta \operatorname{am} u = \sqrt{1-k^2\sin^2 \operatorname{am} u}$ spielen die Rolle der von Abel definierten Funktionen f bzw. F. Später vereinfachte Gudermann die Jacobischen Bezeichnungen zu

$$\operatorname{sn} u = \sin \operatorname{am} u\,, \qquad \operatorname{cn} u = \cos \operatorname{am} u \quad \text{und} \quad \operatorname{dn} u = \Delta \operatorname{am} u\,.$$

Durch die Variablensubstitution $\sin\varphi = i \tan\psi$, die

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{i\,d\psi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\psi}}$$

mit $k' = \sqrt{1-k^2}$ liefert, fand Jacobi eine Fortsetzung seiner „elliptischen Funktionen"[1] auf die komplexe Ebene: $\operatorname{sn}(iu, k) = i \tan \operatorname{am}(u, k')$; den Modul benutzte er als zweites Argument. Die Funktionen sn, cn und dn sind doppeltperiodisch

---

[1]) Legendre hatte die Integrale F, E und Π „elliptische Funktionen" genannt. Jacobi verwendete diesen Ausdruck für die Funktionen sn, cn und dn. Legendre, unzufrieden mit der Änderung der Terminologie, bewertete dies als „unpassend und wunderlich".

mit den Periodenpaaren $(4K, 2iK')$, $(4K, 2(K + iK'))$ bzw. $(2K, 4iK')$, wobei

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

ist ([34], Bd. I, S. 43).

Das direkte Studium der Umkehrung elliptischer Integrale für komplexe Werte der Variablen konnte erst in Angriff genommen werden, als die Cauchysche Theorie für die Integration längs komplexer Wege Allgemeingut geworden war (siehe Kapitel 4). Wie auch Puiseux (1850) festgestellt hat, hängt das elliptische Integral vom Integrationsweg ab und nicht allein von den Integrationsgrenzen (auf Grund der Wurzel, deren beide Werte sich in Punkten verzweigen, wo die Wurzel gleich null ist). Puiseux studierte die Art und Weise der Verzweigung und fand die doppelte Periodizität der Umkehrfunktion. Die Riemannschen Ideen (siehe Kapitel 4) erlaubten, dieses Phänomen zu deuten: Man denke sich die Funktion $x \mapsto \sqrt{x(1 - x)(1 - \lambda x)}$ (zum Beispiel) nicht als auf der Ebene $\boldsymbol{C}$ definiert, sondern auf einer Fläche, die auf diese Ebene projiziert wird und die über jedem Punkt $z \in \boldsymbol{C}$ so viele Punkte hat, wie die Funktion Werte in z besitzt (in unserem Beispiel hat die Funktion zwei Punkte, außer über 0, 1 und $1/\lambda$; ein einziger Punkt der Fläche entspricht jedem der drei Verzweigungspunkte). Also ist die Riemannsche Fläche eine „verzweigte Überlagerung" der Ebene, deren Blätter den Werten der betrachteten Funktionen entsprechen und auf der diese Funktion eindeutig ist. In dem von uns betrachteten Fall stimmt die Riemannsche Fläche mit der Menge der Punkte (x, y) von $\boldsymbol{C}^2$ überein, in denen $y^2 = x(1 - x)(1 - \lambda x)$ ist, und diese Menge ist mit der Projektion $(x, y) \mapsto x$ in $\boldsymbol{C}$ versehen. Man vervollständigt sie durch einen unendlich fernen Punkt, der auf den Punkt ∞ von $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ projiziert wird. Die Funktion ist einfach die zweite Projektion $(x, y) \mapsto y$. Unsere Fläche ist nicht einfach zusammenhängend, d. h., es existieren geschlossene Kurven, die nicht Berandung eines Teiles der Fläche sind (siehe Kapitel 10), und das Integral einer holomorphen Funktion längs einer solchen Kurve ist nicht notwendig gleich null. Eben das ist der Grund für die „Mehrdeutigkeit" der elliptischen Integrale; dabei sind die Perioden die über geschlossene Kurven, welche nicht Berandungen sind, erstreckten Integrale. Riemann machte die Fläche, indem er sie längs zweier passend gewählter geschlossener Kurven aufschnitt, zu einer einfach zusammenhängenden Fläche; durch

$$x \mapsto u = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - \lambda x)}}$$

wird die so aufgeschnittene Fläche konform auf ein Rechteck abgebildet, dessen Seiten die beiden primitiven Perioden sind (wobei $0 < \lambda < 1$ angenommen wird). Die inverse Abbildung $u \mapsto x$ wird dann zu einer doppeltperiodischen Abbildung der Ebene auf die Riemannsche Fläche fortgesetzt ([40], Abschnitt I und II); diese läßt sich also mit dem Quotientenraum $\boldsymbol{C}/\Gamma$ der Ebene nach dem Periodengitter Γ identifizieren (topologisch ist dies ein Torus; siehe Kapitel 4 und 10).

Schwarz gab (1869) explizite konforme Abbildungen der Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$ auf Polygone mit Hilfe gewisser Integrale an. Im Spezialfall eines Rechtecks hat das Schwarzsche Integral die Gestalt

$$u = \int_a^z \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}},$$

wobei mit a, b, c, d die Punkte der reellen Achse bezeichnet sind, die in die Ecken des Rechtecks abgebildet werden. Man erkennt in dieser Beziehung ein elliptisches Integral erster Gattung, dessen Umkehrfunktion ihrerseits das Rechteck auf die Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$ konform abbildet. Mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips (das schon Riemann bekannt war) setzt man diese Umkehrfunktion zu einer meromorphen doppeltperiodischen Funktion fort (vgl. [3], Kap. X, § 7).

Briot und Bouquet hatten (1859) versucht, die heiklen Überlegungen über „mehrdeutige Funktionen" zu vermeiden, indem sie sich der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen bedienten: Die Umkehrfunktion des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{G(x-a)(x-b)(x-c)}}$ (G, a, b, c komplexe Konstanten) ist definiert als Lösung der Differentialgleichung $\frac{dx}{du} = \sqrt{G(x-a)(x-b)(x-c)}$. Briot und Bouquet stellten fest, daß die einzige Lösung x, die für jeden Punkt u_0 der Ebene einen gegebenen Anfangswert $x(u_0)$ annimmt (ohne Ausschluß der Werte a, b, c oder ∞), in der Umgebung von u_0 meromorph ist (sie benutzten die Majorantenmethode; vgl. 8.1.1.). Sie nahmen implizit an, daß die einzigen algebraischen Singularitäten von x Pole sind[1]), und zogen hieraus den Schluß, daß x auf der ganzen Ebene meromorph ist ([39], S. 68—75). Briot und Bouquet interessierten sich allgemein (ab 1855) für Differentialgleichungen der Gestalt $F\left(\frac{dx}{du}, x\right) = 0$ (F ein Polynom), deren Lösung in der ganzen Ebene definiert ist und endlich viele Werte annimmt. Sie haben (mit Hilfe der Cauchyschen Theorie) gezeigt, daß die Lösung eine bestimmte Anzahl von Perioden hat. Nun hatte schon Jacobi festgestellt (1828, publiziert 1834; [34], Bd. II, S. 23—50; vgl. auch 7.2.2.), daß eine Funktion, die außer auf einer diskreten Menge von Punkten der Ebene stetig ist, nicht mehr als zwei über $\mathbf{Z}$ linear unabhängige Perioden besitzen kann, ohne eine Konstante zu sein. Ist das Periodenverhältnis reell, so ist die Funktion auf den Parallelen zu der Geraden, die sie erzeugen, konstant, was im Fall einer analytischen Funktion nicht möglich ist. Daraus ergibt sich, daß die Lösungen der von Briot und Bouquet betrachteten Differentialgleichungen algebraische Funktionen einer Funktion eines der drei folgenden Typen sind: a) u, b) $\tan au$ ($a =$ const), c) eine doppeltperiodische meromorphe Funktion von u. Briot und Bouquet ([39], S. 285—326) fanden elf Differentialgleichungen der Gestalt $\left(\frac{dx}{du}\right)^m = f(x)$ (m ganz, f ein Polynom), deren

---

1) *Ein allgemeines Resultat von Picard (1890) ermöglicht es, das zu beweisen.*

Lösungen meromorph und doppeltperiodisch sind. Hermite charakterisierte (1873) diejenigen Polynome $F(x, y)$, für welche die Lösungen der Differentialgleichung $F\left(\frac{dx}{du}, x\right) = 0$ meromorph und doppeltperiodisch sind: Die algebraische Kurve $F(y, x) = 0$ muß „elliptisch" sein (siehe 7.1.14.) ([36], Bd. III, S. 123—126).

Weierstraß ([43], Bd. V, S. 23—31) konstruierte seine elliptische Funktion $\wp u$, die Umkehrfunktion des Integrals erster Gattung (siehe 7.1.12.), als Lösung der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

mit einem Pol in $u = 0$. Das Eulersche Additionstheorem liefert

$$\wp(u + v) = \frac{(\wp u + \wp v)\left(2\wp u \wp v - (g_2/2)\right) - g_3 - \wp' u \wp' v}{2(\wp u - \wp v)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 - \wp u - \wp v\,,$$

und daraus kann man $\wp(nu)$ als rationale Funktion von $\wp u$ für ganzzahliges n herleiten, was uns erlaubt, die Funktion $\wp$, ausgehend von ihren Werten in der Umgebung von 0, zu einer auf der ganzen Ebene meromorphen Funktion fortzusetzen.

7.1.6. *Doppeltperiodische meromorphe Funktionen*

Dies sind die Funktionen, die man heute *elliptische Funktionen* nennt. Ihre direkte Untersuchung (ohne den Weg über die Umkehrung der elliptischen Integrale) haben Liouville (1844) und Eisenstein (1847) eingeleitet (zu nennen sind auch Cayley und Hermite, etwa zur gleichen Zeit; siehe 7.1.11). Liouvilles Vorlesungen [35] wurden zwar erst 1879 veröffentlicht, sie haben jedoch schon das Buch von Briot und Bouquet (1859) beeinflußt. Liouville zeigte zunächst, daß eine doppeltperiodische ganze Funktion notwendig konstant ist, indem er sie in eine Fourierreihe nach einer der Perioden entwickelte. Hieraus zog er den Schluß, daß eine doppeltperiodische meromorphe Funktion im *Periodenparallelogramm* (das von den primitiven Perioden ω und ω' aufgespannt wird) mindestens zwei Pole (oder einen Doppelpol) besitzt. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\cos(2\pi/\omega)(z - h) - \cos(2\pi/\omega)\,h'}$$

besitzt die Periode ω, und sie hat zwei einfache Pole α und β im Periodenparallelogramm, wenn

$$h = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{und} \quad h' = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

ist. Die Reihe $\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(z + n\omega')$ lieferte Liouville eine meromorphe Funktion, die zwei gegebene Perioden ω und ω' und zwei gegebene einfache Pole α und β im Periodenparallelogramm besitzt. Liouville stellte dann fest, daß die Anzahl der Nullstellen einer doppeltperiodischen meromorphen Funktion im Periodenparallelogramm gleich der Anzahl der Pole ist (unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit; diese Zahl wird die *Ordnung* der Funktion genannt) und daß die Summe dieser Nullstellen gleich der Summe der Pole ist, *modulo* der Linearkombinationen der Perioden ω und ω' mit ganzen Koeffizienten. Schließlich zeigte er: Ist φ eine doppeltperiodische meromorphe Funktion zweiter Ordnung, so läßt sich jede meromorphe Funktion, welche die gleichen Perioden wie φ besitzt, in der Gestalt $P(\varphi) + Q(\varphi)\,\varphi'$ angeben, wobei P und Q gebrochen rationale Funktionen sind. Dieses Resultat, auf φ'^2 angewendet, ergibt $\varphi'^2 = P(\varphi)$ mit einem Polynom P vierten Grades (oder nur dritten Grades, wenn φ einen Doppelpol besitzt), so daß φ die Umkehrfunktion eines elliptischen Integrals erster Gattung ist. Man beachte, daß die gesamte Liouvillesche Theorie ohne die Cauchyschen Methoden zum Studium der Funktionen einer komplexen Variablen entwickelt wurde. Hermite war (1848) der erste ([36], Bd. I, S. 75—83), der diese Methoden in die Theorie der elliptischen Funktionen eingeführt hat, indem er durch Integration längs des Randes des Periodenparallelogramms zeigte, daß die Summe der Residuen der im Periodenparallelogramm liegenden Pole einer doppeltperiodischen meromorphen Funktion gleich 0 ist. Cauchy wies (1851) darauf hin, daß sich die gesamte Liouvillesche Theorie leicht aus seiner Residuentheorie herleiten läßt.

Eisenstein ging von einem ganz neuen Gesichtspunkt an die Theorie heran, indem er a priori Doppelreihen $(g, x) = \sum_w \frac{1}{(x+w)^g}$ betrachtete, wobei w das von den Linearkombinationen der Perioden ω und ω' mit ganzen Koeffizienten gebildete Periodengitter Γ durchläuft und g eine vorgegebene ganze Zahl ist (siehe auch 7.1.16.). Eisenstein zeigte, daß die Reihe für $g > 2$ absolut konvergiert, was impliziert, daß $x \mapsto (g, x)$ eine meromorphe Funktion mit den Perioden ω und ω' ist. Für $g = 1$ oder 2 muß eine passende Summationsordnung gewählt werden, von der die erhaltene Summe abhängt. Bezeichnet a (bzw. b) die Änderung von $\sum_w \frac{1}{w}$ bzw. $\sum_w \frac{1}{w^2}$ bei einer gewissen Änderung der Reihenfolge der Glieder, so sind die entsprechenden Änderungen von $\sum_w \frac{1}{x+w}$ und von $\sum_w \frac{1}{(x+w)^2}$ gleich $a - bx$ bzw. b. Eisenstein definierte (g, x) für $g = 1, 2$ durch

$$(g, x) = \lim_{s\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{\substack{|m|\leqq r\\ |n|\leqq s}} \varphi_g(m, n)$$

mit $\varphi_g(m, n) = \frac{1}{(x + m\omega + n\omega')^g}$. Wird die Änderung der Reihenfolge der Glieder durch die Translation $(m, n) \mapsto (m, n) - (\lambda, \nu)$ beschrieben, so ist $a = \pm (2\nu\pi i/\omega)$ und $b = 0$, also ist $(2, x)$ ebenfalls doppeltperiodisch, während $(1, x)$ nur die Periode ω besitzt (und sich durch Addition von ω' zu x um eine Konstante

vermehrt). Offenbar gilt

$$\frac{d}{dx}(g, x) = -g(g + 1, x) .$$

Durch formale Rechnung zeigte Eisenstein, daß $(3, x)^2$ ein Polynom dritten Grades in $(2, x)$ ist. Dieses Polynom ist gleich 0 für $x = \omega/2, \omega'/2, (\omega + \omega')/2$, so daß $(2, x)$ Lösung der Differentialgleichung

$$y'^2 = 4(y - a)(y - b)(y - c)$$

mit $a = (2, \omega/2)$, $b = (2, \omega'/2)$ und $c = \big(2, (\omega + \omega')/2\big)$ ist und sich von der Funktion $\wp$, die Weierstraß etwa 15 Jahre später einführte (siehe (7.1.12.)), nur um eine Konstante unterscheidet. Die Reihe $(1, x)$ entspricht dem elliptischen Integral zweiter Gattung, da sie den Wert

$$-\int \frac{y\,dy}{2\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)}} \quad \text{für} \quad y = (2, x)$$

hat. Eisenstein stellte (mit Hilfe der Reihen) die Additionstheoreme für die Integrale erster und zweiter Gattung auf:

$$(2, p) + (2, q) + (2, p + q) - 3(2^*, 0) = \left(\frac{(3, p) - (3, q)}{(2, p) - (2, q)}\right)^2$$

$$\text{mit} \quad (2^*, 0) = \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^2}$$

(vgl. in 7.1.5. das Additionstheorem der $\wp$-Funktion) und

$$(1, p) + (1, q) - (1, p + q) = \frac{(3, p) - (3, q)}{(2, p) - (2, q)} .$$

Er bemerkte, als er die Summation seiner Reihen in zwei Schritten vornahm, daß

$$\sum_m \varphi_1(m, n) = -\cot(\xi + n\eta) \qquad \left(\xi = \frac{\pi x}{\omega},\ \eta = \frac{\pi\omega'}{\omega}\right)$$

gilt, und zeigte, daß

$$\sum_n \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{g-1} \big(\cot(\xi + n\eta)\big)$$

für $g > 1$ eine Funktion in ξ mit den Perioden π und η ist (für $g = 2$ stimmt sie bis auf den Faktor 2 mit der von Liouville zur Konstruktion einer doppeltperiodischen meromorphen Funktion zweiter Ordnung benutzten Reihe im Spezialfall $h = h' = 0$ überein, der einem Doppelpol im Ursprung entspricht). (Vgl. [38], Bd. I, S. 357—478, und [11].)

7.1.7. *Teilung der elliptischen Integrale*

Setzt man die Fagnanoschen Untersuchungen über die Teilung der Lemniskatenbogen (siehe 7.1.3.) fort, so sieht man sich dem Problem gegenüber, x als Funktion

von a derart zu bestimmen, daß $F(x) = \frac{1}{n} F(a)$ gilt, wobei n eine ganze Zahl und F ein elliptisches Integral erster Gattung ist.[1]) Legendre ([31], Bd. I, S. 26—27) wußte schon, daß dieses Problem für ungerades n auf eine Gleichung vom Grad n^2 führt; er hatte dies für $n = 3$ und $n = 5$ gezeigt (für den allgemeinen Fall gab er keinen Beweis an). Bei der Teilung des vollständigen Integrals verringert sich dieser Grad auf $(n^2 - 1)/2$. Auch Gauß hatte diese Gradzahlen bestimmt, und es war ihm völlig klar, wie sie mit dem von ihm entdeckten Phänomen der doppelten Periodizität zusammenhängen (siehe 7.1.5. und [32], Bd. X[1], S. 160—166). Dieser Zusammenhang ist genau der Ausgangspunkt für das systematische Studium, das Abel für das Teilungsproblem aufgewendet hat (*Recherches sur les fonctions elliptiques*, 1827) ([33], Bd. I, S. 263—388). Ist φ die Abelsche elliptische Funktion (siehe 7.1.5.), so sieht man durch Induktion nach n, daß

$$\varphi(nv) = R_n(\varphi(v)) \qquad \text{für ungerades } n$$

bzw.

$$\varphi(nv) = \varphi'(v)\, R_n(\varphi(v)) \qquad \text{für gerades } n$$

mit rationalem R_n gilt. Man sucht $x = \varphi(v)$, wenn $a = \varphi(nv) = \varphi(u)$ bekannt ist: Es ist

$$\left.\begin{aligned} R_n(x) &= a \qquad \text{für ungerades } n\,, \\ \varphi'(v)\, R_n(x) &= a \qquad \text{für gerades } n\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Für ungerades n gibt es n^2 Lösungen

$$x_{m,\mu} = \varphi\left(\frac{u}{n} + 2\,\frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{n}\right) \tag{10}$$

mit $|m|, |\mu| \leqq (n-1)/2$, woraus sich der Grad der Teilungsgleichung ergibt.[2]) Für gerades n muß (9) ins Quadrat erhoben werden, damit sie rational wird, woraus eine Beziehung $Q(x^2) = a^2$ folgt (Q rational), die $2n^2$ Lösungen

$$\pm\varphi\left((-1)^{m+\mu}\frac{u}{n} + 2\,\frac{m\omega + \mu\tilde{\omega}i}{n}\right) \qquad (0 \leqq m, \mu < n)$$

besitzt. Abel hat übrigens durch Induktion nach n, also auf rein algebraischem Wege gezeigt (*Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, 1829) ([33], Bd. I, S. 518—617), daß R_n der Quotient aus einem ungeraden Polynom vom Grad n^2 (bzw. $n^2 - 3$) und einem geraden Polynom vom Grad $n^2 - 1$ (bzw. n^2) ist, und Kronecker hat (1833) ([44], Bd. IV, S. 319—334) festgestellt, daß dieser Bruch unkürzbar ist (ein anderer Weg zu R_n mit algebraischen Mitteln wurde von Runge 1883 beschritten).

Abel bewies, daß sich die Lösungen der Teilungsgleichung durch Radikale rationaler Funktionen von $a = \varphi(u)$ mit Koeffizienten ausdrücken lassen, die von

---

[1]) Modern ausgedrückt sucht man die Punkte v der Gruppe $\boldsymbol{C}/\Gamma$, für die $nv = u$ bei gegebem $u \in \boldsymbol{C}/\Gamma$ ist.

[2]) Die Teilung eines Kreisbogens in n Teile führt auf eine Gleichung vom Grad n allein, was der einfachen Periodizität der Kreisfunktionen entspricht.

den Werten von φ, f und F in $2\omega/n$ und $2\tilde{\omega}i/n$ abhängen. Der Fall der Halbierung, also Teilung durch 2, ist einfach (vgl. Fagnano); um aber durch ein ganzzahliges ungerades n zu teilen, mußte Abel die Zwischenfunktion $\varphi_1(v) = \sum_m x_{m,0}$ (mit der Bezeichnung (10)) benutzen, die sich rational als Funktion von $x = \varphi(v)$ ausdrücken läßt und gegenüber Permutationen der Wurzeln, die nur den Index m betreffen, invariant ist. Gemäß der Lagrangeschen Resolventenmethode (siehe 2.2.2.) führte Abel die Ausdrücke $\psi_\pm(v) = \sum_\mu \theta^\mu \varphi_1(v \pm (2\mu\tilde{\omega}i/n))$ ein, die der Beziehung $\psi_\pm(v + (2\nu\tilde{\omega}i/n)) = \theta^{\mp\nu}\psi_\pm(v)$ genügen; dabei ist θ eine n-te Einheitswurzel und $|\mu| \leqq (n-1)/2$. Man sieht, daß $\psi_\pm(v)^n$ eine symmetrische Funktion der Wurzeln ist und die Gestalt

$$t(x) \pm t'(x)\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}$$

mit rationalen t und t' hat (Additionstheorem): Sie ist also durch eine Gleichung zweiten Grades mit rationalen Koeffizienten in a definiert. Ist $\psi_\pm(v)$ erst einmal durch Radikale gegeben, so erhält man $n\varphi_1(v)$, indem man die Summe ihrer Werte bildet, wenn θ die Menge der n-ten Einheitswurzeln durchläuft; eine analoge Überlegung mit den Ausdrücken

$$\varrho_\pm(v) = \sum_m \theta^m \varphi\left(v \pm \frac{2m\omega}{n}\right) = \sum_m \theta^m x_{\pm m,0}$$

zeigt sofort, daß sich x mit Hilfe von Radikalen berechnen läßt, wenn man von $\varphi_1(v)$ ausgeht. Diese Lösungsmethode beruht auf der Tatsache, daß die Galoissche Gruppe (siehe 2.2.2.) der Gleichung über dem von c^2, e^2 und den Werten von φ, f und F in $2\omega/n$ und $2\tilde{\omega}i/n$ erzeugten Körper gleich dem Produkt zweier zyklischer Gruppen n-ter Ordnung ist (die von $m \mapsto m+1$ bzw. $\mu \mapsto \mu + 1$ erzeugt werden). Jacobi hat (1828) die Abelsche Methode vereinfacht, indem er die Zerlegung in zwei Schritte vermied: Er betrachtete $\sum_{m,\mu} \theta^m \theta'^\mu x_{m,\mu}$, wobei θ und θ' n-te Einheitswurzeln sind.

Die Teilung des vollständigen Integrals führt auf die Gleichung $P_n(x) = 0$, wobei P_n den Zähler von R_n bezeichnet. Für ungerades n gilt $P_n = xQ(x^2)$ mit einem Polynom Q vom Grade $(n^2-1)/2$; man hat dann die Gleichung $Q(r) = 0$ zu lösen, deren Wurzeln

$$r = \varphi^2\left(\frac{m\omega \pm \mu\tilde{\omega}i}{n}\right) \quad \text{mit} \quad 0 \leqq m, \mu \leqq \frac{n-1}{2} \qquad (m, \mu) \neq (0, 0)$$

sind. Ist n eine Primzahl, so kann man diesen Wurzeln die Gestalt

$$r_\nu = \varphi^2\left(\frac{\nu\omega}{n}\right), \qquad r_{\nu,m} = \varphi^2\left(\nu\frac{m\omega + \tilde{\omega}i}{n}\right)$$

$$\left(1 \leqq \nu \leqq \frac{n-1}{2}, 0 \leqq m \leqq n-1\right)$$

geben. Die elementarsymmetrischen Funktionen der r_ν lassen sich rational als Funktion von r_1 ausdrücken. Ist $\psi(r_1)$ eine von ihnen, so hat man

$$\psi(r_\nu) = \psi(r_1) \quad \text{und} \quad \psi(r_{\nu,m}) = \psi(r_{1,m}) \qquad \left(1 \leqq \nu \leqq \frac{n-1}{2}\right).$$

Abel betrachtete die Gleichung $(n+1)$-ten Grades, deren Wurzeln $\psi(r_1)$ und die $\psi(r_{1,m})$ sind, $0 \leqq m \leqq n-1$ (ihre Koeffizienten sind in e^2 und c^2 rational). Diese Gleichung ist im allgemeinen nicht in Radikalen auflösbar; nimmt man sie aber als aufgelöst an, so kennt man $\psi(r_1)$, also auch die anderen elementarsymmetrischen Funktionen der r_ν, die sich durch $\psi(r_1)$ rational darstellen lassen. Die r_ν lassen sich also durch eine Gleichung vom Grade $(n-1)/2$ bestimmen, die in Radikalen auflösbar ist, und man geht in bezug auf die $r_{\nu,m}$ genau so vor (insgesamt $n+1$ Gleichungen vom Grade $(n-1)/2$).[1]) Hier ist die Galoissche Gruppe der betrachteten Gleichung über dem von c^2 und e^2 erzeugten Körper im allgemeinen $\boldsymbol{GL}(2, \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$, was auch schon Galois (1832) festgestellt hatte. Sylow (1871) und Kronecker (1861—1886) haben die Galoissche Gruppe der Gleichung, die bei der Teilung des vollständigen Integrals auftritt, für ungerades n bestimmt, das nicht notwendig eine Primzahl ist (die Gleichung ist nicht irreduzibel, und Kronecker gab eine Zerlegung in irreduzible Faktoren an, die den Teilern d von n entsprechen; der dem Teiler d entsprechende Faktor hat den Grad $d^2 \prod_{p|d} (1 - 1/p^2)$) ([44], Bd. IV, S. 264—273). Bei den lemniskatischen Funktionen ist $e = c$ und $\tilde{\omega} = \omega$; Abel bewies, daß in diesem Fall die Teilung des vollständigen Integrals durch eine Primzahl $n \equiv 1 \pmod 4$ mit Hilfe von Radikalen ausgedrückt werden kann. Er benutzte die Tatsache, daß $\varphi(iv) = i\varphi(v)$ ist, was ihm erlaubte, $\varphi(mv)$ mit Hilfe des Additionstheorems für jede ganze Gaußsche Zahl m (siehe 7.1.3. und 7.1.13.) zu bestimmen; es gilt $n = m\bar{m}$ für eine ganze Gaußsche Zahl $m = a + bi$, und es existieren ganze rationale Zahlen q und r derart, daß $2qa - nr = 1$ ist, was $\varphi(\omega/n) = \pm\varphi\big((q\omega/m) + (q\omega/\bar{m})\big)$ liefert. Die Division durch n läßt sich also auf die durch m und durch $\bar{m}$ zurückführen. Abel zeigte, daß $\varphi(mv) = xF(x^4)$, F rational, gilt, wenn $x = \varphi(v)$ ist. Genauer hat Eisenstein (1845) gezeigt ([38], Bd. I, S. 299—324), daß $F(t) = \big(mA(t) + t^\nu\big)/\big(1 + mB(t)\big)$ für $\nu = (n-1)/4$ gilt, wenn n eine Primzahl ist, wobei A und B Polynome $(\nu-1)$-ten bzw. ν-ten Grades sind. Gemäß der Gaußschen Methode der Kreisteilung (siehe 5.3.4.) schrieb Abel die Wurzeln der Gleichung in x^2, die die Teilung durch m liefert, in der Gestalt $\varphi^2(\varepsilon^k v)$, $0 \leqq k \leqq \dfrac{n-3}{2} = 2\nu - 1$, wobei ε eine Primitivwurzel mod n ist, und er zeigte, daß der Ausdruck $\big(\sum_k \theta^k \varphi^2(\varepsilon^k v)\big)^{2\nu}$ im Fall $\theta^{2\nu} = 1$ eine rationale Funktion der Koeffizienten von F ist; er erhielt die Wurzeln x^2 als Linearkombinationen der

---

[1]) In seinem *Précis* (1829) gab Abel die bemerkenswerten Relationen

$$\sum_{r=0}^{n-1} \delta^{4rs} \operatorname{sn} \frac{4rK + 4sK'i}{n} = \sum_{s=0}^{n-1} \delta^{4rs} \operatorname{sn} \frac{4rK + 4sK'i}{n} = 0$$

an (δ ist n-te Einheitswurzel), die von Sylow (1864) und Kronecker (1875) bewiesen wurden ([44], Bd. IV, S. 264—273).

$\sum_k \theta^k \varphi^2(\varepsilon^k v)$ für die verschiedenen 2ν-ten Einheitswurzeln θ. Es sei erwähnt, daß Gauß schon in seinen *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) darauf hingewiesen hat, daß seine Kreisteilungstheorie auch auf die Teilung der Lemniskate angewendet werden kann.

7.1.8. *Transformationen*

Die Theorie der Transformationen entspricht dem, was man heute die *Isogenien* elliptischer Kurven nennt; eine Interpretation in moderner Ausdrucksweise wird zu ihrem Verständnis beitragen. Wir haben gesehen, daß die elliptischen Integrale auf einer Riemannschen Fläche berechnet werden müssen, die man mit dem Quotientenraum $\boldsymbol{C}/\Gamma$ identifiziert (Γ ist ein festes Periodengitter); sind Γ und Γ' zwei gegebene Periodengitter, so untersucht man natürlicherweise die holomorphen Abbildungen von $\boldsymbol{C}/\Gamma$ in $\boldsymbol{C}/\Gamma'$. Eine solche Abbildung läßt sich zu einer ganzen Funktion $f\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ liften derart, daß $f(u + \omega) - f(u) \in \Gamma'$ ist für beliebige u und $\omega \in \Gamma'$. Da Γ' diskret und $\boldsymbol{C}$ zusammenhängend ist, hängt $f(u + \omega) - f(u)$ nicht von u ab; die Ableitung f' besitzt also die $\omega \in \Gamma$ als Perioden. Das bedeutet, daß f' konstant (Satz von Liouville, siehe 7.1.6.), also $f(u) = au + b$ (a, b = const) ist. Eine Translation führt auf den Fall $b = 0$. Ist die betrachtete Abbildung nicht konstant, so ist $a \neq 0$, und das Gitter $\Gamma_1 = \frac{1}{a}\Gamma'$ enthält Γ als Untergruppe von endlichem Index n und bestimmt die Abbildung bis auf Isomorphie. Wählt man eine Basis (ω_1, ω_1') von Γ_1 und eine Basis (ω, ω') von Γ, so ist $\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega_1'$, $\omega' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_1'$, wobei $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ eine Matrix mit ganzzahligen Koeffizienten und der Determinante n ist. Bei passender Wahl der Basen nimmt diese Matrix die Gestalt $\begin{pmatrix}d & 0\\ 0 & d'\end{pmatrix}$ mit $dd' = n$ (d, d' ganze Zahlen) an (Theorie der Elementarteiler; siehe 3.2.2. und [1], Kap. XV, § 3; der Beweis ist hier ganz elementar). Sind dagegen das Gitter Γ und die ganze Zahl $n = dd'$ gegeben, so erhält man Γ_1, indem man eine Basis (ω, ω') von Γ wählt und $\omega_1 = \omega/d$, $\omega_1' = \omega'/d'$ setzt. Wenn sich die Basis von Γ ändert, so ändert sich auch Γ_1, und man findet so d verschiedene Gitter für jeden Teiler d von n, also insgesamt $\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$ Gitter Γ_1.

Historisch sind die Mathematiker auf einem anderen Wege zu dieser Theorie gelangt, indem sie nämlich in den elliptischen Integralen komplizierte Variablensubstitutionen vornahmen. Wir haben gesehen, daß Euler (1760) $\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ (P ein Polynom vierten Grades) in $\frac{dy}{\sqrt{P_1(y)}}$ (P_1 ein anderes Polynom vierten Grades) transformieren konnte, wozu er eine Variablentransformation benutzte, die für eine Gleichung $f(x, y) = 0$ zweiten Grades in jeder Variablen definiert ist. Euler hat diese Transformationen aber nur benutzt, um die ungeraden Potenzen im

Polynom P zu beseitigen. Landen hat (1775) eine Variablentransformation ähnlichen Typs entdeckt:

$$y^2(1-k')^2\,(1-k^2x^2) - k^4x^2(1-x^2) = 0\,.$$

Sie ergibt

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\,(1-k^2x^2)}} = \pm\frac{1}{1+k'}\,\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\,(1-\lambda^2y^2)}}$$

mit

$$k' = \sqrt{1-k^2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'}\,.$$

Landen benutzte sie, wobei er k' gleich dem Verhältnis b/a der Achsen einer Ellipse E setzte, und erhielt so die Länge eines Bogens der Hyperbel mit den Achsen $a-b$ und $2\sqrt{ab}$ als Summe der Länge eines Bogens von E, eines Bogens der Ellipse mit den Achsen $a+b$ und $2\sqrt{ab}$ und eines algebraischen Ausdrucks (geometrisch läßt sich $(1-k')\,y$ als Projektion des im Ellipsenmittelpunkt angebrachten Radiusvektors auf die Tangente an E interpretieren). Lagrange hat (1784) ([29], Bd. III, S. 253–283) die Landensche Transformation wiedergefunden, als er ein Mittel suchte, um elliptische Integrale numerisch auszuwerten. Durch die Variablentransformation

$$x' = \frac{xR}{1\pm q^2x^2} \quad \text{mit} \quad R = \sqrt{(1\pm p^2x^2)\,(1\pm q^2x^2)} \qquad (p > q)$$

erhielt er

$$\frac{dx}{R} = \frac{dx'}{R'}$$

mit

$$R' = \sqrt{(1\pm p'^2x'^2)\,(1\pm q'^2x'^2)}\,,$$

$$p' = p + \sqrt{p^2-q^2}\,, \qquad q' = p - \sqrt{p^2-q^2}\,.$$

Iterativ konstruierte er $(p^{(n)}, q^{(n)})$, was schnell gegen $(\infty, 0)$ strebt, und $(x^{(n)}, R^{(n)})$ derart, daß $\frac{dx}{R} = \frac{dx^{(n)}}{R^{(n)}}$ für jedes n gilt. Für hinreichend großes n liefert das elementare Integral

$$\int \frac{dx^{(n)}}{\sqrt{1\pm p^{(n)2}(x^{(n)})^2}}$$

eine gute Approximation von $\int \frac{dx}{R}$. Lagrange setzte seine Untersuchung anders fort; er definierte nämlich

$$({}^{(n)}p,\, {}^{(n)}q) \quad \text{und} \quad ({}^{(n)}x,\, {}^{(n)}R)$$

mit $p = {}'p + \sqrt{{}'p^2 - {}'q^2}$, $q = {}'p - \sqrt{{}'p^2 - {}'q^2}$, usw. Man sieht, daß ${}'p = (p+q)/2$, ${}'q = \sqrt{pq}$ usw. ist, und erkennt den Algorithmus zur Berechnung des arithmetisch-

geometrischen Mittels (siehe 7.1.1.). Die Transformationsformeln für die elliptischen Integrale zweiter Gattung, ebenfalls von Lagrange angegeben, enthalten einen Zusatzterm algebraischer Natur (wie beim Eulerschen Additionstheorem).

Die einzige von Gauß veröffentlichte Arbeit über elliptische Integrale ([32], Bd. III, S. 333–360) ist der Bestimmung der Newtonschen Anziehung gewidmet, welche die über die Umlaufbahn verteilte Masse eines Planten ausübt (1818). Dieses Problem der Mechanik führte ihn auf elliptische Integrale zweiter Gattung, und er zeigte, wie diese mit Hilfe einer Transformation berechnet werden können. die mit dem arithmetisch-geometrischen Mittel verknüpft ist: Die rationale Variablentransformation

$$\sin T = \frac{2m \sin T'}{(m+n)\cos^2 T' + 2m \sin^2 T'}$$

liefert, wenn man $m' = \dfrac{m+n}{2}$ und $n' = \sqrt{mn}$ setzt,

$$\frac{dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}} = \frac{dT'}{\sqrt{m'^2 \cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'}},$$

und durch Iteration zeigte Gauß, daß das vollständige elliptische Integral erster Gattung (zwischen 0 und 2π) den Wert $2\pi/M(m, n)$ besitzt $(M(m, n)$ ist das arithmetisch-geometrische Mittel von m und $n)$. Bei den Integralen zweiter Gattung gibt es einen algebraischen Zusatzterm.

Legendre hat seine Tafeln mit Hilfe der Landenschen Transformation und deren Iterierten berechnet. Jeder Modul k ist in einer „Stufenleiter“ $(k_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ von Transformierten angeordnet, die von $0 = \lim\limits_{n\to-\infty} k_n$ bis $1 = \lim\limits_{n\to\infty} k_n$ wachsen, und diese sind durch die Rekursionsformeln

$$k_{n+1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}, \qquad k_{n-1} = \frac{1-k_n'}{1+k_n'} \qquad (k_n' = \sqrt{1-k_n^2})$$

miteinander verknüpft. Legendre bemerkte, daß im Fall $k = \sin \pi/4$ (bzw. $\tan \pi/8$) die Beziehungen $k = k'$ (bzw. $k_1 = k_1'$) gelten, so daß die Stufenleiter von k mit der des Komplementärmoduls k' übereinstimmt. Die Landensche Transformation verdoppelt das Periodenverhältnis K'/K (vgl. den Beginn dieses Abschnitts), wie Gauß und Legendre festgestellt hatten. Legendre entdeckte (1824) eine neue Transformation dritter Ordnung, die das Periodenverhältnis verdreifacht: Die rationale Variablentransformation

$$\sin\psi = \sin\varphi \frac{m + h\sin^2\varphi}{1 + r\sin^2\varphi}$$

mit

$$1 < m < 3, \qquad h = \left(\frac{m-1}{2}\right)^2, \qquad r = \frac{(m+3)(m-1)}{4}$$

liefert für das Integral erster Gattung die Beziehung $F(\psi, \lambda) = mF(\varphi, k)$, falls

$$k^2 = \frac{(m-1)^3(m+3)}{16m} \quad \text{und} \quad \lambda^2 = \frac{(m-1)(m+3)^3}{16m^3}$$

ist. Für gegebenes k wird m durch eine Gleichung vierten Grades bestimmt; ist $k = \sin(\pi/12)$, so findet man $m = \sqrt{3}$ und $\lambda = k'$. Durch Eliminieren von m fand Legendre die Gleichung $\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1$, die k und λ verknüpft ([31], Bd. I, S. 222—229). Seit 1808 kannte Gauß nicht nur die Transformation dritter Ordnung, sondern auch Transformationen fünfter und siebenter Ordnung (siehe 7.1.10.).

Die Transformation dritter Ordnung wurde unabhängig von Jacobi (1827) entdeckt ([34], Bd. I, S. 29—48), der außerdem eine Transformation fünfter Ordnung fand. Jacobi schloß kühn auf die Existenz einer Transformation „n-ter Ordnung" (für beliebiges ungerades n): $y = U(x)/V(x)$, wobei U und V teilerfremde Polynome sind (das eine ungerade vom Grad n, das andere gerade vom Grad $n - 1$), für welche

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

mit passenden Konstanten λ und M gilt (wobei der Modul k gegeben ist). Im Fall $n = m^2$ ist die Formel für die Multiplikation mit m von genau diesem Typ mit $\lambda = k$ und $M = 1/m$. Jacobi gelang es erst nach mehreren Monaten, seine Behauptung zu beweisen (nachdem er die Abelsche Arbeit gelesen hatte); sein „Transformationsprinzip" gibt die Bedingung an, der U, V und λ genügen müssen: Der Ausdruck $(V^2 - U^2)(V^2 - \lambda^2 U^2)$ muß in der Gestalt $(1 - x^2)(1 - k^2x^2)\,Q(x)^2$ darstellbar sein (Q ein Polynom). Diese Bedingung reduziert sich auf Folgendes:

a) $V - U$ ist das Produkt aus $1 - x$ und dem Quadrat eines Polynoms;

b) die Änderung von x in $1/kx$ transformiert y in $1/\lambda y$:

$$\frac{U(1/kx)}{V(1/kx)} = \frac{V(x)}{\lambda U(x)}.$$

Jacobi erhielt Polynome, die diesen Bedingungen genügen, indem er sich der elliptischen Funktionen und ihrer doppelten Periodizität bediente:

$$U(x) = \frac{x}{M}\prod_r\left(1 - \frac{x^2}{\operatorname{sn}^2 r\omega}\right), \qquad V(x) = \prod_r\left(1 - k^2x^2\operatorname{sn}^2 r\omega\right),$$

$$M = (-1)^{(n-1)/2}\prod_r\left(\frac{\operatorname{sn}(K - r\omega)}{\operatorname{sn} r\omega}\right)^2, \qquad \lambda = k^n\prod_r\operatorname{sn}^4(K - r\omega)$$

mit

$$1 \leqq r \leqq \frac{n-1}{2} \quad \text{und} \quad \omega = 2\,\frac{mK + m'iK'}{n},$$

wobei m und m' ganze, zu n teilerfremde Zahlen sind. Ist $x = \operatorname{sn}(u, k)$, so gilt $y = \operatorname{sn}(u/M, \lambda)$, und das Gitter Γ_1 der Perioden von y wird durch das der Perioden von x und die neue Periode 2ω erzeugt. Jacobi ließ m und m' variieren und fand $\sigma_1(n)$ verschiedene Transformationen n-ter Ordnung (siehe oben), deren jede sich in aufeinanderfolgende Transformationen der Ordnung d und $n/d = d'$ (für einen passenden Teiler d von n) zerlegen läßt. Man kann sich auch auf den Fall beschränken, daß n eine Primzahl ist: Es gibt dann $n + 1$ Transformationen, die (m, m')

$= (0, 1)$ oder $(1, t)$ mit $0 \leqq t \leqq n - 1$ entsprechen (projektive Gerade $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{F}_n)$), von denen nur zwei reell sind. Die erste, $(m, m') = (1, 0)$, verkleinert den Modul und multipliziert den Quotienten K'/K mit n, während die zweite, $(m, m') = (0, 1)$, den Modul vergrößert und diesen Quotienten durch n dividiert. Also erhält man, wenn man die beiden reellen Transformationen hintereinander ausführt, das ursprüngliche Verhältnis K'/K zurück. Nun hängt der Modul k nur vom Periodenverhältnis ab (sn $(u/a, k)$ ist die elliptische Funktion, die aK und aK' entspricht, falls a eine Konstante ist); die zusammengesetzte Transformation reduziert sich also auf die Multiplikation von u mit einer Konstanten, und Jacobi zeigte, daß diese Konstante gleich n ist. Die Multiplikation mit n ist also aus zwei Transformationen n-ter Ordnung zusammengesetzt, und die Division durch n ist auf die Lösung zweier algebraischer Gleichungen n-ten Grades zurückgeführt, wie schon Abel bewiesen hatte: Seine Zwischenfunktion $\varphi_1(v)$ (siehe 7.1.7.) entsteht aus $\varphi(v)$ genau mit Hilfe der ersten reellen Transformation; man beweist die Beziehung

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = kM \sum_{r=0}^{n-1} \operatorname{sn}(u + 2r\omega),$$

indem man die Tatsache benutzt, daß die Summe der Wurzeln $x = \operatorname{sn}(u + 2r\omega)$ von $yV(x) - U(x) = 0$ gleich y/kM ist. Jacobi (in einer postum veröffentlichten Arbeit) und Abel (in seinem *Précis*) haben bewiesen, daß diese Gleichung n-ten Grades stets in Radikalen auflösbar ist.

Die Berechnung der Koeffizienten von U und V ist sehr schwierig. Jacobi wies (1829) ([34], Bd. I, S. 266–275) auf folgende Methode hin: Ist $X = \sqrt{k}\operatorname{sn}(u, k)$ und $Y = \sqrt{\lambda}\operatorname{sn}(u/M, \lambda)$, so gilt $Y = R(X)$, wobei R eine gebrochen rationale Funktion ist, für die $R(1/X) = 1/R(X)$ ist und deren Gestalt Jacobi mit

$$(-1)^{(n-1)/2} X^n \frac{P(1/X)}{P(X)}$$

angab; dabei ist $P(X) = \sum_r B^{(r)} X^{2r}$ ein gerades Polynom $(n - 1)$-ten Grades. Die partielle Differentialgleichung

$$n(n-1) X^2 P + (n-1)(\alpha X - 2X^3)\frac{\partial P}{\partial X} + (1 - \alpha X^2 + X^4)\frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = 2n(\alpha^2 - 4)\frac{\partial P}{\partial \alpha}$$

$(\alpha = k + (1/k))$ liefert eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten $B^{(r)}$; Kronecker hat (1886) ([44], Bd. IV, S. 389–471) diese Methode benutzt, um die arithmetische Natur der $B^{(r)}$ zu studieren, wobei er einige Resultate von Eisenstein über die lemniskatischen Funktionen auf alle elliptischen Funktionen übertrug.

Jacobi erklärte (1828) ([34], Bd. I, S. 266–275) die Wirkung einer Transformation auf die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung; es tritt dabei ein Zusatzterm algebraischer bzw. logarithmischer Natur auf. Er veröffentlichte seine Resultate aus der Theorie der Transformationen zwischen 1827 und 1829 in einer Artikelserie; ferner ist ihnen der erste Teil seiner *Fundamenta nova theoriae*

functionum ellipticarum (1829) ([34], Bd. I, S. 55—138) gewidmet. Dieselbe Theorie wurde unabhängig von Abel entwickelt (*Recherches sur les fonctions elliptiques*, 1828 ([33], Bd. I, S. 263—388), und *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, 1829 ([33], Bd. I, S. 518—617)). Abel definierte auch Transformationen erster Ordnung, $y = (ax + b)/(cx + d)$, die die sechs Werte des Doppelverhältnisses k^2 permutieren (ohne die absolute Invariante J—siehe 7.1.4. — zu ändern) und eine zu $\boldsymbol{PSL}(2, \boldsymbol{F}_2)$ isomorphe Gruppe bilden. Er betrachtete auch die Transformationen, bei denen y nur als algebraische Funktion von x vorausgesetzt wird (wie die Landensche Transformation), und noch allgemeiner die linearen Relationen zwischen beliebig vielen elliptischen Differentialformen, deren Variablen miteinander algebraisch verknüpft sind (modulo den Differentialen von Funktionen, die bezüglich dieser Variablen algebraisch-logarithmisch sind); er bewies, daß sich diese Relationen auf die von Jacobi betrachteten rationalen Transformationen zurückführen lassen. Schließlich bemerkte Abel, daß das Periodengitter Γ der elliptischen Funktion $x = \varphi(u)$, wenn diese sich in $y = \varphi_1(u/M)$ transformieren läßt, ein Teilgitter des Periodengitters von y ist. Die primitiven Perioden von x sind $\omega = a\omega_1 + b\omega_1'$, $\omega' = c\omega_1 + d\omega_1'$, wobei ω_1 und ω_1' diejenigen von y sind und a, b, c, d ganze Zahlen bezeichnen, und $|ad - bc| = n$ ist die Ordnung der Transformation (siehe oben). Sind umgekehrt die Perioden zweier elliptischer Funktionen φ, φ_1 auf diese Art verknüpft, so kann man (nach Liouville) zeigen, daß $\varphi_1(u/M) = P(\varphi) + Q(\varphi)\,\varphi'$ gilt, wobei P und Q rational sind und M eine passende Konstante ist; vermöge einer Translation von u in φ_1 bringt man Q zum Verschwinden und findet wieder eine rationale Transformation.

7.1.9. *Die Modulargleichung*

Die $n + 1$ Moduln λ, die sich aus einem Modul k durch die Transformationen n-ter Ordnung (n ungerade Primzahl) ergeben, sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $(n + 1)$-ten Grades, deren Koeffizienten Funktionen von k sind; diese Gleichung wird *Modulargleichung* genannt. Beispielsweise ist dies im Fall $n = 3$ die von Legendre gefundene Gleichung $\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} = 1$ (siehe 7.1.8.). Jacobi bemerkte, daß die Modulargleichung in k und λ symmetrisch ist und daß sie sich nicht ändert, wenn k und λ durch $1/k$ bzw. $1/\lambda$ oder durch k' bzw. λ' ersetzt werden; er schrieb diese Gleichung für $n = 3$ oder 5 als Funktion in $u = k^{1/4}$ und $v = \lambda^{1/4}$ auf. Für $n = 7$ hat die Modulargleichung die einfache Gestalt $\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} = 1$ (Gützlaff 1834; Sohncke hat 1836 die Modulargleichungen für alle Primzahlen n mit $n \leqq 19$ aufgestellt). Der „Multiplikator" M ist mit k durch eine Gleichung $(n + 1)$-ten Grades verknüpft; mit Hilfe der Differentialgleichung der Perioden (siehe 7.1.2.) zeigte Jacobi, daß

$$M^2 = \frac{1}{n} \frac{\lambda(1 - \lambda^2)}{k(1 - k^2)} \frac{dk}{d\lambda}$$

ist, woraus er die Multiplikatorgleichung durch Elimination von λ herleitete. Die Gleichung in $m = 1/M$ hat eine bemerkenswerte Eigenschaft, auf die Jacobi hin-

gewiesen hat: Es gibt $(n+1)/2$ Größen A und $A^{(r)}$ $\left(0 \leqq r \leqq (n-1)/2\right)$ derart, daß

$$\sqrt{m_\infty} = A\sqrt{(-1)^{(n-1)/2}\,n} \quad \text{und} \quad \sqrt{m_j} = \sum_r \alpha^{jr} A^{(r)}$$

ist, wobei α eine primitive n-te Einheitswurzel bezeichnet und m_∞, m_j $(0 \leqq j \leqq n-1)$ die Wurzeln der Gleichung sind ([34], Bd. I, S. 261). Kronecker hat (1886) einige arithmetische Eigenschaften der Multiplikatorgleichung bewiesen ([44], Bd. IV, S. 428–458).

In seinem *Lettre à Auguste Chevalier* (1832) hat Galois einige Ergebnisse über die Modulargleichung angegeben; ihre Gruppe (siehe 2.2.2.) ist $\boldsymbol{PGL}(2, \boldsymbol{F}_n)$, die $\boldsymbol{PSL}(2, \boldsymbol{F}_n)$ als Untergruppe vom Index 2 und von der Ordnung $n(n^2-1)/2$ besitzt. Im Fall $n = 5, 7$ oder 11 enthält $\boldsymbol{PSL}(2, \boldsymbol{F}_n)$ eine Untergruppe vom Index n, was für keinen anderen Wert von n gilt. Galois zog hieraus den Schluß, daß sich in diesen drei Fällen die Modulargleichung auf eine Gleichung n-ten Grades zurückführen läßt. Ein Beweis dafür wurde von Betti (1853) publiziert. Hermite hat (1858) ([36], Bd. II, S. 5–21) die Modulargleichung benutzt, um algebraische Gleichungen vierten und fünften Grades aufzulösen: Die allgemeine Gleichung vierten Grades läßt sich auf die Modulargleichung dritter Ordnung zurückführen (oder auf die Multiplikatorgleichung; das hängt mit dem Isomorphismus zwischen $\boldsymbol{PGL}(2, \boldsymbol{F}_3)$ und der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_4$ zusammen). Für die Gleichung fünften Grades benutzte Hermite die Bring-Jerrardsche Form $x^5 - x - a = 0$ (auf welche jede Gleichung fünften Grades durch Rechnungen zurückgeführt werden kann, in denen nur Quadrat- und Kubikwurzeln gezogen werden), und er zeigte, daß sie sich auf eine Modulargleichung fünfter Ordnung zurückführen läßt, wobei der Modul k Lösung von $k^4 + A^2k^3 + 2k^2 - A^2k + 1 = 0$ mit $A = (a/2)\,5^{5/4}$ ist. Kronecker und Brioschi (1858) ([44], Bd. IV, S. 41–62) legten eine andere Lösungsmethode für die Gleichung fünften Grades durch elliptische Funktionen vor: Den sechs zyklischen Untergruppen fünfter Ordnung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_5$ entsprechen sechs „zyklische Funktionen" der Wurzeln der allgemeinen Gleichung fünften Grades (jede dieser Funktionen besitzt eine der Untergruppen fünfter Ordnung als Stabilisator), und Kronecker zeigte, daß sich die Gleichung sechsten Grades, deren Wurzeln die Quadrate dieser Funktionen sind, auf die Multiplikatorgleichung der Transformation fünfter Ordnung zurückführen läßt. Mit Hilfe der Bettischen Formeln für die Operationen von $\mathfrak{S}_5$ über dem Körper $\boldsymbol{F}_5$ (dem Restklassenkörper modulo 5) zeigte übrigens Hermite (1866) ([36], Bd. II, S. 387), daß $\mathfrak{S}_5$ zu $\boldsymbol{PGL}(2, \boldsymbol{F}_5)$ isomorph ist. Kronecker interessierte sich auch für die Modulargleichung siebenter Ordnung und für die Gruppe $\boldsymbol{PSL}(2, \boldsymbol{F}_7)$, die einfach von der Ordnung 168 ist; er vermutete, daß jede algebraische Gleichung, die dieselbe Galoissche Gruppe besitzt, durch elliptische Funktionen gelöst werden könne. Diese Vermutung wurde von Klein (1879) bestätigt ([47], Bd. III, S. 13 bis 168, und Bd. II, S. 390–438). Ausgangspunkt der Kleinschen Arbeiten über die Modulfunktionen (siehe 7.1.16.) ist gerade das Studium der Hermiteschen und der Kroneckerschen Lösungsmethoden für die Gleichung fünften Grades und der Vergleich dieser Methoden mit seinen Arbeiten über das Ikosaeder. Klein bediente sich der Weierstraßschen Bezeichnungen und der Invariante J (siehe 7.1.4.) anstelle

des Legendreschen Moduls k; er faßte J als Funktion des Verhältnisses τ der primitiven Perioden auf (siehe 7.1.16.): Die Modulargleichung verknüpft $J_n = J(\tau/n)$ mit $J(\tau)$. Die Hilfsvariable τ gestattet es, die Verzweigung von J_n in Abhängigkeit von J und die Riemannsche Fläche dieser algebraischen Funktion zu untersuchen. Ohne jede Rechnung zeigte Klein so, daß diese Fläche vom „Geschlecht" 0 ist, d. h., daß man J und J_n als rationale Funktionen eines Parameters ausdrücken kann (siehe 7.2.5.), wenn $n = 2, 3, 5, 7$ oder 13 ist, wie F. Müller schon 1867 angegeben hatte: Für $n = 3$ ist

$$J = -\frac{(t-1)(9t-1)^3}{64t},$$

und J_n ergibt sich, wenn t durch $1/t$ ersetzt wird (vgl. in 7.1.8. die Legendreschen Formeln für die Transformation dritter Ordnung), während für $n = 5$

$$J = -\frac{(t^2-10t+5)^3}{1728t}$$

ist und J_n daraus durch Substitution von t durch $125/t$ folgt, usw. Der Parameter t ist durch eine einfache Beziehung mit dem Multiplikator verknüpft: Er ist gleich $-27M^6$, $-125M^3$, $49M^2$ bzw. $13M$ für $n = 3, 5, 7, 13$. Die Relation $MM' = 1/n$, welche die Multiplikatoren zweier zusätzlicher Transformationen verknüpft (deren Hintereinanderausführung die Multiplikation mit n bewirkt), äußert sich darin, daß man von J zu J_n übergeht, indem man t durch C/t mit $C = 1, 125, 49$ bzw. 13 ersetzt. Für $n = 11$, 17 und 19 zeigte Klein, daß sich J und J_n durch elliptische Funktionen eines Parameters ausdrücken lassen. Die Galoissche Resolvente der Modulargleichung (also der Gleichung, von der eine Wurzel einen Körper erzeugt, der alle Wurzeln der Modulargleichung enthält) ergibt nur für $n = 2, 3, 4$ und 5 eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0; die entsprechenden Galoisschen Gruppen sind die Isometriegruppen des Dieders und der regulären Polyeder (Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder) ([47], Bd. III, S. 52—64). Klein gab (1881) eine Parameterdarstellung der Galoisschen Resolvente für beliebiges ungerades n an, und zwar als Kurve im projektiven Raum der Dimension $(n-3)/2$; die homogenen Koordinaten sind die $A^{(r)}$, die in dem von Jacobi angegebenen Ausdruck für die Wurzeln der Multiplikatorgleichung (siehe oben) auftreten ([47], Bd. III, S. 186—197).

7.1.10. *Entwicklung elliptischer Funktionen in unendliche Reihen und Produkte*

Die elliptischen Funktionen sind auf $\boldsymbol{C}$ *meromorph* (im Gegensatz zu den Kreisfunktionen, welche *ganze* Funktionen sind), und ihre Taylorentwicklungen konvergieren nicht überall. Jacobi (*Fundamenta*) ([34], Bd. I, S. 169) erarbeitete eine Methode zur Berechnung der Taylorreihe der Funktion $\operatorname{sn} u$ und ihrer Potenzen.

Der Koeffizient von u^{2n+1} in der Entwicklung von sn u ist der Wert von

$$\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x)^{-n-1}$$

an der Stelle $x = 0$, wobei

$$\varphi(x) = \sum_{m\geqq 0}\frac{1}{2m+1}\frac{1}{m!}\left(\frac{kx}{2}\right)^m\frac{d^m}{dr^m}(r^2-1)^m \quad \text{mit} \quad r = \frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)$$

gilt. Also ist

$$\operatorname{sn} u = u - (1+k^2)\frac{u^3}{3!} + (1+14k^2+k^4)\frac{u^5}{5!} - \cdots;$$

die Koeffizienten sind Polynome in k^2 (mit rationalen Koeffizienten). Gudermann hat (1838) bemerkt, daß sich sn u von $(1/\sqrt{1+k^2})\sin(u\sqrt{1+k^2})$ nur um Terme fünfter Ordnung unterscheidet, während man cn u durch $\cos u$ und dn u durch $\cos ku$ bis auf Terme vierter Ordnung ersetzen kann. Für die Weierstraßsche $\wp$-Funktion lautet der Anfang der Laurententwicklung

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \cdots.$$

Die meisten der Entwicklungen elliptischer Funktionen, die Abel und Jacobi (wieder) entdeckt haben, sind schon in den Arbeiten von Gauß Ende des achtzehnten Jahrhunderts zu finden (die erst 1868 in seinen gesammelten Werken veröffentlicht wurden). Gauß bildet unendliche Produkte und Reihenentwicklungen für die lemniskatischen Funktionen mit Hilfe ihrer Nullstellen und ihrer Pole (vgl. die Entwicklung von $\sin u$ in ein unendliches Produkt durch Euler; 1.4.1.); ferner entwickelte er sie in trigonometrische Reihen, z.B.

$$\operatorname{sl}\left(\frac{\varphi\tilde{\omega}}{\pi}\right) = \frac{4\pi}{\tilde{\omega}}\left(\frac{\sin\varphi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}} - \frac{\sin 3\varphi}{e^{3\pi/2}+e^{-3\pi/2}} + \cdots\right),$$

was man auch als Quotient der beiden Reihen

$$2^{3/4}\sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\omega}}}\,(e^{-\pi/4}\sin\varphi - e^{-9\pi/4}\sin 3\varphi + \cdots)$$

und

$$2^{-1/4}\sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\omega}}}\,(1 + 2e^{-\pi}\cos 2\varphi + 2e^{-4\pi}\cos 4\varphi + \cdots)$$

schreiben kann. Aus diesen Entwicklungen folgt

$$\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\pi}} = 1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - 2e^{-9\pi} + \cdots$$
$$= 2(e^{-\pi/4} + e^{-9\pi/4} + e^{-25\pi/4} + \cdots);$$

nun hatte Gauß (schon 1794) beobachtet, daß im Fall

$$p(x) = 1 + 2\sum_{n\geqq 1}x^{n^2} \quad \text{und} \quad q(x) = 1 + 2\sum_{n\geqq 1}(-1)^n x^{n^2}$$

die Beziehungen

$$p(x)^2 + q(x)^2 = 2p(x^2)^2 \quad \text{und} \quad p(x)\, q(x) = q(x^2)^2$$

gelten. Folglich liefert der Algorithmus zur Berechnung des arithmetisch-geometrischen Mittels:

$$M\big(p(x)^2, q(x)^2\big) = 1 \quad \text{für} \quad |x| < 1 \,.$$

Allgemeiner gilt $M(a, b) = \mu$ für $a = \mu p(x)^2$ und $b = \mu q(x)^2$. Gauß schloß die Berechnung ab, indem er $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ und für jedes n

$$c^{(n+1)} = \frac{1}{2}\,(a^{(n)} - b^{(n)}) = \big((a^{(n+1)})^2 - (b^{(n+1)})^2\big)^{1/2}$$

einführte; ist $r(x)^4 = p(x)^4 - q(x)^4$, so ergibt sich

$$c = \mu r(x)^2 \quad \text{und} \quad c^{(n)} = \mu r(x^{2^n})^2 \,,$$

so daß $2r(x^4) = p(x) - q(x)$ (bei $n = 2$) und $r(x) = 2 \sum_{n \geqq 0} x^{(n+(1/2))^2}$ ist. Umgekehrt kann man x bestimmen, indem man von a und b ausgeht, denn es ist

$$x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\, r(x^{2^n})^{1/2^{n-2}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c^{(n)}}{4a^{(n)}}\right)^{1/2^{n-1}} = \exp\left(-\pi \frac{M(a, b)}{M(a, c)}\right).$$

Gauß berechnete diesen Grenzwert mit Hilfe der Beziehung

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M(1, \varepsilon) \log 4/\varepsilon = \pi/2 \,,$$

die er erhielt, als er von der Eulerschen Entwicklung (0) — vgl. 7.1.2. — für die Bogenlänge der Ellipse ausging (den Beweis findet man in seinen Arbeiten nicht). Diese Theorie brachte Gauß auf die Idee, seine Resultate über die lemniskatischen Funktionen auf den allgemeinen Fall der elliptischen Funktion $Su = \sin\varphi$, der Umkehrfunktion zu

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \mu^2 \sin^2 \varphi}} \,,$$

zu übertragen. Gauß war sich der Schwierigkeiten bewußt, die im „mehrwertigen" Charakter des Integrals liegen, und er definierte Su indirekt, nämlich mit Hilfe der trigonometrischen Reihe

$$S\left(\varphi \frac{\tilde\omega}{\pi}\right) = \frac{4\pi}{\mu\tilde\omega}\left(\frac{\sin\varphi}{e^{\tilde\omega'\pi/2\tilde\omega} + e^{-\tilde\omega'\pi/2\tilde\omega}} - \frac{\sin 3\varphi}{e^{3\tilde\omega'\pi/2\tilde\omega} + e^{-3\tilde\omega'\pi/2\tilde\omega}} + \cdots\right)$$

(dem Analogon zu der von sl u); dabei ist

$$\tilde\omega = \frac{\pi}{M\big(1, \sqrt{1 + \mu^2}\big)} \quad \text{und} \quad \tilde\omega' = \frac{\pi}{\mu M\big(1, \sqrt{1 + (1/\mu^2)}\big)} \,.$$

Er formte diese Reihe wie im Fall sl u in einen Quotienten $Su = Tu/Wu$ zweier stets konvergenter trigonometrischer Reihen um; dabei gilt

$$T\left(\frac{\varphi\tilde{\omega}}{\pi}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\omega}}}\sqrt[4]{\frac{1}{\mu^2(1+\mu^2)}}\, 2(e^{-\tilde{\omega}'\pi/4\tilde{\omega}}\sin\varphi - e^{-9\tilde{\omega}'\pi/4\tilde{\omega}}\sin 3\varphi + \cdots)\,,$$

$$W\left(\frac{\varphi\tilde{\omega}}{\pi}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{\omega}}}\sqrt[4]{\frac{1}{1+\mu^2}}\,(1 + 2e^{-\tilde{\omega}'\pi/\tilde{\omega}}\cos 2\varphi + 2e^{-4\tilde{\omega}'\pi/\tilde{\omega}}\cos 4\varphi + \cdots)\,.$$

Schließlich kam Gauß zu der Feststellung ([32], Bd. X¹, S. 194–208), daß Su tatsächlich die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals ist (1800, nach seinem *Tagebuch;* der Beweis ist in einer Aufzeichnung aus dem Jahre 1825 enthalten). Gauß formte die Reihen T und W in unendliche Produkte um, aus denen man die Nullstellen ablesen konnte; er ging auf eine formale Art vor ([32], Bd. III, S. 433 bis 469), indem er

$$\prod_{n\geqq 0}(1+\alpha x^{2n+1})\left(1+(x^{2n+1}/\alpha)\right) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(x)\,\alpha^n$$

ansetzte und beachtete, daß das Produkt auf der linken Seite mit

$$\left(1+(1/\alpha x)\right)(1+\alpha x)^{-1}$$

multipliziert wird, wenn man dort α durch αx^2 ersetzt, was

$$a_n(x) = a_{-n}(x) = a_0(x)\,x^{n^2}$$

ergibt. Schließlich findet man

$$a_0(x) = \prod_{n\geqq 1}(1-x^{2n})^{-1}\,,$$

wenn $\alpha = -1$ gesetzt und die Beziehung $q(x) = \prod_{n\geqq 1}(1-x^n)^2(1-x^{2n})^{-1}$ benutzt wird, für die Gauß mehrere Beweise geliefert hat.[1]) So ist

$$1 + \sum_{n\geqq 1} x^{n^2}(\alpha^n + \alpha^{-n}) = \prod_{n\geqq 1}(1-x^{2n})\prod_{n\geqq 0}(1+\alpha x^{2n+1})\left(1+(x^{2n+1}/\alpha)\right), \tag{11}$$

eine *fundamentale Identität,* die Jacobi später (1828) wiedergefunden hat.[2]) Gauß verwendete in der darauffolgenden Zeit die Bezeichnungen

$$P(x,y) = 1 + \sum_{n\geqq 1} x^{n^2}(y^n + y^{-n})\,,$$

$$Q(x,y) = \quad + \sum_{n\geqq 1}(-1)^n x^{n^2}(y^n + y^{-n})\,,$$

$$R(x,y) = \sum_{n\geqq 0} x^{(n+(1/2))^2}(y^{n+(1/2)} - y^{-n-(1/2)})\,,$$

$$S(x,y) = \sum_{n\geqq 0}(-1)^n x^{(n+(1/2))^2}(y^{n+(1/2)} - y^{-n-(1/2)})\,.$$

---

[1]) Diese Beziehung ist mit der Eulerschen Identität (1750)

$$\prod_{n\geqq 1}(1-x^n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n x^{n(3n+1)/2} \qquad \text{(siehe 7.1.11.)}\,,$$

verwandt.

[2]) Jacobi schrieb an Fuss, daß diese Identität „wohl das für die reine Mathematik wichtigste und fruchtbarste war, was er entdeckt hat".

Diese vier Funktionen entsprechen den später von Jacobi eingeführten Thetafunktionen; für sie gilt

$$P(x, 1) = p(x)\,, \quad Q(x, 1) = q(x)\,, \quad R(x, 1) = r(x)\,, \quad S(x, 1) = 0\,.$$

Die obige Methode, angewandt auf die unendlichen Produkte für $P(x, y)^2$ und $Q(x, y)^2$, lieferte Gauß die Identitäten

$$P(x, y)^2 + Q(x, y)^2 = 2p(x^2)\, P(x^2, y^2)$$

und

$$P(x, y)\, Q(x, y) = q(x^2)\, Q(x^2, y^2)$$

(sowie andere analoge Formeln, die die Transformation zweiter Ordnung ausdrücken). Gauß erhielt hieraus (1809) einen zu dem für das arithmetisch-geometrische Mittel analogen Algorithmus, der die Berechnung solcher x und y gestattet, für welche $a = \mu p(x)^2$, $b = \mu q(x)^2$, $A = HP(x, y)^2$ und $B = HQ(x, y)^2$ gegeben seien (die Konstanten μ und H werden durch den Algorithmus geliefert).

In einer Aufzeichnung von 1808 ([32], Bd. III, S. 436—445) ist die Umformung von $P(x, y)$ in ein Doppelprodukt zu finden:

$$\begin{aligned} &P(e^{-i\pi\omega'/\omega}, e^{i\pi u/\omega}) \\ &= \prod_{n\geqq 1} (1 - e^{-2ni\pi\omega'/\omega}) \prod_{n\geqq 0} (1 + e^{-(2n+1)i\pi\omega'/\omega}) \prod_{m, m'} \left(1 - \frac{u}{m\omega + m'\omega'}\right) \end{aligned}$$

(m, m' ganzzahlig, ungerade) mit reellem ω und rein imaginärem ω'. Die Konvergenz des Doppelprodukts wurde eingehend von Eisenstein untersucht (1847; vgl. 7.1.11.). Die Arbeiten von Gauß ([32], Bd. III, S. 361—469; Bd. VIII, S. 93—117; Bd. X[1], S. 145—325), die bis 1868 unveröffentlicht blieben, enthalten unter anderem die Theorie der Transformationen dritter, fünfter und siebenter Ordnung, die durch die Substitution von x durch x^3, x^5 bzw. x^7 in den oben genannten Funktionen P, Q, R und S definiert sind; die entsprechenden Modulargleichungen sind angegeben. Der Beweis dieser Gaußschen Formeln wurde von W. Göring geführt (*Untersuchungen über die Theilwerthe* . . ., Math. Ann. 7, 1874).

Abel und Jacobi erhielten die Entwicklungen der elliptischen Funktionen in unendliche Produkte und „einfache Elemente“, indem sie, ausgehend von der Multiplikations- oder der Transformationsformel, den Grenzübergang vornahmen. Abel ([33], Bd. I, S. 323—351) setzte $u = nv$ (1827) und bemerkte (wir verwenden seine Bezeichnungen; vgl. 7.1.5.), daß das Produkt (bzw. die Summe) der Wurzeln von $R_n(x) = \varphi(u)$ (wobei n eine ungerade ganze Zahl und R_n die gebrochen rationale Funktion bezeichnet, für die $\varphi(nv) = R_n(\varphi(v))$ ist) die Gestalt $A\varphi(u)$ (bzw. $B\varphi(u)$) mit von u unabhängigem A (bzw. B) besitzt. Benutzt man den Ausdruck (10) für die Wurzeln (vgl. 7.1.7.) und läßt man n gegen ∞ streben, so findet man eine Entwicklung von $\varphi(u)$ in ein unendliches Doppelprodukt (bzw. eine Doppelreihe), die von Abel in ein einfaches Produkt (bzw. eine trigonometrische Reihe) umgeformt wurde, wozu er die Reihe für $\sin x$ benutzte. Die Abelsche Beweisführung für den Grenzübergang ist außerordentlich scharfsinnig.

Jacobi (1828) ([34], Bd. I, S. 141 und 224) nahm den Modul k als fest an; die erste reelle Transformation n-ter Ordnung (vgl. 7.1.8.) führte auf einen Modul λ_n, der für $n \to \infty$ gegen 0 strebt, und der Multiplikator M_n ist zu $2K/\pi n$ äquivalent. Die zweite reelle Transformation führt von λ_n zu k und drückt $\operatorname{sn}(u, k)$ als Funktion von $\operatorname{sn}(u/nM_n, \lambda_n)$ durch ein Produkt oder eine Reihe (vgl. 7.1.8.) aus; Jacobi ließ n gegen ∞ streben (ohne diese Operation zu begründen): $\operatorname{am}(v, \lambda_n)$ strebt dann gegen v und $\operatorname{sn}(\pi u/nM_n, \lambda_n)$ gegen $\sin(\pi u/2K)$. Jacobi erhielt so Entwicklungen von $\operatorname{sn} u$ in ein (einfaches) unendliches Produkt und in eine (einfache) Reihe und führte dasselbe für die anderen elliptischen Funktionen

$$\operatorname{cn} u\,, \qquad \operatorname{dn} u\,, \qquad \sqrt{\frac{1-\operatorname{sn} u}{1+\operatorname{sn} u}}\,, \qquad \sqrt{\frac{1+k\operatorname{sn} u}{1-k\operatorname{sn} u}}$$

durch; seine Bezeichnungen sind

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(u)}{\Theta(u)}\,, \qquad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H_1(u)}{\Theta(u)}\,, \qquad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(u)}{\Theta(u)}$$

mit

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \Theta(0) \prod_{n\geqq 1} (1 - 2q^{2n-1}\cos 2x + q^{4n-2})\,(1-q^{2n-1})^{-2}\,,$$

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\Theta(0)\sqrt[4]{q}\,\sin x \prod_{n\geqq 1} (1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n})\,(1-q^{2n-1})^{-2}\,,$$

$$\Theta_1(u) = \Theta(K-u)\,, \qquad H_1(u) = H(K-u) \quad \text{und} \quad q = e^{-\pi K'/K}\,.$$

Die Funktionen Θ und H besitzen $2K$ bzw. $4K$ als Periode, aber sie haben keine zweite Periode, denn es ist

$$\Theta(u + iK') = i\,e^{-i\pi u/2K}\,q^{-1/4}H(u)\,,$$

$$\Theta(u + 2iK') = -e^{-i\pi u}\,q^{-1}\Theta(u)\,.$$

Diese Gleichung gestattet es, die Fourierkoeffizienten von Θ zu berechnen (man wählt $\Theta(0)$ so, daß der erste dieser Fourierkoeffizienten gleich 1 ist):

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 + 2 \prod_{n\geqq 1} (-1)^n\,q^{n^2}\cos 2nx\,,$$

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2 \prod_{n\geqq 0} (-1)^n\,q^{(n+(1/2))^2}\sin(2n+1)\,x\,.$$

Das sind Entwicklungen, die wieder die Gaußsche Identität (11) ergeben. Also ist

$$\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}, q\right) = Q(q, e^{2ix}) \quad \text{und} \quad H\left(\frac{2Kx}{\pi}, q\right) = -iS(q, e^{2ix})\,,$$

wobei Q und S die oben eingeführten Gaußschen Funktionen sind. Jacobi fand

$$\Theta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = \prod_{n\geqq 1}\frac{1-q^n}{1+q^n} = 1 + 2\sum_{n\geqq 1}(-1)^n q^{n^2}$$

und schloß hieraus auf

$$H(K) = \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2 \sum_{n \geqq 0} q^{(n+(1/2))^2}$$

und

$$\Theta(K) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2 \sum_{n \geqq 1} q^{n^2}$$

(wegen cn 0 = dn 0 = 1). Folglich gilt

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)} \quad \text{und} \quad \sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta(K)},$$

wodurch der Modul als Funktion von q (also von K'/K) ausgedrückt wird.

Die Transformationen n-ter Ordnung entsprechen der Änderung von q in $q^{d'/d}$ mit $n = dd'$ (die d-te Wurzel hat d Werte); ist n eine Primzahl, so hat man nur q^n und $q^{1/n}$. Jacobi zeigte (indem er in dem unendlichen Produkt jeden Faktor $X^m - 1$ in Faktoren ersten Grades zerlegte), daß

$$\prod_{r=0}^{n-1} \Theta\left(u + \frac{4Kr}{n}, q\right) = C\Theta(nu, q^n) \qquad (C = \text{const})$$

gilt, und er fand eine analoge Formel für H. Er leitete daraus die Beziehung

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = (-1)^{(n-1)/2} \sqrt{\frac{k^n}{\lambda}} \prod_{r=0}^{n-1} \operatorname{sn}\left(u + \frac{4Kr}{n}\right)$$

für die erste reelle Transformation her (die man auch aus dem Produkt der Wurzeln von $yV(x) - U(x) = 0$ erhält; vgl. 7.1.8.). Die Beziehung für die „imaginäre Transformation" (die die Perioden vertauscht) lautet

$$\Theta(iu, q) = \sqrt{\frac{K}{K'}}\, e^{\pi u^2/4KK'}\, H_1(u, q')$$

mit $q = e^{-\pi K'/K}$ und $q' = e^{-\pi K/K'}$.

Jacobi gewann die Fourierentwicklung elliptischer Funktionen nach der reellen Periode aus den unendlichen Produkten, indem er die logarithmische Ableitung bildete. Er integrierte die Entwicklung von $\operatorname{sn}^2 u$ und fand, daß die logarithmische Ableitung $Z(u)$ von $\Theta(u)$ gleich $E(\varphi) - (E/K)\, F(\varphi)$ ist, wenn $\varphi = \operatorname{am} u$ bedeutet, d. h. wenn $u = F(\varphi)$ ist (E bezeichnet hier das vollständige Integral zweiter Gattung). Jacobi integrierte das Additionstheorem für die Integrale zweiter Gattung und erhielt damit einen äußerst bemerkenswerten Ausdruck für die Integrale dritter Gattung (laut Galois „die schönste Entdeckung von Herrn Jacobi"):

$$\begin{aligned} \Pi(u, a) &= k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 t\, dt}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 t} \\ &= uZ(a) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - a)}{\Theta(u + a)}. \end{aligned}$$

Hier ist offensichtlich, daß man Parameter und Argument vertauschen kann:

$$\Pi(u, a) - \Pi(a, u) = uZ(a) - aZ(u)$$

([34], Bd. I, S. 199). Die Integration der Ableitung $d\Pi/du$ bezüglich a ergibt

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u = \Theta(0)^2 \frac{\Theta(u+a)\,\Theta(u-a)}{\Theta(a)^2\,\Theta(u)^2}.$$

Jacobi hat (1829) ([34], Bd. I, S. 297–318) auch analoge Beziehungen angegeben, indem er $Z(u)$ durch das Legendresche Integral E zweiter Gattung und $\Theta(u)$ durch die Funktion Ω ersetzte, für die $\frac{\Omega'(u)}{\Omega(u)} = E(\varphi)$, $\varphi = \operatorname{am} u$, und $\Omega(0) = 1$ gilt; diese Funktion ist nicht periodisch, aber sie ist für die Untersuchung von Transformationen geeignet. Es ist $\Theta(u) = \Theta(0)\, e^{-Eu^2/2K}\, \Omega(u)$; allgemein besitzt die Funktion $\chi(u) = e^{ru^2}\, \Omega(u)$ die Periode $4Q$ mit $Q = mK + m'iK$ $(m, m' \in \mathbf{Z})$, wenn $r = \frac{m'i\pi}{4KQ} - \frac{E}{2K}$ ist (dies resultiert aus der Legendreschen Beziehung (6) von 7.1.4. für die Perioden; die imaginäre Transformation entspricht $Q = iK'$). Die logarithmische Ableitung von χ ist $E(\varphi) + 2rF(\varphi)$, und es gilt

$$\Pi(u, a) = \frac{\chi'(a)}{\chi(a)}\, u + \frac{1}{2} \log \frac{\chi(u-a)}{\chi(u+a)}$$

und

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u = \frac{\chi(u+a)\,\chi(u-a)}{\chi(a)^2\,\chi(u)^2}.$$

Bei einigen Problemen aus der Mechanik des starren Körpers (Poinsot-Bewegung, Rotation eines in einem Punkt seiner Achse unterstützten schweren starren Körpers) hat Jacobi (1849) gezeigt ([34], Bd. II, S. 289–352), daß die Eulerschen Winkel Summen elliptischer Integrale dritter Gattung sind:

$$\int_0^{\varphi} \frac{c + e \sin^2 \theta}{a + b \sin^2 \theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = fu + \frac{1}{g} \log \frac{\chi(u+\alpha)}{\chi(u-\alpha)},$$

mit $\varphi = \operatorname{am} u$, u eine lineare Funktion der Zeit, und einem „Divisor" g, der gleich $2i$ ist. Daraus leitete er einen einfachen Ausdruck für den Sinus und den Kosinus der Eulerschen Winkel mit Hilfe der Thetareihe her, deren (wie er sagte) „außerordentliche" Konvergenz die Berechnung erleichterte. Hierdurch erwachte Jacobis Interesse für die Berechnung des Divisors eines elliptischen Integrals dritter Gattung. Jacobi gab dafür eine einfache Beziehung und ferner kanonische Formen mit dem Divisor 2 bzw. $2i$ an.

Mit Hilfe der Cauchyschen Residuentheorie gelangt man zu den Entwicklungen der elliptischen Funktionen auf eine viel weniger komplizierte Art als die von Abel und Jacobi. Angewandt wurde diese Methode von Briot und Bouquet (1859) ([39], Buch IV, Kapitel 1 bis 4) und von Riemann (Vorlesungen aus den Jahren 1861 bis 1862, veröffentlicht 1899 von Stahl ([40], Abschnitt III, § 9)).

7.1.11. Die Thetafunktionen

Solche Reihen wie Θ und H, in denen der Exponent von q ein quadratisches Polynom des Summationsindex n ist, hat Jacobi (nach Gauß) benutzt, um eine globale analytische Darstellung elliptischer Funktionen zu erhalten; sie sind Gegenstand des zweiten Teils seiner *Fundamenta*. Man war diesen Reihen jedoch schon in anderem Zusammenhang begegnet; das erste Beispiel findet man in der *Ars conjectandi* von Jakob Bernoulli. Euler hat mehrere solcher Reihen im Zusammenhang mit zahlentheoretischen Problemen betrachtet (siehe Kapitel 5). Insbesondere hat er 1750 die berühmte Identität

$$\prod_{n\geqq 1} (1 - q^n) = \prod_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n q^{n(3n+1)/2}$$

bewiesen, die er schon 1741 vermutet hatte und deren linke Seite mit dem Problem der Partitionen ganzer Zahlen zusammenhängt (siehe 5.2.3.). Jacobi interpretierte diese Beziehung folgendermaßen:

$$q^{1/24} \prod_{n\geqq 1} (1 - q^n) = \sqrt[3]{2}\, (kk'^4)^{1/12} \sqrt{\frac{K}{\pi}}$$

([34], Bd. I, S. 146). Euler hatte auch die Reihe $p(x) = 1 + 2 \sum_{n\geqq 1} x^{n^2}$ schon 1748 betrachtet und vermutet, daß ihre Eigenschaften auf den natürlichsten Beweis des Fermatschen Satzes über die Zerlegung in eine Summe von vier Quadraten führen müßten (dieser Beweis wurde von Jacobi 1829 angegeben; siehe 7.1.15.). Poisson und Fourier waren auf derartige Reihen schon im Zusammenhang mit der Theorie der Wärmeleitung gestoßen; der (eindimensionalen; vgl. Kapitel 8) Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ genügt die Funktion $u(x, t) = P(e^t, e^x)$ (P ist die Gaußsche Funktion). Jacobi hatte diese Gleichung für seine Funktionen $\Theta(2Kx/\pi)$ und $H(2Kx/\pi)$ (mit $t = K'/K$ und $a = 4/\pi$) wiederentdeckt ([34], Bd. I, S. 259). Wir werden später (in 7.1.15.) einige Anwendungen der Theorie der Thetafunktionen in der Zahlentheorie erwähnen.

In einer Vorlesung aus dem Jahre 1838 (von Borchardt 1881 publiziert) ([34], Bd. I, S. 499–538) hat Jacobi a priori die Theorie der Thetafunktionen aufgebaut und aus ihr die der elliptischen Funktionen entwickelt; es sei erwähnt, daß Gauß schon 1800 so vorgegangen war (vgl. 7.1.10.). Die allgemeine Thetareihe $\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{an^2+2bn+c}$ läßt sich, wenn man $q = e^a$ und $x = -ib$ setzt, auf eine der folgenden, in den *Fundamenta* anzutreffenden vier Reihen zurückzuführen:

$$\vartheta(x) = \sum_n (-1)^n q^{n^2} e^{2nix} = \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right),$$

$$\vartheta_1(x) = \sum_n i^{2n+1} q^{(n+(1/2))^2} e^{(2n+1)ix} = H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right),$$

$$\vartheta_2(x) = \sum_n q^{(n+(1/2))^2} e^{(2n+1)ix} = H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right),$$

$$\vartheta_3(x) = \sum_n q^{n^2} e^{2nix} = \Theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right).$$

Jacobi stellte ein System linearer Beziehungen zwischen Produkten der vier Thetareihen auf, z.B.

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta_2^2(x) + \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(x) = \vartheta_2^2(0)\,\vartheta^2(x)\,,$$

$$\vartheta^4(0) + \vartheta_2^4(0) = \vartheta_3^4(0)\,,$$

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta_3^2(x) + \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1^2(x) = \vartheta_3^2(0)\,\vartheta^2(x);$$

er setzte

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \quad \text{und} \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)},$$

so daß $k^2 + k'^2 = 1$ ist. Unter der Voraussetzung, daß q reell ist (und $|q| < 1$, um die Konvergenz zu sichern), sind k und k' reell und kleiner als 1; man definiert eine stetige Funktion $\varphi(x)$ durch

$$\varphi = 0 \quad \text{für} \quad x = 0\,,$$

$$\sqrt{k}\sin\varphi = \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi = \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}$$

und erhält

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}.$$

Für reelle x ist φ reell und $\Delta\varphi > 0$; andere Relationen ergeben ein algebraische Additionstheorem für $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und $\Delta\varphi$, und man erkennt, daß

$$x = C\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad \text{mit} \quad C = \frac{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1'(0)} = \left(\vartheta_3(0)\right)^{-2}$$

ist. Jacobi zeigte dann (mit Hilfe der Transformation vierter Ordnung $q \mapsto q^4$ und ihrer Iterierten), daß $\varphi = \pi/2$ für $x = \pi/2$ gilt, was auf

$$C = \frac{\pi}{2K} \quad \text{mit} \quad K = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

führt; schließlich ist $\frac{K}{K'}\log q$ gegenüber $q \mapsto q^4$ invariant, und Jacobi schloß hieraus wie Gauß auf $q = e^{-\pi K'/K}$ (siehe 7.1.10.; K' bezeichnet das zum Modul k' gehörige vollständige Integral). Der so erhaltene Ausdruck für q als Funktion von k $(0 < k < 1)$ gestattet die Lösung des Umkehrproblems: Die Theorie der Thetafunktionen liefert φ als Funktion von x, wenn q bekannt ist. Weierstraß hat (1883) gezeigt ([43], Bd. II, S. 257—309), wie diese Methode für die Lösung des Umkehrproblems im Fall eines beliebigen (komplexen) Moduls k verwendet werden kann.

Die Idee, die Theorie der elliptischen Funktionen aus der der Thetafunktionen zu entwickeln, war um die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts mehreren Mathematikern geläufig. Sie ist in verschiedenen Fassungen bei Eisenstein (1844, 1847), Cayley (1845), Hermite (1848), Schläfli (1850) und Riemann (1855) anzutreffen. Eisenstein und Cayley gingen von Doppelprodukten aus, analog denen, die Gauß schon bei seiner Funktion P (siehe 7.1.10.) gefunden hatte. Die Cayleysche Theorie ist vom gleichen Typ wie die Eisensteinsche, geht aber nicht so weit. Eisenstein ([38], Bd. I, S. 370–478) zeigte, daß sich der Wert des nicht-absolut konvergenten Produkts $\prod_{w \in \Gamma} \left(1 - (x/(w+z))\right)$ (Γ ist das Periodengitter) mit

$$\exp\left(-(a - bz)\, x - (bx^2/2)\right)$$

multipliziert, wenn man in dem Produkt die Anordnung der Faktoren ändert; dabei sind a und b die (additiven) Änderungen, die in $\sum_w (1/w)$ bzw. $\sum_w (1/w^2)$ bei einer gewissen Änderung der Reihenfolge der Glieder entstehen (siehe 7.1.6.). Insbesondere wird

$$\lim_{s\to\infty} \lim_{r\to\infty} \prod_{\substack{|m|\leqq r \\ |n|\leqq s}} \left(1 - \frac{x}{m\omega + n\omega' + z}\right) = f(x, z)$$

bei der Translation $-(\lambda, \nu)$ des Index (m, n) mit $\exp\left(-2\delta\nu(\pi i x/\omega)\right)$ multipliziert, wobei $\delta = \operatorname{sgn} \operatorname{Im}(\omega/\omega')$ ist (ω, ω' sind die primitiven Perioden); das betrachtete Produkt $f(x, z)$ ist also eine periodische Funktion von z mit der Periode ω. Eisenstein brachte $f(x, z)$ auf die Gestalt

$$\frac{\theta(e^{i\pi(x-z)/\omega})}{\theta(e^{-i\pi z/\omega})},$$

mit einem einfachen Produkt

$$\theta(\zeta) = (\zeta - \zeta^{-1}) \prod_{n\geqq 1} (1 - q^{2n}\zeta^2)(1 - q^{2n}\zeta^{-2});$$

dabei ist $q = e^{-\delta\pi i\omega'/\omega}$. Für ganzzahliges h ist

$$\theta(q^h\zeta) = (-1)^h q^{-h^2}\zeta^{-2h}\theta(\zeta).$$

Eisenstein betrachtete außerdem die Funktion

$$\varphi(x) = x \prod_{(m,n)\neq(0,0)} \left(1 - \frac{x}{m\omega + n\omega'}\right) = \lim_{z\to 0} \left(-z f(x, z)\right)$$

mit $f(x, z) = \varphi(z - x)/\varphi(z)$; bis auf einen nur von q abhängenden Faktor ist dies die Jacobische Funktion H. Die Funktion $z \mapsto f(\omega/2, z)$ ist eine elliptische Funktion mit den Perioden ω und $2\omega'$.

Hermite ([36], Bd. II, S. 139) versuchte, die elliptischen Funktionen mit den Perioden ω und ω' als Quotient zweier Funktionen mit der Periode ω darzustellen; ein solcher Quotient besitzt tatsächlich die Periode ω', wenn sein Zähler und sein Nenner der Gleichung

$$\phi(u + \omega') = \phi(u) \exp\left(-mi\pi(2u + \omega')/\omega\right)$$

mit einer ganzen Zahl m genügen. Hiermite hatte diese Gleichung schon 1844 (vgl. einen Brief an Jacobi) betrachtet ([34], Bd. II, S. 97—107), und er hatte im Grunde bewiesen, daß die holomorphen Funktionen ϕ (mit der Periode ω), welche dieser Gleichung genügen, einen m-dimensionalen Vektorraum bilden und daß sie sich durch Thetafunktionen ausdrücken lassen; für $m = 2$ beispielsweise sind die Funktionen ϕ Linearkombinationen von Θ und H. Dieses Resultat gestattete es Hermite, die Transformationen mit Hilfe der schon von Gauß für Transformationen zweiter Ordnung verwendeten Methoden zu untersuchen und Formeln vom Typ

$$\mathrm{sn}^2\, x - \mathrm{sn}^2\, a = C \frac{H(x+a)\, H(x-a)}{\Theta^2(x)} \qquad (C = \mathrm{const})$$

aufzustellen; hieraus kann man mit Hilfe von Θ den Ausdruck für $1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\, a\, \mathrm{sn}^2\, x$ (siehe 7.1.10.) und die Jacobische Formel für das Integral dritter Gattung herleiten. Hermite zeigte (1862) ([36], Bd. II, S. 196—198), indem er in dieser Beziehung den Parameter a gegen null streben ließ, daß

$$Z(u) = tu - \int_0^u k^2\, \mathrm{sn}^2\, x\, dx$$

gilt; er berechnete die Konstante t, indem er $u = K$ setzte. Ferner erhielt er einen Beweis der Legendreschen Beziehung (6) aus 7.1.4., indem er $u = K + iK'$ annahm.

Hermite fand (1862) eine Formel, mit deren Hilfe die elliptischen Funktionen in „einfache Elemente" zerlegt werden können: Ist F eine solche Funktion mit den einfachen Polen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ im Periodenparallelogramm, so gilt

$$F(u) = C + \sum_{j=1}^{n} R_j \frac{H'(u - a_j)}{H(u - a_j)},$$

wobei R_j das Residuum von F im Punkt a_j $(1 \leqq j \leqq n)$ und C eine Konstante ist; hat F einen Pol der Ordnung m, so ist das entsprechende einfache Element Linearkombination der Ableitungen von H'/H bis zur $(m-1)$-ten Ordnung mit Koeffizienten, die durch den Hauptteil von F in diesem Pol gegeben sind. Diese Formel gestattet es, die Stammfunktion einer elliptischen Funktion zu berechnen, woraus man auf eine neue Art zu den von Jacobi angegebenen Ausdrücken für die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung gelangt. Wendet man die Formel für die Zerlegung in einfache Elemente auf die logarithmische Ableitung einer elliptischen Funktion Φ an, deren Nullstellen (bzw. Pole) im Periodenparallelogramm mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_n$) bezeichnet sind, so findet man die Faktorzerlegung

$$\Phi(u) = A \frac{H(u - a_1) \cdots H(u - a_n)\, H(u - a_{n+1})}{H(u - b_1) \cdots H(u - b_n)\, H(u - b_{n+1})}$$

mit

$$a_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} a_j \quad \left(\text{bzw. } b_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

und $A = \mathrm{const}$. Hermite übertrug diese Formeln auf die Darstellung von „Funktionen mit konstanten Multiplikatoren" (oder „doppeltperiodischen Funktionen

zweiter Gattung") ([36], Bd. III, S. 266–418); dies sind meromorphe Funktionen F, für die $F(u+2K)=\mu F(u)$ und $F(u+2iK')=\mu' F(u)$ gilt, wobei μ und μ' Konstanten (die Multiplikatoren) sind. Diese Funktionen wurden von Hermite zur Integration der Laméschen Differentialgleichung eingeführt, die er in der Gestalt

$$y''=\big(n(n+1)\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,u+h\big)\,y$$

schrieb (n ganzzahlig, h konstant reell; siehe 7.1.15.). Picard zeigte (1879), daß eine lineare Differentialgleichung, deren Koeffizienten elliptische Funktionen sind und deren allgemeines Integral meromorph ist, ein Fundamentalsystem von Lösungen besitzt, welche Funktionen mit konstanten Multiplikatoren sind (man kann nach Mittag-Leffler, 1882, die Lösungen sogar explizit angeben).

7.1.12. *Die Weierstraßschen Funktionen*

Gauß hatte (1808) ([32], Bd. VIII, S. 96) die Umkehrung des elliptischen Integrals

$$u=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\mu x^2)}}$$

in der Form $x=F(u)/G(u)$ mit zwei ganzen Funktionen $F=e^{-w}$ und $G=e^{-v}$ angegeben, wobei v und w zweite Stammfunktionen von μx^2 bzw. $1/x^2$ (Funktionen von u) sind; in der Tat genügt $y=\log x$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{du^2}=-\frac{1}{x^2}+\mu x^2\,.$$

Die Taylorentwicklungen von F und G im Koordinatenursprung haben als Koeffizienten Polynome in μ mit rationalen Koeffizienten. Abel bemerkte (in einem Brief an Legendre, 1828) ([33], Bd. II, S. 271–279), daß die Funktion $\mathrm{sn}\,u$ eine solche Darstellung besitzt, und Jacobi zeigte (in einer postum veröffentlichten Arbeit) ([34], Bd. II, S. 383–398), daß die Taylorentwicklung einer mit einem geeigneten Faktor e^{ru^2} multiplizierten Thetafunktion Polynome in k^2 als Koeffizienten besitzt (er bestimmte die Taylorentwicklung mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung, der die Thetafunktionen genügen; siehe 7.1.11.).

Weierstraß widmete seine erste Arbeit (1840 datiert) ([43], Bd. I, S. 1–49) der Aufstellung und dem Studium dieser Entwicklungen; er definierte die ungerade Funktion $\mathrm{Al}\,(u)_1$, deren Ableitung an der Stelle 0 gleich 1 ist, sowie die geraden Funktionen $\mathrm{Al}\,(u)_2$, $\mathrm{Al}\,(u)_3$ und $\mathrm{Al}\,(u)$, die an der Stelle 0 den Wert 1 haben, so daß ihre Logarithmen zweite Stammfunktionen von

$$-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,,\qquad -\frac{1}{\mathrm{sn}^2\,u}\,,\qquad -\frac{\mathrm{dn}^2\,u}{\mathrm{cn}^2\,u}\quad\text{bzw.}\quad -k^2\frac{\mathrm{cn}^2\,u}{\mathrm{dn}^2\,u}$$

sind. Es ist dann

$$\mathrm{sn}\,u=\frac{\mathrm{Al}\,(u)_1}{\mathrm{Al}\,(u)}\,,\qquad \mathrm{cn}\,u=\frac{\mathrm{Al}\,(u)_2}{\mathrm{Al}\,(u)}\quad\text{und}\quad \mathrm{dn}\,u=\frac{\mathrm{Al}\,(u)_3}{\mathrm{Al}\,(u)}$$

infolge der Differentialgleichungen

$$\frac{d^2}{du^2}\log \operatorname{sn} u + \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = \frac{d^2}{du^2}\log \operatorname{cn} u + \frac{\operatorname{dn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 u}$$
$$= \frac{d^2}{du^2}\log \operatorname{dn} u + k^2 \frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 u} = k^2 \operatorname{sn}^2 u.$$

Die Formeln für die Multiplikation elliptischer Funktionen ermöglichen den Beweis, daß die Taylorreihen der vier Funktionen Al auf der ganzen Ebene konvergieren. Ihre Koeffizienten sind Polynome in k^2, für welche Weierstraß Rekursionsformeln aufstellte, die er aus einer partiellen Differentialgleichung erhielt, der die Funktionen Al genügen (die Variablen sind u und k); es gilt in den Jacobischen Bezeichnungen (siehe 7.1.10.)

$$\mathrm{Al}\,(u)_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2kk'K}}\, e^{-ru^2} H(u)\,, \qquad \mathrm{Al}\,(u)_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2kK}}\, e^{-ru^2} H_1(u)\,,$$

$$\mathrm{Al}\,(u)_3 = \sqrt{\frac{\pi}{2K}}\, e^{-ru^2} \Theta_1(u)\,, \qquad \mathrm{Al}\,(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2k'K}}\, e^{-ru^2} \Theta(u)$$

mit $r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E}{K}\right)$, wobei E das vollständige Integral zweiter Gattung bezeichnet. Die Funktionen Al sind nicht periodisch; die beiden Perioden spielen dort symmetrische Rollen.

In der späteren Weierstraßschen Bezeichnung ([42]; [43], Bd. II, S. 245–255, und Bd. V, S. 1–322) wird die Funktion $\mathrm{Al}\,(u)_1$ durch die ungerade Funktion σu ersetzt, für welche

$$\sigma'(0) = 1 \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{du^2}\log \sigma u = -\wp u$$

ist; sie ist Summe einer Potenzreihe, die auf der ganzen Ebene konvergiert und deren Koeffizienten Polynome in g_2 und g_3 mit rationalen Koeffizienten sind:

$$\sigma u = u - \frac{1}{2} g_2 \frac{u^5}{5!} - 6 g_3 \frac{u^7}{7!} + \cdots .$$

Die anderen Funktionen Al werden durch

$$\sigma_1 u = e^{-\eta u} \frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma\omega}\,, \qquad \sigma_2 u = e^{-(\eta+\eta')u} \frac{\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')}\,,$$

$$\sigma_3 u = e^{-\eta' u} \frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma\omega}$$

ersetzt; dabei sind ω und ω' die Halbperioden und η, η' die Werte der logarithmischen Ableitung σ'/σ in ω bzw. ω' (diese spielen in der Weierstraßschen Theorie die Rolle der Halbperioden des Integrals zweiter Gattung). Addiert man zu u eine

Periode, so wird σu mit einer Potenz von e multipliziert:

$$\sigma(u + 2m\omega + 2n\omega') = (-1)^{mn+m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(u+m\omega+n\omega')} \sigma u \quad \text{für} \quad m, n \in \mathbf{Z} .$$

Diese Beziehung gestattet es, $\sigma(u + 2\omega + 2\omega')$ auf zwei Arten zu berechnen, und der Vergleich der Ergebnisse zeigt, daß $\eta\omega' - \omega\eta'$ ein ungerades Vielfaches von $\pi i/2$ ist. Weierstraß bewies, daß tatsächlich $\eta\omega' - \omega\eta' = \pm\pi i/2$ gilt, was zu der Legendreschen Beziehung (6) aus 7.1.4. äquivalent ist (er bediente sich der Entwicklung von σ'/σ in eine Kotangensreihe, die man aus dem unendlichen Produkt von σ herleiten kann; siehe weiter unten). Die elliptischen Funktionen lassen sich wie in der Hermiteschen Faktorzerlegung durch Quotienten aus Produkten von Sigmafunktionen ausdrücken; man hat dann

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$$

und, wenn man mit e_1, e_2, e_3 die Wurzeln der Gleichung $4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$ (d. h. die Werte von $\wp u$ in $\omega, \omega + \omega', \omega'$) bezeichnet,

$$\wp u - e_j = \left(\frac{\sigma_j u}{\sigma u}\right)^2 \qquad (j = 1, 2, 3) .$$

Ferner ist

$$\sigma' u = -2\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}$$

und

$$\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \operatorname{sn}\left(u\sqrt{e_1 - e_3}, k\right) \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

also

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2\left(u\sqrt{e_1 - e_3}\right)} .$$

Die Multiplikation des Arguments mit n bei der Funktion $\wp$ läßt sich mit Hilfe der elliptischen Funktion

$$\varphi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2}(u)} \quad \text{(mit den Perioden } 2\omega, 2\omega'\text{)}$$

untersuchen, denn es ist

$$\wp u - \wp(nu) = \frac{\varphi_{n+1}(u)\,\varphi_{n-1}(u)}{\varphi_n^2(u)} ;$$

man kann zeigen, daß φ_n ein Polynom vom Grad $(n^2 - 1)/2$ in $\wp u$ im Fall ungerader n ist (bzw. das Produkt von $\wp' u$ und einem Polynom vom Grad $(n^2/2) - 2$ im Fall gerader n); ein expliziter Ausdruck für $\varphi_n(u)$ als Funktion von $\wp u$ und deren Ableitungen (in Form einer Determinante) wurde von Kiepert (1873) gefunden. Weierstraß wendete seine Theorie der Entwicklung ganzer Funktionen in ein

unendliches Produkt von Primärfaktoren an (siehe 4.6.3.) und kam zu der Entwicklung

$$\sigma u = u \prod_{w \neq 0} \left(1 - \frac{u}{w}\right) \exp\left(\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}\right)$$

(w durchläuft das Periodengitter), die — im Gegensatz zum Eisensteinschen Doppelprodukt — absolut konvergiert; er leitete hieraus die Beziehung

$$\sigma u = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} \frac{e^{\eta u^2/2}}{\sqrt[8]{\Delta}} H(u)$$

mit der Diskriminante $\Delta = (e_2 - e_3)^2 (e_1 - e_3)^2 (e_1 - e_2)^2$ her. Mit Hilfe der zweiten logarithmischen Ableitung erhielt Weierstraß eine Entwicklung in eine absolut konvergente Doppelreihe:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{w \neq 0} \left(\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right).$$

Hieraus ergibt sich

$$g_2 = 60 \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^4} \quad \text{und} \quad g_3 = 140 \sum_{w \neq 0} \frac{1}{w^6}$$

(siehe in 7.1.6. die Eisensteinschen Reihen). Heutzutage definiert man die Funktion $\wp u$ allgemein durch diese Reihe, aus der man ablesen kann, daß $\wp u$ meromorph ist mit einem Doppelpol in jedem Periodenpunkt w, und es läßt sich zeigen, daß die w die Perioden der Funktion $\wp u$ sind, indem man das zunächst für ihre Ableitung $\wp' u$ beweist. Schließlich sieht man, daß $\wp'^2 u - 4\wp^3 u + g_2 \wp u + g_3$ (wobei g_2 und g_3 durch die oben angegebenen Reihen definiert sind) weder im Punkt 0 noch in den anderen Punkten w einen Pol hat: Es ist eine doppeltperiodische holomorphe Funktion, also (aufgrund des Satzes von Liouville) eine Konstante, und sie ist im Punkt 0, also auch überall, gleich null. Um hieraus auf die Umkehrung der elliptischen Integrale erster Gattung zu kommen, braucht man nur das Periodengitter der w bei Kenntnis von g_2 und g_3 zu bestimmen. Hurwitz hat (1904) gezeigt, daß man die primitiven Perioden aus den beiden Reihen für g_2 und g_3 erhalten kann.

7.1.13. *Komplexe Multiplikation*

Dieses etwas diffizile Problem bedarf einiger Vorbemerkungen, bevor wir seine historische Entwicklung beleuchten. Wir haben gesehen (vgl. 7.1.8.), daß sich jede holomorphe Abbildung der Riemannschen Fläche $\boldsymbol{C}/\Gamma$ in die Fläche $\boldsymbol{C}/\Gamma'$ (Γ, Γ' Periodengitter in $\boldsymbol{C}$) zu einer linearen Abbildung $f\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ liften läßt, die (durch eine Translation) auf $f(u) = au$ (a = const) zurückgeführt werden kann. Insbesondere ergeben sich die holomorphen Abbildungen von $\boldsymbol{C}/\Gamma$ in sich (d. h. im Fall $\Gamma = \Gamma'$) in dieser Weise, mit einer Konstanten a, für welche $a\Gamma \subset \Gamma$ gilt, also $a\omega = \alpha\omega + \beta\omega'$, $a\omega' = \gamma\omega + \delta\omega'$, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen und ω, ω'

die primitiven Perioden bezeichnen. Es ist dann $a = \alpha + \beta\tau$ und $a\tau = \gamma + \delta\tau$ mit $\tau = \omega'/\omega$, also $\beta\tau^2 + (\alpha - \delta)\tau - \gamma = 0$, und τ gehört einem imaginär-quadratischen Körper K (vgl. Kapitel 5) an, in dem die Zahl a ganz ist (da sie den $\boldsymbol{Z}$-Modul mit der Basis $(1, \tau)$ invariant läßt), außer im Fall $\beta = 0$, $\alpha = \delta$ und $\gamma = 0$, was $a = \alpha \in \boldsymbol{Z}$ ergibt. Mit anderen Worten: Die Riemannsche Fläche $\boldsymbol{C}/\Gamma$ besitzt keine anderen (den Ursprung invariant lassenden) Endomorphismen als die Multiplikationen mit den $n \in \boldsymbol{Z}$, außer in den Spezialfällen, daß τ imaginär-quadratisch ist; in diesen Fällen ist der Ring der Endomorphismen von $\boldsymbol{C}/\Gamma$ eine Ordnung (siehe Kapitel 5) des quadratischen Körpers K, dem τ angehört: Man kann in $\boldsymbol{C}/\Gamma$ mit den komplexen Zahlen a aus dieser Ordnung multiplizieren („*komplexe Multiplikation*").

Beispiele für die Multiplikation elliptischer Integrale mit komplexen Zahlen sind implizit schon seit den Arbeiten von Fagnano bekannt, wonach die Verdopplung eines Lemniskatenbogens in der Gestalt

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^4}} = (1 + i)\frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} \quad \text{für} \quad \varrho^2 = \frac{2it^2}{1 - t^4}$$

angegeben werden kann (siehe 7.1.3.). Die Gaußschen Arbeiten (1797) enthalten die Formel

$$\operatorname{sl}(1 + i)\varphi = (1 + i)\frac{\operatorname{sl}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{sl}^4\varphi}},$$

mit deren Hilfe ([32], Bd. III, S. 407) Gauß die Entwicklung von $(\operatorname{sl}\varphi)^{-2}$ nach Potenzen von φ erhielt. Man findet dort auch die Formeln der Multiplikation mit $1 + i$ für die Thetafunktionen, deren Quotienten sl und cl sind, und für das arithmetisch-geometrische Mittel $M(b\sqrt{2}, b)$. Wir haben gesehen (vgl. 7.1.7.), wie die Multiplikation mit ganzen Gaußschen Zahlen in den lemniskatischen Funktionen Abel in die Lage versetzt hat, die Gleichung für die Teilung der Lemniskate durch eine Primzahl der Form $4\nu + 1$ in Radikalen zu lösen; Abel hat (1828) ([33], Bd. I-S. 403—443) ganz allgemein danach gesucht, für welche Werte von a die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 + \mu y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 + \mu x^2)}}$$

ein algebraisches vollständiges Integral besitzt. Er behauptete, daß a rational sein muß, außer bei gewissen speziellen Werten von μ, für welche a von der Form $m \pm i\sqrt{n}$ mit rationalen m und n, $n \geqq 0$, sein kann. Diese speziellen Werte von μ (die „singulären" Moduln) sind durch algebraische Gleichungen bestimmt, von denen Abel vermutete, daß sie durch Radikale lösbar sind, wie dann von Kronecker (1857) bewiesen wurde ([44], Bd. IV, S. 179—183). In den von Abel angegebenen Beispielen ist die Existenz einer Multiplikation mit $i\sqrt{n}$ mit der Tatsache verknüpft, daß der Komplementärmodul k' durch eine reelle Transformation n-ter Ordnung aus dem Modul k hervorgeht; der Fall der Lemniskate $k = k'$ entspricht $n = 1$, und Abel hat die Fälle $n = 3$ und 5 durchgerechnet. Es ist bekannt, daß

schon Legendre auf Moduln hingewiesen hat, die sich in ihren Komplementärmodul transformieren lassen:

$$k = \tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1 \qquad (n = 2)$$

und

$$k = \sin(\pi/12) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \qquad (n = 3)\,.$$

In allen diesen Fällen ist der Multiplikator der reellen Transformation gleich $1/\sqrt{n}$ und das Periodenverhältnis K'/K gleich $\sqrt{n}$. Zum Modul k kehrt man mit Hilfe der „imaginären Transformation" zurück (die k und k' durch Multiplikation mit i vertauscht). Jacobi hat beobachtet (postum veröffentlicht) ([34], Bd. I, S. 489–496), daß in diesen Fällen (für jede Primzahl p der Gestalt $a^2 + nb^2$ mit ungeradem a und geradem b) zwei der imaginären Transformationen p-ter Ordnung komplexe Multiplikationen mit $a \pm ib\sqrt{n}$ sind. Unter den Transformationen p-ter Ordnung gibt es soviel komplexe Multiplikationen (die den Modul nicht ändern), wie Darstellungen von p in der Gestalt $a^2 + nb^2$ (a ungerade, b gerade) vorhanden sind.

In der Eisensteinschen Theorie (1846) ([38], Bd. I, S. 291–308 und 434–478) wird dann von komplexer Multiplikation gesprochen, wenn eine Transformation

$$\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega_1'\,, \qquad \omega' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_1'$$

(siehe oben) das Periodenverhältnis invariant läßt: $\omega'/\omega = \omega_1'/\omega_1 = \tau$. Dann ist

$$\omega/\omega_1 = \omega'/\omega_1' = \mu$$

und

$$\beta\tau^2 + (\alpha - \delta)\,\tau - \gamma = 0\,, \qquad \mu^2 - (\alpha + \delta)\,\mu + \alpha\delta - \beta\gamma = 0\,.$$

Diese beiden quadratischen Gleichungen haben dieselbe Diskriminante $\Delta = (\alpha + \delta)^2 - 4n$, wobei $n = \alpha\delta - \beta\gamma$ die Ordnung der Transformation ist; diese Diskriminante muß negativ (weil τ nicht reell ist) und kongruent 0 oder 1 (mod 4) sein. Eisenstein interessierte sich speziell für den Fall $n = 1$; das bedeutet $\alpha + \delta = 0$ und $\Delta = -4$ oder $\alpha + \delta = \pm 1$ und $\Delta = -3$, also ist entweder $\mu^4 = 1$ oder $\mu^3 = 1$. Eisenstein verwendete die entsprechenden Formeln für die komplexe Multiplikation zum Beweis des biquadratischen und des kubischen Reziprozitätsgesetzes (siehe 7.1.15.). Die Formeln der Multiplikation mit einer beliebigen ganzen Zahl k aus dem quadratischen Körper $\mathbf{Q}(\mu)$ für die Reihen (g, x) (mit den Perioden 1 und μ; Bezeichnungen aus 7.1.6.) ergeben sich ganz einfach durch Umordnung der Glieder einer Doppelreihe (wodurch man noch allgemeiner die Transformationsformeln gewinnt). Wir werden später (siehe 7.1.15.) andere Zusammenhänge zwischen der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen und der Zahlentheorie kennenlernen.

7.1.14. *Elliptische Kurven*

Aronhold zeigte (1861), daß die Differentialform $\dfrac{dx}{f_y'} = -\dfrac{dy}{f_x'}$ auf einer ebenen algebraischen Kurve dritter Ordnung (Kubik) mit der Gleichung $f(x, y) = 0$ (siehe

7.2.) in der Gestalt

$$\frac{1}{3\sqrt{6}} \frac{d\lambda}{\sqrt{2T + 3S\lambda - \lambda^3}}$$

geschrieben werden kann, wobei die neue Variable λ Quotient zweier linearer Ausdrücke in x, y ist und S und T die Fundamentalinvarianten der ternären kubischen Form $x_3^3 f(x_1/x_3, x_2/x_3)$ bezeichnen. Er erhielt ferner eine Parameterdarstellung der Kurve in der Gestalt

$$x_i = p_i + q_i\lambda + r_i\lambda^2 + \alpha_i \sqrt{\frac{1}{6}(2T + 3S\lambda - \lambda^3)}$$

($i = 1, 2, 3$; die x_i sind die homogenen Koordinaten, und p_i, q_i, r_i, α_i sind Konstanten).[1] Clebsch interpretierte (1863) ([46], Bd. LXIII, S. 94–121) dieses Resultat mit Hilfe der elliptischen Funktionen: Sind g, g', g'' die Wurzeln der Gleichung $\lambda^3 - 3S\lambda - 2T = 0$, so setzte er $\lambda = g' \operatorname{sn}^2 u + g'' \operatorname{cn}^2 u$ mit elliptischen Funktionen vom Modul k, der durch $k^2 = (g'' - g')/(g'' - g)$ bestimmt wird. Die Aronholdsche Differentialform wird zu $\frac{du}{A}$ mit $A = 3\sqrt{6}\,(g'' - g)$, und man erhält die Parameterdarstellung

$$x_i = \varphi_i(\operatorname{sn}^2 u) + m\alpha_i \frac{d}{du}(\operatorname{sn}^2 u) \qquad (1 \leqq i \leqq 3)$$

(φ_i rational, m konstant). Der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit homogenen Koordinaten liegt auf der Kurve, und die beiden Punkte, die zu einem gegebenen Wert von λ gehören, liegen gemeinsam mit dem ersten Punkt auf einer Geraden. Die Wahl von λ ist nicht eindeutig, und ersetzt man λ durch einen anderen, einem Punkt $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ der Kurve entsprechenden Parameter μ, so ist

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{2T + 3S\lambda - \lambda^3}} = \frac{d\mu}{\sqrt{2T + 3S\mu - \mu^3}},$$

also $\theta(\lambda, \mu) = 0$, wobei θ ein symmetrisches Polynom zweiten Grades in jeder Variablen ist (Satz von Euler). Clebsch faßte die Kurve dritter Ordnung somit so auf, als sei sie durch den Schnittpunkt zweier veränderlicher Geraden in den Büscheln α bzw. β bestimmt, wobei diese Geraden durch die Beziehung $\theta(\lambda, \mu) = 0$ miteinander verknüpft sind.

Die Parameterdarstellung der Kurve dritter Ordnung gestattete es Clebsch, die Bedingung dafür, daß drei Punkte dieser Kurve auf einer Geraden liegen, in folgender Form anzugeben: Die Summe der den drei Punkten entsprechenden Parameter u hat (modulo der Perioden) einen Wert $-u_0$, der, unabhängig von den betrachteten Punkten, konstant ist (Translation in u erlaubt es, $u_0 = 0$ zu setzen). Dies löst mehrere klassische geometrische Probleme. Ist beispielsweise u' der

[1]) Schon Newton hatte 1676 festgestellt, daß eine ebene Kurve dritter Ordnung stets die Projektion einer „divergierenden Parabel" mit der Gleichung $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist.

Parameter des Berührungspunktes einer in einem Punkt mit dem Parameter u entspringenden Tangente, so gilt $u + 2u' = 0$; daraus folgt $u' = -(u/2) + mK + m'iK'$ (m, m' ganzzahlig modulo 2), was vier Tangenten ergibt, die einem gegebenen Punkt α auf der Kurve entspringen. Man bemerkt, daß die Werte des (mit α wie oben verknüpften) Parameters λ, die den Berührungspunkten entsprechen, gleich ∞, g, g' und g'' sind, so daß k^2 das Doppelverhältnis der vier in α entspringenden Tangenten ist (Salmon, 1852, wußte von der Existenz der vier Tangenten und hat gezeigt, daß ihr Doppelverhältnis gleich einer von α unabhängigen Konstanten ist). Die Wendepunkte der Kurve dritter Ordnung sind durch $3u = 0$ bestimmt, woraus $u = \frac{2}{3}(mK + m'iK')$ (m, m' ganzzahlig modulo 3) folgt; es gibt davon neun, und jeweils drei liegen auf einer Geraden (wie die Punkte der Ebene über dem Körper mit drei Elementen). Clebsch untersuchte ferner die der Kurve dritter Ordnung einbeschriebenen Polygonzüge, deren Strecken abwechselnd durch zwei feste Punkte α und β der Kurve gehen (diese Polygonzüge wurden von Steiner 1846 definiert); die Analogie dieses Problems zu dem der Ponceletschen Polygone (siehe 7.1.3.) mag Clebsch dazu bewogen haben, zur Untersuchung elliptische Funktionen zu benutzen. Er formulierte schließlich die Bedingung dafür, daß sechs Kurvenpunkte auf einem Kegelschnitt liegen, folgendermaßen: Die Summe ihrer Parameter u muß gleich $-2u_0$ sein (wofür man auch null nehmen kann); daraus kann man auf die Existenz von drei Systemen von Kegelschnitten schließen, die die kubische Kurve von der Ordnung 3 berühren.

Angeregt durch die Riemannsche Theorie der Abelschen Integrale (siehe 7.2.5.) hat Clebsch noch andere Kurven entdeckt, die eine Parameterdarstellung mit Hilfe elliptischer Funktionen besitzen ([46], Bd. LXIII, S. 235—237); darunter sind auch die „biquadratischen", welche Schnitt zweier Quadriken (Hyperflächen zweiter Ordnung) im dreidimensionalen Raum sind. Clebsch entwickelte für diese Kurven eine Theorie, die der der ebenen Kurven dritter Ordnung analog ist: Vier Punkte der Kurve liegen in einer Ebene, wenn die Summe ihrer Parameter u gleich null ist, woraus die Existenz von 16 hyperoskulierenden Ebenen (Berührungen vierter Ordnung) folgt, die durch $u = \frac{1}{2}(mK + m'iK')$ bestimmt sind (m, m' ganzzahlig modulo 4). Von einem Punkt mit dem Parameter u kann man neun oskulierende Ebenen an die Kurve legen: $u' = -\frac{u}{3} + \frac{2}{3}(mK + m'iK')$ (m, m' ganzzahlig modulo 3), usw. Übrigens ([46], Bd. LXIV, S. 210—270) besitzt jede ebene algebraische Kurve n-ter Ordnung mit $n(n-3)/2$ Doppelpunkten eine elliptische Parameterdarstellung. Clebsch erhielt sie, indem er eine variable Kurve $(n-2)$-ter Ordnung durch die Doppelpunkte und durch $n-2$ andere feste Punkte auf der gegebenen Kurve legte: Die durch einen Parameter λ gekennzeichnete variable Kurve schneidet die gegebene Kurve in zwei Punkten, die man mit einem neuen festen Punkt verbindet; dadurch ergeben sich zwei Geraden eines Büschels, dem man den Parameter μ zuordnet. Die Parameter λ und μ sind durch eine Beziehung der Gestalt $A + 2\mu C + \mu^2 B = 0$ verknüpft (A, B, C Polynome

n-ten Grades in λ). Clebsch zeigte (mit Hilfe der Resultate von Cremona und Hesse), daß es vier Werte von λ gibt, für welche die gegebene Kurve von der variablen Kurve berührt wird. Statt der Diskriminante $C^2 - AB$ der Gleichung in μ kann man also P^2Q schreiben, wobei Q den Grad 4 hat, und man erhält eine Parameterdarstellung $x_i = R_i + a_i \sqrt{Q}$ mit Polynomen R_i vom Grad n in λ und Konstanten a_i ($i = 1, 2, 3$). Durch eine homographische Variablentransformation für λ läßt sich Q in die Gestalt $\lambda(1 - \lambda)(1 - k^2\lambda)$ überführen; dann setzt man $\sqrt{\lambda} = \operatorname{sn} u$, $\sqrt{1 - \lambda} = \operatorname{cn} u$, $\sqrt{1 - k^2\lambda} = \operatorname{dn} u$. Man findet schließlich die Parameterdarstellung

$$x_i = c_i H(u - \alpha_i') \cdots H(u - \alpha_i^{(n)}) / \Theta^n(u) .$$

Der Modul k ist ein wesentliches Merkmal und hängt nicht von der Wahl der $n - 2$ festen Punkte ab; er läßt sich deuten als Quadratwurzel des Doppelverhältnisses der vier Kurven $(n - 2)$-ter Ordnung, die die gegebene Kurve berühren. Die mn Schnittpunkte der gegebenen Kurve mit einer Kurve m-ter Ordnung sind durch $(n - 1)(n - 2)/2$ Relationen miteinander verknüpft, wie Clebsch zeigte. Eine dieser Relationen besagt, daß die Summe der mn Parameter u gleich $\alpha_i' + \cdots + \alpha_i^{(n)}$ ist (α_i ist eine von i unabhängige Konstante, die durch eine auf u angewendete Translation zu Null gemacht werden kann), wie das Abelsche Theorem (siehe 7.2.1.) besagt. Clebsch wendete die Theorie speziell auf den Fall $n = 4$ an, d. h. auf eine ebene Kurve vierter Ordnung (Quartik) mit zwei Doppelpunkten (er legte eine variable Kurve zweiter Ordnung, einen Kegelschnitt, durch diese Punkte und zwei andere feste Punkte); die Kurve besitzt zwölf Wendepunkte und acht Doppeltangenten.

Man versteht heute unter „elliptischen Kurven“ diejenigen algebraischen Kurven (ohne jede Singularität), die eine Parameterdarstellung mit Hilfe elliptischer Funktionen besitzen (das sind Kurven vom „Geschlecht“ 1; siehe 7.2.5.), wie z.B. eine ebene nichtsinguläre Kurve dritter Ordnung oder eine nichtsinguläre biquadratische Kurve. Klein ([47], Bd. III, S. 198—254) und Bianchi (1880—1885) haben elliptische Kurven „n-ter Ordnung“ ($n \geqq 2$ beliebig) definiert und untersucht; für $n \geqq 3$ sind dies Kurven im projektiven Raum $\boldsymbol{P}_{n-1}$ mit einer Parameterdarstellung

$$x_i = \sigma(u - a_{i1}) \cdots \sigma(u - a_{in}) \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

(die x_i sind die homogenen Koordinaten, $\sum_i a_{ij}$ ist von i unabhängig, und σ ist die Weierstraßsche Funktion aus 7.1.12.). Zwei solche Kurven mit derselben Ordnung n und denselben elliptischen Perioden gehen mit Hilfe eines Automorphismus von $\boldsymbol{P}_{n-1}$ auseinander hervor. Die Theorie dieser Kurven hängt mit der der Teilung der Perioden zusammen: Ist die komplexe Multiplikation nicht möglich, so entsprechen die Automorphismen von $\boldsymbol{P}_{n-1}$, die die Kurve festlassen, den Transformationen des Parameters u in die Gestalt $\pm u + (2/n)(m\omega + m'\omega')$ (2ω und $2\omega'$ sind die Perioden, und m, m' sind ganze Zahlen modulo n), und es gibt davon $2n^2$. Es existieren n^2 durch $u = (2/n)(m\omega + m'\omega')$ gegebene hyperoskulierende Punkte.

Die Parameterdarstellung einer elliptischen Kurve läßt diese als Quotientenraum $\boldsymbol{C}/\Gamma$ von $\boldsymbol{C}$ nach dem Periodengitter Γ erscheinen. Das Gesetz der additiven

Gruppe von $\boldsymbol{C}$ gilt auch für den Quotientenraum und definiert ein kommutatives Gruppengesetz auf der Kurve. Nach den Additionstheoremen für elliptische Funktionen wird dieses Gesetz durch algebraische Beziehungen zwischen den Koordinaten ausgedrückt. Kronecker betrachtete (1883) ([44], Bd. IV, S. 335–344) diese Art von Gesetz in seiner Studie über Multiplikationsformeln für elliptische Funktionen. Im zwanzigsten Jahrhundert entwickelte sich eine rein algebraische Theorie der elliptischen Kurven über einem beliebigen Grundkörper. Ein großer Teil der Theorie blieb erhalten, obwohl man nicht mehr über elliptische Funktionen verfügte (Tate hat inzwischen (1960) über einem Grundkörper mit einer nichtdiskreten vollständigen Bewertung eine Theorie der Thetafunktionen und der elliptischen Funktionen ausgearbeitet). Mit Hilfe des Gruppengesetzes kann man die „rationalen Punkte“ auf einer elliptischen Kurve untersuchen (das sind Punkte mit rationalen Koordinaten, wobei man die Koeffizienten der Gleichung als rational voraussetzt). Man kann auf diese Weise die Fermatsche Methode des „unbeschränkten Abstiegs“ (siehe Kapitel 5) deuten, die zeigt, daß gewisse elliptische Kurven keinen rationalen Punkt besitzen. Ebenso hat Jacobi (1834) ([34], Bd. II, S. 51–55) eine Aufgabe (die Euler in einer seiner postum veröffentlichten Arbeiten gestellt hatte) mit Hilfe der Multiplikation mit n auf einer elliptischen Kurve gelöst: Es sei f ein Polynom vierten Grades mit rationalen Koeffizienten; man bestimme, wenn man eine rationale Zahl x kennt, für die $\sqrt{f(x)}$ rational ist, unendlich viele andere rationale Zahlen; ist P der Punkt $(x, \sqrt{f(x)})$ auf der Kurve mit der Gleichung $y^2 = f(x)$, so sind die Kurvenpunkte nP $(n \in \boldsymbol{Z})$ rational, woraus die Lösung folgt. Durch ähnliche Überlegungen hat Mordell (1922) die Poincarésche Vermutung bewiesen, die besagt, daß die Gruppe der rationalen Punkte einer elliptischen Kurve durch endlich viele Elemente erzeugt wird.

7.1.15. *Anwendung der elliptischen Funktionen*

Seit Beginn ihrer Geschichte sind die elliptischen Integrale auf Probleme der Mechanik angewendet worden; wir haben schon die „Elastika“ und die parazentrische Isochrone (Jakob Bernoulli, 1694) erwähnt. Die ebene Elastika war Gegenstand einiger Eulerscher Arbeiten. Das allgemeinere Problem der räumlichen Elastika (Gleichgewichtsfigur einer Feder, die beliebigen Kräften unterworfen ist) wurde von Binet und Wantzel (1844) auf elliptische Quadraturen zurückgeführt, und Hermite hat (1877) ([36], Bd. III, S. 359–368) dafür eine Parameterdarstellung mit Hilfe der Thetafunktionen angegeben. Wir haben schon gesehen, daß das Problem der Bewegung eines Körpers, der nach dem Newtonschen Gesetz durch zwei feste Massezentren angezogen wird, Euler (1760) und Lagrange (1766) ([29], Bd. II, S. 68–121) auf elliptische Integrale geführt hatte; das ist eines der Probleme, das Legendre in seinem *Traité des fonctions elliptiques* als Anwendung der elliptischen Integrale abhandelte ([31], Bd. I, S. 411–539). Euler und Landen (1771) haben die Bewegung eines einfachen Pendels auf ein elliptisches Integral zurückgeführt; Lagrange hat dasselbe für das sphärische Pendel getan, das später von Richelot (1852) und von Hermite (1877) ([36], Bd. III, S. 379 und 447) mit Hilfe

elliptischer Funktionen untersucht wurde. Werden x und y aus der Gleichung der Sphäre, dem Integral der lebendigen Kraft und dem Flächenintegral (als Projektion auf die horizontale Ebene) eliminiert, so findet man

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = P(z) \quad \text{mit} \quad P(z) = 2g(z + c)(1 - z^2) - l^2;$$

dabei sind c und l Integrationskonstanten, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt sind (g ist die Erdbeschleunigung, und man nimmt an, daß der Radius der Sphäre, auf der sich der betrachtete Schwerpunkt bewegt, gleich 1 ist). Hermite erhielt hieraus $z = \alpha - (\alpha - \beta)\,\mathrm{sn}^2(u, k)$ mit

$$u = n(t - t_0), \qquad n = \sqrt{g\frac{\alpha - \gamma}{2}}, \qquad k^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma};$$

α, β und γ sind die Nullstellen des Polynoms $P(z)$ dritten Grades (es sind reelle Zahlen mit $0 < \alpha < 1, \gamma < -1, |\beta| < 1$). Anschließend stellte er fest, daß

$$\frac{d^2}{dt^2}(x + iy) = -g(3z + 2c)(x + iy)$$

gilt. Also genügt $v = x + iy$ der Laméschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{du^2} = \left(6k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 2\frac{\alpha - 2\beta - 2\gamma}{\alpha - \gamma}\right)v$$

mit $n = 2$. Hermite integrierte diese Gleichung mit Hilfe seiner doppeltperiodischen Funktionen zweiter Gattung (siehe 7.1.11.). Lagrange löste auch das (mit dem vorhergehenden verwandte) Problem der Rotation eines schweren Körpers um einen Unterstützungspunkt auf seiner Achse mit Hilfe elliptischer Quadraturen. Jacobi hat dabei den „Divisor" eines elliptischen Integrals dritter Gattung eingeführt (siehe 7.1.10.). Die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung äußerer Kräfte („Poinsotsche" Bewegung) ist eine weitere klassische Anwendung der elliptischen Funktionen in der Mechanik, wie Legendre sie in seinem *Traité* angegeben hat. Die Zeit wird dort durch ein elliptisches Integral erster Gattung als Funktion der Projektion des Vektors der momentanen Rotationsgeschwindigkeit auf eine der Trägheitsachsen des Körpers ausgedrückt und der Präzessionswinkel ψ durch ein Integral dritter Gattung. Jacobi hat 1849 sowohl explizite Ausdrücke für die neun Richtungskosinusse a_{jk} $(1 \leqq j, k \leqq 3)$ der (mit dem Körper verbundenen) beweglichen Achsen bezüglich der festen Achsen als auch die Komponenten der momentanen Rotationsgeschwindigkeit angegeben. Seine Formeln enthalten bezüglich der Zeit lineare Thetafunktionen in u, und Jacobi gab dafür sehr schnell konvergierende Reihenentwicklungen an. Hermite stellte (1877) fest ([36], Bd. III, S. 289–305), daß man $a_{1j} + ia_{2j} = b_j\,e^{i\alpha_j t}$ setzen kann, wobei α_j eine Konstante ist und b_j der Laméschen Gleichung

$$\frac{d^2v}{du^2} = (2k^2\,\mathrm{sn}^2 u + h_j)\,v \qquad (1 \leqq j \leqq 3) \quad \text{mit} \quad n = 1$$

genügt. Man begegnet elliptischen Integralen auch bei der Bewegung eines homogenen Flüssigkeitsellipsoids, die von zahlreichen Mathematikern untersucht wurde (Clairaut, Maclaurin, d'Alembert, Legendre, Laplace, Jacobi, Dirichlet und Riemann).

Einige Probleme aus der Theorie des Newtonschen Potentials führen auf elliptische Integrale, z.B. die Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids (Ivory, Laplace, Legendre, 1812) oder des der Masse eines Planeten, welche man sich als längs seiner Bahnkurve mit einer zur Umlaufgeschwindigkeit umgekehrt proportionalen Dichte verteilt denkt (Gauß, 1818; siehe 7.1.8.), oder auch des eines homogenen elliptischen Zylinders (Riemann, 1864) ([41], S. 298—300). In einem homogenen Körper, der sich im thermischen Gleichgewicht befindet, ist die Temperatur eine harmonische Funktion. Um das thermische Gleichgewicht eines Ellipsoids zu untersuchen, hat Lamé (1837) die „elliptischen Koordinaten" eingeführt: Das sind die drei Werte von s, für welche die Quadrik mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - s} + \frac{y^2}{b^2 - s} + \frac{z^2}{c^2 - s} = 1$$

(die zu dem gegebenen Ellipsoid konfokal ist) durch den betrachteten Punkt geht. Man erhält so ein System (λ, μ, ν) von orthogonalen krummlinigen Koordinaten (siehe 9.5.), für das Lamé den Laplaceschen Ausdruck

$$\Delta T = (\nu - \mu)\, \Delta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\Delta_\lambda \frac{\partial T}{\partial \lambda}\right) + (\lambda - \nu)\, \Delta_\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\Delta_\mu \frac{\partial T}{\partial \mu}\right) + (\mu - \lambda)\, \Delta_\nu \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\Delta_\nu \frac{\partial T}{\partial \nu}\right)$$

mit $\Delta_s = \sqrt{(a^2 - s)(b^2 - s)(c^2 - s)}$ berechnet hat. Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man λ, μ, ν durch neue Koordinaten α, β, γ ersetzt, für welche

$$\lambda = a^2 \operatorname{cn}^2 \alpha + b^2 \operatorname{sn}^2 \alpha\,, \qquad \mu = a^2 \operatorname{cn}^2 \beta + b^2 \operatorname{sn}^2 \beta\,,$$
$$\nu = a^2 \operatorname{cn}^2 \gamma + b^2 \operatorname{sn}^2 \gamma$$

ist (die elliptischen Funktionen haben den Modul $k = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$), zu

$$\Delta T = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{4}\left[(\operatorname{sn}^2 \beta - \operatorname{sn}^2 \gamma)\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + (\operatorname{sn}^2 \gamma - \operatorname{sn}^2 \alpha)\frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} + (\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \beta)\frac{\partial^2 T}{\partial \gamma^2}\right].$$

Lamé suchte die harmonische Funktion T in Form eines Produkts dreier Funktionen, deren jede von nur einer der krummlinigen Koordinaten abhängt, und wurde dabei auf die Differentialgleichung $\dfrac{d^2 U}{d\alpha^2} = (A \operatorname{sn}^2 \alpha + h)\, U$ geführt, die, wenn $A = n(n + 1)\, k^2$ (n ganzzahlig) ist, für spezielle Werte von h eine elliptische Funktion von α als Lösung besitzt (das ergibt eine harmonische Funktion T, die

ein Polynom in x, y und z ist). Liouville und Heine (1845) haben eine zweite Lösung der Laméschen Gleichung bestimmt und Anwendungen angegeben. Die Lamésche Gleichung mit beliebigem h wurde von Hermite untersucht; die allgemeine Lösung dieser Gleichung hat die Gestalt $CF(\alpha) + C'F(-\alpha)$, wobei F eine „Funktion mit konstanten Multiplikatoren" ist (siehe 7.1.11.). In den Weierstraßschen Bezeichnungen läßt sich die Lamésche Differentialgleichung in der Gestalt

$$\frac{d^2U}{dz^2} = \left(h + n(n+1)\,\wp z\right) U$$

schreiben (siehe 8.2.1.), in der sie von Halphen (1888) untersucht wurde.

Gauß hat (in einer Aufzeichnung aus dem Jahre 1834; publiziert 1912) ([32], Bd. X¹, S. 311—315) mit Hilfe elliptischer Funktionen die Greensche Funktion einer Ellipse mit einem Pol im Mittelpunkt (siehe 8.5.2.) bestimmt, und er übertrug diese Berechnung in Begriffe der konformen Abbildung der Ellipse auf die Einheitskreisscheibe; sein Ergebnis wurde von Schwarz (1870) wiederentdeckt. Wir hatten schon die Schwarzschen Arbeiten über die konforme Abbildung eines Rechtecks mit Hilfe eines elliptischen Integrals erster Gattung erwähnt (siehe 7.1.5.). Jacobi hat, indem er die Laméschen elliptischen Koordinaten benutzte, (in einem postum veröffentlichten Artikel) die konformen Abbildungen eines Ellipsoids (oder eines Hyperboloids) auf die Ebene mit Hilfe elliptischer Integrale dritter Gattung, also mit Hilfe der Thetafunktionen angegeben. Lambert hatte schon den Fall des abgeplatteten Rotationsellipsoids behandelt, der sich durch elementare Funktionen lösen läßt.

H. Villat gab (1912) explizite Formeln an, die das Dirichletsche Problem in einem durch zwei Kreise vom Radius 1 bzw. q ($q < 1$) begrenzten Kreisring lösen, indem er sich der Funktion σ'/σ bediente, wobei σ die Weierstraßsche Funktion mit den Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_3$ ist, für welche $q = e^{\pi i\omega_3/\omega_1}$ gilt. Daraus leitete er Formeln für die konforme Abbildung einer ringförmigen Fläche (die von zwei einfach geschlossenen Kurven begrenzt wird) auf einen Kreisring her (1921). Diese Beziehungen erlaubten ihm auch, die Bewegung einer ebenen Platte in einer von einer ebenen Wand begrenzten und den ganzen Raum auf der einen Seite dieser Wand einnehmenden Flüssigkeit zu untersuchen (1927): Nimmt man die Platte als zu der Wand senkrecht an und ersetzt man das ursprüngliche Problem durch das der Bewegung zweier bezüglich der Wand symmetrischer Platten in einer den gesamten Raum einnehmenden Flüssigkeit, so kommt man zu einem Dirichletschen Problem in der zur Wand und zu den Platten orthogonalen Ebene, aus der man die Spuren der Platten entfernt; eine konforme Abbildung (die σ'/σ benutzt) transformiert dieses Problem in ein Dirichletsches Problem in einem von zwei Kreisen (den Bildern der Platten) berandeten Kreisring. Villat wendete außerdem elliptische Funktionen in der Wirbeltheorie an: Untersuchung eines Systems von Wirbeln in einem Rechteck, Wirbelkette zwischen zwei parallelen Wänden, Rjabuschinskische Strömung (1929), Ring von Wirbeln.

Die elliptischen Funktionen gestatten die Lösung einiger differentialgeometrischer Probleme wie z.B. die Bestimmung der Geodätischen eines Rotationsellipsoids, das schon von Legendre in seinem *Traité* untersucht worden war. Jacobi

behandelte (1839) ([34], Bd. II, S. 59—63) den Fall eines beliebigen Ellipsoids, und er erregte Aufsehen mit der vollständigen Integration der Differentialgleichung der Geodätischen durch Abelsche Integrale (vgl. 7.2.). Er hat auch mit Hilfe der Thetafunktionen Formeln für die krummlinigen Koordinaten des Endpunktes eines Geodätischenbogens auf einem Ellipsoid angegeben, wenn der Ursprung und die Anfangsrichtung des Bogens bekannt sind (1849) ([34], Bd. II, S. 417—424). Riemann hat mit Hilfe elliptischer Integrale Parameterdarstellungen einiger Minimalflächen erhalten (siehe 9.2.4.): diejenige, die sich auf ein räumliches Vierseit, und diejenige, die sich auf zwei Kreise in parallelen Ebenen stützt (1860; veröffentlicht 1867) ([41], S. 329—333); diejenige, die sich auf zwei konvexe Polygone in parallelen Ebenen stützt (Fragment, postum veröffentlicht ([41], S. 445—454); auch Schwarz hat (1871) dieses Problem behandelt).

Es sei daran erinnert, daß Jacobi das Eulersche Additionstheorem mit Hilfe der Beziehung zwischen den Endpunkten einer Kreissehne, die einen anderen Kreis tangiert, interpretiert hat (siehe 7.1.3.). Das erlaubte ihm, eine explizite Bedingung dafür aufzuschreiben, daß ein dem einen Kreis einbeschriebenes und dem anderen Kreis umbeschriebenes Polygon mit n Seiten existiert (wenn diese Bedingung erfüllt ist, so findet man gemäß einem Satz von Poncelet, daß auf dem ersten Kreis eine Ecke des Polygons willkürlich gewählt werden kann). Cayley hat (1853) den Fall behandelt, daß die Kreise durch beliebige Kegelschnitte ersetzt werden. Die Bedingung dafür, daß der Polygonzug geschlossen ist, ergibt sich, indem man die aus den Koeffizienten der beiden Kegelschnittgleichungen gebildete Determinante gleich null setzt. Rosanes und Pasch diskutierten eingehend (1864) die Fragen, wann die geometrischen Gebilde reell sind, in Abhängigkeit von der Lage der Kegelschnitte zueinander. Ein verwandtes Problem wurde von Gauß mit Hilfe der elliptischen Funktionen untersucht (Arbeiten aus dem Jahre 1843) ([32], Bd. III, S. 481—490, und Bd. VIII, S. 106—117); es handelt sich um das „pentagramma mirificum", ein sphärisches Fünfeck, dessen Diagonalen Viertelkreise sind (ein solches Fünfeck war schon von Napier (1614) und von Lambert (1765) betrachtet worden). Durch stereographische Projektion geht dieses Fünfeck in ein ebenes Fünfeck über, das einem Kegelschnitt ein- und einem anderen umbeschrieben ist. Wir gehen hier nicht auf die Anwendungen der elliptischen Funktionen auf die Steinerschen Polygone und andere Probleme der algebraischen Geometrie ein; auf sie wurde schon in 7.1.14. hingewiesen.

Bezüglich der Anwendungen auf die Lösung algebraischer Gleichungen verweisen wir auf 7.1.9.

Das an Anwendungen der elliptischen Funktionen reichhaltigste Gebiet ist die Zahlentheorie. Die ersten veröffentlichten Beispiele stammen von Jacobi (1828) ([34], Bd. I, S. 155—167, S. 235—239 und S. 247), der die Anzahl $r_k(n)$ der Zerlegungen einer ganzen Zahl n in die Summe von k Quadraten für $k = 2, 4, 6$ und 8 berechnet hat. Er benutzte dazu die Reihen

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2 \sum_{n \geqq 1} q^{n^2}, \qquad \sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2 \sum_{n \geqq 0} q^{(n+(1/2))^2}$$

(siehe 7.1.10.) sowie die Fourierentwicklung

$$\frac{kK}{2\pi}\operatorname{sn}\frac{2Kx}{\pi} = \sum_{n\geqq 0}\frac{q^{n+(1/2)}}{1-q^{2n+1}}\sin(2n+1)\,x = \sum_n q^{n+(1/2)}\sum_{d\mid(2n+1)}\sin dx\,,$$

die $kK/2\pi$ für $x = \pi/2$ liefert, und die Fourierentwicklung

$$\frac{K}{2\pi}\operatorname{dn}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{4} + \sum_n \frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos 2nx = \frac{1}{4} + \sum_n a_n q^n$$

mit

$$a_n = (-1)^m \sum_{d\mid(2m+1)} (-1)^{(d-1)/2}\cos 2^{\nu+1}dx \quad \text{für} \quad n = 2^\nu(2m+1)\,,$$

die $K/2\pi$ für $x = 0$ liefert. Durch eine analoge Methode und unter Benutzung von Reihenentwicklungen gewisser Quotienten von Produkten von Thetafunktionen (hergeleitet von Ch. Biehler (1879) und P. Appell) kam Hermite (1887) auf Ausdrücke für $r_3(n)$ und $r_5(n)$ ([36], Bd. IV, S. 230–238). Jacobi hat (1848) ([34], Bd. II, S. 226–254) auch ein Gaußsches Resultat, das dieser als Schlußfolgerung aus seinen Sätzen über den biquadratischen Charakter von 2 erhalten hatte, mit Hilfe elliptischer Funktionen interpretiert: Die Primzahlen kongruent 1 (mod 8), die durch die quadratische Form $x^2 + 2y^2$ darstellbar sind, stimmen mit denjenigen überein, welche sich durch $x^2 + y^2$ darstellen lassen (siehe Kapitel 5). Jacobi hat dieses Ergebnis präzisiert und erweitert dank der folgenden Identität zwischen Doppelreihen:

$$\sum_{m,n} (-1)^n q^{(4m+1)^2+8n^2} = \sum_{m,n} (-1)^{m+n} q^{(4m+1)^2+16n^2}\,.$$

Man beweist diese Identität, indem man je zwei der vier Reihen, die man nach Einsetzen von $x = q^a$, $\alpha = \pm q^b$ in die linke Seite der Identität (11) (siehe 7.1.10.) für verschiedene Werte von (a, b) erhält, miteinander multipliziert. Mit derselben Methode bewies Jacobi andere Identitäten, die besagen, auf wie viele Arten sich eine ganze Zahl durch zwei binäre quadratische Formen ausdrücken läßt. Andere Identitäten, die man aus (11) erhält, indem man für α eine Einheitswurzel einsetzt, führten ihn zu Ergebnissen über Dreiecks- und Fünfeckszahlen; einige dieser Jacobischen Identitäten kann man auch dadurch erhalten, daß man in den Modulargleichungen der Ordnung 3 bzw. 7 (siehe 7.1.9.) die Moduln k, k', λ, λ' als Funktion von $q = e^{-\pi K'/K}$ ausdrückt.

Viele Anwendungen der elliptischen Funktionen in der Zahlentheorie sind mit der komplexen Multiplikation verknüpft. Jacobi vermutete (1839), daß Gauß zur Arithmetik des Ringes $\mathbf{Z}[i]$ (der ganzen „Gaußschen Zahlen") durch Betrachtung der lemniskatischen Funktionen (siehe 7.1.5.) gelangt sei. Eisenstein benutzte diese Funktionen (1845) ([38], Bd. I, S. 291–298), um das biquadratische Reziprozitätsgesetz aufzustellen (und er führte für das quadratische Reziprozitätsgesetz einen analogen Beweis mit Hilfe der Funktion sin x); ist m eine ungerade Gaußsche Primzahl mit der „Norm"

$$p = N(m) = m\overline{m}$$

und ist n eine nicht durch m teilbare ganze Gaußsche Zahl, so ist das biquadratische Symbol $\left[\frac{n}{m}\right]$ per definitionem die Einheit i^k (k mod 4), kongruent $n^{(p-1)/4}$ modulo m (siehe Kapitel 5). Eisenstein betrachtete ein Repräsentantensystem $\{r\}$ der multiplikativen Gruppe $(\mathbf{Z}[i]/(m))^*$ modulo der Gruppe $\{\pm 1, \pm i\}$ der Einheiten; für jedes r gibt es eine Einheit i^k und einen Repräsentanten r' derart, daß $nr \equiv i^k r'$ (mod m), also

$$\mathrm{sl}\,(nr\tilde{\omega})/m = i^k\,\mathrm{sl}\,(r'\tilde{\omega})/m$$

ist, woraus $nr \equiv r' \dfrac{\mathrm{sl}\,(nr\tilde{\omega}/m)}{\mathrm{sl}\,(r'\tilde{\omega}/m)}$ (mod m) und, wenn man das Produkt über die $(p-1)/4$ Werte von r bildet,

$$n^{(p-1)/4} \equiv \prod_r \frac{\mathrm{sl}\,(nr\tilde{\omega}/m)}{\mathrm{sl}\,(r\tilde{\omega}/m)} \quad (\mathrm{mod}\ m)$$

folgt. Er fand ferner, wenn auch $n \equiv 1$ (mod $2+2i$) eine Gaußsche Primzahl ist, die Beziehung

$$\frac{\mathrm{sl}\,nv}{\mathrm{sl}\,v} = \prod_\beta \frac{x^4-\beta^4}{1-\beta^4 x^4}\,;$$

dabei ist $x = \mathrm{sl}\,v$, und β durchläuft $\{\mathrm{sl}\,(\varrho\tilde{\omega}/n)\}_\varrho$, wobei $\{\varrho\}$ ein Repräsentantensystem von $(\mathbf{Z}[i]/(n))^*$ modulo $\{\pm 1, \pm i\}$ ist (vgl. 7.1.7.). Das ergibt

$$\left[\frac{n}{m}\right] \equiv \prod_{\alpha,\beta} \frac{\alpha^4-\beta^4}{1-\alpha^4\beta^4}\,;$$

α durchläuft dabei $\{\mathrm{sl}\,(r\tilde{\omega}/m)\}_r$, β durchläuft $\{\mathrm{sl}\,(\varrho\tilde{\omega}/n)\}_\varrho$. Vertauscht man m und n (beide als kongruent 1 modulo $2+2i$ vorausgesetzt), so erhält man das Reziprozitätsgesetz

$$\left[\frac{n}{m}\right] = (-1)^{((p-1)/4)\,((q-1)/4)} \left[\frac{m}{n}\right] \quad \text{mit} \quad p = N(m) \quad \text{und} \quad q = N(n)\,.$$

Eisenstein führte einen anderen Beweis ([38], Bd. I, S. 299—308), indem er die von ihm erhaltenen Kongruenzen zwischen den Koeffizienten der gebrochen rationalen Funktion benutzte, die $\mathrm{sl}\,nv$ als Funktion von $\mathrm{sl}\,v$ ausdrücken; er fand

$$\left[\frac{n}{m}\right] P(n) = \left((-1)^{(p-1)/4}\, m\right)^{(q-1)/4} + Q(n)\,,$$

wobei P und Q Polynome vom Grad $(p-1)/4$ sind, ganze Gaußsche Zahlen als Koeffizienten haben und den Bedingungen $P(0) = 1$ und $Q(0) = 0$ genügen. Daraus folgt das Reziprozitätsgesetz, wenn man modulo n rechnet. Ein dritter Beweis von Eisenstein ([38], Bd. I, S. 453—460) läßt sich auch in einen Beweis des kubischen Reziprozitätsgesetzes umformen; Eisenstein benutzte das unendliche Produkt $\varphi(x)$ aus 7.1.11. anstelle von $\mathrm{sl}\,x$ (mit den Perioden $\omega = 1$, $\omega' = i$ für das biquadratische und $\omega = 1$, $\omega' = (-1+\sqrt{-3})/2$ für das kubische Reziprozitätsgesetz).

Schon 1853 hatte Kronecker beobachtet ([44], Bd. IV, S. 10—11), daß sich die „Abelschen" Gleichungen (d. h. die Gleichungen mit kommutativer Galoisscher Gruppe; siehe 2.2.2.) mit Koeffizienten aus $\boldsymbol{Q}(i)$ auf Gleichungen für die Teilung der Perioden lemniskatischer Funktionen zurückführen lassen (er kannte das analoge Resultat für die Abelschen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, die sich auf Kreisteilungsfunktionen zurückführen lassen; vgl. Kapitel 5). Im Jahre 1857 erkannte er, daß die Gleichungen der singulären Moduln (siehe 7.1.13.) und die der Teilung der Perioden für die singulären Moduln Abelsche Gleichungen über dem entsprechenden imaginär-quadratischen Körper K sind (vgl. 7.1.13.), und er vermutete, daß sich jede Abelsche Gleichung über K auf eine dieser Gleichungen zurückführen lasse ([44], Bd. V, S. 453—457 und S. 510—515); diese Vermutung — unter dem Namen „Kroneckers Jugendtraum" bekannt — ist eine der Wurzeln der Klassenkörpertheorie (siehe Kapitel 5), und Hilbert nannte sie (1900) als zwölftes seiner berühmten Probleme. Sie wurde (in einer etwas anderen Form) durch die Arbeiten von H. Weber (1898) [10], Fueter, Takagi (1920) und Hasse (1926) bewiesen.

Setzt man in der Modulargleichung n-ter Ordnung (n ungerade)

$$\lambda^2 = k'^2 = 1 - k^2\,,$$

so erhält man eine Gleichung in k^2, deren Wurzeln die Quadrate von singulären Moduln sind (komplexe Multiplikation mit $\sqrt{-n}$; vgl. 7.1.13.). Die Zerlegung dieser Gleichung ist mit der Klassifikation der binären quadratischen Formen verknüpft, deren Diskriminante gleich $-n$ ist. Kronecker hat daraus (1857) ([44], Bd. IV, S. 170—206) mehrere „Klassenbeziehungen" hergeleitet; das sind Rekursionsformeln, die es gestatten, gewisse Anzahlen von Klassen quadratischer Formen mit der Diskriminante $-n$ zu erhalten, indem man von arithmetischen Funktionen von n sowie entsprechenden Zahlen für $n' < n$ ausgeht. Kronecker hat die von ihm gefundenen Beziehungen in sehr kurzen Noten ohne Beweis veröffentlicht; Beweise stammen von Hermite (1861) ([36], Bd. II, S. 109—124) und H. J. Smith (1865) ([45], Bd. I, S. 321—337). Dank der Klassenbeziehungen hat Kronecker gewisse Reihen $\sum\limits_n a_n q^n$, wobei a_n von der Anzahl der Klassen mit der Diskriminante $-n$ abhängt, in elliptische Ausdrücke transformiert. Eine dieser Reihen ist

$$\Theta(K)^3 = (1 + 2\sum_n q^{n^2})^3\,;$$

das führt wieder auf einen (1785 von Legendre vermuteten) Satz von Gauß über die Beziehung zwischen der Anzahl der Zerlegungen von n in eine Summe von drei Quadratzahlen und der Anzahl der Klassen mit der Diskriminante $-n$. Hermite hat (1862) ([36], Bd. II, S. 241—254) einen direkten Beweis der Kroneckerschen Formeln für die oben genannten Reihen angegeben, indem er Produkte trigonometrischer Reihen gewisser Thetafunktionen betrachtete.

Die berühmte „Grenzwertformel" von Kronecker lautet: Man betrachtet ein von den Perioden 1 und τ ($\operatorname{Im}\tau > 0$) erzeugtes Gitter Γ und einen Charakter χ dieses Gitters (siehe (3.4.2.); er ist von der Gestalt $\chi(m + n\tau) = e^{2\pi i(mu+nv)}$ $(m, n \in \boldsymbol{Z})$

mit reellen Zahlen u und v, für die $(u, v) \neq (0, 0)$ vorausgesetzt wird, so daß der Charakter nicht trivial ist. Dann ist

$$\lim_{\varrho\to 0} \sum_{w\neq 0} \frac{\chi(w)}{|w|^{2+2\varrho}} = 2u^2\pi^2 + \frac{\pi}{3\,\mathrm{Im}\,\tau} \log \frac{1}{4}\, \vartheta_1'(0, e^{\pi i\tau})\, \vartheta_1'(0, e^{-\pi i\bar{\tau}})$$
$$- \frac{\pi}{\mathrm{Im}\,\tau} \log \vartheta_1(\pi(v + u\tau), e^{\pi i\tau})\, \vartheta_1(\pi(v - u\bar{\tau}), e^{-\pi i\bar{\tau}})$$

(„zweite Grenzwertformel"), wobei ϑ_1 die ungerade Jacobische Thetafunktion ist (siehe 7.1.11.; bei Kronecker sind die Bezeichnungen etwas anders). Kronecker schloß hieraus (1863) ([44], Bd. IV, S. 221–224), daß

$$\lim_{\varrho\to 0}\left(\sum_{m,n} \frac{1}{f(m, n)^{1+\varrho}} - \sum_{m,n} \frac{1}{f'(m, n)^{1+\varrho}}\right)$$
$$= \frac{2}{3\sqrt{D}} \log \left(\frac{a}{a'}\right)^{3/2} \frac{\vartheta_1'(0, e^{\pi i\tau'})\, \vartheta_1'(0, e^{-\pi i\bar{\tau}'})}{\vartheta_1'(0, e^{\pi i\tau})\, \vartheta_1'(0, e^{-\pi i\bar{\tau}})} \tag{12}$$

gilt, wenn $f(x, y)$ und $f'(x, y)$ zwei binäre quadratische Formen mit reellen Koeffizienten und derselben Diskriminante $-D < 0$ sind, a und a' die Koeffizienten von x^2 in f bzw. f' bezeichnen und $f(\tau, 1) = f(\tau', 1) = 0$ gilt. Kronecker verwendete diese Beziehung zur Lösung der Pell-Fermatschen Gleichung (siehe Kapitel 5), denn die Dirichletschen Formeln zur Berechnung der Klassenzahl unter Verwendung der Funktion L erlaubten ihm, mit Hilfe der linken Seite von (12) (mit variablen f, f' und gegebener Diskriminante $-D$) die Zahl $h(P)\, h(-Q) \log (T + U\sqrt{P})$ auszudrücken; dabei sind P und Q ungerade quadratfreie natürliche Zahlen, für welche $PQ = D \equiv 1 \pmod 4$ gilt, $h(P)$ (bzw. $h(-Q)$) ist die Klassenzahl des quadratischen Körpers $\mathbf{Q}(\sqrt{P})$ (bzw. $\mathbf{Q}(\sqrt{-Q})$), und $T + U\sqrt{P}$ ist eine Grundeinheit des Körpers $\mathbf{Q}(\sqrt{P})$ (d. h., (T, U) ist eine Minimallösung von $T^2 - PU^2 = 1$). Der gefundene Ausdruck schaltet die Thetafunktionen mit der dem Körper $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ entsprechenden komplexen Multiplikation ein, er ist sofort zur Berechnung verwendbar und ergibt einen Näherungswert für $T + U\sqrt{P}$ in der Gestalt $Ae^{B\pi\sqrt{D}}$ (mit rationalem B). Diese Ergebnisse sind mit der Zerlegung der Gleichung für die singulären Moduln verknüpft, und Hermite kam ihnen ziemlich nahe. Im Fall $D \equiv 3 \pmod 4$ schloß H. J. Smith (1865) ([45], Bd. I, S. 357) aus dieser Zerlegung, daß $e^{\pi\sqrt{D}}$ in der Nähe einer ganzen Zahl liegt, wenn es eine einzige uneigentlich primitive Klasse mit der Diskriminante $-D$ gibt (dies ist jedoch aufgrund des Satzes von Gel'fond-Schneider eine transzendente Zahl). Beispielsweise unterscheidet sich $e^{\pi\sqrt{163}}$ um weniger als 10^{-9} von einer ganzen Zahl. Kronecker veröffentlichte ab 1883 einen (ziemlich komplizierten) Beweis seiner Grenzwertformel, ([44], Bd. IV, S. 345–371), und er gab einen direkten Beweis einer anderen Formel (der „ersten Grenzwertformel" für

$$\lim_{\varrho\to 0}\left(-\frac{1}{\varrho} + \sum_{m,n} 2\pi f(m, n)^{-1-\varrho}\right),$$

wobei f eine quadratische Form ist) ([11], Kap. 8, und [9], Kap. 20).

7.1.16. *Modulfunktionen und automorphe Funktionen*

Um die elliptischen Funktionen von beliebigem (eventuell imaginärem) Modul $k = \sin v$ zu definieren, mußte Gauß seine Reihen mit Perioden

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi \cos v}{M(1, \cos v)} \quad \text{und} \quad \tilde{\omega}' = \frac{\pi \cos v}{M(1, \sin v)}$$

konstruieren, deren Verhältnis $t = \tilde{\omega}'/\tilde{\omega}$ einen streng positiven Realteil besitzt. Dadurch sicherte er die Konvergenz der Reihen; siehe 7.1.10. ([32], Bd. X^1, S. 194—206, und Bd. X^2, S. 72—84). Dies erforderte die Untersuchung des arithmetisch-geometrischen Mittels für komplexe Zahlen. Nach seinem *Tagebuch* hatte Gauß diese Untersuchung schon 1800 begonnen, und es scheint, daß er sich dazu seiner Reihen p, q und r (siehe 7.1.10.) bediente. In einer Aufzeichnung aus dem Jahre 1825 betrachtete er die Funktionen $\mathfrak{P}(t) = p(e^{-\pi t})$, $\mathfrak{Q}(t) = q(e^{-\pi t})$ und $\mathfrak{R}(t) = r(e^{-\pi t})$, die den Beziehungen

$$\mathfrak{P}(t+i) = \mathfrak{Q}(t)\,, \qquad \mathfrak{Q}(t+i) = \mathfrak{P}(t)\,, \qquad \mathfrak{R}(t+i) = e^{\pi i/4}\,\mathfrak{R}(t)$$

und

$$\mathfrak{P}(t) = t^{-1/2}\mathfrak{P}(1/t)\,, \qquad \mathfrak{Q}(t) = t^{-1/2}\mathfrak{R}(1/t)\,, \qquad \mathfrak{R}(t) = t^{-1/2}\,\mathfrak{Q}(1/t)$$

genügen. Diese Formeln ergeben sich aus der allgemeineren Identität

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\alpha(n+\omega)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\alpha\omega^2} \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-(\pi^2/\alpha)(n+(\alpha\omega i/\pi))^2}\,, \tag{13}$$

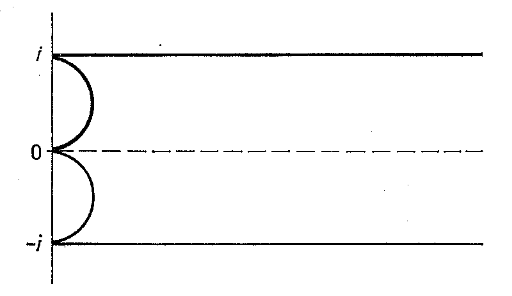
die Gauß schon 1808 gefunden hatte, indem er die Fourierentwicklung der als Funktion von ω (mit der Periode 1) aufgefaßten linken Seite berechnete ([32], Bd. III, S. 385—386, und Bd. X^1, S. 223 und S. 287). Er schloß hieraus auf $M(\mathfrak{P}(t)^2, \mathfrak{R}(t)^2) = 1/t$. Sind a, b und c durch $a = h\mathfrak{P}(t)^2$, $b = h\mathfrak{Q}(t)^2$ bzw. $c = h\mathfrak{R}(t)^2$ definierte komplexe Zahlen ($\operatorname{Re} t > 0$, $h \in \mathbf{C}$), so ist h ein spezieller Wert des Mittelwerts $M(a, b)$ (der „einfachste Wert"), und $M(a, c) = h/t$ ist der dem Mittelwert zwischen a und c zugeordnete Wert. Es bleibt zu zeigen, daß man t aus gegebenen a und b bestimmen kann ($c^2 = a^2 - b^2$). Gauß untersuchte die Wirkung einer homographischen Transformation $t \mapsto t' = \dfrac{\alpha t - \beta i}{\delta + \gamma t i}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$) auf die Funktionen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$. Mit Hilfe einer Kettenbruchentwicklung zeigte er, daß sich t' aus t durch eine Folge von Transformationen vom Typ $t \mapsto t + i$ oder $t \mapsto 1/t$ herleiten läßt (mit anderen Worten, die Gruppe $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z})$ wird durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt), und man kann die oben angegebenen Formeln anwenden. Es sind sechs Fälle zu betrachten gemäß der Klasse von $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ modulo 2. Ist insbesondere

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma(2) = \operatorname{Ker}\left(\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z}) \to \mathbf{SL}(2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\right)$$

(in der Kleinschen Terminologie „Kongruenzgruppe vom Niveau 2“), d. h. sind α und δ ungerade, während β und γ gerade sind, so werden die drei Funktionen mit einem Faktor $\zeta(\delta + \gamma t i)^{1/2}$ multipliziert, wobei ζ eine vierte Einheitswurzel ist. Also ändert sich $k'^2 = \mathfrak{Q}(t)^4/\mathfrak{P}(t)^4$ durch eine solche Transformation nicht. Gauß bemerkte, daß $t \mapsto t'$ die binäre quadratische Form $|x - ity|^2$ wie die Substitution mit der Matrix $\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$ transformiert, und er konnte die Theorie der „reduzierten Formen“ quadratischer Formen benutzen (siehe Kapitel 5): Er fand so, daß ein gegebenes t ($\operatorname{Re} t > 0$) durch ein Element aus $\Gamma(2)$ in genau ein t' mit $-1 < \operatorname{Im} t' \leqq 1$ und $-1 \leqq \operatorname{Im}(1/t') < 1$ transformiert werden kann. Der durch diese Ungleichungen bestimmte Bereich ist in der nachstehenden Figur angegeben



(der zum Bereich gehörige Rand ist stärker gezeichnet), die man in Arbeiten von Gauß aus dem Jahre 1805 finden kann; es ist der „Fundamentalbereich“ von $\Gamma(2)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} t > 0$ ([32], Bd. X¹, S. 224—226, und Bd. III, S. 386). Gauß untersuchte die Werte von k'^2 auf dem Rand des Fundamentalbereichs und auf der reellen Achse und konnte zeigen, daß diese Funktion jeden Wert genau ein einziges Mal annimmt, wenn t den Fundamentalbereich durchläuft (die Werte 0, 1 und ∞ werden auf dem Rand in den Punkten $t = 0, \infty$ bzw. i angenommen). Damit ist die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels im Komplexen abgeschlossen, und man kann die allgemeinen elliptischen Funktionen konstruieren ([32], Bd. VIII, S. 100—105).

Poisson stellte (1823) fest, wie sich die Funktion $\mathfrak{P}(t)$ verhält, wenn t durch $1/t$ ersetzt wird, und fand (1827) eine zu (13) analoge Beziehung. Jacobi erhielt (1828) ([34], Bd. I, S. 260—263) diese Ergebnisse aus den Eigenschaften der Thetafunktionen bei Vertauschen von K und K' (siehe 7.1.10.), mit $t = K'/K$. Die allgemeinere Transformation durch ein beliebiges Element aus $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})$ entspricht einer Vertauschung der Basis im Periodengitter; dies lieferte Jacobi „unendlich viele Formen von Thetafunktionen“. Jacobi bediente sich (1845) ([34], Bd. II, S. 117) einer solchen Transformation, um sich auf $\operatorname{Re} t \geqq \sqrt{3}/2$ zu beschränken, d. h. auf $|q| \leqq e^{-\pi\sqrt{3}/2}$, was sehr schnell konvergierende Reihen ergibt. Er fand ferner eine (nichtlineare) Differentialgleichung dritter Ordnung, die $y = \mathfrak{P}(t), \mathfrak{Q}(t), \mathfrak{R}(t)$ als Lösungen besitzt und die in der Gestalt

$$\frac{d \log (z^3 z'')}{\sqrt{16 z^3 z'' + \pi^2}} + \frac{dt}{z^2} = 0 \quad \text{mit} \quad z = y^{-2}$$

geschrieben werden kann. Da z^3z'' invariant ist, wenn $z = \varphi(t)$ durch

$$(\delta + \gamma ti)\,\varphi\big((\alpha t - \beta i)/(\delta + \gamma ti)\big)$$

ersetzt wird, zog Jacobi hieraus den Schluß, daß die allgemeine Lösung der Gleichung in y die Gestalt

$$(\delta + \gamma ti)^{-1/2} f\left(\frac{\alpha t - \beta i}{\delta + \gamma ti}\right)$$

besitzt, wobei $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ die Gruppe $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{R})$ durchläuft und f eine partikuläre Lösung ist ([34], Bd. II, S. 171—190). Eisenstein stellte (1847) Transformationsformeln für die Thetafunktionen auf (gleichzeitig mit einem Basiswechsel im Periodengitter); er benutzte dazu seine Methode, die Glieder einer Reihe oder eines unendlichen Produkts umzuordnen (dieselbe Methode lieferte ihm auch die Transformationsformeln n-ter Ordnung, die der Wirkung einer Matrix mit ganzzahligen Elementen und der Determinante $\pm n$ entsprechen; vgl. 7.1.8.). Die durch eine Matrix $\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ \nu & \varrho\end{pmatrix} \in \boldsymbol{GL}(2, \boldsymbol{Z})$ bewirkte Permutation des Gitters führt $w = m\omega + n\omega'$ in $w_1 = m\omega_1 + n\omega_1'$ mit $\omega_1 = \lambda\omega + \nu\omega'$ und $\omega_1' = \mu\omega + \varrho\omega'$ über. Die Basisänderung $(\omega, \omega') \mapsto (\omega_1, \omega_1')$ läßt also die Eisensteinschen Reihen (g, x) für $g \geqq 3$ invariant, vermehrt aber $(1, x)$ um eine Größe $a - bx$ und $(2, x)$ um b (siehe 7.1.6.); Eisenstein fand $a = 0$ und $b = \delta(2\nu\pi i/\omega\omega_1)$ mit $\delta = \operatorname{sgn} \operatorname{Im}(\omega/\omega')$. Das Produkt

$$f(x, z) = \prod_w \left(1 - \frac{x}{w + z}\right)$$

wird mit

$$\exp\left(\delta\,\frac{2\nu\pi i}{\omega\omega_1}\left(zx - \frac{x^2}{2}\right)\right)$$

multipliziert, und man erhält die Transformationsformeln für die in 7.1.11. definierten Funktionen θ und φ ([38], Bd. I, S. 374—394).

Cauchy, der unabhängig von Poisson auf die Beziehung $\mathfrak{P}(1/t) = t^{1/2}\mathfrak{P}(t)$ gestoßen war, entwickelte daraus (1840), indem er t gegen ix (mit rationalem x) streben ließ, eine Identität für die Gaußschen Summen; diese Identität gestattet den Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes (siehe Kapitel 5). Umgekehrt zeigte Kronecker (1880) ([44], Bd. IV, S. 278—294), wie man, ausgehend von der Identität für die Gaußschen Summen, auf die Transformationsformel für $\mathfrak{P}(t)$ kommt.[1]) Gerade mit Hilfe dieser Gaußschen Summen hat Hermite (1858) ([36], Bd. I, S. 487—496) die achte Einheitswurzel ε bestimmt, die bei der Transformation der Thetafunktionen auftritt:

$$\theta_{m,n}\big((\gamma\tau + \delta)\,x \mid \tau\big)\,e^{i\pi\gamma(\gamma\tau+\delta)x^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\gamma\tau + \delta}}\,\theta_{M,N}\left(x \,\middle|\, \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right)$$

[1]) Den Zusammenhang zwischen den „Gaußschen Summen" und den Thetareihen kannte schon Gauß; die Arbeit, in der er diese Summen (1808) einführte, enthält nämlich einen Beweis für die Transformation der Reihe $q(x)$ in ein unendliches Produkt.

mit

$$M = \delta m + \gamma n + \gamma\delta\,, \qquad N = \beta m + \alpha n + \alpha\beta\,, \qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})\,,$$

und indem man

$$\theta_{m,n}(x \mid \tau) = \sum_{s \in \boldsymbol{Z}} (-1)^{ns} \exp\left(i\pi\left((2s+m)\,x + \frac{\tau}{4}(2s+m)^2\right)\right)$$

setzt, so daß $\theta_{0,0}(x \mid \tau) = \vartheta_3(\pi x, e^{-i\pi\tau})$ in der Jacobischen Bezeichnung ist; $\theta_{1,0}$ $\theta_{0,1}$ und $\theta_{1,1}$ lassen sich analog durch ϑ_2, ϑ und ϑ_1 ausdrücken. Hermite leitete hieraus Transformationsformeln sowohl für $k^{1/4}$ und $k'^{1/4} = \dfrac{\theta_{0,1}(0 \mid \tau)}{\theta_{0,1}(0 \mid 2\tau)}$ her, die ihm die Rückführung der algebraischen Gleichungen vierten und fünften Grades auf Modulargleichungen ermöglichten, als auch für

$$(kk')^{1/12} = 2^{1/6} q^{1/24} \prod_{n \geqq 1} \left(1 + (-1)^n q^n\right) = \chi(\tau)\,,$$

was gegenüber der Änderung von τ in $-1/\tau$ invariant ist. Das Verhalten der holomorphen Funktionen k und k' der Variablen $\tau = it$ verblüffte Hermite ([36], Bd. II, S. 164): Man kann sie nicht in das Äußere der Halbebene $\operatorname{Im} \tau > 0$, in der sie definiert sind, fortsetzen; überdies haben ihre Taylorreihen in der Umgebung einer imaginären Quadratzahl τ_0 ein algebraisches konstantes Glied (komplexe Multiplikation; siehe 7.1.13.), während die anderen Koeffizienten von den Perioden elliptischer Integrale, die $\tau = \tau_0$ entsprechen, abhängen, d. h. von Zahlen transzendenten Charakters (man kann heute beweisen, daß dies tatsächlich transzendente Zahlen sind (Čudnovskij, 1974); Jacobi hatte schon den Fall $\tau_0 = i$ betrachtet und K und K' in Reihen nach Potenzen von $1 - 2k^2$ entwickelt). Riemann (nachgelassene Fragmente) ([41], S. 455—465) hat das Verhalten der Modulfunktionen im Fall $\operatorname{Im} \tau \to 0$ untersucht (zweifellos um Funktionen einer reellen Variablen mit einer überall dichten Menge von Unstetigkeiten zu erhalten, in Verbindung mit seinen Arbeiten über trigonometrische Reihen, 1852). Weierstraß bediente sich (1880) ([43], Bd. II, S. 212—221) der Eigenschaften dieser Funktionen, um zu zeigen, daß ein und dieselbe Reihe rationaler Funktionen in zwei disjunkten Gebieten zwei willkürliche holomorphe Funktionen darstellen kann.

Die Beziehung $\mathfrak{P}(1/2) = t^{1/2}\mathfrak{P}(t)$ wurde von Riemann (1859) ([41], S. 145—155) zur Aufstellung der Funktionalgleichung der ζ-Funktion benutzt (vgl. Kapitel 5). Riemann hatte die Herausgabe der Gaußschen Arbeiten vorbereitet (aber er starb, ehe er sie veröffentlichen konnte); in seinen Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe (1858—1859) ([41], Nachträge, S. 69—94) brachte er die Figur des Fundamentalbereichs von $\Gamma(2)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} t > 0$, und er zeigte, daß k^2 diesen Bereich konform auf die in 0 und 1 punktierte Ebene abbildet. Zu diesem Zweck untersuchte er zuerst die Verzweigung der Halbperioden K und K', wenn k^2 einen Halbkreis um 0, 1 oder ∞ beschreibt (dies sind die singulären Punkte der hypergeometrischen Gleichung, der K und K' als Funktionen von k^2 genügen; siehe 7.1.2.). Riemann erhielt so das erste Beispiel für die heute nach Picard und Lefschetz benannten Formeln ([23], S. 94) (in Arbeiten aus Riemanns Nachlaß

findet man die Picard-Lefschetzschen Formeln auch für ein hyperelliptisches Integral). Anschließend untersuchte Riemann die Verzweigung von $t = K'/K$ als Funktion von k^2, was ihn zum Ergebnis führte; er hat diese Untersuchung auf den Quotienten z zweier Lösungen einer allgemeinen hypergeometrischen Gleichung ausgedehnt (siehe Kapitel 8): Unter der Voraussetzung, daß die charakteristischen Exponenten in den singulären Punkten $x = 0, 1$ und ∞ sämtlich reell sind und die betrachteten Lösungen in der Umgebung der Null Entwicklungen mit reellen Koeffizienten besitzen, zeigte er, daß z ein krummliniges Dreieck beschreibt (dessen Winkel die Produkte der Differenzen der charakteristischen Exponenten mit π und dessen Seiten Geraden oder Kreislinien sind), wenn x die Halbebene $\operatorname{Im} x > 0$ durchläuft. Man kann also umgekehrt die Variable x der hypergeometrischen Gleichung als Funktion von z in diesem Dreieck auffassen. Dies gestattet, (mit Hilfe des Spiegelungsprinzips ([3], S. 344)) diejenigen algebraischen Variablentransformationen zu bestimmen, die eine hypergeometrische Funktion in eine andere überführen: Man wird auf das Problem geführt, einen Bereich auf der Riemannschen Zahlenkugel zu suchen, der auf zwei Arten in Dreiecke zerlegt werden kann, die durch Spiegelung auseinander hervorgehen. Riemann bemerkte ([41], Nachträge, S. 82—84), daß die regulären Polyeder solche Variablentransformationen bestimmen (Klein hat diese Tatsache wiederentdeckt — die Riemannschen Vorlesungen wurden erst 1902 publiziert — und sie zum Mittelpunkt seiner Studien über die Modulfunktionen gemacht). Es sei erwähnt, daß Riemann schon in seinem Artikel über die hypergeometrischen Funktionen (1857) ([41], S. 67—83) Variablentransformationen dieses Typs durchgerechnet hat, unter denen sich der Ausdruck für die absolute Invariante J als Funktion von k^2 befindet (siehe 7.1.4.). Er stellte außerdem fest ([41], Nachträge, S. 76—78), daß — ganz allgemein — dann, wenn die Variable x einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit isolierten singulären Punkten im ganzen Definitionsgebiet gleich einer Funktion $f(z)$ des Quotienten z zweier Lösungen der Gleichung ist, Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ existieren derart, daß $f(z) = f\big((\alpha z + \beta)/(\gamma z + \delta)\big)$ ist. Diese Matrizen, die der Verzweigung der Lösungen um singuläre Punkte der Gleichung entsprechen, bilden eine diskrete Untergruppe von $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{C})$ (jedoch sprach Riemann dies nicht aus). Ist umgekehrt $x = f(z)$ eine Funktion mit einer Invarianzeigenschaft dieser Art (das, was Poincaré „Kleinsche" Funktion nennen wird), so sind

$$Y_1 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1/2} \quad \text{und} \quad Y_2 = z\left(\frac{dx}{dz}\right)^{1/2}$$

Lösungen einer Differentialgleichung $y'' + a(x)\, y = 0$, wo x die Variable ist (a ist eine algebraische Funktion von x). Riemann bediente sich dieser Überlegungen, um Probleme der konformen Abbildung zu lösen: Abbildung eines sphärischen Polygons auf die obere Halbebene (1861, publiziert 1867 ([41], S. 316—320); das Polygon ist der geometrische Ort eines Einheitsvektors, der parallel zur Normalen einer Minimalfläche ist, deren Berandung aus Geradenstücken besteht); Dirichletsches Problem in einem von n Kreislinien berandeten Gebiet, wobei „sämmtliche Kreise

außer einander liegen" (veröffentlicht in [41], S. 440—444, 1876; er begnügte sich damit, das Gebiet auf eine verzweigte Überlagerungsfläche mit n Blättern der oberen Halbebene abzubilden).

Die konforme Abbildung der oberen Halbebene auf ein krummliniges Dreieck mit Hilfe des Quotienten z zweier Lösungen einer hypergeometrischen Gleichung wurde von Schwarz wiederentdeckt (1869, 1872); dieser hat einen Differentialoperator dritter Ordnung definiert, der gegenüber den Operationen von $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{C})$ auf z invariant bleibt,

$$[z]_x = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2,$$

und gezeigt, daß z Lösung der Differentialgleichung

$$[z]_x = \frac{1-\alpha^2}{2(x-1)^2} + \frac{1-\beta^2}{2x^2} + \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-1}{2x(x-1)}$$

ist, wenn $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$ die Winkel des Dreiecks sind. Wir wissen übrigens, daß Weierstraß die konforme Abbildung eines Kreisbogenpolygons auf die Halbebene in einer Vorlesung im Jahre 1863 behandelt hat; dieses Problem wurde von Schwarz untersucht. Fuchs hat (1876, 1880) die Frage gestellt, wann die Variable einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung uniforme Funktion des Quotienten zweier Lösungen ist, und diese Frage war der Ausgangspunkt der Poincaréschen Arbeiten über die Funktionen, die er „Fuchssche Funktionen" nannte (siehe unten). Schottky entdeckte (1875) erneut Funktionen, die gegenüber einer diskreten Untergruppe von $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{C})$ invariant sind, indem er Gebiete untersuchte, die von Kreisen begrenzt sind, wobei die einen Kreise außerhalb der anderen liegen.

Ab 1877 wurden den Modulfunktionen zahlreiche Arbeiten gewidmet. In diesem Jahr erschien ein Artikel von Dedekind, der die Funktion

$$\eta(\tau) = q^{1/12} \prod_{n \geqq 1} (1 - q^{2n}) \qquad (\text{mit } q = e^{\pi i \tau})$$

untersuchte. Die hauptsächlichsten Modulfunktionen, die bis dahin betrachtet wurden, lassen sich durch diese Funktion ausdrücken:

$$k^{1/4} = e^{\pi i/24}\sqrt{2}\,\frac{\eta(2\tau)}{\eta((1+\tau)/2)}, \qquad k'^{1/4} = e^{\pi i/24}\,\frac{\eta(\tau/2)}{\eta((1+\tau)/2)},$$

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = e^{-\pi i/12}\,\frac{\eta((1+\tau)/2)^2}{\eta(\tau)}, \qquad \vartheta_1'(0, q) = 2\pi\eta(\tau)^3$$

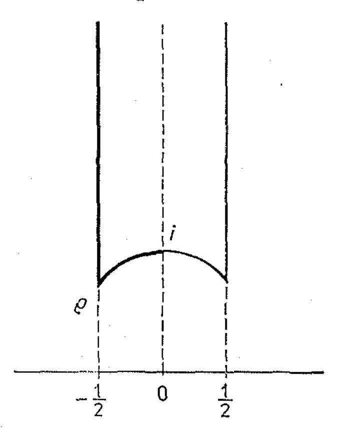
und die Diskriminante $\Delta = (2\pi)^{12}\,\eta(\tau)^{24}$;

Dedekind studierte ([41], S. 466—478) sorgfältig den arithmetischen Charakter der 24sten Einheitswurzel ε, die in der Transformationsformel

$$\eta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \varepsilon(\gamma\tau+\delta)^{1/2}\,\eta(\tau) \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in \boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})$$

auftritt. Klein begann mit seinen Arbeiten über die Modulfunktionen und Modulargleichungen in demselben Jahr; er benutzte dazu die absolute Invariante $J = g_2^3/\Delta$,

aufgefaßt als Funktion des Periodenverhältnisses τ. Nach den Schwarzschen Resultaten bildet τ die Halbebene $\operatorname{Im} J > 0$ konform auf ein krummliniges Dreieck mit den Winkeln $\pi/2, \pi/3$ und 0 ab: $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}\tau < 0$, $|\tau| > 1$, und durch Spiegelungen wird die ganze J-Ebene auf das Dreieck $-\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re}\tau < \frac{1}{2}$, $|\tau| \geqq 1$ im Fall $\operatorname{Re}\tau \leqq 0$ und $|\tau| > 1$ im Fall $\operatorname{Re}\tau > 0$, abgebildet, wie die folgende Figur zeigt (die fetten Teile der Berandung, die reellem $J \leqq 1$ entsprechen, gehören zum Gebiet dazu). Das ist genau ein Fundamentalbereich der Gruppe $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})$, die auf der Halbebene $\operatorname{Im}\tau > 0$ operiert, d. h., die durch die Gruppenoperationen erhaltenen



Transformierten des Dreiecks bilden eine Zerlegung der Halbebene. Die Umkehrfunktion $J(\tau)$ der obigen Abbildung läßt sich also zu einer auf der Halbebene $\operatorname{Im}\tau > 0$ holomorphen Funktion fortsetzen, wobei sie der Gleichung

$$J\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) = J(\tau) \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})$$

genügt und jeden komplexen Wert genau ein einziges Mal annimmt, wenn τ den Fundamentalbereich durchläuft. Die Funktion J realisiert die Halbebene $\operatorname{Im}\tau > 0$ als Überlagerungsfläche von $\boldsymbol{C}$ mit zwei Verzweigungspunkten $J = 0$ (Verzweigung dritter Ordnung, gegeben durch $\tau = (-1 + i\sqrt{3})/2$) und $J = 1$ (Verzweigung zweiter Ordnung, gegeben durch $\tau = i$).[1]) Um die der Modulargleichung n-ter Ordnung (n ungerade Primzahl) entsprechende Riemannsche Fläche zu konstruieren, benutzte Klein ([47], Bd. III, S. 13—85) das krummlinige Polygon, das die Vereinigung der Transformierten des Fundamentaldreiecks ist, welche durch die Operationen $\tau \mapsto \tau + r$ ($|r| \leqq (n-1)/2$) und $\tau \mapsto -1/\tau$ entstehen, die, wenn man ihnen die Division durch n folgen läßt, die $n + 1$ Transformationen n-ter Ordnung liefern. Neben der rationalen Invarianten J hat Klein die „Modulfunktionen der

[1]) Picard benutzte die nicht verzweigte Überlagerungsfläche von $\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}$, um seinen berühmten Satz zu beweisen: Eine ganze Funktion nimmt alle komplexen Werte bis auf höchstens einen an; sonst könnte man daraus eine holomorphe Abbildung von $\boldsymbol{C}$ in die obere Halbebene herleiten, also in die Einheitskreisscheibe, was absurd ist (Satz von Liouville).

Stufe n" betrachtet, deren Stabilisator in $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})$ die „Kongruenzgruppe" $\Gamma(n) = \text{Ker}\,(\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z}) \to \boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}))$ ist, z.B. das Doppelverhältnis k^2 (Stufe 2), die Irrationalität $o = k' - ik$ des Oktaeders (Stufe 4), $k^{1/2}$ und $k'^{1/2}$ (Stufe 8), $k^{1/4}$ und $k'^{1/4}$ (Stufe 16), $(kk')^a$ für $a = 1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ oder $\frac{1}{12}$. Mit Hilfe der Invariantentheorie kann man a priori die Gestalt der Modulargleichung für die verschiedenen Modulfunktionen bestimmen; die genaue Berechnung stammt von Hurwitz (1883) für die Ordnungen $n = 23$ und 47 sowie von Fiedler (1885) für $n = 39, 55, 71, 31$ und 79 ([47], Bd. III, S. 255–282). Gierster (1879–1883) und Hurwitz (1883–1885) haben Modulargleichungen verschiedener Stufen aus Klassenbeziehungen gewonnen, die den von Kronecker angegebenen analog sind (siehe 7.1.15.). Klein interessierte sich noch allgemeiner (1879) ([47], Bd. III, S. 169–178) für Modulfunktionen, die von einer Untergruppe Γ von $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})$ stabilisiert werden, welche den endlichen Index μ hat, aber sonst beliebig ist; der Fundamentalbereich von Γ in der oberen Halbebene ist die Vereinigung von 2μ krummlinigen Dreiecken, und seine Seiten werden mit Hilfe der Operationen von Γ einander paarweise zugeordnet. Neben den Modulfunktionen betrachtete Klein auch die „Modulformen"; das sind homogene Funktionen des Periodenpaares (ω, ω'), die gegenüber den Operationen einer Untergruppe Γ von $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})$ über diesem Paar invariant bleiben: beispielsweise g_2, g_3 und, allgemeiner, die Eisensteinschen Reihen $(2n^*, 0)$ (siehe 7.1.6.), die Diskriminante Δ, die Werte von $\wp$ in den Periodenverhältnissen. Ist f eine homogene Modulform n-ten Grades, so gilt $f(\omega, \omega') = \omega^n g(\tau)$ mit $\tau = \omega'/\omega$ und $g(\tau) = f(1, \tau)$; die Operationen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma$ wirken folgendermaßen auf g:

$$g(\tau) = (\gamma\tau + \delta)^n g\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right),$$

und man sagt auch, g sei eine Modulform vom „Gewicht" $-n/2$. Im Fall der Gruppe $\Gamma = \boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{Z})$ hat Hurwitz (1881) gezeigt, daß die (auf der oberen Halbebene holomorphen) Modulformen Polynome in g_2 und g_3 sind (die die Gewichte 2 bzw. 3 haben; vgl. 7.1.4., die Algebra der Invarianten eines Polynoms vierten Grades). Die Modulform Δ ist vom Gewicht 6 und wird nicht auf der oberen Halbebene, sondern nur im Unendlichen gleich 0 (d. h., wenn $q = e^{2i\pi\tau}$ gegen 0 strebt), und jede im Unendlichen verschwindende Modulform („Spitzenform") ist durch Δ teilbar (vgl. [16], Kap. VII). Die Modulfunktionen können als Quotienten zweier Modulformen gleichen Gewichts geschrieben werden.

In den Jahren 1881–1882 entwickelte Poincaré ([48], Bd. II) die allgemeine Theorie der diskreten Untergruppen von $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{R})$ — der „Fuchsschen Gruppen" — und der auf der oberen Halbebene meromorphen Funktionen, die gegenüber den Operationen dieser Gruppe invariant sind — der „Fuchsschen Funktionen".[1])

[1]) Poincaré (vgl. [49], S. 50) hat zuerst geglaubt, daß die einzigen Fuchsschen Gruppen die „arithmetischen Gruppen" sind, wie Klein sie betrachtet hatte. Man weiß heute, daß diskrete Untergruppen von $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{R})$, die stetig von Parametern abhängen, ziemlich selten in der Theorie der Lieschen Gruppen auftreten (Margulis, 1975).

Eine Fuchssche Gruppe besitzt einen Fundamentalbereich, dessen Begrenzung aus Kreisbögen mit reellem Mittelpunkt, aus vertikalen Halbgeraden oder aus Segmenten der reellen Achse besteht; die Seiten „erster Art" (solche, die nicht in $\boldsymbol{R}$ enthalten sind) sind paarweise konjugiert bezüglich der Gruppenoperationen. Umgekehrt hat Poincaré ein Polygon dieses Typs mit einer geraden Anzahl von Seiten erster Art untersucht, die zu Paaren von Seiten gleicher „Länge" im Sinne der nichteuklidischen Geometrie der oberen Halbebene („Poincarésche Halbebene"; vgl. 9.4.3.) angeordnet sind. Jedes dieser Paare bestimmt eine nichteuklidische Bewegung, die die eine Seite auf die andere bringt, und die so erhaltenen Bewegungen erzeugen eine Untergruppe G von $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{R})$, die diskret ist, wenn die mit Hilfe der Operationen von G erhaltenen Transformierten des betrachteten Polygons eine Zerlegung der Halbebene bilden. Poincaré fand dafür eine notwendige und hinreichende Bedingung (die Summe der Winkel eines „Zykels erster Kategorie" muß gleich 0 sein oder die Form $2\pi/n$ mit ganzzahligem n haben; die betreffenden Zyklen sind die Mengen der nichtreellen Ecken des Polygons, die in einem Orbit von G enthalten sind). Er suchte daraufhin die Fuchsschen Funktionen für eine gegebene Gruppe G in Gestalt eines Quotienten zweier „Fuchsscher Thetafunktionen", d. h. solcher Funktionen, für welche

$$\Theta\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = (\gamma z + \delta)^{2m}\, \Theta(z) \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G$$

gilt; dies sind die heute „automorphe Formen" genannten Funktionen (nach einem von Klein eingeführten Terminus). Poincaré konstruierte Fuchssche Thetafunktionen mit Hilfe der „Poincaréschen Reihen"

$$\Theta(z, H) = \sum_{g \in G} H(gz) \left(\frac{dg\, z}{dz}\right)^m,$$

wobei

$$gz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \frac{dg\, z}{dz} = (\gamma z + \delta)^{-2} \quad \text{für} \quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

und H eine rationale Funktion ist, und stellte die Konvergenz dieser Reihen für $m > 1$ fest, indem er Hilfsmittel aus der nichteuklidischen Geometrie benutzte. Für gegebenes m ist der Vektorraum der auf der Halbebene holomorphen Reihen $\Theta(z, H)$ von endlicher Dimension; jede von ihnen wird im Fundamentalpolygon nur endlich oft gleich null. Poincaré zeigte, daß jede Fuchssche Thetafunktion, die in den „Ecken zweiter Kategorie" des Polygons (das sind die Berührungspunkte zweier Seiten auf der reellen Achse) verschwindet, die Gestalt $\Theta(z, H)$ mit passendem H hat und daß jede Fuchssche Funktion Quotient zweier solcher Funktionen ist. Er stellte außerdem fest: Sind x und y zwei Fuchssche Funktionen von z für die gleiche Gruppe G, so sind sie durch eine algebraische Relation $\psi(x, y) = 0$ (ψ ein Polynom) miteinander verknüpft, und jede andere Fuchssche Funktion für G läßt sich in der Gestalt $R(x, y)$ mit rationalem R schreiben. Daraus folgt, daß

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}} \quad \text{und} \quad v_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

einer Differentialgleichung $\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$ mit rationalem φ genügen. Die Zyklen der Ecken ergeben reguläre Singularitäten der Gleichung (siehe 8.2.1.); ist die Summe der Winkel gleich $\lambda\pi$, so ist die Differenz der charakteristischen Exponenten in den entsprechenden Singularitäten gleich λ. Umgekehrt suchte Poincaré nach Bedingungen ([48], Bd. II, S. 319—329), unter denen bei gegebener Differentialgleichung $\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$ mit rationalem φ und gegebenem $\psi(x, y) = 0$ (ψ ein Polynom) die Variable x eine Fuchssche Funktion des Quotienten z zweier Lösungen dieser Differentialgleichung ist (nun „Fuchssche Gleichung" genannt; siehe oben). Ist dies der Fall, so ist y ebenfalls eine Fuchssche Funktion von z, und es ist gelungen, die durch $\psi(x, y) = 0$ dargestellte algebraische Kurve durch uniforme Funktionen ein und derselben Variablen z zu parametrisieren (Problem der „Uniformisierung"). Für gegebenes $\psi(x, y) = 0$ (birationale Transformationen sind übrigens gestattet; vgl. 7.2.5.) klassifizierte Poincaré zwei Differentialgleichungen, die dieselben (als regulär vorausgesetzten) Singularitäten mit denselben charakteristischen Exponenten haben, als zum gleichen „Typ" gehörig. Die Differenzen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ der charakteristischen Exponenten einer Fuchsschen Gleichung mit s Singularitäten genügen den folgenden Bedingungen: 1. Jedes α_i ($i = 1, \ldots, s$) ist gleich null oder gleich dem Reziproken einer ganzen Zahl. 2. Für $s \geqq 1$ ist $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i < s + 2g - 2$, und für $s = 0$ ist $g \geqq 2$, wobei mit g das Geschlecht (vgl. 7.2.7.) der durch $\psi(x, y) = 0$ dargestellten Kurve bezeichnet wird. Diese Bedingungen charakterisieren das, was Poincaré einen „Fuchsschen Typ" von Differentialgleichungen nannte ([48], Bd. II, S. 319—324). Er zeigte, daß ein Fuchsscher Typ höchstens eine Fuchssche Gleichung enthält; die Existenz einer solchen Gleichung würde das Problem der Uniformisierung lösen, und es genügt, die Existenz einer Fuchsschen Gleichung in einem „untergeordneten" Typ zu zeigen (wobei man singuläre Punkte hinzugefügt und die α_i durch ganze Zahlen dividiert hat), um mit den Fuchsschen Funktionen alle linearen Differentialgleichungen mit in x und y rationalen Koeffizienten zu integrieren. Poincaré zeigte so, daß jede Gleichung $\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x)$ mit rationalem φ, die nur reguläre Singularitäten besitzt, wobei die beiden charakteristischen Exponenten gleich sind oder sich um das Reziproke einer ganzen Zahl unterscheiden, mit Hilfe der Fuchsschen Funktionen integriert werden kann. Die von Klein und Poincaré gemachten Versuche, das Problem der Uniformisierung für Kurven vom Geschlecht $g \geqq 2$ zu lösen (vgl. 7.2.7.) („Kontinuitätsmethode"), sind übrigens äußerst wenig streng gewesen. Die Idee war, die Fuchsschen Gruppen und die Fuchsschen Typen als Punkte zweier „Mannigfaltigkeiten" S und S' aufzufassen und die Abbildung von S in S' zu benutzen, die jeder Gruppe den Typ einer entsprechenden Fuchsschen Gleichung zuordnet: Diese Abbildung ist injektiv, und S und S' haben die gleiche Dimension (die Gruppen und die Typen hängen von der gleichen Anzahl von Parametern ab; unglücklicherweise waren die Mannigfaltigkeiten S und S' nicht ganz klar definiert) ([48], Bd. II, S. 329—401).

Das Problem wurde erst 1907 gleichzeitig von Poincaré ([48], Bd. IV, S. 70—139) und von Koebe gelöst.

Am Anfang dieses Abschnitts haben wir gesehen, daß Gauß die Reduktion der definiten binären quadratischen Formen zum Aufbau der Theorie der Modulfunktion k^2 benutzte. H. J. Smith hat (1877) ([45], Bd. II, S. 224—241) die Reduktion der indefiniten binären quadratischen Formen mit Hilfe der Gruppe $\Gamma(2)$ und deren Fundamentalbereich interpretiert; er nahm eine Idee von Hermite auf und stellte die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ durch den Halbkreis $y > 0$, $a + 2bx + c(x^2 + y^2) = 0$ dar, der auch durch $-\bar{\tau} = (a + b\tau)/(b + c\tau)$ mit $\tau = x + iy$ beschrieben werden kann. Setzt man $k^2 = \frac{1}{2} + X + iY$, $\lambda^2 = \frac{1}{2} + X - iY$ in die Modulargleichung n-ter Ordnung ein, so ergibt sich die Gleichung einer algebraischen Kurve, aus welcher man die Klassifikation der Formen mit der Diskriminante $b^2 - ac = n$ und ihre Reduktion ablesen kann. Poincaré ([48], Bd. II, S. 463—511) hat einen Zusammenhang zwischen den Fuchsschen Gruppen und der Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen hergestellt und dieser Frage einen Artikel gewidmet (1886): Die Zusammenhängende Komponente des neutralen Elements in der Untergruppe von $\boldsymbol{SL}(3, \boldsymbol{R})$, dem Stabilisator einer solchen quadratischen Form, ist isomorph zu $\boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{R})$ (vom Standpunkt der projektiven Geometrie definiert die Form einen reellen Kegelschnitt; die betrachtete Gruppe ist die Gruppe der Transformationen von $\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{R})$, die das Innere des Kegelschnittes invariant lassen, und sie kann mit der Gruppe der nichteuklidischen Bewegungen der Ebene nach dem Cayleyschen Modell identifiziert werden; siehe 3.4.3.). Somit definiert der Stabilisator der Form in $\boldsymbol{SL}(3, \boldsymbol{Z})$ eine Fuchssche Gruppe. Im zwanzigsten Jahrhundert wurden viele andere Zusammenhänge zwischen den Modulfunktionen und den automorphen Funktionen einerseits und der Zahlentheorie andererseits entdeckt (wir verweisen auf die Arbeiten von Hecke) [16]; ferner hat sich die Theorie der automorphen Funktionen in Verbindung mit der Theorie der Lieschen Gruppen und ihrer Darstellungen entwickelt und bedeutend verallgemeinert [16 bis].

7.2. Abelsche Integrale

7.2.1. Das Abelsche Theorem

Wie wir gesehen haben, hatte Euler vergeblich versucht, sein Additionstheorem auch außerhalb der elliptischen Integrale anzuwenden (siehe 7.1.3.). Schon zu Beginn seines Schaffens hatte Abel sich bemüht, den allgemeinsten Fall der Integrale zu behandeln, die man heute die *Abelschen Integrale* nennt: Dies sind die Integrale der Gestalt $\int f(x, y)\, dx$, wobei f eine rationale Funktion zweier Variabler und y mit x durch eine algebraische Gleichung $\chi(x, y) = 0$ verknüpft ist. Zur Zeit Abels war es selbst ihm nicht möglich, ein solches Integral genau zu deuten, denn y ist keine eindeutige analytische Funktion von x: Die Integration muß längs eines

Weges auf der Riemannschen Fläche erfolgen, die durch die Gleichung $\chi = 0$ definiert ist (siehe 7.2.5. und Kapitel 4); übrigens war die (erst kurz vorher von Cauchy eingeführte; siehe Kapitel 4) Integration längs eines Weges in der Ebene noch praktisch unbekannt, obwohl sie Abel zweifellos nicht fremd war (man findet Beispiele dafür in einem seiner Manuskripte aus dem Jahre 1826).

Abel war inzwischen in der Lage, für die Abelschen Integrale einen Satz anzugeben, der auf natürliche Art und Weise das ausdrückt, was Euler für die elliptischen Integrale formuliert hatte. Hier der Wortlaut, wie man ihn in der großartigen Abhandlung nachlesen kann, die Abel im Jahre 1826 zur Einreichung bei der Pariser Akademie der Wissenschaften verfaßt hat (übersetzt nach [33], Bd. I, S. 145–211):

„Hat man mehrere Funktionen, deren Ableitungen Wurzeln ein und derselben algebraischen Gleichung sein können, die als Koeffizienten rationale Funktionen der gleichen Variablen besitzt, so kann man die Summe von beliebig vielen ähnlichen Funktionen durch eine algebraische logarithmische Funktion ausdrücken, vorausgesetzt, man stellt zwischen den Variablen der betreffenden Funktionen eine gewisse Anzahl algebraischer Beziehungen auf."

Das Eulersche Additionstheorem gibt z.B. eine algebraische Beziehung zwischen den Variablen x_1, x_2, x_3 an derart, daß $\Pi(x_1) + \Pi(x_2) + \Pi(x_3)$ ein algebraisch-logarithmischer Ausdruck ist, wobei Π ein elliptisches Integral bezeichnet. Im allgemeinen muß man *mehrere* algebraische Relationen anstelle der einen Eulerschen Gleichung aufschreiben: Wenn z.B. die Irrationalität, die in den Integralen auftritt, die Quadratwurzel eines Polynoms fünften oder sechsten Grades ist, so müssen es zwei Beziehungen sein, wie wir sehen werden.

Die Abelsche Idee besteht darin, eine Hilfsgleichung $\theta(x, y) = 0$ zu betrachten, wobei θ ein von gewissen Parametern $a^{(j)}$ linear abhängiges Polynom ist. Die Elimination von y aus den Gleichungen $\chi(x, y) = 0$ und $\theta(x, y) = 0$ liefert eine Beziehung $r(x) = 0$ (siehe [3], S. 61) und die Werte von y, die den Wurzeln x dieser Gleichung entsprechen, in rationaler Gestalt: $y = \varrho(x, a^{(j)})$. Abel isolierte in r den größten von den $a^{(j)}$ unabhängigen Faktor F_0 und setzte $F = r/F_0$. Die Gleichung $F(x) = 0$ bestimmt x als algebraische Funktion der $a^{(j)}$ mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ ($\mu = \deg F$), und es gilt $dx = -\frac{\delta F}{F'}$, wobei δF das Differential von F bezüglich der $a^{(j)}$ bezeichnet. Ist $f(x, y)$ eine rationale Funktion, so erhält man auf diese Weise

$$f(x, y)\, dx = -\frac{f(x, \varrho(x, a))}{F'(x)}\, \delta F\,,$$

eine Differentialform in $a = (a^{(j)})_j$ mit von x rational abhängigen Koeffizienten. Dann ist die Differentialform

$$dv = \sum_{i=1}^{\mu} f(x_i, y_i)\, dx_i \qquad (\text{mit } y_i = \varrho(x_i, a))$$

symmetrisch in den x_i, also ist sie eine rationale Form in a, und ihre Stammfunktion v ist eine algebraisch-logarithmische Funktion der Parameter $a^{(j)}$.

Wir werden — wie Abel es in einer im dritten Band von *Crelle's Journal* (1828) veröffentlichten Arbeit getan hat ([33], Bd. I, S. 444—456) — den sogenannten *hyperelliptischen* Fall, in dem $\chi(x, y) = y^2 - \varphi(x)$ mit einem Polynom φ beliebigen Grades ν gilt, näher erläutern. Hat φ den Grad 4, so läßt sich dieser Fall auf den elliptischer Integrale zurückführen; Abel gewann hieraus seine Additionstheoreme für beliebig viele elliptische Integrale (*Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, 1829) ([33], Bd. I, S. 518—617); Abel hatte 1825 eine Arbeit *Sur la comparaison des fonctions transcendantes* ([33], Bd. II, S. 55—66) fertiggestellt — die aber nicht zu seinen Lebzeiten publiziert wurde —, in welcher er den Fall $\chi(x, y) = \alpha(x) + \alpha_1(x)\, y$ der elementaren Integrale behandelte). Im hyperelliptischen Fall kann man, falls $\varphi = \varphi_1\varphi_2$ ist, $\theta(x, y) = Q(x)\, y - P(x)\, \varphi_1(x)$ setzen, wobei die Parameter $a^{(j)}$ die Koeffizienten der Polynome P, Q vom Grad m bzw. n sind. Dann ist $F = P^2\varphi_1 - Q^2\varphi_2$ vom Grad $\mu \geqq m + n + (\nu/2)$. Ist $f(x)$ ein Polynom und α eine Konstante, bezeichnen wir mit $x_1, \dots, x_\mu$ die Wurzeln von $F(x) = 0$ und wählen wir Vorzeichen $\varepsilon_k = \pm 1$ und Werte der Wurzeln derart, daß

$$P(x_k)\sqrt{\varphi_1(x_k)} = \varepsilon_k Q(x_k)\sqrt{\varphi_2(x_k)} \qquad (1 \leqq k \leqq \mu) \tag{14}$$

ist, dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\mu} \varepsilon_k \int_0^{x_k} \frac{f(x)\, dx}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}$$

$$= -\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} \log \frac{P(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + Q(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{P(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - Q(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} + R + C\,,$$

wobei R der Koeffizient von $1/x$ in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \log \frac{P(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + Q(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{P(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - Q(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}$$

nach Potenzen von $1/x$ und C eine Konstante ist. Differenziert man nach α und nimmt man f als durch $x - \alpha$ teilbar an, so erhält man andere Gleichungen, und schließlich hat man eine Gleichung von demselben Typ für alle hyperelliptischen Integrale $\int \frac{R(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}\, dx$ mit rationalem R (indem man R in Partialbrüche zerlegt). Abel zeigte: Ist R ein Polynom von einem Grad kleiner als $p = [(\nu - 1)/2]$ ([ ] bedeutet größte ganze Zahl; der Grad von φ ist $\nu = 2p + 1$ oder $2p + 2$), so reduziert sich die rechte Seite der entsprechenden Gleichung auf eine Konstante (Integrale *erster Gattung*).

Das Polynom θ hängt von $m + n + 2$ Parametern $a^{(j)}$ ab; daher kann man die Werte von $x_1, \dots, x_{\mu'}$, wenn $\mu' \leqq m + n + 1$ ist, vorgeben. Damit wird den $a^{(j)}$ ein System von μ' linearen und homogenen Bedingungen (14) mit $1 \leqq k \leqq \mu'$ auferlegt. Ist $\mu' = m + n + 1$, so sind die $a^{(j)}$ durch diese Bedingungen bis auf einen Faktor bestimmt, und die übrigen $\mu - \mu'$ Wurzeln $x_{\mu'+1}, \dots, x_\mu$ sind als algebraische Funktionen der μ' vorhergehenden definiert. Man sieht leicht, daß

$\mu - \mu' = p$ ist, unabhängig von der Wahl von m und n; also ist p die Anzahl der algebraischen Beziehungen, die in der Formulierung des Abelschen Theorems zwischen den Variablen aufzustellen sind. Für $p = 1$ ist $\nu = 3$ oder 4, und es handelt sich um elliptische Integrale; man begegnet wieder dem Eulerschen Theorem, jetzt verallgemeinert auf den Fall der Addition beliebig vieler Integrale.

Abel führte analoge, aber viel kompliziertere Berechnungen für den in seiner Abhandlung von 1826 untersuchten allgemeinen Fall durch, daß das Polynom $\chi(x, y)$ beliebig ist. In diesem Fall kann die Anzahl p der zwischen den Variablen aufzustellenden Relationen echt kleiner sein als die Dimension γ des Vektorraumes der rationalen Funktionen $f(x, y)$ mit der Eigenschaft, daß sich die entsprechende algebraisch-logarithmische Funktion v auf eine Konstante reduziert; diese Funktionen haben nach Abel die Gestalt

$$f(x, y) = \frac{f_1(x, y)}{\chi'_y(x, y)},$$

wobei f_1 ein Polynom ist, das gewissen linearen Relationen genügen muß (vgl. 7.2.5.). Die Abelsche Abhandlung mit dem Titel *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* wurde erst 1841 publiziert, nach der ersten Ausgabe der gesammelten Werke Abels (1839). Diese Verzögerung ist auf die mangelnde Sorgfalt Cauchys, dem diese Abhandlung übergeben worden war, und auf dessen Emigration nach der Revolution von 1830 zurückzuführen. Jacobi, der sich der Bedeutung des Abelschen Theorems, seit er davon Kenntnis hatte, wohl bewußt war, brachte seine Entrüstung über die Nachlässigkeit der Pariser Akademie in einem Brief an Legendre (1829) zum Ausdruck. Er bewertete dieses Theorem als „die vielleicht wichtigste [Entdeckung] dessen, was das Jahrhundert, in dem wir leben, in der Mathematik hervorgebracht hat" ([34], Bd. I, S. 439) und fügte in einem Bericht an Crelle (1832) hinzu: „. . ., obgleich erst eine künftige, vielleicht späte, große Arbeit ihre ganze Bedeutung aufweisen kann" ([34], Bd. I, S. 379). Und was Legendre betrifft, so nannte er es *monumentum aere perennius*.

Jacobi gab verschiedene Beweise des Abelschen Theorems für den hyperelliptischen Fall an. Im Fall der Integrale erster Gattung interpretierte er es dahingehend, daß es eine algebraische Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\sum_i \frac{x_i^k \, dx_i}{\sqrt{\varphi(x_i)}} = 0 \qquad (0 \leqq k \leqq p - 1)$$

liefert. Eine seiner Ideen bestand darin, das Problem der Anziehung eines Massenpunktes durch zwei feste Massenzentren höherer Dimension zu benutzen, indem die Masse des einen Zentrums gleich null gesetzt wird, so wie Lagrange es im dreidimensionalen Fall getan hatte (siehe 7.1.3.; [34], Bd. II, S. 63). Eine andere Methode Jacobis (1846) ([34], Bd. II, S. 135–144) wurde von dem Eulerschen Beweis des Additionstheorems der elliptischen Integrale inspiriert (siehe 7.1.3.); ist φ ein Polynom vom Grad $2p + 2$ und ist die Anzahl n der x_i mindestens gleich $p + 1$, so bestimmt man Polynome R, S und T vom Grad n und ein Polynom U

vom Grad $n - p - 1$ derart, daß $S^2 - RT = U^2$ ist (z.B. wählt man T und U beliebig und verlangt von S, daß es in allen Nullstellen von T denselben Wert wie U annimmt). Das Differentialgleichungssystem ist dann erfüllt, wenn die x_i die Wurzeln der Gleichung $Ry^2 + 2Sy + T = 0$ (y ein Parameter) sind; es gilt

$$Ry^2 + 2Sy + T = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k Y_k x^{n-k}$$

mit Polynomen Y_k zweiten Grades in y. Jacobi eliminierte y aus den Gleichungen $u_1 = Y_1/Y_0$ und $u_2 = Y_2/Y_0$; das führt auf eine Gleichung zweiten Grades zwischen u_1 und u_2, und die anderen elementarsymmetrischen Funktionen u_k ($3 \leqq k \leqq n$) der x_i lassen sich linear durch u_1 und u_2 ausdrücken. Man kann nachweisen, daß die Anzahl der willkürlichen Konstanten in diesen Beziehungen zwischen den u_i ($1 \leqq i \leqq n$) gleich p ist; folglich ist dies das allgemeine Integral. Auch Richelot hat dieses Differentialgleichungssystem gelöst, indem er die Lagrangesche Methode (siehe 7.1.3.) für die elliptischen Integrale adaptierte.

Abel hat noch andere Ergebnisse der Theorie der nach ihm benannten Integrale gefunden. Fragmente aus dem Jahre 1823 ([33], Bd. II, S. 87—188) enthalten die Rückführung von Integralen der Gestalt $\int f(x, \sqrt{p})\,dx$, wobei f eine rationale Funktion und p ein Polynom n-ten Grades in x ist, auf Linearkombinationen von

$$\int x^m \sqrt{p}\,dx\,, \quad \int \frac{\sqrt{p}}{x+a}\,dx\,, \quad \int \frac{x^m}{\sqrt{p}}\,dx \qquad (0 \leqq m \leqq n-2)\,,$$

$$\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{p}}$$

und elementaren Integralen. Im gleichen Jahr verfaßte Abel eine Arbeit *Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* ([33], Bd. II, S. 43—46), die Verallgemeinerung der Symmetrieeigenschaften zwischen dem Parameter und dem Argument für die elliptischen Integrale dritter Gattung (siehe 7.1.4.): Es gilt z.B. mit einem Polynom $\varphi(x) = \sum_n \alpha_n x^n$ die Beziehung

$$\sqrt{\varphi(a)} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\varphi(x)}} - \sqrt{\varphi(x)} \int \frac{da}{(a-x)\sqrt{\varphi(a)}}$$
$$= \sum_{m,n} \frac{n-m}{2} \alpha_{m+n+2} \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \int \frac{a^m\,da}{\sqrt{\varphi(a)}}$$

(das Abelsche Resultat ist allgemeiner, denn man kann hier die Funktion $1/\sqrt{\varphi(x)}$ durch eine Lösung einer linearen Differentialgleichung mit Polynomkoeffizienten ersetzen). Aus dem Jahr 1826 stammt eine interessante Arbeit ([33], Bd. II, S. 40 bis 42), in der er eine Funktion y betrachtete, welche Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\varphi(y)}}{f(y)}$$

ist; hierbei ist $\varphi(y) = \sum_{j=0}^{m} (a_j - y)$ und f eine gebrochen rationale Funktion, die in den (als verschieden vorausgesetzten) Punkten a_j $(0 \leqq j \leqq m)$ weder Nullstellen noch Pole besitzt; mit anderen Worten, y ist die Umkehrfunktion des Integrals

$$t \mapsto \int \frac{f(t)}{\sqrt{\varphi(t)}}\, dt .$$

Als Abel die Funktion y mit Hilfe der Differentialgleichung in eine Taylorreihe entwickelte, fand er, daß y die m Perioden $2(\alpha_0 - \alpha_j)$, $1 \leqq j \leqq m$, haben müsse (α_j ist der Wert von x für $y = a_j$). Wir werden in 7.2.2. sehen, daß die Funktion y nicht auf eine in der ganzen Ebene eindeutige analytische Funktion fortgesetzt werden kann, wenn $m \geqq 4$ ist, da die Gruppe der Perioden dann mindestens den Rang 3 hat. Im ersten Band von *Crelle's Journal* (1826) charakterisiert ein Artikel *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\varrho\, dx}{\sqrt{R}}$, *R et* ϱ *étant des fonctions entières* ([33], Bd. I, S. 104—144) den Fall, daß die Stammfunktion einer solchen Form in der Gestalt $\log((p + q\sqrt{R})/(p - q\sqrt{R}))$ mit Polynomen p und q geschrieben werden kann. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines ϱ derart, daß die Form sich in dieser Weise logarithmisch integrieren läßt, besteht darin, daß die Entwicklung von $\sqrt{R}$ in einen Kettenbruch periodisch und symmetrisch ist:

$$\sqrt{R} = r + \frac{1|}{|2\mu} + \frac{1|}{|2\mu_1} + \cdots + \frac{1|}{|2\mu_1} + \frac{1|}{|2\mu} + \frac{1|}{|2r} + \cdots$$

($r, \mu, \mu_1, \ldots$ Polynome).[1]

In einer postum veröffentlichten Arbeit aus dem Jahre 1828 (einige Resultate hieraus hatte er Legendre in einem Brief mitgeteilt) zeigte Abel ([33], Bd. II, S. 206—216): Sind die Abelschen Integrale $\int y_j\, dx$ $(1 \leqq j \leqq \mu)$, wobei die y_j beliebige algebraische Funktionen von x sind, durch eine algebraische Beziehung mit in x algebraischen Koeffizienten verknüpft, so hat diese Beziehung notwendig die Gestalt

$$\sum_j c_j \int y_j\, dx = P ,$$

wobei die c_j Konstanten sind und P eine algebraische Funktion ist, die sich durch x und die y_j rational ausdrücken läßt. Abel bewies dann, daß sich eine Beziehung

$$\sum_{j=1}^{\mu} c_j \int y_j\, dx = P + \sum_{k=1}^{m} a_k \log v_k ,$$

---

[1]) Der elliptische Fall, wobei R den Grad 4 hat, wurde in der *Théorie des transcendantes elliptiques* ausführlich erläutert. Man suchte dann ϱ in der Gestalt $x + \lambda$ (vom Grad 1). Dieser Fall wurde von Čebyšev (1857) wiederentdeckt, der die entsprechenden Bedingungen für die als rational vorausgesetzten Koeffizienten von R untersuchte. Zolotarev hat dieses Problem (1871) wieder aufgenommen, ohne die Koeffizienten als rational vorauszusetzen.

in der die v_k algebraische Funktion von x sind und P rational in x, den y_j und den v_k ist, auf eine Beziehung der gleichen Gestalt (mit den gleichen c_j) zurückführen läßt, wobei die v_k rational in x und den y_j sind. Abel untersuchte ganz speziell die Integrale vom Typ

$$\int f\left(x, (x-a_1)^{1/m_1}, \dots, (x-a_n)^{1/m_n}\right) dx$$

mit rationalem f und ganzzahligen $m_j > 1$. Läßt sich ein solches Integral in der Gestalt $P + \sum_k a_k \log v_k$ wie oben schreiben, so läßt sich jeder der Terme

$$\int p(x) \prod_{j=1}^{n} (x-a_j)^{-k_j/m_j}\, dx \qquad \left(p \text{ rational}, 0 < \frac{k_j}{m_j} < 1\right),$$

in die es sich zerlegen läßt, ebenfalls in dieser Weise berechnen. Durch Betrachtung der Differentiale

$$d\left(x^m \prod_j (x-a_j)^{1-(k_j/m_j)}\right), \qquad d\left((x-\alpha)^{-m} \prod_j (x-a_j)^{1-(k_j/m_j)}\right)$$

zeigte Abel, daß die Integrale

$$R_\mu = \int x^\mu \prod_j (x-a_j)^{-k_j/m_j}\, dx$$

$$\left(\text{bzw. } S_\mu = \int \frac{1}{(x-\alpha)^\mu} \prod_j (x-a_j)^{-k_j/m_j}\, dx;\ \mu \text{ eine natürliche Zahl}\right)$$

modulo der algebraischen Funktionen Linearkombinationen von $R_0, R_1, \dots, R_{n-2}$ (bzw. $S_1, R_0, \dots, R_{n-2}$) sind. Er bewies dann, daß die Integrale

$$t_\alpha = \int \frac{1}{x-\alpha} \prod_j (x-a_j)^{-k_j/m_j}\, dx$$

für von a_j ($1 \leqq j \leqq n$) verschiedenes α linear unabhängig sind modulo der algebraischen Funktionen und der R_μ. Schließlich suchte Abel nach den linearen Beziehungen, die modulo der algebraisch-logarithmischen Funktionen zwischen den t_α und den R_μ existieren können.

Auch Galois hatte die Theorie der Abelschen Integrale entwickelt, und er hatte sie weiter vorangebracht als Abel; jedoch nahm man seine Beweise nicht zur Kenntnis. Hier der Wortlaut seiner Ergebnisse, die in seinem Brief an Auguste Chevalier (1832) enthalten sind (übersetzt nach *[50]):

„Man findet, daß die Anzahl der verschiedenen Perioden des in bezug auf eine gegebene Irrationalität allgemeinsten Integrals stets eine gerade Zahl ist.

Ist $2n$ diese Zahl, dann gilt der folgende Satz:

Eine beliebige Summe von Gliedern reduziert sich auf n Glieder plus algebraischer und logarithmischer Größen.

Die Funktionen erster Gattung sind diejenigen, bei denen der algebraische und logarithmische Teil gleich null ist.

Es gibt davon n verschiedene.

Die Funktionen zweiter Gattung sind diejenigen, bei denen der Zusatzteil rein algebraisch ist.

Es gibt davon n verschiedene.

Man kann annehmen, daß die Differentiale der anderen Funktionen niemals unendlich sind außer in dem einen Fall $x = a$, und daß sich sogar ihr Zusatzteil auf einen einzigen Logarithmus, $\log P$, reduziert, wobei P eine algebraische Größe ist. Bezeichnet man diese Funktionen mit $\Pi(x, a)$, so erhält man

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = \sum \varphi a \cdot \psi x;$$

dabei sind φa und ψx Funktionen erster bzw. zweiter Gattung.

Hieraus schließt man, wenn $\Pi(a)$ und ψ die Perioden von $\Pi(x, a)$ bzw. ψx bezüglich des gleichen Umlaufs [révolution] von x sind, auf

$$\Pi(a) = \sum \psi x \cdot \varphi a .$$

Also lassen sich die Perioden der Funktionen dritter Gattung stets als Funktionen erster und zweiter Gattung ausdrücken.

Hieraus kann man auch zum Legendreschen Satz

$$E'F'' - E''F' = \frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$$

analoge Sätze herleiten.“

Diese Resultate, die unabhängig von Galois auch von Abel gefunden wurden (dessen einziger ausführlicher Artikel, der hierzu publiziert wurde, jedoch nur den hyperelliptischen Fall enthielt), nehmen schon diejenigen vorweg, die Riemann 25 Jahre später erhalten sollte (siehe 7.2.5.). Man erkennt, daß Galois die Perioden Abelscher Integrale als Integrale längs geschlossener Konturen auffaßte, da er den Terminus „révolution“ verwendete. Galois hat sich auch mit den Problemen der Teilung und der Transformation der Abelschen Integrale beschäftigt (siehe 7.2.3.).

7.2.2. *Das Umkehrproblem. Die Thetafunktionen zweier Variabler*

In 7.1.5. haben wir gesehen, wie das Eulersche Additionstheorem erlaubt, die Umkehrfunktion eines (zunächst lokal definierten) elliptischen Integrals erster Gattung in eine auf der ganzen Ebene eindeutige analytische Funktion fortzusetzen. Jacobi hatte (1832) die Idee ([34], Bd. II, S. 5—16), das Abelsche Theorem auf die gleiche Art und Weise zur Umkehrung der Abelschen Integrale zu benutzen. Wir setzen wie er

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{X}} \quad \text{und} \quad \phi_1(x) = \int_0^x \frac{t\,dt}{\sqrt{X}},$$

wobei X ein Polynom fünften oder sechsten Grades ist. Für gegebene x, y, x' und y' lassen sich a und b nach dem Abelschen Theorem als Funktion dieser Größen

algebraisch so bestimmen, daß

$$\phi(x) + \phi(y) + \phi(x') + \phi(y') = \phi(a) + \phi(b)$$

und

$$\phi_1(x) + \phi_1(y) + \phi_1(x') + \phi_1(y') = \phi_1(a) + \phi_1(b)$$

ist, d. h., wenn

$$u = \phi(x) + \phi(y)\,, \qquad u' = \phi(x') + \phi(y')\,,$$
$$v = \phi_1(x) + \phi_1(y)\,, \qquad v' = \phi_1(x') + \phi_1(y')$$

ist, erhalten wir

$$u + u' = \phi(a) + \phi(b) \quad \text{und} \quad v + v' = \phi_1(a) + \phi_1(b)\,.$$

Drücken wir x und y als Funktionen von u und v aus,

$$x = \lambda(u, v)\,, \qquad y = \lambda_1(u, v)\,,$$

und ebenso

$$x' = \lambda(u', v')\,, \qquad y' = \lambda_1(u', v')\,,$$

so ist auch

$$a = \lambda(u + u', v + v')\,, \qquad b = \lambda_1(u + u', v + v');$$

also lassen sich a und b algebraisch als Funktion von

$$\lambda(u, v)\,, \qquad \lambda(u', v')\,, \qquad \lambda_1(u, v)\,, \qquad \lambda_1(u', v')$$

ausdrücken, und dies gestattet die Fortsetzung der (lokal definierten) Funktionen λ und λ_1. Unter der Annahme, daß X vom Grad $2p + 1$ oder $2p + 2$ ist, ging Jacobi von p Integralen erster Gattung

$$\phi_k(x) = \int_0^x \frac{t^k\,dt}{\sqrt{X}} \qquad (0 \leqq k \leqq p - 1)$$

aus und definierte p Funktionen $x_k = \lambda_k(u_0, u_1, \ldots, p_{p-1})$ durch das System

$$u_j = \sum_{k=0}^{p-1} \phi_k(x_k) \qquad (0 \leqq j \leqq p - 1);$$

das Abelsche Theorem liefert $\lambda(u + u')$ als algebraische Funktion von $\lambda(u)$ und $\lambda(u')$.

Jacobi kam (1834) auf den Fall $p = 2$ mit

$$X = x(1 - x)(1 - \varkappa^2 x)(1 - \lambda^2 x)(1 - \mu^2 x) \qquad (0 < \mu < \lambda < \varkappa < 1)$$

zurück ([34], Bd. II, S. 23—50) und bestimmte sorgfältig die Integrale der Gestalt

$$\int \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{X}}\,dx$$

in jedem der sechs Intervalle, die von den Nullstellen von X auf der reellen Achse getrennt werden. Er benutzte Variablentransformationen vom Typ

$$x = \frac{d + e \sin^2 \varphi}{f + g \sin^2 \varphi},$$

um zu Integralen der Gestalt

$$\int \frac{(m + n \sin^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{(1 - p^2 \sin^2 \varphi)\,(1 - q^2 \sin^2 \varphi)\,(1 - r^2 \sin^2 \varphi)}} \qquad \left(0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

zu gelangen (die Konstanten p, q, r liegen zwischen 0 und 1). Diese Art der Reduktion wurde von Richelot auf allgemeinere hyperelliptische Integrale übertragen. Wir setzen zur Abkürzung

$$a_1 = 2\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad b_1 = 2\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \qquad a_2 = 2\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

$$b_2 = 2\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}, \qquad a_3 = 2\int_{1/\lambda^2}^{1/\mu^2} \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad b_3 = 2\int_{1/\lambda^2}^{1/\mu^2} \frac{x\,dx}{\sqrt{X}},$$

$$a_4 = 2\int_{1/\mu^2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad b_4 = 2\int_{1/\mu^2}^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Jacobi zeigte, daß $u = \phi(x) + \phi(y)$ (bzw. $v = \phi_1(x) + \phi_1(y)$) für gegebene x und y mehrere Werte besitzen können, je nach der Wahl der Vorzeichen der Wurzel: Zwei Werte unterscheiden sich um eine Linearkombination von a_1, a_2, a_3, a_4 (bzw. b_1, b_2, b_3, b_4) mit ganzzahligen Koeffizienten. Die Funktionen λ und λ_1 müssen also die vier Perioden $(a_j, b_j) \in \boldsymbol{C}^2$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ besitzen. Da eine Funktion einer einzigen komplexen Variablen nicht mehr als zwei unabhängige Perioden hat (siehe 7.1.5.) und da diese vier Perioden unabhängig sind, sieht man, daß die Umkehrung eines Abelschen Integrals nicht in derselben Art und Weise vorgenommen werden kann wie die eines elliptischen Integrals. Damit das Umkehrproblem korrekt gestellt werden kann, muß man sich der Funktionen *mehrerer* komplexer Variabler bedienen. Für ein Polynom X vom Grad $2p + 1$ oder $2p + 2$ fand Jacobi $2p$ Perioden (mit reellem p oder rein imaginärem p, wenn X reell ist), und er benutzte Funktionen von p Variablen zur Umkehrung. Riemann zeigte später (Brief an Weierstraß, 1859) ([41], S. 294–297), daß eine meromorphe Funktion von n komplexen Variablen nicht mehr als $2n$ unabhängige Perioden besitzen kann, und hat so das Jacobische Ergebnis von $n = 1$ auf beliebige n verallgemeinert.

Jacobi mußte die Funktionen λ und λ_1, um sie zu untersuchen, analytisch darstellen. Er ließ sich dabei von der Analogie zu den elliptischen Funktionen leiten, die sich mit Hilfe der Thetafunktionen ausdrücken lassen, und schlug vor ([34], Bd. II, S. 86), ganze Funktionen A, B, C von u, v zu definieren derart, daß $x = \lambda(u, v)$ und $y = \lambda_1(u, v)$ die Lösungen der Gleichung zweiten Grades $A + Bt + Ct^2 = 0$ sind (da in x und y Symmetrie herrscht, ist es natürlich, nur ihre sym-

metrischen Funktionen in Betracht zu ziehen). Ebenso muß man, wenn X vom Grad $2p + 1$ oder $2p + 2$ ist, $p + 1$ ganze Funktionen von $u = (u_j) \in \boldsymbol{C}^p$ bestimmen, welche die Koeffizienten einer Gleichung p-ten Grades bezeichnen, deren Wurzeln die Funktionen λ_k sind.

Dieses von Jacobi gestellte „Umkehrproblem" haben Rosenhain und Göpel (1847) im Fall $p = 2$ unabhängig voneinander gelöst. Ihre Methoden sind einander analog und bestehen darin, zuerst Thetafunktionen zweier Variabler zu definieren und dann eine Theorie zu entwickeln, die sich daran orientiert, was Jacobi getan hatte, um die elliptischen Funktionen aus den Thetafunktionen einer Variablen herzuleiten (siehe 7.1.11.). So ging Rosenhain von einer binären quadratischen Form $\varphi(m, n) = a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2$ aus, deren Imaginärteil positiv definit ist, und er setzte

$$\vartheta(u, v) = \sum_{m,n} \exp\left(\pi i \varphi(m, n) + 2\pi i(mu + nv)\right);$$

das entspricht der Göpelschen Funktion

$$P'''(w, w')$$
$$= e^{-rw^2 - r'w'^2} \sum_{m,n} \exp\left(r(w + 2mK + 2nL)^2 + r'(w' + 2mK' + 2nL')^2\right),$$

wenn

$$\pi i a_{11} = 4(rK^2 + r'K'^2), \qquad \pi i a_{12} = 4(rKL + r'K'L'),$$
$$\pi i a_{22} = 4(rL^2 + r'L'^2)$$

und

$$\pi i u = 2(rKw + r'K'w'), \qquad \pi i v = 2(rLw + r'L'w')$$

ist. Es gibt insgesamt 16 Thetafunktionen zweier Variabler (anstelle der vier Funktionen einer Variablen):

$$e^{rw^2 + r'w'^2} X$$
$$= \sum_{m,n} (-1)^{pm+qn} \exp\left(r(w + (2m + \mu) K + (2n + \nu) L)^2\right.$$
$$\left. + r'(w' + (2m + \mu) K' + (2n + \nu) L')^2\right)$$

mit $p, q, \mu, \nu = 0$ oder 1. Die rechte Seite der letzten Gleichung hat zwei Perioden in bezug auf das Variablenpaar (w, w'). Ist beispielsweise $X = P'''$, so sind $(2K, 2K')$ und $(2L, 2L')$ die Perioden. Man kann zeigen, daß jeder Quotient von zwei der 16 Thetafunktionen vier Perioden besitzt. Es gibt 10 gerade und 6 ungerade Thetafunktionen. Göpel stellte fest, daß sich die Quadrate der 16 Funktionen durch vier dieser Funktionen linear ausdrücken lassen, und er leitete daraus Beziehungen her, die denen von Jacobi für die Thetafunktionen einer Variablen analog sind. Darüber hinaus zeigte er, daß vier Produkte je zweier verschiedener Funktionen stets durch eine lineare Beziehung miteinander verknüpft sind. Göpel leitete hieraus eine Relation vierten Grades zwischen P', P'', S', S'' her; dabei sind die Göpelschen Funktionen mit $P^{(i)}, Q^{(i)}, R^{(i)}, S^{(i)}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ bezeichnet, je nachdem, ob $(p, q) = (1, 1), (0, 1), (1, 0)$ oder $(0, 0)$ ist, und mit P, Q, R, S, je nachdem,

ob $(\mu, \nu) = (0, 0), (1, 0), (0, 1)$ oder $(1, 1)$ ist. Die Göpelsche Beziehung lautet

$$P'^4 + S'^4 - \frac{\varkappa'''^4 + \varrho'''^4}{\varkappa'''^2 \varrho'''^2} P'^2 S'^2 - \frac{\tilde{\omega}'^4 + \tilde{\omega}''^4}{\tilde{\omega}'^2 \tilde{\omega}''^2} (P'^2 P''^2 + S'^2 S''^2)$$

$$+ \frac{\varkappa'^4 + \varrho''^4}{\varkappa'^2 \varrho''^2} (P'^2 S''^2 + P''^2 S'^2) - 2 \frac{\tilde{\omega}\sigma\tilde{\omega}'''\sigma'''(\tilde{\omega}'^4 - \tilde{\omega}''^4)^2}{(\tilde{\omega}'\tilde{\omega}\varkappa'\varrho''\varkappa'''\varrho''')^2} P'S'P''S''$$

$$+ P''^4 + S''^4 - \frac{\varkappa'''^4 + \varrho'''^4}{\varkappa'''^2 \varrho'''^2} P''^2 S''^2 = 0$$

mit $\tilde{\omega}^{(i)} = P^{(i)}(0, 0)$, $\varkappa^{(i)} = Q^{(i)}(0, 0)$, $\varrho^{(i)} = R^{(i)}(0, 0)$ und $\sigma^{(i)} = S^{(i)}(0, 0)$. Ihrer bediente sich Borchardt (1877), um eine Parameterdarstellung für die Kummersche Fläche (vgl. [18 bis]) mit vier Thetafunktionen zweier Variabler anzugeben. Göpel und Rosenhain bewiesen alsdann, daß die Thetafunktionen durch Differentialgleichungen verknüpft sind, die sich auf die Differentialform des Abelschen Theorems für die Integrale erster Gattung zurückführen lassen. Ist

$$p = \frac{S'}{P'}, \qquad q = \frac{S''}{P''}, \qquad \varphi = \frac{P'''S''' + PS}{P'P''}, \qquad \psi = \frac{P'''S''' - PS}{P'S''},$$

so setzten sie

$$d\mu = \frac{1}{\varphi}\left(s\,dp + \frac{1}{s}\,dq\right), \qquad d\nu = \frac{1}{\psi}\left(s\,dp - \frac{1}{s}\,dq\right) \quad \text{mit} \quad s = \frac{P'}{P''}.$$

Dann ergeben sich mit den Bezeichnungen

$$2E = \frac{\varkappa'''^4 + \varrho'''^4}{\varkappa'''^2 \varrho'''^2}, \qquad \Delta y = \sqrt{1 - 2Ey^2 + y^4},$$

$$x = \frac{E(1 + p^2q^2) - (p^2 + q^2) + \Delta p\,\Delta q}{(E + 1)(1 + pq)^2},$$

$$x' = \frac{E(1 + p^2q^2) - (p^2 + q^2) - \Delta p\,\Delta q}{(E + 1)(1 + pq)^2}$$

die Relationen

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - mx)}} \sqrt{\frac{1 - m_2x}{1 - m_1x}} + \frac{dx'}{\sqrt{x'(1 - x')(1 - mx')}} \sqrt{\frac{1 - m_2x'}{1 - m_1x'}}$$

$$= 2\sqrt{b + b_1} \sqrt{\frac{(1 - E)(1 - E_1)}{(1 + F)(1 - E_2)}}\, d\mu,$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(1 - mx)}} \sqrt{\frac{1 - m_1x}{1 - m_2x}} + \frac{dx'}{\sqrt{x'(1 - x')(1 - mx')}} \sqrt{\frac{1 - m_1x'}{1 - m_2x'}}$$

$$= 2\sqrt{b - b_1} \sqrt{\frac{(1 - E)(1 - E_2)}{(F - 1)(1 - E_1)}}\, d\nu,$$

wobei

$$m = \frac{E+1}{E-1}, \qquad m_1 = \frac{E_1+1}{E_1-1}, \qquad m_2 = \frac{E_2+1}{E_2-1}$$

ist und E_1, E_2, F, b und b_1 Konstanten bezeichnen, die sich, ausgehend von den Werten der Thetafunktionen in $(0, 0)$, (wie E) berechnen lassen. Die Rosenhainschen Berechnungen sind etwas einfacher als die Göpelschen, da die Rosenhainschen Variablen dem Problem besser angepaßt waren. Die Theorien von Göpel und von Rosenhain sind einfallsreich, aber sehr kompliziert, und man sieht nicht, wie sie sich auf den Fall beliebiger p und noch weniger auf den allgemeinen Fall der nicht notwendig hyperelliptischen Abelschen Integrale übertragen lassen. Dieser allgemeine Fall erforderte neue Ideen; er wurde unabhängig von Weierstraß und von Riemann behandelt (vgl. 7.2.4. bis 7.2.6.). Jacobi hat übrigens vermutet (postum veröffentlichter Artikel; [34], Bd. II, S. 151), daß im Fall hyperelliptischer Funktionen mit beliebigem p eine Schwierigkeit auftritt: Die Thetafunktionen von p Variablen hängen von $p(p+1)/2$ Koeffizienten der quadratischen Form ab, die man zu ihrer Konstruktion benutzt. Das ergibt zuviel Parameter, wenn $p \geqq 3$ ist; denn man sieht, daß die hyperelliptischen Integrale nur von $2p-1$ „Moduln" abhängen.

Hermite hat (1855) ([36], Bd. I, S. 444—478) einen einfacheren Weg angegeben, auf dem man die algebraischen Beziehungen zwischen den Thetafunktionen zweier Variabler erhalten kann. Wie im Fall einer Variablen (siehe 7.1.11.) charakterisierte er diese Funktionen mit Hilfe von Funktionalgleichungen

$$\Pi(x+1, y) = (-1)^{\mu}\,\Pi(x, y), \qquad \Pi(x, y+1) = (-1)^{\nu}\,\Pi(x, y),$$

$$\Pi(x+h, y+g') = (-1)^{p}\,\Pi(x, y)\, e^{-i\pi k(2y+g')},$$

$$\Pi(x+g, y+h) = (-1)^{q}\,\Pi(x, y)\, e^{-i\pi k(2x+g)};$$

g, h, g' sind Konstanten, und μ, ν, p, q, k sind vorgegebene ganze Zahlen. Hermite zeigte im wesentlichen, daß der Vektorraum der Lösungen dieses Gleichungssystems im Fall $k = 2$ die Dimension 4, im Fall $k = 4$ die Dimension 10 und für ungerades k die Dimension $(k^2+1)/2$ besitzt. Für $k = 1$ findet man (bis auf einen konstanten Faktor, wobei die Dimension gleich 1 ist) die 16 Thetafunktionen gemäß den Werten von μ, ν, p, q, und ihre Quadrate genügen dem System mit $k = 2$, woraus sich die linearen Beziehungen von Göpel und von Rosenhain ergeben. Die Produkte zweier Quadrate von Thetafunktionen genügen dem System mit $k = 4$, und das gleiche trifft für ein Produkt $\theta_0\theta_1\theta_2\theta_3$ von vier den ganzen Zahlen μ_i, ν_i, p_i, q_i $(0 \leqq i \leqq 3)$ entsprechenden Funktionen zu, wenn die Summen

$$\sum_i \mu_i, \qquad \sum_i \nu_i, \qquad \sum_i p_i, \qquad \sum_i q_i \quad \text{und} \quad \sum_i (p_i\nu_i + q_i\mu_i)$$

gerade Zahlen sind. Hermite hat so die Göpelschen Beziehungen vierten Grades zwischen θ_0, θ_1, θ_2 und θ_3 wiederentdeckt.

7.2.3. *Teilung und Transformation*

In 7.2.8. werden wir sehen, wie sich die Isogenien elliptischer Kurven (vgl. 7.1.8.) auf Abelsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinern lassen; wir werden zunächst nur die ersten Fälle überprüfen, denen die Mathematiker begegnet sind.

Galois hatte angekündigt, daß die Teilung einer Summe von p Abelschen Integralen vom „Geschlecht“ p (die also $2p$ Perioden besitzen) durch n auf eine algebraische Gleichung vom Grad n^{2p} führt, die in Radikalen auflösbar ist (Galois setzte dazu die Teilung der Perioden als durchgeführt voraus, die von einer Gleichung $(n^{2p} - 1)$-ten Grades abhängt, deren Gruppe er bestimmt hat). Dies wurde später (1866) von Clebsch und Gordan bewiesen. Was die Transformationen Abelscher Integrale betrifft, so hat Galois die Abelschen Resultate wiederentdeckt, die über die Gestalt der zwischen Abelschen Integralen möglichen Beziehungen Auskunft geben. Ferner hat Galois die Transformation betrachtet, die durch die Division einer einzigen Periode durch eine Primzahl definiert ist. Jacobi hat (1834)([34], Bd. II, S. 50) das Teilungsproblem für Abelsche Integrale gestellt, bei denen $\sqrt{X}$ (X ein Polynom fünften oder sechsten Grades) die Irrationalität ist. Unter Verwendung der Bezeichnungen aus 7.2.2. können wir sagen: Ist $u = \phi(x) + \phi(y)$ und $v = \phi_1(x) + \phi_1(y)$, so sind $x_n = \lambda(nu, nv)$ und $y_n = \lambda_1(nu, nv)$ Wurzeln einer Gleichung $U_n z^2 - U'_n z + U''_n = 0$, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x und y und von den Werten von $\sqrt{X}$ in x und in y sind. Umgekehrt kann man daraus x und y herleiten, wenn man x_n und y_n kennt. Jacobi hat vermutet, daß die entsprechende algebraische Gleichung vom Grad n^4 ist (im Fall $n = 2$ hat er nachgewiesen, daß die Gleichung den Grad 16 hat und daß sie sich in Quadratwurzeln auflösen läßt). Er hat ebenfalls vermutet, daß die die Teilung der Perioden durch eine ungerade Primzahl n vermittelnde Gleichung, die dem Fall $x_n = y_n = 0$, also $U'_n = U''_n = 0$ entspricht, auf eine Gleichung vom Grad $1 + n + n^2 + n^3$ und auf Gleichungen vom Grad $(n - 1)/2$ zurückgeführt werden kann, wobei diese letzten Gleichungen in Radikalen auflösbar sind. Diese Jacobischen Vermutungen wurden von Hermite (1843) bewiesen ([34], Bd. II, S. 87—96): Die Werte von x und y (Lösungen des Problems) haben die Gestalt

$$x = \lambda\left(u + \frac{I}{n}, v + \frac{J}{n}\right), \qquad y = \lambda_1\left(u + \frac{I}{n}, v + \frac{J}{n}\right)$$

mit

$$I = \sum_{j=1}^{4} m^{(j)} a_j, \qquad J = \sum_{j=1}^{4} m^{(j)} b_j, \qquad 0 \leqq m \leqq n - 1,$$

wobei a_j und b_j die in 7.2.2. definierten Perioden sind. Es gibt n^4 Möglichkeiten, $(m^{(j)})_{1 \leqq j \leqq 4}$ zu wählen, wodurch der Grad der Gleichung für die Teilung durch n festgelegt ist. Hermite zeigte, daß diese Gleichung in Radikalen auflösbar ist (vorausgesetzt, die Teilung der Perioden wurde schon ausgeführt), und er bewies die Jacobische Vermutung über die Gleichung für die Teilung der Perioden. Seine Methode ist der Abelschen für die Teilung der elliptischen Integrale (siehe 7.1.7.) nachgebildet.

Jacobi hat außerdem vorgeschlagen, die Transformationen n-ter Ordnung (n eine Primzahl) im Rahmen derselben hyperelliptischen Integrale mit $p = 2$ zu untersuchen. Er vermutete, daß es $1 + n + n^2 + n^3$ Transformationen n-ter Ordnung gibt. Hermite hat daraus (1855) ([36], Bd. I, S. 444–478) die Theorie entwickelt; der Spezialfall $n = 2$ war von Richelot (1836) auf algebraischem Wege direkt bewiesen worden. Hermite nahm ein Polynom φ fünften oder sechsten Grades als gegeben an und bezeichnete die Quotienten von 15 Thetafunktionen durch die letzte mit f_k $(1 \leqq k \leqq 15)$, wobei diese Thetafunktionen diejenigen sind, die bei der Umkehrung des Systems

$$u = \phi(x) + \phi(y)\,, \qquad v = \phi_1(x) + \phi_1(y)$$

mit

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} \quad \text{und} \quad \phi_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{t\,dt}{\sqrt{\varphi(t)}}$$

auftreten. Hermite suchte dann ein Polynom ψ fünften oder sechsten Grades und Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ derart, daß die F_k $(1 \leqq k \leqq 15)$, die wie die f_k, aber aus Thetafunktionen bezüglich des Systems

$$u = \psi(x) + \psi(y)\,, \qquad v = \psi_1(x) + \psi_1(y)$$

mit

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha + \beta t}{\sqrt{\varphi(t)}}\,dt \quad \text{und} \quad \psi_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\gamma + \delta t}{\sqrt{\varphi(t)}}\,dt$$

gebildet werden, rationale Funktionen der f_k sind. Dann sind die Perioden a_j und b_j von ϕ bzw. ϕ_1 Linearkombinationen der Perioden A_j und B_j von ψ bzw. ψ_1 mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$a_j = \sum_{k=1}^{4} m_{jk} A_k\,, \qquad b_j = \sum_{k=1}^{4} m_{jk} B_k \qquad (1 \leqq j \leqq 4)$$

mit $m_{jk} \in \boldsymbol{Z}$; dies läßt sich in Matrizenschreibweise durch $a = \mathrm{M}A$, $b = \mathrm{M}B$ mit $\mathrm{M} \in \boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{Z})$ darstellen. Nun sind die Perioden durch eine alternierende bilineare Relation in $a, b \in \boldsymbol{C}^4$ verknüpft,

$$a_1 b_4 - a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0\,,$$

die von Weierstraß (1848) für beliebiges p bewiesen wurde (siehe 7.2.4.; diese Relation resultiert auch aus den Formeln von Göpel und von Rosenhain, und sie war von Jacobi 1839 vorausgeahnt worden ([34], Bd. II, S. 60–63); in 7.2.5. werden wir sehen, wie Riemann sie auf beliebige Abelsche Integrale verallgemeinert hat). Somit muß die Matrix M diese Relation invariant lassen, was durch ${}^t\mathrm{MJM} = n\mathrm{J}$ ausgedrückt wird, wobei n eine ganze Zahl und

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix der alternierenden Bilinearform ist. Hermite zog hieraus den Schluß, daß $\det \mathrm{M} = n^2$ ist. Die verschiedenen Transformationen für gegebenes n entsprechen — wie Hermite bemerkte — den Orbits der Gruppe $\boldsymbol{Sp}(\mathrm{J}, \boldsymbol{Z})$ der quadratischen Matrizen $\mathrm{P} \in \boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{Z})$, die die Beziehung ${}^t\mathrm{PJP} = \mathrm{J}$ erfüllen; diese operieren durch rechtsseitige Multiplikation auf der Menge E_n der Lösungen von ${}^t\mathrm{MJM} = n\mathrm{J}$ in $\boldsymbol{M}_4(\boldsymbol{Z})$. Die Operation einer Matrix $\mathrm{P} \in \boldsymbol{Sp}(\mathrm{J}, \boldsymbol{Z})$ entspricht einer Basisänderung in der Gruppe der Perioden von ψ und ψ_1. Für eine Primzahl n fand Hermite $1 + n + n^2 + n^3$ Orbits, die durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n & m & 0 & m' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & -m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} n & 0 & m & m' \\ 0 & n & m'' & m \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(0 \leqq m, m', m'' \leqq n - 1)$ repräsentiert werden.

Es bleibt nachzuweisen, daß die F_k tatsächlich rationale Funktionen der f_k sind, wenn $a = \mathrm{M}A$ und $b = \mathrm{M}B$ mit ${}^t\mathrm{MJM} = n\mathrm{J}$ ist. Hermite betrachtete die Reihen

$$\begin{aligned}\Theta(x, y) \\ &= \sum_{r,s} (-1)^{rq+sp} \exp\left(\left(i\pi(2r+\mu)\,x + (2s+\nu)\,y\right) + \frac{i\pi}{4}\phi(2r+\mu, 2s+\nu)\right)\end{aligned}$$

$(\mu, \nu, p, q = 0$ oder $1)$ mit

$$\phi(r, s) = Gr^2 + 2Hrs + G's^2\,,$$

$$G = \frac{A_4B_2 - A_2B_4}{A_1B_2 - A_2B_1}, \qquad H = \frac{A_3B_2 - A_2B_3}{A_2B_1 - A_1B_2}, \qquad G' = \frac{A_1B_3 - A_3B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Die Quotienten von 15 Thetafunktionen durch die sechzehnte sind die Funktionen

$$F_k(A_1x + A_2y, B_1x + B_2y)\,.$$

Hermite setzte, wenn $\mathrm{M} = (m_{jk})$ ist, $z_j = m_{1j}x + m_{2j}y$ $(1 \leqq j \leqq 4)$ und

$$\begin{aligned}\Pi(x, y) &= \Theta(z_1 + Gz_4 + Hz_3, z_2 + Hz_4 + G'z_3) \\ &\quad \times \exp\left(i\pi(z_1z_4 + z_2z_3 + \phi(z_4, z_3))\right).\end{aligned}$$

Diese Funktion genügt den Funktionalgleichungen aus 7.2.2. mit $k = n$ und in G, H und G' rationalen Konstanten g, h und g' (die Koeffizienten sind die Minoren zweiter Ordnung von M). Hermite konstruierte die Thetareihen mit der quadratischen Form $gr^2 + 2hrs + g's^2$ und fand, daß Π ein in bezug auf vier der 16 Thetafunktionen homogenes Polynom n-ten Grades ist, woraus das Ergebnis folgt. Es existieren vier spezielle Transformationen, die durch die oben genannten Matrizen

M mit $m = m' = m'' = 0$ gegeben sind. Hermite zeigte, daß man, wenn man die erste und die letzte (oder auch die zweite und die dritte) kombiniert, die Multiplikation mit n erhält. Also ist $\Theta(nx, ny)$ ein in bezug auf vier Thetafunktionen (die denselben Perioden entsprechen) homogenes Polynom vom Grad n^2.

Die Hermitesche Theorie der Transformationen wurde auf den hyperelliptischen Fall mit beliebigem p durch Königsberger (1864), der die Weierstraßschen Methoden benutzte (siehe 7.2.4.), und auf den Fall der Thetafunktionen von drei oder vier Variablen (die nicht notwendig von der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale stammen) durch H. Weber (1876) und M. Noether (1878) übertragen. Weber ging dann zu Thetafunktionen von p Variablen über; es gibt 2^{2p} Funktionen von diesem Typ, die mit Hilfe der „Charakteristiken" indiziert werden, welche Elemente von $\boldsymbol{F}_2^{2p}$ sind (siehe 7.2.5.). Ferner hat Weber Transformationen n-ter Ordnung definiert derart, daß eine transformierte Thetafunktion ein in bezug auf die 2^{2p} ursprünglichen Thetafunktionen homogenes Polynom vom Grad n ist. Frobenius konnte (1880) präzisieren, daß 2^p Thetafunktionen genügen, um ein solches Polynom zu liefern, wie auch Hermite für $p = 2$ gezeigt hatte. Alle diese Funktionen sind gerade, oder aber 2^{p-1} von ihnen sind gerade und die anderen ungerade, und ihre Charakteristiken bilden einen p-dimensionalen affinen Teilraum in $\boldsymbol{F}_2^{2p}$ (Frobenius nannte ihn ein „Göpelsches System" aufgrund der Tatsache, daß im Fall $p = 2$ die von Göpel entdeckten Relationen vierten Grades zwischen vier Thetafunktionen gültig sind, deren Charakteristiken einem solchen System angehören). Die Additionsformel für die Thetafunktionen ist mit dieser Theorie verknüpft; sie wurde von Königsberger (1864) für den hyperelliptischen, von M. Noether (1878) und Stahl (1879) für den allgemeinen Fall mitgeteilt: In der von Frobenius angegebenen Form drückt sie ein Produkt $\vartheta_\varkappa(u + v)\,\vartheta_\lambda(u + w)$ als rationale Funktion von

$$\vartheta_\alpha(u + v + w)\,, \qquad \vartheta_\alpha(v + w)\,, \qquad \vartheta_\alpha(u)\,, \qquad \vartheta_\alpha(v) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha(0)$$

aus; dabei durchläuft α ein Göpelsches System, dem die Charakteristiken $\varkappa$ und λ angehören.

Wie in dem von Hermite untersuchten Fall $p = 2$ sind die Perioden im allgemeinen Fall durch eine alternierende bilineare Relation verknüpft, deren Matrix in der Gestalt $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix}$ bei in $\boldsymbol{C}^{2p}$ passend gewählter Basis geschrieben werden kann. Die Matrix $\mathrm{M} \in \boldsymbol{M}_{2p}(\boldsymbol{Z})$, die den Übergang von den transformierten zu den ursprünglichen Perioden vermittelt, muß die Beziehung ${}^t\mathrm{M}\mathrm{J}\mathrm{M} = n\mathrm{J}$ erfüllen, wobei n eine ganze Zahl (die Ordnung der Transformation) ist; folglich ist nach Weber $\det \mathrm{M} = n^p$. Bezeichnet E_n die Menge der Matrizen M, die der genannten Beziehung genügen, so ist $E_1 = \boldsymbol{Sp}(\mathrm{J}, \boldsymbol{Z})$ die symplektische Gruppe, und die Transformationen n-ter Ordnung entsprechen den Orbits dieser Gruppe, die in E_n vermöge der Multiplikation operiert. Diese Orbits wurden von Weber und von Frobenius (1879) mit Hilfe der Theorie der invarianten Faktoren (siehe 3.2.2.) bestimmt. Weber hat so festgestellt, daß jede Transformation aus Transformationen erster Ordnung zusammengesetzt ist.

7.2.4. *Die Weierstraßschen Arbeiten über hyperelliptische Integrale*

Das Umkehrproblem für die hyperelliptischen Integrale mit beliebigem p (siehe 7.2.2.) wurde von Weierstraß in drei Abhandlungen aus den Jahren 1848, 1853 und 1856 gelöst ([43], Bd. I, S. 111–131, 133–152 und 297–355). Er betrachtete ein normiertes Polynom R vom Grad $2p + 1$, dessen Nullstellen a_j, $0 \leqq j \leqq 2p$ (in den ersten beiden Abhandlungen als reell und nach abnehmender Größe geordnet angenommen) voneinander verschieden sind; er setzte

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3) \cdots (x - a_{2p-1})$$

und

$$Q(x) = (x - a_0)(x - a_2) \cdots (x - a_{2p}) ,$$

so daß $R = PQ$ gilt. Die p Polynome

$$F_j(x) = \frac{P(x)}{2(x - a_{2j-1})} \qquad (1 \leqq j \leqq p)$$

liefern linear unabhängige Differentialformen erster Gattung, $\left(F_j(x)/\sqrt{R(x)}\right) dx$, und das Umkehrproblem besteht in der Auflösung des Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{p} \int_{a_{2j-1}}^{x_j} \frac{F_k(x)}{\sqrt{R(x)}} dx = u_k \qquad (1 \leqq k \leqq p)$$

in den Unbekannten x_j. Liegt x_j in der Nähe von a_{2j-1} $(1 \leqq j \leqq p)$, so ist die linke Seite der k-ten Gleichung des Systems äquivalent zu $c_k \sqrt{x_k - a_{2j-1}}$ mit

$$c_k = \sqrt{\frac{P'(a_{2k-1})}{Q(a_{2k-1})}} .$$

Weierstraß versuchte, eindeutige analytische Funktionen f_j von $u \in \mathbf{C}^p$ zu bestimmen derart, daß das oben genannte System durch die Wurzeln x_j der algebraischen Gleichung

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{f_j^2(u)}{c_j^2(x - a_{2j-1})} = 1$$

befriedigt wird. Im Fall $p = 1$ ist $P(x) = x - a$, $Q(x) = (x - a_0)(x - a_2)$, und das System reduziert sich auf die eine Gleichung

$$\int_{a_1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}} = 2u .$$

Es ist

$$f(u)^2 = \frac{x - a_1}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)} ,$$

und man erhält

$$\int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = u\sqrt{a_2 - a_1}$$

mit $s = f\sqrt{a_2 - a_1}$ und $k^2 = \dfrac{a_0 - a_1}{a_2 - a_1}$, so daß $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{a_2 - a_1}} \operatorname{sn} u \sqrt{a_2 - a_1}$ ist. Allgemein kann man sagen: Ist $\varphi(x) = \prod_j (x - x_j)$, so gilt

$$f_j^2 = -\frac{\varphi(a_{2j-1})}{Q(a_{2j-1})}.$$

Weierstraß untersuchte $2p^2$ vollständige Integrale erster Gattung

$$K_{jm} = \int_{a_{2m-1}}^{a_{2m}} \frac{F_j(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx\,, \qquad \tilde{K}_{jm} = -i \int_{a_{2m-2}}^{a_{2m-1}} \frac{F_j(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

$$(1 \leqq j, m \leqq p)\,,$$

und er setzte $K'_{jm} = \sum_{n \geqq m} \tilde{K}_{jn}$. Ferner stellte er die Periodizität der Funktionen f_j fest: $f_j(u + 2\omega_j) = \pm f_j(u)$, wenn

$$\omega_j = \sum_m r_m K_{jm} + i \sum_m s_m K'_{jm} \qquad (1 \leqq j \leqq p)$$

ist (die Koeffizienten r_m, s_m sind ganze Zahlen, und das Vorzeichen hängt davon ab, ob $r_j + \sum_{m<j} s_m$ geradzahlig ist oder nicht). Weierstraß hat noch p Integrale zweiter Gattung betrachtet, die gegeben sind durch die Formen

$$\frac{F_j(x)\,dx}{c_j^2(x - a_{2j-1})\sqrt{R(x)}} \qquad (1 \leqq j \leqq p)$$

und die entsprechenden Perioden J_{jm}, J'_{jm}, welche wie K_{jm} und K'_{jm} konstruiert sind. Mit Hilfe des Theorems über die Vertauschung von Parameter und Argument in den hyperelliptischen Integralen dritter Gattung, das Abel angegeben hatte (siehe 7.2.1.), erhielt Weierstraß, indem er jedesmal längs der Strecke zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen von R integrierte, Relationen zwischen den Perioden, die die von Legendre angegebenen Relationen verallgemeinerten (siehe 7.1.4., Gleichung (6)):

$$\sum_{q=1}^{p} (K_{qm}J_{qn} - J_{qm}K_{qn}) = \sum_{q=1}^{p} (K'_{qm}J'_{qn} - J'_{qm}K'_{qn}) = 0$$

$$\text{für} \quad 1 \leqq m, n \leqq p\,,$$

$$\sum_{q=1}^{p} (K_{qm}J'_{qn} - J_{qm}K'_{qn}) = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}$$

(δ_{mn} ist entweder 0 oder 1, je nachdem, ob m und n verschieden sind oder nicht). Diese Relationen lassen sich in Matrizenschreibweise folgendermaßen

angeben:

$$ {}^t\mathrm{KJ} = {}^t\mathrm{JK}\,, \qquad {}^t\mathrm{K'J'} = {}^t\mathrm{J'K'} \quad \text{und} \quad {}^t\mathrm{KJ'} - {}^t\mathrm{JK'} = \frac{\pi}{2} 1_p\,, $$

und Weierstraß schloß hieraus auf

$$ 0 = {}^t\mathrm{K'J'} - {}^t\mathrm{J'K'} = \frac{\pi}{2} ({}^t\mathrm{K'}\,{}^t\mathrm{K}^{-1} - \mathrm{K}^{-1}\mathrm{K'})\,. $$

Also ist die Matrix $\mathrm{K}^{-1}\mathrm{K'}$ symmetrisch, und sie definiert eine quadratische Form ϕ. Weierstraß brachte zum Ausdruck, daß die f_j als Quotienten von Thetareihen, die mit ϕ in der Gestalt

$$ \sum_m \exp\left(-i\pi\left(\phi\left(m - \frac{\nu}{2}\right) - \left\langle m - \frac{\nu}{2}, t + \mu\right\rangle\right)\right) $$

konstruiert sind, darstellbar sein müssen, wobei m die Menge $\boldsymbol{Z}^p$ durchläuft, μ und ν zu $\boldsymbol{F}_2^p$ gehören und $u = 2\mathrm{K}t$ ist. Jedoch gab er keinen Beweis an; schon die Konvergenz der Thetareihen stellte ein Problem dar (siehe 7.2.5.).

Infolgedessen bezweifelte Weierstraß, daß man die Theorie auf der Grundlage der Thetafunktionen entwickeln kann, und er versuchte in seiner zweiten Abhandlung, das Analogon zu den Funktionen Al zu konstruieren, die er für die elliptischen Funktionen definiert hatte (siehe 7.1.12.). Neben den p Funktionen f_j, die er nun mit $\mathrm{al}\,(u)_{2j-1}$ bezeichnete (und die eine ähnliche Rolle wie $\mathrm{sn}\,u$ spielen), betrachtete er noch $p + 1$ Funktionen

$$ \mathrm{al}\,(u)_{2j} = \sqrt{\frac{\varphi(a_{2j})}{P(a_{2j})}} \qquad (0 \leqq j \leqq p)\,, $$

die zu $\mathrm{cn}\,u$ und $\mathrm{dn}\,u$ analog sind. Er versuchte, diese $2p + 1$ Funktionen in der Gestalt $\mathrm{al}_\alpha = \mathrm{Al}_\alpha/\mathrm{Al}$ mit $2p + 2$ Funktionen Al, Al_α $(0 \leqq \alpha \leqq 2p)$ darzustellen, die sich in Potenzreihen entwickeln lassen, welche auf ganz $\boldsymbol{C}^p$ konvergieren. Diese neuen Funktionen werden bestimmt, indem man von einer Summe von Integralen dritter Gattung,

$$ \mathrm{Sl}\,(u) = \sum_{j=1}^{p} \int_{a_{2j-1}}^{x_j} \frac{\sqrt{R(a)}}{2P(a)} \frac{P(x)}{x - a} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad (a \text{ ist der ,,Parameter''}), $$

ausgeht, bei denen die x_j mit $u \in \boldsymbol{C}^p$ wie oben verknüpft sind; diese Summe ist eine Linearkombination einer eindeutigen analytischen Funktion von u und des Logarithmus einer solchen Funktion. Für ein zu a_{2j-1} benachbartes a ist der Koeffizient $\mathrm{Sl}\,(u)_j$ von $b = P(a)/\sqrt{R(a)}$ in der Entwicklung von $\mathrm{Sl}\,(u)$ nach Potenzen von b gleich der entsprechenden Summe von Integralen zweiter Gattung mit dem Index j. Weierstraß bezeichnete mit K_j^α und J_j^α die Integrale erster bzw. zweiter Gattung zwischen a_∞ und ∞ (die Werte von $\sqrt{R(x)}$ in jedem Intervall sind festgelegt) und zeigte, daß

$$ \frac{\partial}{\partial u_j} \log \mathrm{al}\,(u)_\alpha = J_j^\alpha - \mathrm{Sl}\,(u + K^\alpha - K^{2j-1})_j + \mathrm{Sl}\,(u - K^{2j-1})_j $$

und

$$\frac{\partial}{\partial u_m} \mathrm{Sl}\,(u - K^{2j-1})_j = \frac{\partial}{\partial u_j} \mathrm{Sl}\,(u - K^{2m-1})_m$$

gilt, was gestattet,

$$d \log \mathrm{Al}\,(u) = - \sum_j \left(J_j^{2j-1} + \mathrm{Sl}\,(u - K^{2j-1})_j\right) du_j\,,$$

$$d \log \mathrm{Al}\,(u)_\alpha = - \sum_j \left(J_j^{2j-1} - J_j^\alpha + \mathrm{Sl}\,(u - K^{2j-1} + K^\alpha)_i\right) du_j$$

zu setzen (exakte Differentialformen). Es gelang ihm, Al und die Al_α mit Hilfe der Bedingungen

$$\mathrm{Al}\,(0) = \mathrm{Al}\,(0)_{2j} = 1\,, \qquad \frac{\partial}{\partial u_j} \mathrm{Al}\,(u)_{2j-1} = 1$$

zu bestimmen. Bezeichnet w_j das Integral erster Gattung vom Index j, erstreckt von a bis ∞, so gilt

$$\mathrm{Sl}\,(u) = - \sum_j u_j \frac{\partial}{\partial w_j} \log \mathrm{Al}\,(w) + \frac{1}{2} \log \frac{\mathrm{Al}\,(u + w)}{\mathrm{Al}\,(u - w)}$$

in Analogie zu der berühmten Jacobischen Formel für die elliptischen Integrale dritter Gattung (siehe 7.1.10.; Galois hatte eine solche Formel vergeblich gesucht, da er *ein* Abelsches Integral und nicht eine Summe von p Integralen betrachtete). Die Funktion Al genügt der Beziehung

$$\mathrm{Al}\,(u + 2K^\alpha) = (-1)^\alpha \mathrm{Al}\,(u) \exp\left(-2 \sum_m J_m^\alpha (u_m + K_m^\alpha)\right)\,.$$

Weierstraß fügte $2K^\beta$ $(\beta \neq \alpha)$ zu u hinzu, vertauschte dann α und β und zeigte, daß $\sum_m (K_m^\alpha J_m^\beta - J_m^\alpha K_m^\beta)$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi i/2$ ist, und zwar $\pm\pi i/2$ je nach dem Vorzeichen von $\alpha - \beta$. Hieraus leitete er einen neuen Beweis für die Beziehungen zwischen den Perioden her. Die symmetrische Matrix JK^{-1} bestimmt eine quadratische Form E, und Weierstraß konstruierte eine neue Funktion $\mathrm{Jc}\,(v) = g\, e^{E(\mathrm{K}v/\pi)} \mathrm{Al}\,(\mathrm{K}v/\pi)$ mit p Perioden (mit der Periode 2π bezüglich jeder Variablen v_j); ihre Fourierentwicklung liefert (für eine passend gewählte Konstante g) eine der oben konstruierten Thetareihen. Die anderen Thetafunktionen ergeben sich demgemäß aus den Al_α und den Zählern $\mathrm{Al}_{\alpha\beta}$ anderer Funktionen $\mathrm{al}_{\alpha\beta}$, die für ungerades β durch

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \mathrm{al}\,(u)_\alpha = - \frac{1}{c_j^2} \mathrm{al}\,(u)_{2j-1}\, \mathrm{al}\,(u)_{\alpha, 2j-1}$$

definiert sind.

Es bleibt zu zeigen, daß die Funktionen Al Taylorentwicklungen besitzen, die auf C^p konvergieren. In seiner dritten Abhandlung bediente sich Weierstraß des Abelschen Theorems, um $\mathrm{al}\,(u)_\alpha$ mit Hilfe der Werte der al in u/n zu berechnen (n ganzzahlig und groß genug, damit u/n zum Konvergenzbereich der Reihen gehört, die durch den Satz über implizite Funktionen — angewendet auf das Umkehrproblem — gegeben sind). Er erhielt so für jeden beschränkten Bereich von C^p

eine Darstellung von al_α als Quotient zweier Potenzreihen, die auf diesem Bereich konvergent sind (in Wirklichkeit konstruierte er die al in bezug auf den betrachteten Teil von C^p, aber das Prinzip der analytischen Fortsetzung zeigt, daß sie nicht davon abhängen). Dies ermöglichte Weierstraß, den Beweis zu führen. Es sei erwähnt, daß man damals nicht wußte, daß eine auf C^p meromorphe Funktion der Quotient zweier ganzer Funktionen ist (siehe 4.2.4.), so daß Weierstraß dies für spezielle meromorphe Funktionen nachweisen mußte.

Weierstraß stellte eine Anzahl von algebraischen Relationen zwischen den Funktionen al auf; z.B. lassen sich die Quadrate der al_α linear als Funktion von p solcher Funktionen ausdrücken. Er gab den allgemeinen Ausdruck für eine Summe

$$\sum_j \int^{x_j} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \qquad (F \text{ eine rationale Funktion})$$

von p hyperelliptischen Integralen mit Hilfe von u, der Funktionen al, von Integralen zweiter Gattung und von $\mathrm{Sl}\,(u, a)$ an, wobei der Parameter a besonders hervorgehoben wird. Der Anteil „von dritter Gattung“ läßt sich in der Gestalt

$$\sum_a \mathrm{Res}_a(F)\,\mathrm{Sl}\,(u, a)$$

schreiben, wenn mit $\mathrm{Res}_a(F)$ das Residuum von F im Punkt a bezeichnet wird.

7.2.5. *Die Arbeiten Riemanns*

Die berühmte Riemannsche Abhandlung *Theorie der Abel'schen Functionen* (1857) ([41], S. 88–144) markierte durch ihren Standpunkt und ihre völlig neuen Resultate den Beginn einer neuen Epoche in der Theorie der Abelschen Integrale. Die Theorie der Thetafunktionen von p Variablen wurde hier entwickelt, und sie enthält implizit die Lösung des Jacobischen Umkehrproblems im allgemeinen Fall.

Um eine algebraische Funktion s zu untersuchen, die durch eine Gleichung $F(s, z) = 0$ vom Grad n in s und vom Grad m in z definiert ist, führte Riemann eine n-blättrige Fläche T über der Ebene ein. Diese Fläche stellt die Verzweigung der Funktion s dar, und auf ihr wird s (ebenso wie jede rationale Funktion von s und z) eine eindeutige analytische Funktion (vgl. 7.1.5. und 4.5.2.). Er vervollständigte übrigens T, indem er zu T unendlich ferne Punkte über $z = \infty$ hinzufügte (ebenso viele Punkte, wie die Funktion s Zweige im Unendlichen hat), so daß T eine geschlossene Fläche ist. Sein Ziel war, die rationalen Funktionen von s und z und die Integrale solcher Funktionen längs Wegen in T zu studieren. Dazu charakterisierte er diese Funktionen durch ihre Unstetigkeiten in T und durch ihre „Perioden“, d. h. (für die Integrale) durch die Differenzen zwischen den Werten, die sie auf jedem Ufer gewisser Schnitte (siehe weiter unten) annehmen; in der Komplementärmenge dieser Schnitte sind es eindeutige analytische Funktionen. Das Dirichletsche Prinzip (siehe 4.5.3. und 8.5.2.) ist das Werkzeug, dessen sich Riemann für diese Charakterisierung bediente. In jedem Punkt von T definierte er

eine „Uniformisierende“ r, mit deren Hilfe er das Verhalten einer Funktion in diesem Punkt ausdrücken konnte: Ist der Punkt über $z = a$ kein Verzweigungspunkt, so ist $z - a$ eine Uniformisierende; gibt es aber eine μ-fache Verzweigung, so kann man $r = (z - a)^{1/\mu}$ setzen. Im Fall $a = \infty$ muß $z - a$ durch $1/z$ ersetzt werden. Die betrachteten Funktionen haben dann Singularitäten vom Typ $A \log r + Br^{-1} + Cr^{-2} + \cdots$ (Summe mit *endlich* vielen Gliedern).

Riemann betrachtete ein anscheinend allgemeineres Problem: Gegeben sei eine n-blättrige geschlossene Fläche T über $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ (das ist die durch einen unendlich fernen Punkt komplettierte Ebene), aus der man eine einfach zusammenhängende Fläche T' erhält, wenn man eine bestimmte Anzahl von „Rückkehrschnitten“ (siehe Kapitel 10) legt. Dann betrachtet man endlich viele Punkte ε_ν von T' und gibt für jeden von ihnen einen Hauptteil

$$\varphi_\nu(r_\nu) = A_\nu \log r_\nu + B_\nu r_\nu^{-1} + C_\nu r_\nu^{-2} + \cdots$$

(r_ν Uniformisierende in ε_ν) vor; jedes der ε_ν, für die $A_\nu \neq 0$ ist, verbindet man mit Hilfe einer Kurve l_ν mit dem Rand $\partial T'$ (alle diese Kurven mögen keine gemeinsamen Punkte besitzen und im Innern von T' bleiben). Es soll eine auf der Fläche T', aus der die l_ν und die ε_ν entfernt wurden, holomorphe Funktion bestimmt werden, die $\varphi_\nu(r_\nu)$ als Hauptteil in ε_ν besitzt und bei der die Differenz der Werte auf den beiden Ufern von l_ν (bzw. des ν-ten Rückkehrschnittes) gleich $-2\pi i A_\nu$ sei (bzw. einen gegebenen Realteil habe). Das Dirichletsche Prinzip sichert die Existenz einer solchen Funktion, die bis auf eine additive Konstante eindeutig ist, vorausgesetzt, es gilt $\sum_\nu A_\nu = 0$.

Riemann stellte fest, daß der Rand von T' zusammenhängend ist, und zeigte, daß die Anzahl der Rückkehrschnitte notwendigerweise gerade ist; er bezeichnete diese Anzahl mit $2p$. Der Vektorraum (modulo der Konstanten) der Funktionen vom obigen Typ, welche auf ganz T' (keine Singularität ε_ν) holomorph sind, hat dann die komplexe Dimension p, da eine solche Funktion bis auf eine Konstante durch $2p$ reelle Konstanten (die Realteile ihrer Perioden) bestimmt ist. Riemann nannte sie *Funktionen erster Gattung* und wählte $w_1, w_2, \ldots, w_p$ als Basis ihres Raumes. Die *Funktionen zweiter Gattung* — die einfachsten nach denen der ersten Gattung — sind diejenigen, die nur einen singulären Punkt ε mit einem Hauptteil Br^{-1} haben. Ist $t^0(\varepsilon)$ von diesem Typ, so läßt sich jede andere Funktion zweiter Gattung mit demselben singulären Punkt in der Gestalt $\beta t_0(\varepsilon) + w$ schreiben, wobei β eine Konstante und w eine Funktion erster Gattung ist. Schließlich haben *Funktionen dritter Gattung* $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ zwei Singularitäten ε_1, ε_2 mit den Hauptteilen $A \log r_1$ bzw. $-A \log r_2$, und der Wert von A bestimmt $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ bis auf eine Funktion erster Gattung. Riemann bemerkte, daß die Ableitung von $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ nach dem Parameter ε_1 eine Funktion zweiter Gattung $t(\varepsilon_1)$ mit einem Pol in ε_1 ist und daß man durch n-malige Differentiation von $t(\varepsilon_1)$ nach ε_1 eine Funktion mit einem Pol $(n + 1)$-ter Ordnung in ε_1 erhält.

Riemann interessierte sich dann für Funktionen (immer vom gleichen Typ), die auf T eindeutig und analytisch sind, d. h. deren Perioden sämtlich gleich null sind und die keine logarithmischen Singularitäten besitzen (alle A_ν sind gleich null). Hat eine solche Funktion nur einfache Pole $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, so kann man ihr die

Gestalt

$$s = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \cdots + \beta_m t_m + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_p w_p + \text{const}$$

geben; dabei ist t_ν eine Funktion zweiter Gattung mit einem Pol in ε_ν, und die $\beta_\nu, \alpha_\lambda$ sind $m + p$ Konstanten, die $2p$ linearen und homogenen Relationen unterworfen sind, welche zum Ausdruck bringen, daß die Perioden von s gleich null sind (gibt es einen mehrfachen Pol, etwa ϱ-ter Ordnung, so müssen ϱ der Funktionen t_ν durch eine Funktion zweiter Gattung t_ν und deren Ableitungen bis zur Ordnung $\varrho - 1$ ersetzt werden). Man sieht, daß das System, dem die α_λ und die β_ν genügen müssen, stets eine Lösung hat, wenn $m \geqq p + 1$ ist. In diesem Fall existiert eine eindeutige analytische Funktion s mit m willkürlich vorgegebenen Polen. Im allgemeinen hängt s noch von $m - p + 1$ Konstanten ab. Für $m = p + 1$ sind die $\alpha_\lambda, \beta_\nu$ im allgemeinen bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, und gewisse β_ν können sich als Null erweisen, so daß s eine Funktion mit $\mu < m$ Polen ist. Riemann zeigte, daß — außer für spezielle Flächen T — stets $\mu \geqq \frac{p}{2} + 1$ ist.

Die eben betrachteten Funktionen s hängen algebraisch von z ab. Um dies zu erkennen, bemerkte Riemann, daß die elementarsymmetrischen Funktionen der n Werte, welche s über ein und demselben $z \in \boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ annimmt, auf $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ meromorphe Funktionen, also rational sind. Das führt auf eine Gleichung $F(s, z) = 0$, wobei F ein Polynom vom Grad n in s und vom Grad m (Anzahl der Pole von s) in z ist. Daß T zusammenhängend ist, zeigte ihm, daß F Potenz eines irreduziblen Polynoms ist. Man kann s so wählen, daß F irreduzibel ist, und dann läßt sich jede andere eindeutige analytische Funktion s' auf T rational als Funktion von s und z ausdrücken (mit einem Zähler und einem Nenner, die in allen „Doppelpunkten" von $F = 0$ gleich null sind). Ist ω eine Funktion vom allgemeinsten der betrachteten Typen, so ist $d\omega/dz$ eindeutig und analytisch auf T; also ist dies eine rationale Funktion von s und z, und man sieht, daß die Funktionen ω nichts anderes sind als die Abelschen Integrale.

Riemann versuchte, das „Geschlecht" p zu berechnen, indem er von der Gleichung $F(s, z) = 0$ ausging und zunächst die Verzweigungspunkte bestimmte. Diese Punkte sind durch die Bedingungen $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ gegeben, aber diese Bedingungen gelten auch für die singulären Punkte, in denen außerdem noch $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ ist. Riemann faßte alle diese Punkte als Grenzfälle von „einfachen" Verzweigungen (d. h. von solchen zweiter Ordnung) auf, die sich unendlich nahe kommen. Das ergibt eine Anzahl w von „wirklichen Verzweigungen" und eine Anzahl r von „Doppelpunkten" (dies ist tatsächlich die Anzahl der Doppelpunkte, wenn die einzigen Singularitäten der Kurve $F(s, z) = 0$ gewöhnliche Doppelpunkte sind). Riemann berechnete auf zwei Arten den Grad der Diskriminante (die Resultante ([3], S. 61) von F und $\frac{\partial F}{\partial s}$ bei Eliminierung von s) und fand $\mathrm{w} + 2r = 2(n - 1)\, m$. Übrigens ist $\mathrm{w} - 2n = 2p - 2$ (Riemann zeigte dies,

indem er $d \log \frac{dz}{d\zeta}$ längs des Randes integrierte, wobei ζ die Fläche T' auf die Einheitskreisscheibe abbildet und mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips konstruiert ist). Also ist $p = (n-1)(m-1) - r$.

Die Funktionen erster Gattung sind die Integrale algebraischer Funktionen mit einem einfachen Pol in jedem Verzweigungspunkt und einer doppelten Nullstelle im Unendlichen; sie können somit in der Gestalt

$$w = \int \frac{\varphi(s, z)}{F'_s} dz = -\int \frac{\varphi(s, z)}{F'_z} dx$$

angegeben werden, wobei φ ein Polynom $(n-2)$-ten Grades in s und $(m-2)$-ten Grades in z ist und in den r Doppelpunkten verschwindet. In analoger Gestalt hat Abel die Integrale angegeben, für welche sich die in seinem Theorem auftretende algebraisch-logarithmische Funktion v auf eine Konstante reduziert (siehe 7.2.1.), jedoch fand Abel im allgemeinen mehr als p linear unabhängige Integrale: Wie Clebsch und Gordan (1866) bemerkten, ergeben die Integrale dritter Gattung, deren singuläre Punkte Doppelpunkte der Kurve sind (durch welche $\theta = 0$ nicht geht), wieder $v = \text{const}$. Die Funktionen φ, welche die Integrale erster Gattung liefern, verschwinden in $2p - 2$ Punkten, die von den Doppelpunkten verschieden sind, und jede rationale Funktion von s und z, die höchstens p einfache Pole in T besitzt, läßt sich als Quotient zweier solcher Funktionen ausdrücken.

Ist z_1 eine rationale Funktion von s und z mit n_1 einfachen Polen, so ist sie mit z durch eine algebraische Beziehung n-ten Grades in z_1 und n_1-ten Grades in z verknüpft; also nimmt sie auf T jeden Wert n_1-mal an. Nimmt man z_1 als neue Variable, so wird T zu einer n_1-blättrigen Fläche über der z_1-Ebene. Eine zweite in s und z rationale Funktion s_1 mit m_1 einfachen Polen genügt einer Gleichung $F_1(s_1, z_1) = 0$ vom Grad n_1 in s_1 und vom Grad m_1 in z_1, und F_1 ist Potenz eines irreduziblen Polynoms. Ist F_1 irreduzibel, so sind die in s und z rationalen Funktionen die gleichen wie die in s_1 und z_1 rationalen Funktionen. Riemann faßte die Gleichungen $F(s, z) = 0$ und $F_1(s_1, z_1) = 0$ als äquivalent auf, als zur gleichen „Klasse" gehörig. Er führte so den Begriff der *birationalen Äquivalenz* ein, der lange Zeit die algebraische Geometrie beherrschte (siehe [23], Kap. V und VI). Eine Funktion mit μ einfachen Polen macht aus T eine Fläche mit $2\mu + 2p - 2$ Verzweigungspunkten, und da sie im allgemeinen von $2\mu - p + 1$ willkürlichen Konstanten abhängt (die μ Pole und $\mu - p + 1$ Koeffizienten treten linear auf), kann man im allgemeinen ebenso viele Verzweigungspunkte willkürlich wählen. Es bleiben $3p - 3$ Werte, die die Klasse von T charakterisieren und die von Riemann die *Moduln* dieser Klasse genannt wurden. Diese Überlegung versagt für $p = 0$ oder 1, so daß Riemann einen anderen Weg einschlug, um die Anzahl der Moduln zu berechnen: Er betrachtete das Bild von T' vermöge eines Integrals erster Gattung w; es ergibt sich über der w-Ebene eine Fläche mit $2p - 2$ Verzweigungspunkten, die von $2p$ Paaren paralleler Kurven begrenzt wird (welche um eine Periode von w voneinander entfernt sind; vgl. die Darstellung einer elliptischen Kurve durch ein Periodenparallelogramm; siehe 7.1.5.). Man kann p der $2p$ Perioden von w willkürlich vorgeben, und ist $p \geqq 2$, so läßt sich (wegen der additiven Konstanten) einer der

Verzweigungswerte wählen, was genau $p + 2p - 3 = 3p - 3$ Moduln ergibt (aber nur einen einzigen Modul im Fall $p = 1$). Riemann versuchte, die Gleichung einer gegebenen Klasse so einfach wie möglich zu schreiben, d. h. n_1 und m_1 so klein wie möglich zu machen. Im allgemeinen gilt $n_1 \geqq \frac{p}{2} + 1$, und die Anzahl der Doppelpunkte ist $(n_1 - 1)(m_1 - 1) - p$ (das Geschlecht p ist per definitionem eine Invariante der Klasse).

In der Riemannschen Theorie erscheint das Abelsche Theorem in der folgenden Fassung (für die Integrale erster Gattung): Ist ζ eine rationale Funktion von s und z mit m einfachen Polen und ist w ein Integral erster Gattung, so ist $\frac{dw}{d\zeta}$ eine algebraische Funktion von ζ mit m Werten $\frac{dw^{(j)}}{d\zeta}$, deren Summe eine rationale Funktion von ζ mit einer überall endlichen Stammfunktion ist; diese Stammfunktion ist also eine Konstante, woraus $\sum_{j=1}^{m} w^{(j)} = \text{const}$ folgt. Um das Differentialgleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{p+1} \frac{\varphi_k(s_j, z_j)}{F'_s(s_j, z_j)} dz_j = 0 \qquad (1 \leqq k \leqq p)\,,$$

in welchem die $(\varphi_k/F'_s)\,dz$ eine Basis des Vektorraumes der Differentialformen erster Gattung bilden, bei gegebenen Anfangswerten (s_j^0, z_j^0) zu integrieren, bestimmt man eine rationale Funktion ζ mit einer einfachen Nullstelle in jedem Anfangswert und erhält (s_j, z_j) als Funktion von ζ.

Der zweite Teil der Riemannschen Abhandlung *Theorie der Abel'schen Functionen* enthält die Theorie der Thetafunktionen und ihre Anwendung auf Abelsche Integrale. Die allgemeinste Thetafunktion von p Variablen lautet

$$\vartheta(v) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^p} e^{Q(m) + 2\langle m, v\rangle} \quad \text{mit} \quad v \in \mathbf{C}^p\,,$$

wobei Q eine quadratische Form bezeichnet, deren Realteil negativ definit ist (um die Konvergenz zu sichern; es gibt Aufzeichnungen einer Riemannschen Vorlesung aus den Jahren 1861—1862 ([41], S. 483—486) von Roch, wo diese Konvergenz untersucht wird). Riemann fand, daß die Thetafunktion von den $p(p+1)/2$ Koeffizienten von Q abhängt, was für $p \geqq 4$ zu viele Parameter zur Folge hat, da die Abelschen Integrale vom Geschlecht p von $3p - 3$ „Moduln" abhängen (siehe 7.2.8.). Bezeichnet h_μ den μ-ten Vektor der kanonischen Basis von $\mathbf{C}^p$ und $A_\mu = (a_{\nu\mu})_\nu$ die μ-te Spalte der Matrix von Q, so ist

$$\vartheta(v) = \vartheta(v + \pi i h_\mu) = \exp(2v_\mu + a_{\mu\mu})\, \vartheta(v + A_\mu)\,,$$

und diese Gleichungen charakterisieren ϑ bis auf einen konstanten Faktor. Um eine Thetafunktion zu konstruieren, die auf die Abelschen Integrale auf der Fläche T anwendbar ist, wählte Riemann zuerst ein spezielles System von Rückkehrschnitten, das aus p Paaren von geschlossenen Wegen a_ν, b_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ gebildet wird derart, daß b_ν denselben Ursprung wie der Weg a_ν hat und das eine Ufer dieses Schnittes mit dem anderen Ufer verbindet, und $p - 1$ Wegen c_ν, die b_ν mit

$a_{\nu+1}$ $(1 \leqq \nu \leqq p-1)$ verbinden. Ein Integral erster Gattung ist auf dem Komplement T'' der Wege a_ν, b_ν $(1 \leqq \nu \leqq p)$ eindeutig. Mit (w_μ) sei eine Basis des Raumes der Integrale erster Gattung (modulo der Konstanten) bezeichnet. Riemann integrierte $w_\mu dw_{\mu'}$ längs des orientierten Randes $\partial T''$ von T'' und erhielt die Relationen

$$\sum_\nu (A_\mu^{(\nu)} B_{\mu'}^{(\nu)} - B_\mu^{(\nu)} A_{\mu'}^{(\nu)}) = 0 \qquad (1 \leqq \mu, \mu' \leqq p)\,,$$

wobei $A_\mu^{(\nu)}$ und $B_\mu^{(\nu)}$ die Perioden von w_μ beim Überschreiten von a_ν bzw. b_ν (d. h. die Integrale $\int_{b_\nu} dw_\mu$ bzw. $\int_{a_\nu} dw_\mu$) sind. Das ist die Verallgemeinerung der von Weierstraß aufgestellten Beziehungen im hyperelliptischen Fall (siehe 7.2.4.). Man kann die w_μ derart wählen, daß $A_\mu^{(\nu)} = i\pi\delta_{\mu\nu}$ ist; dann nehmen die obigen Relationen die Gestalt $B_{\mu'}^{(\mu)}\pi i - B_\mu^{(\mu')}\pi i = 0$ an, d. h., die Matrix $(B_\mu^{(\nu)})_{\mu,\nu}$ ist symmetrisch. Riemann benutzte, um zu zeigen, daß ihr Realteil negativ definit ist, die Beziehung

$$\operatorname{Im} \sum_\nu A^{(\nu)} \overline{B^{(\nu)}} = -\iint |\operatorname{grad} \operatorname{Re} w|^2\, dT < 0\,,$$

die für jedes Integral erster Gattung w mit Perioden $A^{(\nu)}$, $B^{(\nu)}$ gilt. Er konnte so eine Funktion ϑ mit Hilfe der quadratischen Form Q mit der Matrix $(B_\mu^{(\nu)})$ konstruieren.

Riemann wählte eine Basis $u_1, u_2, \ldots, u_p$ von Integralen erster Gattung mit den Perioden $A_\mu^{(\nu)} = i\pi\delta_{\mu\nu}$ und $B_\mu^{(\nu)} = a_{\mu\nu}$ und konstruierte die zugehörige Funktion ϑ. Die Funktion $\vartheta(u-e)$ mit $u = (u_1, \ldots, u_p)$ und $e \in \boldsymbol{C}^p$ ist auf der Fläche T, aus der die b_ν entfernt wurden, eindeutig und verschwindet, wenn sie nicht identisch null ist, in p Punkten $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ von T', wie man erkennt, wenn man ihr logarithmisches Differential längs des orientierten Randes $\partial T'$ integriert. Riemann betrachtete eingehend das Verhalten des Logarithmus dieser Funktion auf T' und zeigte, daß man, nachdem man u und e um eine passende (nur von der Wahl der u_ν abhängende) Konstante vermindert hat, die Beziehung

$$e \equiv \sum_{p=1}^{p} u(\eta_\nu) \qquad \text{(mod. Perioden)}$$

erhält. Dies führte dazu, den Quotientenraum J von $\boldsymbol{C}^p$ nach der (durch die $\pi i h_\mu$ und A_μ erzeugten) Gruppe der Perioden einzuführen, der später die *Jacobische* der algebraischen Kurve $F(s, z) = 0$ genannt wird *[19 bis], ferner das „symmetrische Produkt" S von p Exemplaren von T (dessen Elemente die Mengen von p nicht notwendig verschiedenen Punkten von T sind) sowie die Abbildung U von S in J, welche $\{\eta_\nu\} \in S$ in die Klasse (mod. Perioden) von $\sum_\nu u(\eta_\nu)$ transformiert. Die obigen Betrachtungen erlaubten Riemann, zu zeigen, daß die Abbildung U surjektiv ist und daß sie außerhalb der Ausnahmemenge der Punkte $e \in J$, in denen $\vartheta(u-e)$ identisch null ist, sogar bijektiv ist. Er schloß hieraus auch, daß die Punkte $r \in J$, für die $\vartheta(r) = 0$ ist (dies ist sinnvoll, da ϑ auf J bis auf eine Potenz von e definiert ist), diejenigen sind, die zu $-\sum_{\nu=1}^{p-1} u(\eta_\nu)$ (mod. Perioden) kongruent sind; dabei ist $(\eta_1, \ldots, \eta_{p-1})$ ein System von Punkten von T, das im allgemeinen eindeutig bestimmt ist, wenn r gegeben ist. Den vollständigen Beweis dafür findet

man in einem späteren Artikel (1865) ([41], S. 212–224), in dem Riemann zeigte, daß der „Freiheitsgrad" bei der Wahl von $(\eta_1, \ldots, \eta_{p-1})$ gleich der um 1 verminderten Ordnung der Nullstelle von ϑ in r ist. Riemann zeigte ferner: Sind $(\varepsilon_\nu)_{1 \leqq \nu \leqq 2p-2}$ die (von den Doppelpunkten verschiedenen) Punkte von T, in denen eine Funktion φ, für die $(\varphi/F'_s)\, dz$ eine Differentialform erster Gattung ist, verschwindet, dann gilt $\sum_{\nu=1}^{2p-2} u(\varepsilon_\nu) \equiv 0$ (mod. Perioden); ist ε fest, so verschwindet

$$\vartheta\left(u(\varepsilon) - \sum_{\nu=1}^{p} u(\eta_\nu)\right),$$

aufgefaßt als Funktion von η_μ, für $\eta_\mu = \varepsilon$ und in $p - 1$ anderen Punkten, die zusammen mit den η_ν $(\nu \neq \mu)$ die $2p - 2$ Nullstellen einer Funktion φ bilden (durch diese Bedingung sind die Nullstellen bestimmt, wenn man die $\eta_\nu, \nu \neq \mu$, kennt).

Schließlich fand Riemann den Zusammenhang zwischen der Thetafunktion und den Integralen dritter bzw. zweiter Gattung sowie den Ausdruck für die rationalen Funktionen von s und z mit Hilfe der Thetafunktionen. Für gegebene ε_1, ε_2 und für alle μ hat die Funktion

$$\eta_\mu \mapsto \log \vartheta\left(u(\varepsilon_2) - \sum_{\nu=1}^{p} u(\eta_\nu)\right) - \log \vartheta\left(u(\varepsilon_1) - \sum_{\nu=1}^{p} u(\eta_\nu)\right)$$

die charakteristischen Eigenschaften eines Integrals dritter Gattung $\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ mit Singularitäten in ε_1 und ε_2 und den Perioden null beim Überschreiten von a_ν. Das ergibt

$$\log \vartheta\left(u(\varepsilon_2) - \sum_\nu u(\eta_\nu)\right) - \log \vartheta\left(u(\varepsilon_1) - \sum_\nu u(\eta_\nu)\right) = \sum_\nu \tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\,(\eta_\nu)$$

und umgekehrt, wenn man alle η_ν gleichsetzt,

$$\tilde{\omega}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\,(\eta) = \frac{1}{p}\left(\log \vartheta\left(u(\varepsilon_2) - p u(\eta)\right) - \log \vartheta\left(u(\varepsilon_1) - p u(\eta)\right)\right).$$

Durch Differentiation nach ε_1 findet man

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \log \vartheta\left(u(\varepsilon_1) - \sum_\nu u(\eta_\nu)\right) = \sum_\nu t(\varepsilon_1)\,(\eta_\nu)$$

mit einem Integral zweiter Gattung $t(\varepsilon_1)$, das einen Pol in ε_1 hat, und umgekehrt

$$t(\varepsilon)\,(\eta) = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial z} \log \vartheta\left(u(\varepsilon) - p u(\eta)\right).$$

Ist r eine meromorphe Funktion auf T', deren Werte auf jeder Seite eines Rückkehrschnittes a_ν oder b_ν um einen konstanten Faktor längs dieses Rückkehrschnittes differieren („Funktionen mit konstanten Multiplikatoren", wie sie im elliptischen Fall von Hermite betrachtet wurden; vgl. 7.1.11.), so kann man zwei Produkte P und Q mit der gleichen Anzahl von Funktionen der Gestalt $\vartheta\left(u - \sum_\nu u(\eta_\nu)\right)$ derart konstruieren, daß sich $\frac{P}{Q} e^{-2\langle k, u\rangle}$ genau so verhält wie r (wobei der Multiplikator von r beim Überschreiten von a_ν gleich $e^{-2\pi i k_\nu}$ ist) und die gleichen Nullstellen und

die gleichen Pole besitzt. Das Dirichletsche Prinzip, auf die Logarithmen dieser Funktionen angewendet, zeigt, daß sie bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen. Dies betrifft insbesondere den Fall, daß die Multiplikatoren von r Einheitswurzeln sind, was bedeutet, daß r^n für genügend großes n eine rationale Funktion von s und z ist. Noch spezieller: Jede rationale Funktion r von s und z kann so ausgedrückt werden, aber es muß mindestens zwei Thetafunktionen in P und in Q geben, denn man kann zeigen, daß $\vartheta(u - \sum_\nu u(\eta_\nu))$ identisch null ist, wenn mit (η_ν) die Menge der Nullstellen einer rationalen Funktion bezeichnet wird.

In einer Vorlesung aus den Jahren 1861—1862 ([41], Nachträge, S. 1—66) führte Riemann die allgemeineren Thetafunktionen

$$\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{pmatrix}(v) = \sum_{m\in \mathbf{Z}^p} \exp\left(Q\left(m - \frac{\varepsilon}{2}\right) + 2\left\langle m - \frac{\varepsilon}{2}, v - \frac{\varepsilon'}{2}\pi i\right\rangle\right)$$

mit $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}^p$ ein (Q ist die übliche quadratische Form). Der Index $\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{pmatrix}$, den man als Element von $\boldsymbol{F}_2^{2p}$ auffassen kann, wird *Charakteristik* der Thetafunktion genannt; er nimmt 2^{2p} Werte an. Die Funktion $\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{pmatrix}$ ist gerade oder ungerade, je nachdem, ob $\sum_\mu \varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu$ gerade oder ungerade ist. Riemann zeigte (durch Induktion nach p), daß es $2^{p-1}(2^p + 1)$ gerade und $2^{p-1}(2^p - 1)$ ungerade Thetafunktionen gibt. Die letzteren verschwinden in 0, was durch

$$\vartheta\left(-\frac{\varepsilon'}{2}\pi i - {}^t\mathrm{A}\frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$$

beschrieben wird (A ist die Matrix von Q). Also ist

$$\frac{\varepsilon'}{2}\pi i + {}^t\mathrm{A}\frac{\varepsilon}{2} \equiv \sum_{\nu=1}^{p-1} u(\eta_\nu) \qquad \text{(mod. Perioden)}$$

und

$$2\sum_\nu u(\eta_\nu) \equiv 0 \qquad \text{(mod. Perioden)},$$

wodurch gezeigt ist, daß die Punkte $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{p-1}$ die zweifachen Nullstellen einer Funktion φ sind. Ist $\begin{pmatrix}\eta\\ \eta'\end{pmatrix}$ eine andere ungerade Charakteristik (d. h. ist $\sum_\mu \eta_\mu\eta'_\mu$ ungerade), so ist

$$r = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{pmatrix}(u(x) - u(x'))}{\vartheta\begin{pmatrix}\eta\\ \eta'\end{pmatrix}(u(x) - u(x'))}$$

eine Funktion (in x oder x') mit konstanten Multiplikatoren, die gleich +1 oder —1 sind; d. h., r ist die Quadratwurzel einer rationalen Funktion von s und z. Unter-

sucht man deren Nullstellen und Pole, so gelangt man zu einem Ausdruck

$$r = C\sqrt{\frac{\varphi(x)\,\varphi(x')}{\psi(x)\,\psi(x')}},$$

in dem C eine Konstante ist und $(\varphi/F'_s)\,dz$ und $(\psi/F'_s)\,dz$ Differentialformen erster Gattung bezeichnen. Es gibt also $2^{p-1}(2^p - 1)$ Funktionen φ mit $p - 1$ zweifachen Nullstellen, die den verschiedenen ungeraden Charakteristiken entsprechen. Riemann nannte die Quadratwurzeln dieser Funktionen „Abelsche Funktionen". Der Quotient zweier Abelscher Funktionen mit der Charakteristik $\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}\eta\\ \eta'\end{pmatrix}$ ist eine Funktion, die beim Überschreiten des Schnittes a_ν den Faktor $(-1)^{\varepsilon_\nu - \eta_\nu}$, beim Überschreiten des Schnittes b_ν den Faktor $(-1)^{\varepsilon'_\nu - \eta'_\nu}$ erhält. Die Abelschen Funktionen wurden im Fall $p = 3$ und im hyperelliptischen Fall von Riemann eingehend untersucht. Im ersten Fall zeigte er, indem er die Quadrate x, y, z dreier Abelscher Funktionen der Charakteristik a, b bzw. c als homogene Koordinaten benutzte, daß die Gleichung $F = 0$ die Gestalt

$$f^2 - xyzt = 0$$

annimmt, wobei f homogen vom zweiten Grade in x, y, z und ferner t linear und das Quadrat der Abelschen Funktion mit der (als ungerade vorausgesetzten) Charakteristik $a + b + c$ ist. In 7.2.7. werden wir sehen, wie dieses Problem mit den 28 Doppeltangenten an eine ebene Kurve vierter Ordnung verknüpft ist. Riemann bediente sich der Koeffizienten gewisser bilinearer Relationen zwischen den 28 Abelschen Funktionen, um die sechs Moduln auszudrücken, und er setzte diese Konstanten in Beziehung zu den Werten der Thetafunktionen in 0. Der hyperelliptische Fall (siehe 7.2.1.) entspricht der Tatsache, daß auf T eine meromorphe Funktion mit nur zwei einfachen Polen existiert, was für $p = 1$ oder 2 stets der Fall ist, für $p \geqq 3$ im allgemeinen aber nicht; in diesem Fall können gewisse gerade Thetafunktionen in 0 verschwinden, und die Theorie der Abelschen Funktionen muß modifiziert werden.

Von Riemann wurde das „Hermitesche Prinzip" (siehe 7.2.2.) auf die allgemeinen Thetafunktionen übertragen; dadurch lassen sich algebraische Beziehungen zwischen diesen Funktionen herstellen. Beispielsweise verhält sich die Funktion $\vartheta(v)\,\vartheta(v + b)$, wobei $b \in \boldsymbol{C}^p$ eine Konstante ist, wie eine Funktion $\vartheta(2v + b)$, die (anstelle von πi und $a_{\mu\nu}$) die Perioden $2\pi i$ und $2a_{\mu\nu}$ besitzt. Das ergibt

$$\vartheta(v)\,\vartheta(v + b) = \sum_{\varepsilon} c_\varepsilon\, e^{2\langle\varepsilon, v\rangle}\,\vartheta(2v + b + {}^t\mathrm{A}\varepsilon);$$

ε durchläuft $\{0, 1\}^p$, und c_ε ist eine Konstante. Um $\vartheta(0)$ zu untersuchen und mit den $3p - 3$ „Moduln" zu verknüpfen, schlug Riemann vor, das System der partiellen Differentialgleichungen

$$4\frac{\partial\vartheta}{\partial a_{\mu\mu}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v_\mu^2}, \qquad 2\frac{\partial\vartheta}{\partial a_{\mu\mu'}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v_\mu\,\partial v_{\mu'}} \qquad (\mu \neq \mu')$$

zu benutzen, das eine Verallgemeinerung der Wärmeleitungsgleichung darstellt.

Unter den Nachfolgern von Riemann ist sein Schüler Roch zu nennen, der die Anzahl der Parameter präzisierte, von denen eine auf T rationale Funktion mit m gegebenen Polen abhängt (1864). Nach Riemann ist diese Anzahl mindestens gleich $m - p + 1$, und für $m \geqq p + 1$ ist sie im allgemeinen gleich dieser Zahl. Roch nahm die Riemannschen Untersuchungen wieder auf und machte für die gesuchte Funktion den Ansatz

$$s = \sum_{j=1}^{m} \beta_j t_j + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + c;$$

dabei sind die Integrale erster Gattung u_i wie in der Theorie der Thetafunktionen (für gegebene Rückkehrschnitte a_ν und b_ν) gewählt, und die t_j sind Integrale zweiter Gattung mit einem Pol in ε_j (die gegebenen Pole von s; man setzt voraus, daß sie im Endlichen liegen und von den Verzweigungspunkten verschieden sind) und mit den Perioden null beim Überschreiten der a_ν. Nimmt man an, daß die Perioden von s beim Überschreiten von a_ν gleich null sind, so findet man $\alpha_i = 0$ für $1 \leqq i \leqq p$, und es bleiben nur die β_j und die Konstante c zu bestimmen. Ist $u_\mu = \int (\varphi_\mu / F_s') \, dz$ und sind A_μ und B_μ die Perioden von $\sum_j \beta_j t_j$, so gelangt man durch Integration von $u_\mu \, ds$ längs $\partial T'$ zu

$$\pi i B_\mu - \sum_\nu A_\nu a_{\mu\nu} = -2\pi i \sum_k \frac{\beta_k \varphi_\mu(\varepsilon_k)}{F_s'(\varepsilon_k)};$$

man hat schon $A_\nu = 0$, und setzt man noch $B_\mu = 0$, so findet man ein System von p linearen homogenen Gleichungen zwischen den β_j. Diese Gleichungen sind genau dann miteinander verknüpft, wenn Konstanten c_μ existieren derart, daß

$$\frac{\varphi(\varepsilon_k)}{F_s'(\varepsilon_k)} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqq k \leqq m$$

mit $\varphi = \sum_\mu c_\mu \varphi_\mu$ gilt. Roch zeigte in dieser Weise, daß der Raum der Funktionen s von der Dimension $m - p + 1 + q$ ist, wobei q die Dimension des Raumes der φ / F_ε' bezeichnet, die in allen Polen ε_k gleich 0 sind. Dieses Resultat, bekannt als Satz von Riemann-Roch, hat wichtige Verallgemeinerungen auf höhere Dimension erfahren (Hirzebruch 1956; Grothendieck 1957) (siehe [23], S. 169—182).

Erwähnt seien noch die Arbeiten von Prym (1869) über die Integration von Funktionen mit konstanten Multiplikatoren und die von Thomae (1866—1872) über den Zusammenhang zwischen den Moduln und den Werten der Thetafunktionen in 0. C. Neumann (1865) und Lüroth (1871) haben versucht, die Definition der Riemannschen Flächen zu präzisieren. Klein hat (1881) vorgeschlagen, sie als gegebene geometrische Objekte aufzufassen (Sphäre mit p Henkeln für das Geschlecht p), die von einer verzweigten Überlagerungsstruktur über $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ unabhängig sind, und genau auf diese Art und Weise gelangte man später (mit Weyl 1913; siehe 4.5.) zu einer völlig befriedigenden Definition. Die Mathematiker neigten dazu, die Riemannsche Theorie aufzugeben, als Weierstraß auf die Schwierigkeiten hinwies, die das Dirichletsche Prinzip aufwarf (1870; siehe 8.5.2.); inzwischen wurden aber durch Schwarz (1870) und C. Neumann (1877) abgeschwächte

Formen dieses Prinzips angegeben, die es gestatteten, das Riemannsche Gedankengebäude zu erneuern. Schließlich konnte Hilbert (1900) das Dirichletsche Prinzip in der von Riemann benutzten Form beweisen (siehe 8.6.).

7.2.6. *Die Weierstraßsche Theorie*

In einem der Berliner Akademie eingereichten Bericht behandelte Weierstraß (1857) die allgemeine Theorie der Abelschen Integrale, er besaß jedoch noch keine kompletten Beweise, und die Veröffentlichung der Riemannschen Abhandlung hatte ihn davon abgehalten, selbst zu publizieren. Weierstraß hatte erst 1869 seine Theorie vollständig ausgearbeitet und hielt darüber eine Reihe von Vorlesungen. Die Weierstraßsche Theorie war von großer Bedeutung, da man sich zu dieser Zeit von der Riemannschen Theorie mehr und mehr abwandte ([43], Bd. IV).

In dieser Theorie ist die mit Hilfe einer irreduziblen algebraischen Gleichung definierte Riemannsche Fläche durch eine Menge von lokalen Parameterdarstellungen $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ (φ, ψ konvergente Potenzreihen) ersetzt, die Weierstraß „*algebraische Gebilde*" nannte. Für jedes der gegebenen Gleichung $f(x, y) = 0$ genügende Paar (a, b) gibt es so viele Parameterdarstellungen oder „analytische Elemente" mit dem „Mittelpunkt" (a, b) (das sind die Elemente, für die $\varphi(0) = a$, $\psi(0) = b$ ist), wie Zweige der Kurve durch diesen Punkt gehen; äquivalente (d. h. durch eine Änderung des Parameters t auseinander hervorgehende) Elemente werden nicht unterschieden. Die analytischen Elemente in mehrfachen Punkten ergeben sich, indem mit Hilfe aufeinanderfolgender „quadratischer Transformationen" die Singularitäten beseitigt werden (siehe [22] und [23]). Der erste Teil der Weierstraßschen Arbeit benutzt algebraische Hilfsmittel. Zuerst wird gezeigt: Ist $R(x, y)$ eine rationale Funktion, so ist die Anzahl der Lösungen von $R(x, y) = s$, für die $f(x, y) = 0$ gilt, von s unabhängig (wenn man deren Vielfachheiten geeignet zählt). Dies ist per definitionem die Ordnung von R. Weierstraß definierte dann das Geschlecht p (das er „Rang" nannte) als kleinste Zahl, für die sich eine rationale Funktion von x und y mit n willkürlich vorgegebenen Polen ($n > p$) angeben läßt, und er bewies ihre birationale Invarianz. Bilden p verschiedene Punkte $(a_\alpha, b_\alpha)_{1 \leqq \alpha \leqq p}$ nicht die Menge der Pole einer rationalen Funktion, so existiert für jedes (x', y') eine rationale Funktion $F(x, y; x', y')$ von x und y mit einem einfachen Pol in (x', y') und in jedem der (a_α, b_α), und dies ist eine auch in x' und y' rationale Funktion. Weierstraß betrachtete die fundamentale Funktion

$$H(x, y; x', y') = \frac{F(x, y; x', y') - F(a_0, b_0; x', y')}{f'_y(x', y')};$$

dabei ist (a_0, b_0) ein gegebener, von den (a_α, b_α), $1 \leqq \alpha \leqq p$, verschiedener Punkt. Die Integrale dritter Gattung werden mit Hilfe der Differentialform

$$H(x, y; x', y')\, dx' = \omega$$

konstruiert. Ist (φ, ψ) ein analytisches Element mit dem Mittelpunkt (a, b), so treten in der Entwicklung

$$H(\varphi(t), \psi(t); x', y') = \frac{1}{t} H(x', y')_\alpha + H^{(0)}(x', y')_\alpha - tH'(x, y')_\alpha + \cdots$$

neue rationale Funktionen $H(x, y)_\alpha$ und $H'(x, y)_\alpha$ $(1 \leqq \alpha \leqq p)$ auf, die auf Integrale erster und zweiter Gattung führen. Die Form ω ist durch ihre Singularitäten charakterisiert: Substitutiert man dort $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $x' = \varphi(\tau)$ und $y' = \psi(\tau)$, wobei (φ, ψ) ein Element mit einem von den (a_α, β_α), $1 \leqq \alpha \leqq p$, verschiedenen Mittelpunkt ist, so geht sie in

$$\left(\frac{1}{\tau - t} + P(t, \tau)\right) d\tau$$

über; P ist eine in (t, τ) konvergente Potenzreihe. Nimmt man für (x, y) und (x', y') Elemente mit unterschiedlichen (und von den (a_α, β_α) verschiedenen) Mittelpunkten, so erhält man $P(t, \tau)\, d\tau$, und fällt der Mittelpunkt des für (x, y) gewählten Elements in den Punkt (a_α, b_α), so tritt ein singulärer Term $\frac{1}{t} H(x', y')_\alpha\, dx'$ auf.

Um eine gegebene rationale Funktion in „Partialbrüche" zerlegen zu können, stellte Weierstraß den algebraischen Residuensatz auf. Das Residuum einer rationalen Differentialform $F(x, y)\, dx$ bezüglich eines analytischen Elements (φ, ψ) ist der Koeffizient von $\frac{dt}{t}$ in der Entwicklung, die dadurch entsteht, daß man $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ in die Form einsetzt, und der Satz besagt, daß die Summe der Residuen einer gegebenen Form bezüglich sämtlicher Elemente des „Gebildes" gleich null ist. Wendet man den Satz auf die Form

$$F(x', y')\,\big(H(x, y; x', y') - H(a, b; x', y')\big)\, dx'$$

an, wobei (a, b) fest gewählt und von den Polen von F verschieden ist, so findet man, daß sich $F(x, y)$ von der Summe der Residuen von $F(x', y')\, H(x, y; x', y')\, dx'$ in allen Polen (x_ν, y_ν) von F nur um eine Konstante unterscheidet. Hieraus folgt die Zerlegung

$$F(x, y) = C_0 + \sum_\nu \sum_{\alpha=0}^{\mu_\nu - 1} C_\nu^{(\alpha)} H(x, y; x_\nu, y_\nu)_\alpha$$

in Partialbrüche; dabei ist $H(x, y; a, b)_\alpha$ der Koeffizient von $-t^\alpha\, dt$ in der Entwicklung von $H(x, y; x', y')\, dx'$ für das Element $x' = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$ mit dem Mittelpunkt (a, b), μ_ν bezeichnet die Vielfachheit des Pols (x_ν, y_ν), und C_0, $C_\nu^{(\alpha)}$ sind Konstanten. Weierstraß schloß hieraus, daß es p Relationen zwischen den Nullstellen und den Polen einer rationalen Funktion von (x, y) gibt.

Der Residuensatz dient ferner dazu, die Differentialformen erster Gattung $H(x, y)\, dx$ zu untersuchen, d. h. die Formen, die $P(t)\, dt$ (P eine Potenzreihe) ergeben, wenn man dort ein beliebiges analytisches Element $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ einsetzt. Weierstraß wendete diesen Satz auf die Form $H(x', y')\, H(x', y'; x, y)\, dx'$ an,

um

$$H = \sum_{\alpha=1}^{p} c_\alpha H_\alpha$$

zu erhalten, wobei c_α der Koeffizient von dt in $H(x, y)\, dx$ ist, wenn man für (x, y) ein Element mit dem Mittelpunkt (a_α, b_α) wählt. Er zeigte, daß die H_α linear unabhängig sind. Ferner schrieb er die Funktionen H in der Gestalt G/f'_y, wobei G ein Polynom in (x, y) von höchstens $(r - 3)$-tem Grade ist, falls f den Grad r hat, und von kleinerem als $(m - 2)$-tem und $(n - 2)$-tem Grade bezüglich x bzw. y ist, falls f in bezug auf x und y vom Grad m bzw. n ist (siehe 7.2.5.). Sämtliche Funktionen H haben dieselbe Ordnung $s = 2n + 2p - 2$, zu deren Berechnung Weierstraß Hilfsmittel angab. Jedem singulären Punkt $(a^{(\lambda)}, b^{(\lambda)})$ der Kurve $f(x, y) = 0$ (in dem f'_x und f'_y null sind) ordnete er eine ganze Zahl k_λ als Maß für die Singularität zu, und er zeigte, daß

$$p = \frac{(r-1)(r-2)}{2} - \sum_\lambda k_\lambda = (m-1)(n-1) - \frac{1}{2} \sum_\lambda' k_\lambda$$

ist (Σ'_λ zeigt die Summation über die singulären Punkte im Endlichen an). Für jedes λ ist das Polynom G, der Zähler von H, k_λ linearen Relationen unterworfen.

Weierstraß entdeckte eine neue Charakterisierung des Geschlechts p, als er rationale Funktionen mit einem einzigen Pol (a, b) der Ordnung σ suchte. Eine solche Funktion ist (bis auf eine Konstante) durch

$$F(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{\sigma} H(x, y; a, b)_\alpha\, c_\alpha$$

bestimmt, und setzt man voraus, daß sie in den Punkten (a_α, b_α) keinen Pol besitzt, so erhält man ein System linearer Gleichungen $\sum_{\beta=1}^{\sigma} h_{\alpha\beta} c_\beta = 0$ in den c_α; dabei ist $h_{\alpha n}$ der Koeffizient von t^n in $H(x, y)_\alpha\, dx$, wenn man für (x, y) ein Element mit dem Mittelpunkt (a, b) wählt. Im allgemeinen ist die Determinante $\det (h_{\alpha\beta})_{1 \leqq \alpha, \beta \leqq p}$ von null verschieden, und das Problem ist nur für $\sigma \geqq p + 1$ lösbar, wobei die Dimension des Vektorraumes der Lösungen gleich $\sigma - p + 1$ ist. Jedoch kann die Determinante für endlich viele Punkte (die man heute die *Weierstraßpunkte* nennt) gleich null werden, und Weierstraß zeigte, daß in diesem Fall wieder genau p Werte von σ ausgeschlossen sind (aber nicht notwendigerweise aufeinanderfolgende wie im allgemeinen Fall, wo $1, 2, \ldots, p$ die Ausnahmewerte sind).

Zum Abschluß seiner algebraischen Untersuchungen stellte Weierstraß fest, daß endlich viele analytische Elemente genügen, um ein „algebraisches Gebilde" darzustellen, wobei die anderen Elemente aus diesen durch direkte analytische Fortsetzung hervorgehen. Diese Eigenschaft entspricht der Kompaktheit der Riemannschen Flächen algebraischer Funktionen (wir erinnern daran, daß von Riemann die Umkehrung bewiesen wurde).

Weierstraß verwandte große Sorgfalt darauf, die Abelschen Integrale $\int F(x, y)\, dx$ zwischen zwei Punkten (x_0, y_0) und (x_1, y_1) zu definieren. Liegen diese Punkte in einem von einem analytischen Element (φ, ψ) bestimmten Gebiet und entsprechen

sie den Parameterwerten t_0 und t_1, so ist das Integral gleich

$$\int_{t_0}^{t_1} F(\varphi(t), \psi(t))\, \varphi'(t)\, dt .$$

Sonst verbindet man diese beiden Punkte durch eine „Kette" $(x^{(\lambda)}, y^{(\lambda)})_{1 \leq \lambda \leq \nu}$ von Punkten, von denen je zwei aufeinanderfolgende in dem von einem analytischen Element bestimmten Gebiet liegen; der Wert des Integrals hängt von der Wahl der Kette ab (man erkennt, an welcher Stelle sich die Weierstraßsche Darstellung von der — geometrischen oder anschaulichen — Riemannschen entfernt). Die folgende Identität, die den Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument in den hyperelliptischen Integralen dritter Gattung verallgemeinert, spielt in den Weierstraßschen Berechnungen eine fundamentale Rolle:

$$\frac{d}{dx_1} H(x_1, y_1; x_2, y_2) - \frac{d}{dx_2} H(x_2, y_2; x_1, y_1) \tag{15}$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{p} \left(H(x_2, y_2)_\alpha\, H'(x_1, y_1)_\alpha - H(x_1, y_1)_\alpha\, H'(x_2, y_2)_\alpha\right).$$

Diese Relation ergibt sich, wenn man den Residuensatz auf die Form

$$H(x, y; x_2, y_2)\, dH(x, y; x_1, y_1)$$

anwendet $((x_1, y_1), (x_2, y_2)$ sind fest$)$. Der Residuensatz, angewendet auf

$$F(x, y)\, H(x, y; x', y')\, dx ,$$

wobei $F\,dx$ eine rationale Differentialform mit Polen (x_ν, y_ν) ist, gestattet mit Hilfe von (15) die Darstellung

$$F(x, y) = \sum_\nu c_\nu H(x_\nu, y_\nu; x, y) - \sum_{\alpha=1}^{p} \left(g'_\alpha H(x, y)_\alpha - g_\alpha H'(x, y)_\alpha\right)$$
$$+ \frac{d}{dx} \sum_\nu F(x, y)_\nu ;$$

dabei ist c_ν das Residuum von $F(x, y)\,dx$ in (x_ν, y_ν), g_α und g'_α sind Konstanten, und die F_ν sind rationale Funktionen. Diese Darstellung führt das allgemeinste Abelsche Integral auf Integrale erster, zweiter und dritter Gattung zurück. Die erhaltene Entwicklung ist übrigens eindeutig.

Die Perioden eines Abelschen Integrals sind diejenigen Werte, die sich durch Integration längs einer geschlossenen Punktkette, also im Fall $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$, ergeben, und der Wert des Integrals ist durch dessen Grenzen nur modulo der Perioden bestimmt. Mit $2\omega_\alpha$, $2\eta_\alpha$ bezeichnen wir die Perioden von

$$\int H(x, y)_\alpha\, dx \quad \text{bzw.} \quad \int H'(x, y)_\alpha\, dx$$

auf einer geschlossenen Kette, die einen Polygonzug L bestimmt, und mit $2\omega'_\alpha$, $2\eta'_\alpha$ ihre Perioden auf einem anderen Polygonzug L'. Durch Integration der fundamentalen Identität (15) zeigte Weierstraß die Gültigkeit von

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (\eta_\alpha \omega'_\alpha - \omega_\alpha \eta'_\alpha) = \frac{\varepsilon\pi i}{2} ,$$

wobei ε die Anzahl der Schnittpunkte von L und L' ist, die je nach ihrem Durchlaufungssinn positiv oder negativ gezählt werden. Weierstraß wählte dann ein System von $2p$ Schnitten K_α, K'_α derart, daß K_α und K'_α einen positiven Durchschnitt haben und die Schnitte mit verschiedenen Indizes disjunkt sind (wie die Riemannschen Rückkehrschnitte a_ν, b_ν; siehe 7.2.5.). Er setzte

$$2\omega_{\alpha\beta} = \int_{K'_\beta} H(x, y)_\alpha \, dx\,, \qquad 2\eta_{\alpha\beta} = \int_{K_\beta} H'(x, y)_\alpha \, dx\,,$$

$$2\omega'_{\alpha\beta} = \int_{K_\beta} H(x, y)_\alpha \, dx\,, \qquad 2\eta'_{\alpha\beta} = \int_{K'_\beta} H'(x, y)_\alpha \, dx;$$

damit ergibt sich

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (\eta_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\gamma}) = \sum_{\alpha=1}^{p} (\eta'_{\alpha\beta}\omega'_{\alpha\gamma} - \omega'_{\alpha\beta}\eta'_{\alpha\gamma}) = 0\,,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p} (\eta_{\alpha\beta}\omega'_{\alpha\gamma} - \omega_{\alpha\beta}\eta'_{\alpha\gamma}) = \delta_{\beta\gamma}\frac{\pi i}{2}$$

($\delta_{\beta\gamma}$ ist das Kroneckersymbol). Die so definierten Perioden bilden ein Fundamentalsystem (Basis der Gruppe der Perioden der $2p$ Integrale erster und zweiter Gattung in $\boldsymbol{C}^{2p}$).

Weierstraß bezeichnete die Exponentialfunktion des zwischen (x_0, y_0) und (x_1, y_1) erstreckten Integrals dritter Gattung $\int H(x, y; x', y')\, dx'$ mit $E(x, y; x_1, y_1; x_0, y_0)$ und charakterisierte diese Funktion mit Hilfe ihrer Singularitäten. Als Funktion von x und y hat sie eine einfache Nullstelle in (x_1, y_1), einen einfachen Pol in (x_0, y_0) und eine wesentliche Singularität in jedem Punkt (a_α, b_α), wo sie sich wie $e^{c/t}$ mit

$$c = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} H(x, y)_\alpha \, dx$$

verhält. Ist $R(x, y)$ eine rationale Funktion mit den Nullstellen $(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)$ und den Polen $(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_s, y'_s)$, so gilt

$$R(x, y) = R(a_0, b_0) \prod_{\nu=1}^{s} E(x, y; x_\nu, y_\nu; x'_\nu, y'_\nu)\,.$$

Weierstraß verglich diese Zerlegung in „Primfaktoren" mit der aus der Kummerschen Theorie der idealen Zahlen in der Zahlentheorie (siehe Kapitel 5). Die Funktion $E(x, y; x_1, y_1; x_0, y_0)$ hängt ganz sicher vom Integrationsweg zwischen (x_0, y_0) und (x_1, y_1) ab, und sie ist nur bis auf einen Faktor $E(x, y)$ bestimmt (analog zu den Einheiten aus der Zahlentheorie); dieser Faktor ist Exponentialfunktion einer Periode des Integrals dritter Gattung. Weierstraß bezeichnete die Exponentialfunktionen der Perioden des Integrals dritter Gattung auf K_α und K'_α mit $E(x, y)_\alpha$ bzw. $E'(x, y)_\alpha$. Unter der Voraussetzung, daß $F(x, y)\, dx$ eine rationale Differentialform mit den Polen (x_ν, y_ν) und den dazugehörigen Residuen c_ν ist, zeigte er mit

Hilfe von (15), daß

$$\int F(x, y)\, dx = C_0 + \sum_\nu c_\nu \log E(x, y; x_\nu, y_\nu; x_0, y_0)$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{p} (C'_\alpha \log E(x, y)_\alpha + C_\alpha \log E'(x, y)_\alpha) + \tilde{F}(x, y)$$

gilt; (x_0, y_0) bezeichnet dabei einen (beliebigen) von den Polen (x_ν, y_ν) verschiedenen Punkt, C_0, C'_α und C_α sind Konstanten, und $\tilde{F}$ ist eine rationale Funktion.

Das Abelsche Theorem ist eine unmittelbare Folgerung aus der Zerlegung gebrochen rationaler Funktionen in „Primfaktoren": Hat $R(x, y)$ Nullstellen in den Punkten (x_ν, y_ν) und Pole in den Punkten (x'_ν, y'_ν), die von den (a_α, b_α) verschieden sind, so gilt

$$\sum_\nu \int_{(x'_\nu, y'_\nu)}^{(x_\nu, y_\nu)} H(x, y)_\alpha\, dx = 0 \tag{16}$$

(bei passender Wahl des Integrationsweges), denn $\log R(x, y)$ hat im Punkt (a_α, b_α), $1 \leqq \alpha \leqq p$, keine Singularität; genügen dagegen (x_ν, y_ν), (x'_ν, y'_ν) der Beziehung (16) für $1 \leqq \alpha \leqq p$, so sieht man, daß die Funktion

$$\prod_\nu E(x, y; x_\nu, y_\nu; x'_\nu, y'_\nu)$$

rational ist und Nullstellen in den (x_ν, y_ν) und Pole in den (x'_ν, y'_ν) besitzt. Diese Umkehrung des Abelschen Theorems wurde von Clebsch entdeckt (1863; siehe 7.2.7.). Für die Integrale dritter Gattung gilt

$$\sum_\nu \int_{(x'_\nu, y'_\nu)}^{(x_\nu, y_\nu)} (H(\xi, \eta; x, y) - H(\xi_0, \eta_0; x, y))\, dx = \log \frac{R(\xi, \eta)}{R(\xi_0, \eta_0)}$$

(wenn man dieselben Integrationswege wie in (16) benutzt), und hieraus läßt sich das Abelsche Theorem für die allgemeinsten Integrale folgern. Weierstraß konnte jetzt das Jacobische Umkehrproblem mit derselben Methode wie für die hyperelliptischen Integrale lösen (siehe 7.2.4.). Das System von Differentialen

$$\sum_{\alpha=1}^{p} H(x_\alpha, y_\alpha)_\beta\, dx_\alpha = du_\beta \qquad (1 \leqq \beta \leqq p)$$

mit den Anfangsbedingungen $(x_\alpha, y_\alpha) = (a_\alpha, b_\alpha)$ für $u = (u_\alpha) = 0$ hat eine Lösung (x_α, y_α), die durch die Wurzeln x_α der algebraischen Gleichung $\sum_{j=0}^{p} P_j(u)\, x^{p-j} = 0$ und durch

$$y_\alpha = \frac{1}{Q_0(u)} \sum_{j=1}^{p} Q_j(u)\, x_\alpha^{p-j}$$

bestimmt ist, wobei die P_j und die Q_j Potenzreihen sind, die auf einem gegebenen (beliebig großen) Bereich von $\boldsymbol{C}^p$ konvergieren. Die Koeffizienten P_j/P_0 und Q_j/Q_0 hängen nicht vom gewählten Konvergenzbereich ab (Prinzip der analytischen Fortsetzung). Weierstraß zeigte, daß ihre Unbestimmtheitsbereiche (wo Zähler und Nenner gleichzeitig null sind) die komplexe Kodimension 2 in $\boldsymbol{C}^p$ haben (die

Unbestimmtheitspunkte liefern die Ausnahmepunkte der Jacobischen, über denen die Abbildung $U: S \to J$ nicht bijektiv ist; siehe 7.2.5.). Er führte dann die Funktion

$$E(x, y; u) = \prod_{\alpha=1}^{p} E(x, y; x_\alpha, y_\alpha; a_\alpha, b_\alpha)$$

ein, die er mit Hilfe ihres Verhaltens als Funktion in x und y charakterisiert (sie besitzt eine einfache Nullstelle in jedem (x_α, y_α) und eine wesentliche Singularität in jedem (a_α, b_α), wo sie sich wie $e^{u_\alpha/t}/t$ verhält). Dies ist eine meromorphe Funktion von u auf $\boldsymbol{C}^p$ derart, daß

$$E(x, y; u + 2\omega) = E(x, y; u)\, E(x, y \mid \omega)$$

gilt, wenn $2\omega = (\omega_\alpha)$ ein Periodensystem für die Integrale erster Ordnung ist; $E(x, y \mid \omega)$ bezeichnet die Exponentialfunktion der entsprechenden Periode für das Integral dritter Gattung. Der Koeffizient $J(u)_\beta$ von t in der Entwicklung von $-\log E(x, y; u)$ ist, wenn man für (x, y) ein Element mit dem Mittelpunkt (a_β, b_β) nimmt, die Summe der bis an die Punkte (x_α, y_α), $1 \leqq \alpha \leqq p$, erstreckten Integrale zweiter Gattung $\int H'(x, y)_\beta\, dx$. Mit w_β (bzw. ${}^0w_\beta$, $w_{\beta\alpha}$) bezeichnen wir das Integral $\int H(x, y)_\beta\, dx$ zwischen (a_0, b_0) und (x, y) (bzw. (x_0, y_0), (a_α, b_α)) und mit w'_β (bzw. ${}^0w'_\beta$) das Integral $\int H'(x, y)_\beta\, dx$ zwischen (a_0, b_0) und (x, y) (bzw. (x_0, y_0)). Wir betrachten die folgenden Vektoren aus $\boldsymbol{C}^p$:

$$\begin{aligned} {}^0w &= ({}^0w_\beta)\,, \qquad & w &= (w_\beta)\,, \qquad & W_\alpha &= (w_{\beta\alpha})_\beta\,, \\ w' &= (w'_\beta)\,, \qquad & {}^0w' &= ({}^0w'_\beta)\,. \end{aligned}$$

Weierstraß zeigte, daß

$$\sum_{\alpha=1}^{p} J(u + W_\alpha)\, du_\alpha$$

das logarithmische Differential einer auf $\boldsymbol{C}^p$ ganzen Funktion f ist und daß

$$\frac{E(x, y; u)}{E(x_0, y_0; u)} = \frac{f(u - w)\, e^{\langle w', u\rangle}}{f(u - {}^0w)\, e^{\langle {}^0w', u\rangle}}$$

gilt. Die Funktion f spielt die Rolle der Funktion σ in der Theorie der elliptischen Funktionen, und Weierstraß gelangte mit ihrer Hilfe zu den Thetafunktionen wie im hyperelliptischen Fall (siehe 7.2.4.).

7.2.7. *Algebraische Kurven*

Die Anwendungen der Riemannschen Theorie der Abelschen Integrale auf die Theorie der algebraischen Kurven zeigten sich 1864 in den Arbeiten dreier Mathematiker. Schwarz hatte in seiner Dissertation über die algebraischen abwickelbaren Flächen die birationale Invarianz des Geschlechts benutzt, um diese Flächen nach dem Geschlecht ihrer Ebenenschnitte (die nicht durch eine Erzeugende verlaufen) zu klassifizieren. Roch hatte die Riemannsche Theorie der 28 Abelschen Funktionen für das Geschlecht $p = 3$ durch die 28 Doppeltangenten an eine ebene algebraische

Kurve vierter Ordnung interpretiert; eine solche als singularitätenfrei vorausgesetzte Kurve ist tatsächlich vom Geschlecht 3, und die Funktionen φ, die die Integrale erster Gattung liefern, sind bezüglich der Koordinaten linear; die vier Nullstellen einer Funktion φ sind also die Schnittpunkte der ebenen algebraischen Kurve vierter Ordnung mit einer Geraden, und die Abelschen Funktionen entsprechen dem Fall, daß diese Nullstellen paarweise zusammenfallen, d. h., sie entsprechen den Doppeltangenten.

Der eigentliche Schöpfer der geometrischen Gestalt dieser Theorie war Clebsch, dessen Arbeiten über elliptische Kurven wir schon in 7.1.14. erörtert haben. In einer wichtigen Arbeit *Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie* ([46], a)) interpretierte er das Abelsche Theorem für die Integrale längs einer ebenen Kurve der (homogenen) Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ vom Grad n dahingehend, daß es p Bedingungen (transzendenter Natur) für die mn Schnittpunkte der gegebenen Kurve C mit einer Kurve m-ten Grades angibt. Die Umkehrung des Abelschen Theorems (siehe 7.2.6.), die Clebsch unter der Annahme formulierte, daß C keine Singularitäten besitzt (daß also $p = (n-1)(n-2)/2$ ist), zeigte ihm, daß diese Bedingungen auch dafür hinreichend sind, daß mn Punkte von C auf einer Kurve m-ten Grades liegen (vgl. das „Cramersche Paradoxon"; siehe 2.2.1.). Diese Überlegungen gestatteten ihm, das folgende Problem zu lösen: Gegeben seien λ Punkte von C, gesucht ist eine Kurve m-ten Grades, deren Durchschnitt mit C aus diesen λ Punkten sowie μ Berührungspunkten r-ter Ordnung besteht; dabei sei $\mu \geqq p$ und $\lambda + \mu r = mn$. Ist $u_1, \ldots, u_p$ ein Fundamentalsystem Abelscher Integrale erster Gattung, deren Integrationswege von geeignet gewählten Punkten ausgehen, so muß

$$r \sum_{j=1}^{\mu} u_k(P_j) + \sum_{l=1}^{\lambda} u_k(M_l) \equiv 0 \qquad \text{(mod. Perioden)}$$

für $1 \leqq k \leqq p$ gelten, wenn mit $M_1, \ldots, M_\lambda$ die gegebenen Punkte und mit $P_1, \ldots, P_\mu$ die Berührungspunkte gemeint sind. Das ergibt

$$\sum_j u_k(P_j) \equiv v_k + \frac{A_k}{r} \quad \text{mit} \quad v_k = -\frac{1}{r} \sum_l u_k(M_l)\,,$$

wobei A_k eine Periode von u_k ist. Modulo der Perioden nimmt A_k/r genau r^{2p} Werte an, wodurch die Lösungen des Problems in r^{2p} Systeme eingeteilt werden. Addiert man r dieser Gleichungen mit geeignet gewählten A_k, so erkennt man folgendes: Verläuft eine Kurve m-ten Grades durch die Berührungspunkte der Kurven von $r-1$ der vorhergehenden Systeme, so schneidet sie C erneut in den Berührungspunkten einer Kurve eines neuen Systems. Ein interessanter Spezialfall ist der Fall $\lambda = 0$ und $\mu = p$; man findet so, daß für jedes ganzzahlige s im Fall $n \not\equiv 2$ (mod 4) [bzw. $n \equiv 2$ (mod 4)] genau $n^{2p}(s^{2p} - 1)$ Kurven ps-ten Grades [bzw. $(n/2)^{2p}(s^{2p} - 1)$ Kurven $(p/2)s$-ten Grades] existieren, die mit C eine Berührung ns-ter [bzw. $(n/2)s$-ter] Ordnung in p Punkten aufweisen (dies gilt nicht für $s = 1$ und $n = 4$ oder 6). Einen anderen Spezialfall stellen die Kurven $(n-3)$-ten Grades dar, die C in $n(n-3)/2$ Punkten berühren; die Summe der Werte eines Integrals

erster Gattung in den $p - 1 = n(n-3)/2$ Berührungspunkten ist gleich einer halben Periode, und Riemann zeigte, daß dies dem Verschwinden der Funktion ϑ (siehe 7.2.5.) und der Theorie der „Abelschen Funktionen" entspricht. Clebsch führte die Überlegungen für den Fall $n = 4$ durch und stieß dabei wieder auf die grundlegenden Ergebnisse von Hesse und Steiner über die ebenen algebraischen Kurven vierter Ordnung.

Clebsch wendete die Theorie der Abelschen Integrale auch auf Raumkurven an. Für den Fall des vollständigen Schnittes zweier Flächen vom Grad m bzw. n fand er, daß das Geschlecht gleich $p = (mn(m+n-4)/2) + 1$ ist, falls keine Singularitäten auftreten. Er gab mit Hilfe des Abelschen Theorems die Bedingungen dafür an, daß mnk Punkte der Kurve auf einer Fläche k-ten Grades liegen, und er verwendete diese Bedingungen zur Bestimmung von Flächen, die die Kurve in gewissen Punkten berühren. Beispielsweise gibt es endlich viele Flächen $(m+n-4)$-ten Grades, die die Kurve in $mn(m+n-4)/2$ Punkten berühren, und sie entsprechen den Riemannschen „Abelschen Funktionen". Clebsch behandelte noch genauer den Fall der Kurven vierten Grades vom Geschlecht 1 (siehe 7.1.14.) und den der Raumkurven sechsten Grades, deren Geschlecht gleich 4 ist. Wir weisen darauf hin, daß Riemann die Abelschen Integrale auf Raumkurven definiert hat (postum veröffentlicht); er hat sogar die Doppelintegrale erster Gattung auf einer algebraischen Fläche definiert, deren Theorie von Picard (1885) entwickelt werden sollte ([41], Nachträge, S. 99–100).

Clebsch hat viel für die Verbreitung der Riemannschen Ideen getan; der Terminus *Geschlecht* für die Invariante p stammt von ihm. Zusammen mit Gordan hat er (1866) einen algebraischen Beweis für die Invarianz des Geschlechts gegenüber birationalen Transformationen geliefert; diese Invarianz gestattete ihm, die Plückerschen Formeln zu beweisen (er bemerkte, daß eine Kurve und die zu ihr duale birational äquivalent sind). Es war auch Clebsch, der den Terminus *adjungierte Kurve* für eine Kurve einführte, die durch alle Doppelpunkte der zu untersuchenden Kurve verläuft. Seine Arbeiten fanden in denen von Brill und M. Noether (1873) ihre Fortsetzung, wo die transzendenten Methoden vollständig aufgegeben wurden zugunsten der rein algebraischen (z.B. haben Brill und Noether den Riemann-Rochschen Satz im Zusammenhang mit ihrer Definition des Geschlechts algebraisch bewiesen). Ein noch stärker algebraischer Standpunkt wurde einerseits von Kronecker (1862, 1881) und andererseits von Dedekind und Weber (1882) vertreten. Diese Mathematiker arbeiteten eine algebraische Theorie der Körper von algebraischen Funktionen einer Variablen aus (vgl. [23], Kap. VI).

Wichtige Beispiele für algebraische Kurven kennt man aus der Theorie der Modulargleichungen und aus der der Modulfunktionen (siehe 7.1.16.); diese Kurven sind insbesondere durch ihre Symmetriegruppen interessant. Man weiß übrigens, daß die Gruppe der Automorphismen einer algebraischen Kurve vom Geschlecht $\geqq 2$ (konforme Abbildungen der Riemannschen Fläche auf sich) stets endlich ist. Schwarz hat zunächst (1875) gezeigt, daß sie diskret ist, und Hettner hat (1880) die Idee gehabt, dies mit Hilfe der Invarianz der Weierstraßpunkte zu beweisen. Tatsächlich bewiesen wurde die Aussage von M. Noether (1882) unter Benutzung dieser Idee. Klein bemerkte (1882), daß die Anzahl der „Moduln", von denen die

Klasse einer algebraischen Kurve abhängt, gleich $3p - 3 + \varrho$ ist, wenn p das Geschlecht und ϱ die Anzahl der (komplexen) Parameter bezeichnet, von denen die Automorphismen der Kurve abhängen (dies gilt auch für $p = 0, 1$).

Im Jahre 1884 gab Poincaré einen anderen Beweis mit Hilfe der Uniformisierung durch Fuchssche Funktionen an (vgl. 7.1.16.; [48], Bd. II, S. 105). Hurwitz konnte (1887) zeigen, daß ein Automorphismus S einer algebraischen Kurve X vom Geschlecht $p \geqq 2$ höchstens die Ordnung $10(p - 1)$ hat; dazu verglich er das Geschlecht p von X mit dem des Quotientenraumes X' von X nach der von S erzeugten Gruppe. Dieselbe Methode, nun mit dem Quotientenraum X'' von X nach der Gruppe G der Automorphismen von X, gestattete ihm, (1893) zu zeigen, daß die Ordnung von G höchstens gleich $84\,(p - 1)$ ist; diese Schranke wird nur erreicht, wenn X'' das Geschlecht 0 hat und X über drei Punkten von X'' mit den Verzweigungsordnungen 2, 3 bzw. 7 verzweigt ist (dies tritt ein für die Gal oissche Resolvente der Modulargleichung siebenter Ordnung, die das Geschlecht 3 hat und eine Automorphismengruppe der Ordnung $168 = 84(p - 1)$ besitzt; vgl. 7.1.9.).

7.2.8. *Abelsche Mannigfaltigkeiten*

Im Jahre 1859 zeigte Riemann, daß eine meromorphe Funktion von n komplexen Variablen nicht mehr als $2n$ linear unabhängige Perioden besitzen kann. Wie Hermite (1862) bemerkte, hatte Riemann auch bewiesen, daß diese Perioden durch dieselben bilinearen Relationen verknüpft sind wie die Perioden Abelscher Integrale erster Gattung und daß sie den Ungleichungen genügen, die es gestatten, mit Hilfe dieser Perioden Thetafunktionen zu konstruieren.

Weierstraß widmete den $2n$-fach periodischen Funktionen von n Variablen mehrere Arbeiten (1869, 1876, 1879) ([43], Bd. II, S. 45—48, 55—69 und 125—133). Er gab dort die folgenden Eigenschaften an, die die Liouvillesche Theorie, welche dem Fall $n = 1$ entspricht, verallgemeinert (vgl. 7.1.6.): Eine derartige Funktion und ihre n partiellen Ableitungen sind durch eine algebraische Relation miteinander verknüpft; für eine gegebene Gruppe von Perioden sind alle Funktionen, die diese Perioden besitzen, rationale Funktionen einer dieser Funktionen und deren partiellen Ableitungen. In heutiger Sprechweise sagen wir, der Körper der Funktionen mit gegebener Periodengruppe Γ sei über $\boldsymbol{C}$ höchstens vom Transzendenzgrad n; hieraus resultiert ein algebraisches Additionstheorem für diese Funktionen. Weierstraß erklärte, daß sein Ziel darin bestünde, diese Funktionen durch Thetaquotienten von n Variablen darzustellen. Der erste Beweis dieser Eigenschaften stammt von Wirtinger (1895), enthält aber eine Lücke. Andere Beweise, die sich auf die durch $n + 1$ Funktionen mit Perioden aus Γ definierte meromorphe Abbildung von $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ in den Raum $\boldsymbol{P}^{n+1}$ stützen, stammen von Poincaré (1902) ([48], Bd. IV, S. 473—526), Blumenthal (1904) und Thimm (1939). Die Schwierigkeit beruht auf der Existenz von Unbestimmtheitsmengen bei meromorphen Funktionen mehrerer komplexer Variabler (siehe Kapitel 4). Es hat außerdem noch andere Beweise dieser diffizilen Resultate gegeben (Lefschetz, Siegel und Bochner).

Die Theorie der Thetafunktionen von n Variablen und ihre Anwendung auf die Darstellung von $2n$-fach periodischen Funktionen ist Gegenstand der Arbeiten von Picard, Appell (1891), Poincaré (1899, 1902) und Frobenius (1884). Das Hauptresultat besagt, daß jede komplexe Hyperfläche in $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ die Gesamtheit der Nullstellen einer geeigneten Thetafunktion ist. Diese Theorie wurde in den vierziger Jahren von A. Weil [20] und F. Conforto *[20ter] erneuert. Die Quotientenräume vom Typ $\boldsymbol{C}^n/\Gamma$ heißen *Abelsche Mannigfaltigkeiten*; dabei ist Γ derart beschaffen, daß Γ-periodische Funktionen existieren, die von nicht weniger als n Variablen abhängen (was besagt, daß eine Basis von Γ den Riemannschen Bedingungen genügt). Abelsche Mannigfaltigkeiten sind projektive algebraische Mannigfaltigkeiten mit einer Struktur einer kommutativen Gruppe, und man kann sie als Verallgemeinerungen der elliptischen Kurven auffassen. Die *Jacobischen* von Kurven sind spezielle Abelsche Mannigfaltigkeiten (sie hängen nur von $3p - 3$ „Moduln" ab, während die Abelschen Mannigfaltigkeiten von $p(p + 1)/2$ „Moduln" abhängen). Die Theorie der Isogenien elliptischer Kurven läßt sich auf die Abelschen Mannigfaltigkeiten übertragen, und ihr analytisches Analogon ist die Theorie der Transformationen der Thetafunktionen (siehe 7.2.3.); unter einer Isogenie versteht man einen surjektiven Morphismus $\boldsymbol{C}^n/\Gamma \to \boldsymbol{C}^n/\Gamma'$ mit endlichem Kern, und sie entspricht der Angabe einer Untergruppe Γ_1 von $\boldsymbol{C}^n$, die Γ als Untergruppe von endlichem Index enthält und so beschaffen ist, daß $\boldsymbol{C}^n/\Gamma_1$ ebenfalls eine Abelsche Mannigfaltigkeit darstellt. Drückt man eine Basis von Γ mit Hilfe einer Basis von Γ_1 aus, so findet man eine Matrix, deren Klasse modulo einer symplektischen Gruppe die Isogenie charakterisiert. Die Theorie der komplexen Multiplikation wurde auf die Abelschen Mannigfaltigkeiten mit Anwendungen in der Zahlentheorie übertragen (Shimura, 1955) [8 bis]. Übrigens gibt es heute eine rein algebraische Theorie der über einem beliebigen Körper definierten Abelschen Mannigfaltigkeiten (man braucht sie nicht mehr als Quotienten von Vektorräumen aufzufassen), die von A. Weil (1949) aufgebaut wurde (siehe [19] und [20 bis]).

7.3. Literatur

7.3.1. *Grundlagen*

[1] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, Boston 1965.

7.3.2. *Ergänzende Werke*

A. *Elliptische Funktionen*

[2] P. Appell et E. Lacour, Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications, 2. Aufl., Gauthier-Villars, Paris 1922.

[3] J. Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann, Paris 1968.

[4] C. Jordan, Cours d'Analyse, Bd. II, 2. Aufl., Gauthier-Villars, Paris 1894.

[5] A. Robert, Elliptic curves, Lecture Notes in Math., Nr. 326, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973.

*[5 bis] F. Tricomi, Elliptische Funktionen, Übersetzt und bearbeitet von M. Krafft, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1948.

[6] P. du Val, Elliptic Functions and Elliptic Curves, Cambridge University Press 1973.

[7] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press 1902 (4. Aufl. 1965).

B. *Anwendungen der elliptischen Funktionen auf die Zahlentheorie*

[8] A. Borel, S. Chowla, C. S. Herz, K. Iwasawa and J. P. Serre, Seminar on complex multiplication, Lecture Notes in Math., Nr. 21, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

[8 bis] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Math. Soc. of Japan Publications, No. 11, Princeton University Press 1971.

[9] S. Lang, Elliptic Functions, Addison-Wesley, Reading 1973.

[10] H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. III, 2. Aufl., Vieweg, Braunschweig 1908.

[11] A. Weil, Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.

C. *Automorphe Funktionen und Modulfunktionen*

[12] L. R. Ford, Automorphic Functions, 2. Aufl., Chelsea, New York 1929.

[13] R. Fricke und F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, 2 Bände, 2. Aufl., Teubner, Leipzig 1926.

[14] I. Kra, Automorphic Forms and Kleinian Groups, Addison-Wesley, Reading 1972.

[15] J. Lehner, Lectures on modular forms, Nat. Bureau of Standards, Superintendent of Documents, U.S. Gov. Printing Office, Washington D.C. 1969.

[16] J. P. Serre, Cours d'arithmétique, Collection SUP, Presses Univ. de France, Paris 1970.

[16 bis] S. Gelbart, Automorphic Forms on Adele Groups, Princeton University Press 1975.

D. *Riemannsche Flächen und Abelsche Integrale*

[17] G. Springer, Introduction to Riemann Surfaces, Addison-Wesley, Reading 1957.

[18] H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, Leipzig 1913 (3. Aufl. Stuttgart 1955).

[18 bis] R. Hudson, Kummer's Quartic Surface, Cambridge University Press 1905.

E. *Abelsche Mannigfaltigkeiten und Thetafunktionen*

[19] D. Mumford, Abelian Varieties, Oxford University Press 1970.

[19 bis] D. Mumford, Curves and Their Jacobians, University of Michigan Press, Ann Arbor 1975.

[20] A. Weil, Introduction à l'étude des variétés kähleriennes, Hermann, Paris 1958.

[20 bis] J. Igusa, Theta Functions, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

*[20 ter] F. Conforto, Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

7.3.3. *Historische Ergänzungen*

[21] N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques, Neue Ausgabe, Hermann, Paris 1974.

[21][1] N. Bourbaki, Elemente der Mathematikgeschichte, deutsche Übersetzung der ersten Auflage, von A. Overschelp, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen und Zürich 1971.

[22] A. Brill und M. Noether, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung *3* (1892—1893), 111—566.

[23] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, Bd. I, Collection SUP, Presses Univ. de France, Paris 1974.

[24] R. Fricke, Elliptische Funktionen, Enzykl. d. math. Wissenschaften, II B 3, S. 177—345; Automorphe Funktionen mit Einschluss der elliptischen Modulfunktionen, Enzykl. d. math. Wissenschaften, II B 4, S. 351—466, Teubner, Leipzig 1901—1921.

[24 bis] A. Krazer und W. Wirtinger, Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen, Enzykl. d. math. Wissenschaften, II B 7, S. 609—870, Teubner, Leipzig 1901—1921.

[25] L. Koenigsberger, Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829, Wien 1879.

[26] I. Shafarevich, Basic algebraic geometry, Historical sketch, S. 411—432, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974.

[26 bis] C. L. Siegel, Zur Vorgeschichte des Eulerschen Additionstheorems, Sammelband zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers, Akademie-Verlag, Berlin 1959.

7.3.4. *Quellen*

[27] C. G. Fagnano, Produzioni matematiche, Bd. 2, Pesaro 1750.

[28] L. Euler, Opera omnia, 4 Serien, Teubner und O. Füssli, Leipzig-Berlin-Zürich 1911—1976.

[29] J. L. Lagrange, Oeuvres, 14 Bände, Gauthier-Villars, Paris 1867—1892.

[30] J. L. Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, 3 Bände, Paris 1797.

[31] A. M. Legendre, Traité des fonctions elliptiques, 3 Bände, Paris 1825—1828.

[32] C. F. Gauss, Werke, 12 Bände, Göttingen 1870—1927.

[33] N. H. Abel, Oeuvres, 2 Bände, herausgeg. von Sylow und Lie, Christiania, Oslo, 1881; N. H. Abel, Recherches sur les fonctions elliptiques. Second mémoire. Acta math. *26* (1902), 3—41.

[34] C. G. Jacobi, Gesammelte Werke, 7 Bände, G. Reimer, Berlin 1881—1891.

[35] J. Liouville, Leçons sur les fonctions doublement périodiques, J. reine angew. Math. *88* (1880), 277—310.

[36] C. Hermite, Oeuvres complètes, 4 Bände, Gauthier-Villars, Paris 1905—1917.

[37] C. Hermite, Correspondance avec T. Stieltjes, 2 Bände, Gauthier-Villars, Paris 1905.

[38] G. Eisenstein, Mathematische Werke, 2 Bände, Chelsea, New York 1975.

[39] M. Briot et M. Bouquet, Théorie des fonctions doublement périodiques, Mallet-Bachelier, Paris 1859.

[39][1] Briot und Bouquet's Theorie der doppelt-periodischen Functionen und insbesondere der elliptischen Transcendenten mit Benutzung darin einschlagender Arbeiten deutscher Mathematiker, von H. Fischer, Halle 1862.

[40] B. Riemann, Vorlesungen über Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, insbesondere elliptische und Abel'sche, herausgeg. unter dem Titel „Elliptische Funktionen" von H. Stahl, Teubner, Leipzig 1899.

[41] B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 2. Aufl., Teubner, Leipzig 1892.

[42] K. Weierstrass, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, (nach Vorlesungen und Aufzeichnungen K. Weierstrass' bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz), Springer, Berlin 1893.

[43] K. Weierstrass, Mathematische Werke, 7 Bände, Mayer & Müller, Berlin 1894—1927.

[44] L. Kronecker, Werke, 5 Bände, Teubner, Leipzig 1895—1931.

[45] H. J. S. Smith, Collected Mathematical Papers, 2 Bände, Oxford 1894.

[46] A. Clebsch: a) Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie, J. reine angew. Math. *63* (1864), 189—243; b) Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind, ididem *64* (1865), 43—65; c) Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, ibidem *64* (1865), 210—270.

[47] F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, 3 Bände, Springer, Berlin 1921—1923.

[48] H. Poincaré, Oeuvres, 11 Bände, Gauthier-Villars, Paris 1916—1956.

[49] H. Poincaré, Science et méthode, Flammarion, Paris 1908.

[49][1] H. Poincaré, Wissenschaft und Methode, übersetzt von F. und L. Lindemann, Teubner, Leipzig und Berlin 1914.

*[50] E. Galois, Lettre à Auguste Chevalier, in: Oeuvres mathématiques (éd. E. Picard), Gauthier-Villars, Paris 1897.

8. Funktionalanalysis

von Jean Dieudonné

8.0. Einführung

Die moderne Funktionalanalysis entstand aus dem Hauptforschungsgegenstand der Analytiker des neunzehnten Jahrhunderts, der Lösung von Gleichungen, deren Unbekannte *Funktionen* sind, und an diesem Gegenstand entwickelte sie sich auch weiter. Zu den gewöhnlichen und den partiellen Differentialgleichungen, deren Untersuchung im achtzehnten Jahrhundert begonnen hatte (vgl. Kapitel 1), kamen vom neunzehnten Jahrhundert an Integralgleichungen, später Integrodifferentialgleichungen und zahlreiche andere Typen von Funktionalgleichungen hinzu. Die wichtigsten Ideen, die sich im Laufe dieser langen Entwicklung herausbildeten und den modernen Konzeptionen zugrunde liegen, sind die folgenden:

1. An die Stelle von Untersuchungen der „allgemeinen Lösung" einer Funktionalgleichung tritt mit Beginn des neunzehnten Jahrhunderts, teilweise unter dem Einfluß von Anwendungen in der Physik, das Studium von Lösungen, welche zusätzlichen Bedingungen, sogenannten „Anfangsbedingungen" bzw. „Randbedingungen", unterworfen sind.

2. Seit den Arbeiten Cauchys wird klar zwischen *lokalen* und *globalen* Eigenschaften der Gleichungen und ihrer Lösungen unterschieden (vgl. 8.1.).

3. Der Gleichungsbegriff als Grundkonzept wird mehr und mehr durch die Begriffe *Operator* oder *Funktional* ersetzt, parallel zu der analogen Entwicklung in der linearen Algebra (vgl. Kapitel 3), welche dem Begriff der Gleichung (später dem der linearen Abbildung) vorrangige Bedeutung verleiht, nicht ohne daß sich diese beiden Theorien gegenseitig beeinflussen.

4. Man gewöhnt sich immer mehr an die Vorstellung, daß Funktionen in gewisser Weise als ebenso „grundlegende" mathematische Objekte zu behandeln seien wie Punkte des Raumes, wobei man dabei von der mit einem „Variieren" verbundenen Vorstellung einer fortschreitenden Entfaltung abzusehen hätte; und seit sich die mengentheoretische Sprechweise zu verbreiten beginnt, fängt man an, systematisch Mengen zu betrachten, deren Elemente Funktionen sind.

5. Der „dynamische" Charakter der Analysis (im Unterschied zu der aus der Antike überkommenen „statischen" Betrachtungsweise der Formen), der bereits zur Schaffung der Infinitesimalrechnung geführt hatte, prägt sich weiter aus und verzweigt sich in alle Richtungen, insbesondere unter dem Einfluß von zwei Mathematikern, die man die Apostel der *stetigen Variation* nennen könnte: Riemann und Poincaré. Was jetzt variiert, sind nicht nur die Zahlen, sondern auch die Funktionen, die als „Punkte" eines „Funktionenraumes" aufgefaßt werden. Schließlich drängt sich gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts die Unterscheidung verschiedener Arten der „Konvergenz" einer Funktionenfolge gegen eine Grenzfunktion auf, was auf das allgemeine Konzept einer *Topologie* auf einer Funktionenmenge und durch Verallgemeinerung zur Entstehung der allgemeinen Topologie führt.

Dieselben Fragen aus Mechanik und Astronomie wie im achtzehnten Jahrhundert sind es, die weiterhin zahlreiche Probleme für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen liefern. Hinzu kommen alle die Probleme, welche der Entwicklung der theoretischen Physik entstammen, der Wärmelehre, der Elastizitätstheorie, der Hydrodynamik, der Optik, des Elektromagnetismus sowie ab 1915 der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik.

8.1. Lokale Existenzsätze

8.1.1. Existenzsätze für Differentialgleichungen

Wie wir in Kapitel 1 gesehen haben, waren die Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts diskussionslos von der Existenz von Lösungen für gewöhnliche oder für partielle Differentialgleichungen überzeugt, wobei sie meist nicht versuchten, den Bereich zu präzisieren, auf dem diese Lösungen definiert sind. Im höchsten Fall begründeten sie ihr Vertrauen damit, daß sie die Koeffizienten von Potenzreihen bestimmten, welche den vorgelegten Gleichungen formal genügten.

Dieses Verfahren zeigte insbesondere, daß für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

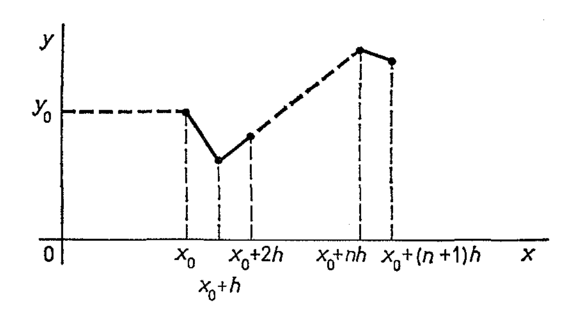
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

die Vorgabe der Werte $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ der unbekannten Funktion und ihrer ersten $n-1$ Ableitungen in einem Punkt x_0 die Werte aller folgenden Ableitungen in diesem Punkt bestimmen mußte und mithin die Funktion selbst (man setzte ja die Taylorreihe als konvergent voraus). Es war Cauchy, der von 1820 an in seinen Vorlesungen ([8], (2), Bd. XI, S. 399–465) das Problem in strenger Form aufgriff: Ist eine Gleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

gegeben, wobei f als stetig differenzierbar vorausgesetzt wird, so ist zu beweisen, daß zu gegebenen Werten x_0, y_0 von x, y eine eindeutig bestimmte Lösung $y = u(x)$ existiert, die auf einem hinreichend kleinen Intervall mit dem Mittelpunkt x_0

definiert ist und für welche $u(x_0) = y_0$ gilt. Hier stößt man zweifellos zum ersten Male auf eine Untersuchung *lokalen* Charakters, wobei man sich darauf beschränkt, die Existenz und die eindeutige Bestimmtheit der Lösung in einer Umgebung von x_0 nachzuweisen, ohne etwas über ihre möglichen Fortsetzungen, d. h. über das *globale* Verhalten der Lösungen auszusagen.



Cauchys Vorstellung war es, die von Euler eingeführte Methode (vgl. 1.9.) zur angenäherten Berechnung der Lösung wieder aufzunehmen. Indem er ein Intervall mit dem Anfangspunkt x_0 durch die Punkte $x_0 + nh$ unterteilte, wobei $h > 0$ beliebig klein ist und n positive ganzzahlige Werte annimmt, bestimmte er rekursiv über n eine stetige Funktion u_h, die in jedem Intervall $x_0 + nh \leqq x \leqq x_0 + (n + 1)\, h$ affin linear ist, durch die Bedingung, daß der Anstieg der Geraden $y = u_h(x)$ auf diesem Intervall gleich $f(x_0 + nh, u_h(x_0 + nh))$ ist. Das Neue bestand darin, daß Cauchy unter Verwendung des Mittelwertsatzes die Differenz $u_h - u_{h'}$ für hinreichend kleine h und h' in einem hinreichend kleinen festen Intervall (das von f und von (x_0, y_0), jedoch nicht von h abhängt) nach oben abschätzen konnte. Damit gelang es ihm zu beweisen, daß $u_h(x)$ für gegen null strebendes h in jedem Punkt des fixierten Intervalls gegen eine Funktion $u(x)$ strebt, welche die einzige der Bedingung $u(x_0) = y_0$ genügende Lösung von (2) ist. Er bemerkte darüber hinaus, daß dieses Verfahren auch auf ein System von Differentialgleichungen angewendet werden kann, das wir heute ebenfalls in der Gestalt (2) schreiben, wobei jedoch für y und f vektorwertige Funktionen auf einem $\boldsymbol{R}^m$ stehen; die Gleichungen (1) lassen sich sofort auf derartige Systeme übertragen.

Im Jahre 1868 entdeckte Lipschitz [22] diese Methode wieder, anscheinend ohne die Arbeiten Cauchys zu kennen. Er fügte die Bemerkung hinzu, daß die Stetigkeit der Ableitungen von f nicht notwendig ist: Es genügt, daß f auf einer Umgebung von (x_0, y_0) eine seither als „Lipschitzbedingung" bezeichnete Bedingung erfüllt, d. h., daß eine Konstante $k > 0$ existiert derart, daß

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq k\, |y_1 - y_2| \tag{3}$$

gilt.

Ein anderes Verfahren zum Nachweis der lokalen Existenz von Lösungen für Differentialgleichungen scheint Liouville 1837 zum ersten Male benutzt zu haben, und zwar für den Spezialfall einer linearen Gleichung zweiter Ordnung ([21], S. 19). Es handelt sich dabei um die Methode der *Iteration* (oder der „sukzessiven Approximation"), wobei man eine Folge von Funktionen u_n bestimmt, indem man

$u_n(x_0) = y_0$ und dann rekursiv

$$u_0(x) = y_0 \qquad \text{für jedes } x\,,$$
$$u_n'(x) = f(x, u_{n-1}(x)) \tag{4}$$

setzt; dies liefert jedes u_n durch eine Quadratur. Wenn eine Lipschitzbedingung (3) erfüllt ist, sind die u_n sämtlich auf einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 definiert und konvergieren auf dieser Umgebung gleichmäßig gegen die Lösung u, und es gilt $u(x_0) = y_0$.

Wie Abbé Moigno erwähnte, hat Cauchy diese Methode etwa zur gleichen Zeit in seinen Vorlesungen verwendet; später scheint sie jedoch von den Analytikern vernachlässigt worden zu sein, bis zu dem Zeitpunkt, als (nach 1870) Carl Neumann und H. A. Schwarz sie in ihren Untersuchungen zum Dirichletschen Problem wieder zu Ehren brachten (vgl. 8.5.2.). Von 1890 an wies E. Picard die Fruchtbarkeit dieser Methode nach, indem er sie auf zahlreiche Existenzprobleme bei Funktionalgleichungen verschiedenster Natur anwendete: Erfolge, die ihre „Erklärung" später finden, nachdem Banach die Methode in ihrer allgemeinen Form dargestellt haben wird (vgl. 8.6.).

Picard bemerkte darüber hinaus, daß dann, wenn es sich um Gleichungen (bzw. Gleichungssysteme) handelt, deren rechte Seite eine analytische Funktion ist, also auch für komplexe Werte von x und y (bzw. der Komponenten von y) einen Sinn besitzt, die Iterationsmethode (oder die Cauchy-Lipschitzsche Methode) Existenz und eindeutige Bestimmtheit von auf einer Umgebung von x_0 in $\boldsymbol{C}$ holomorphen Lösungen liefert.

Dieses Ergebnis (das die Integration vermittels Potenzreihen durch die Analytiker des achtzehnten Jahrhunderts rechtfertigt) war auf andere Weise bereits 1831 von Cauchy erzielt worden ([8], (1), Bd. IV, S. 483). In der Methode, die er „Calcul des limites" nennt (und die heute „Majorantenmethode" heißt), hat er die Idee, bei einer skalaren Gleichung erster Ordnung (2) diese Gleichung mit einer anderen Gleichung zu *vergleichen*, nämlich mit

$$y' = F(x, y)\,, \tag{5}$$

wobei F in folgendem Sinne eine „Majorante" von f darstellt: Sind

$$f(x, y) = \sum_{m,n} c_{mn}(x - x_0)^m (y - y_0)^n$$

und

$$F(x, y) = \sum_{m,n} C_{mn}(x - x_0)^m (y - y_0)^n$$

die Taylorentwicklungen von f bzw. F auf der Umgebung von (x_0, y_0), so nimmt man an, es sei $C_{mn} \geqq 0$ und $|c_{mn}| \leqq C_{mn}$ für alle Indexpaare. Wenn man dann weiß, daß die Gleichung (5) eine Lösung besitzt, die sich auf der Umgebung von x_0 in eine konvergente Potenzreihe

$$y - y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x - x_0)^n$$

entwickeln läßt, so ist notwendigerweise $A_n \geqq 0$, und schreibt man auf, daß eine Potenzreihe

$$y - y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

der Gleichung (2) genügt, so ergeben sich daraus durch Rekursion die a_n, und es ist $|a_n| \leqq A_n$ für jedes n; hieraus ergibt sich unmittelbar die Konvergenz dieser Reihe und die Tatsache, daß deren Summe Lösung von (2) ist. Die ganze Aufgabe besteht also darin, die „Majorantenfunktion" F so zu bestimmen, daß man die Gleichung (5) explizit integrieren kann. Cauchy gelang das mühelos mit Hilfe der Ungleichungen $|c_{mn}| \leqq M/R^{m+n}$ für eine geeignet gewählte Zahl $R > 0$, die er für analytische Funktionen bewiesen hatte (vgl. Kapitel 4); die Funktion

$$F(x, y) = M\left(1 - \frac{x - x_0}{R}\right)^{-1}\left(1 - \frac{y - y_0}{R}\right)^{-1}$$

besitzt die gewünschten Eigenschaften.

Dieses Ergebnis läßt sich sofort auf analytische Differentialgleichungssysteme verallgemeinern. Etwas später, im Jahre 1842 ([8], (1), Bd. VII, S. 17–68), zeigte Cauchy, daß sich seine Methode auch auf partielle Differentialgleichungssysteme

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_{p+1}} = H_j\left(x_1, \ldots, x_{p+1}, v_1, \ldots, v_r, \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v_r}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial v_r}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial v_1}{\partial x_p}, \ldots, \frac{\partial v_r}{\partial x_p}\right) \quad (6)$$

$$(1 \leqq j \leqq r)$$

anwenden läßt, deren rechte Seiten auf der Umgebung eines Punktes (der als der Koordinatenursprung angenommen werden kann) analytisch und bezüglich der Ableitungen $\frac{\partial v_j}{\partial x_k}$ linear sind. Er bewies dann, daß auf der Umgebung des Ursprungs eine und nur eine analytische Lösung dieses Systems existiert, die für $x_{p+1} = 0$ gleich 0 wird. Im Jahre 1875 wurde dieser Satz (übrigens ohne Hinweis auf Cauchy) von S. Kowalewskaja auf den Fall verallgemeinert, daß die Funktionen H_j beliebige analytische Funktionen der in ihnen auftretenden Variablen sind [17].

Während einer sehr langen Zeit glaubte man, es sei möglich, den Satz von Cauchy-Kowalewskaja dahingehend zu verallgemeinern, daß die rechten Seiten von (6) bezüglich der darin auftretenden Variablen nur unendlich oft differenzierbar zu sein brauchen (der Satz hätte dann Existenz und eindeutige Bestimmtheit einer unendlich oft differenzierbaren Lösung auf der Umgebung des Ursprunges nachgewiesen). Erst im Jahre 1956 gelang es H. Lewy, das erste Beispiel für eine Gleichung anzugeben, die auf der Umgebung eines Punktes *keine* stetig differenzierbare Lösung besitzt: Es handelt sich um die Gleichung mit komplexen Koeffizienten

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial u}{\partial x_2} - 2i(x_1 + ix_2)\,\frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x_3)\,, \quad (7)$$

wobei f unendlich oft differenzierbar, jedoch nicht analytisch ist; zerlegt man u in Real- und Imaginärteil, $u = u_1 + iu_2$, so ist die Gleichung (7) übrigens einem System von zwei Gleichungen mit reellen Koeffizienten äquivalent. Es gibt auch Gleichungen der Gestalt (6), für welche die Lösung, die für $x_{p+1} = 0$ verschwindet, nicht eindeutig bestimmt ist; zum Beispiel kann man eine auf $\boldsymbol{R}^2$ unendlich oft differenzierbare komplexe Funktion $a(x, y)$ definieren derart, daß

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

eine Lösung u besitzt, die auf $\boldsymbol{R}^2$ unendlich oft differenzierbar, für $y \leqq 0$ gleich 0 und für $y > 0$ von 0 verschieden ist.

8.1.2. *Pfaffsche Systeme*

Das von Cauchy für ein Gleichungssystem der Gestalt (6) gelöste Problem läßt sich unter Verwendung der Sprache der n-dimensionalen Geometrie (vgl. Kapitel 3) geometrisch folgendermaßen formulieren: Man nehme an, die r Funktionen v_j im Raum $\boldsymbol{R}^{p+1+r}$ definierten eine „Untermannigfaltigkeit" der Dimension $p + 1$ (vgl. 9.5.), die aus den Punkten $(x_1, \dots, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+r+1})$ besteht, welche den Gleichungen $x_{p+1+j} = v_j(x_1, \dots, x_{p+1})$ für $1 \leqq j \leqq r$ genügen. Das von Cauchy gelöste Problem besteht nun darin, auf einer Umgebung des Ursprungs eine „Lösungsuntermannigfaltigkeit" des Systems (6) zu bestimmen, die (in einer Umgebung von 0) die p-dimensionale Untermannigfaltigkeit V enthält, welche durch $x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_{p+r+1} = 0$ definiert ist.

Das allgemeine „Cauchysche Problem" läßt sich in der gleichen Weise formulieren, jedoch für eine *beliebige* Untermannigfaltigkeit V der Dimension p, die den Koordinatenursprung enthält. Natürlicherweise wird man versuchen, sich auf den von Cauchy behandelten Fall zu beschränken, indem man die Variablen und die unbekannten Funktionen transformiert; doch ist das, wie man feststellt, nicht immer möglich. So ist zum Beispiel für eine Gleichung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{9}$$

erster Ordnung in den zwei unabhängigen Variablen x und y, wie sie von Lagrange und Monge (vgl. 1.6.) behandelt wurde, $p = r = 1$ (F werde gleich 0 vorausgesetzt, wenn die fünf Variablen null sind). Wählt man für V eine ebene Kurve mit der Gleichung $y = u(x)$, $z = 0$ und $u(0) = 0$, so ändert man die Variablen, indem man $x_1 = x$, $y_1 = y - u(x)$ setzt, um auf den Gleichungstyp (6) zu gelangen, d. h. auf eine Gleichung der Gestalt

$$\frac{\partial z}{\partial y_1} = G\left(x_1, y_1, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}\right), \tag{10}$$

worin G unendlich oft differenzierbar ist. Für die Gleichung (9) erhält man jedoch in den neuen Variablen

$$F\left(x_1, y_1 + u(x_1), z, \frac{\partial z}{\partial x_1} - u'(x_1)\frac{\partial z}{\partial y_1}, \frac{\partial z}{\partial y_1}\right) = 0\,, \tag{11}$$

und diese läßt sich nur in der Gestalt (10) schreiben, wenn der Ausdruck

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial p} u'(x)\,,$$

worin man z, y, z, p, q durch 0 ersetzt, *nicht null ist.* Tatsächlich ist es einfach, Beispiele anzugeben, in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist und das Cauchysche Problem keine Lösung besitzt.

Es kann übrigens auch unendlich viele Lösungen besitzen. Das tritt ein, wenn man bereits eine Integralfläche S der Gleichung $z = f(x, y)$ in der Umgebung des Ursprungs kennt und für V eine Kurve wählt, die in S enthalten ist und deren Projektion auf die x,y-Ebene der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial F}{\partial q}} \tag{12}$$

genügt (wobei vorausgesetzt wird, daß z, p, q in $\frac{\partial F}{\partial p}$ und $\frac{\partial F}{\partial q}$ durch $f(x, y)$ und seine ersten Ableitungen ersetzt sind). Schreibt man auf, daß die Funktionen z, p, q von x und y längs V der Beziehung $dz = p\,dx + q\,dy$ genügen und $F(x, y, z, p, q)$ einen konstanten Wert erteilen, so stellt man fest, daß diese Funktionen, wenn man x, y, p, q längs V als Funktionen eines Parameters t ausdrückt, dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dx}{p\dfrac{\partial F}{\partial p} + q\dfrac{\partial F}{\partial q}} = -\frac{dp}{\dfrac{\partial F}{\partial x} + p\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dq}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + q\dfrac{\partial F}{\partial z}} = dt \tag{13}$$

genügen. Für V erhält man somit die Projektion eines Mongeschen „charakteristischen Streifens" (vgl. 1.6.) auf den $\boldsymbol{R}^3$ (der als eine Kurve im $\boldsymbol{R}^5$ aufgefaßt werden muß); das war von vornherein zu erwarten, da es nach Definition mindestens *zwei* verschiedene Integralflächen gibt, die eine derartige Kurve V enthalten.

Hier sieht man, wie der allgemeine Begriff der „charakteristischen Untermannigfaltigkeit" in natürlicher Weise in das Cauchysche Problem für ein partielles Differentialgleichungssystem hereinkommt. Um präzise zu definieren, was unter einer „Lösung" oder einem „Integral" eines solchen Gleichungssystems zu verstehen ist (was, wie wir gesehen haben, bereits Anlaß zu Meinungsverschiedenheiten gegeben hatte, wenn es sich um eine Gleichung $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$ handelte, die nicht der Integrabilitätsbedingung genügte (vgl. 1.6.)), war man seit Beginn des neunzehnten Jahrhunderts dazu übergegangen, diese Systeme stärker durch ihre inneren Eigenschaften zu beschreiben als in der Gestalt, wie sie sich aus einer ein für alle Mal getroffenen Wahl der unabhängigen Variablen ergibt.

Diese Darstellung war durch die Sprache der n-dimensionalen Geometrie erleichtert worden, die seit Mitte des neunzehnten Jahrhunderts allgemein im Gebrauch war (vgl. Kapitel 3). In der Tat kann man sagen, daß in der Ebene die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung darauf führt, diejenigen Kurven zu finden, für welche die Tangente in jedem Punkt eine *gegebene* Grade ist. Geht man zu einem beliebigen Raum $\boldsymbol{R}^n$ über, so kann man sich in jedem Punkt $x \in \boldsymbol{R}^n$ eine *p-Richtung* L_x vorgeben, d. h. eine affine lineare Mannigfaltigkeit der Dimension p, die x enthält und von der man voraussetzt, daß die sie bestimmenden Parameter in unendlich oft differenzierbarer Weise von x abhängen. Das allgemeine Problem besteht nun darin, eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit M von $\boldsymbol{R}^n$ einer Dimension $q \leqq p$ zu finden derart, daß in jedem Punkt x von M die zu M tangentiale affine lineare Mannigfaltigkeit (der Dimension q) in der p-Richtung L_x enthalten ist.

Wenn man $n - q$ Koordinaten eines Punktes von M als Funktionen der q übrigen ausdrückt, so erhält man für diese $n - q$ Funktionen ein partielles Differentialgleichungssystem. Der Vorteil besteht hierbei jedoch darin, daß die q Parameter, die einen Punkt von M definieren, nicht von vornherein fixiert sind und daß sich die M auferlegte Bedingung in $n - p$ linearen Relationen zwischen den Differentialen der n Koordinaten x_j $(1 \leqq j \leqq n)$ von $x \in M$ ausdrückt:

$$\omega_j \equiv a_{j1}\, dx_1 + \cdots + a_{jn}\, dx_n = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq n - p)\,, \tag{14}$$

wobei die a_{jk} unendlich oft differenzierbare Funktionen von $x_1, \ldots, x_n$ sind. Damit ist man zu einem sogenannten *Pfaffschen System* gelangt (benannt nach dem deutschen Mathematiker Pfaff, der Anfang des neunzehnten Jahrhunderts als erster derartige Gleichungssysteme in allgemeiner Weise untersuchte). Die lokale Theorie dieser Systeme, sei es in der Gestalt (14) oder in der dazu äquivalenten Gestalt eines partiellen Differentialgleichungssystems, wurde im Verlauf des neunzehnten Jahrhunderts zum Gegenstand zahlreicher Arbeiten, erreichte jedoch eine abschließende Form erst mit dem Werk von E. Cartan zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts (vgl. [D], Kapitel 18).

Wie bereits ausgeführt (vgl. 1.6.), ist der einfachste Fall eines Pfaffschen Systems, der für $n = 3$ und $p = 2$, d. h. die totale Differentialgleichung $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, bereits im achtzehnten Jahrhundert untersucht worden; man hatte erkannt, daß eine „Integrabilitätsbedingung"

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0 \tag{15}$$

von P, Q, R identisch erfüllt werden muß, damit *Integralflächen* für die Gleichung existieren. Im neunzehnten Jahrhundert stellte sich dasselbe Problem für ein allgemeines Pfaffsches System (14): Gibt es eine Familie von Untermannigfaltigkeiten *der Dimension* p, die (14) erfüllt und die Eigenschaft besitzt, daß in der Umgebung eines beliebigen Punktes x_0 durch jeden Punkt eine und nur eine dieser Untermannigfaltigkeiten hindurchgeht? Die Bedingungen, die zuerst von Jacobi und Clebsch für ein zu (14) äquivalentes partielles Differentialgleichungssystem angegeben wurden, konnten von Frobenius mit Hilfe des äußeren Differential-

kalküls (vgl. 9.6.) direkt formuliert werden: Es ist notwendig und hinreichend, daß sich jedes äußere Differential $d\omega_j$ in der Gestalt

$$\sum_{k=1}^{n-p} \omega_k \wedge \alpha_{jk}$$

schreiben läßt, wobei die α_{jk} Differentialformen sind. Ein Pfaffsches System, das diese Bedingungen erfüllt, wird *vollständig integrierbar* genannt; diese Systeme spielen in der modernen Differentialgeometrie eine beachtliche Rolle (vgl. Kapitel 9).

8.1.3. *Implizite Funktionen*

Im Jahr 1839 bemerkte Cauchy, daß der Existenzsatz für Differentialgleichungen auch die (lokale) Existenz impliziter Funktionen sichert, die bis dahin ohne Begründung angenommen worden war. Hat man zum Beispiel eine Beziehung $\phi(x, y) = 0$ zwischen zwei reellen Variablen mit

$$\phi(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0\,,$$

so muß eine stetig differenzierbare Funktion u mit $\phi(x, u(x)) = 0$ auf der Umgebung von x_0 und $u(x_0) = y_0$ Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + y' \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

sein; umgekehrt erfüllt eine solche Lösung auf einer Umgebung von x_0 identisch die Gleichung $\phi(x, u(x)) = 0$. Ist ϕ analytisch, so gilt dies auch für u.

Übrigens findet diese Beziehung zwischen impliziten Funktionen und Differentialgleichungen auch in der Abhängigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung (2) von der „Integrationskonstanten" ihren Ausdruck: *In der Umgebung* eines Punktes (x_0, y_0) können die „Integralkurven" $y = u(x)$ von (2) in der Gestalt $\phi(x, y) = C$ geschrieben werden, wobei ϕ eine stetige Ableitung besitzt, wenn dies für f zutrifft, und die Konstante C in einem hinreichend kleinen Intervall variiert.

8.2. Differentialgleichungen im Komplexen

Nachdem sie von Cauchy geschaffen worden war, lieferte die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen (vgl. Kapitel 4) den Rahmen für die meisten Untersuchungen von Differentialgleichungen während der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts. Für ein Differentialgleichungssystem in vektorieller Gestalt

$$y' = A(z, y)\,, \tag{16}$$

wobei A auf einer offenen Menge Ω von $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^n$ analytisch (mit Werten in $\mathbf{C}^n$) ist, sichert der Existenzsatz von Cauchy die Existenz und die eindeutige Bestimmtheit

einer Lösung $y = u(z)$, die *auf einer Umgebung* eines Punktes $z_0 \in \boldsymbol{C}$ analytisch ist und für die $u(z_0) = y_0$ gilt, vorausgesetzt, es ist $(z_0, y_0) \in \Omega$; in diesem Falle wird z_0 bezüglich der Lösung u *gewöhnlicher* Punkt genannt. Das zentrale Problem besteht in der *globalen* Untersuchung der analytischen Fortsetzung einer solchen Lösung u, ausgehend von einem gewöhnlichen Punkt z_0.

Die Aufmerksamkeit konzentrierte sich schnell auf die *singulären* Punkte einer solchen Fortsetzung: Ein Punkt $z_1 \in \boldsymbol{C}$ ist bezüglich u singulär, wenn folgendes gilt: Verbindet man z_0 mit z_1 in $\boldsymbol{C}$ durch einen Weg, dessen sämtliche Punkte mit Ausnahme von z_1 bezüglich der analytischen Fortsetzung von u längs dieses Weges gewöhnliche Punkte sind, so strebt für längs des Weges gegen z_1 strebendes z entweder $u(z)$ nicht gegen einen Grenzwert oder gegen den unendlich fernen Punkt, oder es strebt gegen einen Vektor $y_1 \in \boldsymbol{C}^n$ derart, daß A im Punkt (z_1, y_1) nicht analytisch fortgesetzt werden kann („singulärer Punkt" von A).

8.2.1. *Lineare Gleichungen*

Den einfachsten (und für die Anwendungen zugleich wichtigsten) Fall stellen die *linearen* Gleichungen

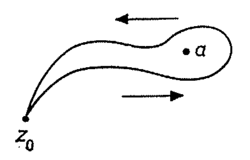
$$y' = \mathrm{A}(z)\, y \tag{17}$$

dar, wobei $\mathrm{A}(z)$ eine quadratische Matrix der Ordnung n ist, deren Elemente auf einer offenen Menge U von $\boldsymbol{C}$ definierte holomorphe Funktionen sind. Am meisten wurden skalare lineare Gleichungen

$$y^{(n)} + p_1(z)\, y^{(n-1)} + \cdots + p_n(z)\, y = 0 \tag{18}$$

n-ter Ordnung untersucht, wobei die p_j auf U holomorph sind; man führte sie auf die Gestalt (17) zurück, indem man als unbekannte Funktion den Vektor $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ wählte. Es ergab sich, daß die einzigen möglichen singulären Punkte der Lösungen von (17) (bzw. (18)) die singulären Punkte der Funktion A (bzw. der Funktionen p_j) sind; dieses Ergebnis wurde zum ersten Male im Jahre 1865 von Fuchs veröffentlicht, es war jedoch Riemann seit 1857 bekannt.

Riemann hatte im Jahre 1859 ([26], S. 67) eine detaillierte Untersuchung der Lösungen der hypergeometrischen Gleichung veröffentlicht (vgl. 1.4.3.), wobei er Gewicht auf das sogenannte *Monodromieproblem* legte (vgl. Kapitel 7): Ist a ein singulärer Punkt von wenigstens einer der Funktionen p_j in (18) und $w_1, \ldots, w_n$ ein System von n auf der Umgebung eines Punktes z_0 linear unabhängigen Lösungen von (18), so läßt man z eine Schleife um a mit Anfangs- und Endpunkt z_0 beschreiben; kehrt man zum Punkt z_0 zurück, so ergeben sich die Werte von $w_1, \ldots, w_n$ aus den Anfangswerten dieser Funktionen in z_0 vermittels eines Endomorphismus L_{a,z_0} von $\boldsymbol{C}^n$, und es geht darum, L_{a,z_0} zu bestimmen.



Inspiriert durch diese Abhandlung Riemanns, löste Fuchs ein besonders einfaches Beispiel der Gleichung (18), und zwar den Fall, in dem man $p_j(z) = (z - a)^{-j} P_j(z)$ für $1 \leqq j \leqq n$ in der Umgebung von a schreiben kann, wobei die P_j im Punkte a holomorph sind; man nennt den Punkt a dann *regulären* Punkt für die Gleichung (18). Unter Wiederaufnahme einer Idee von Euler (vgl. 1.5.) suchte Fuchs Lösungen von (18) in der Gestalt $(z - a)^\varrho v(z)$, wobei v im Punkt a holomorph ist; er zeigte, daß ϱ eine Wurzel der Gleichung in r:

$$r(r-1)\cdots(r-n+1) + P_1(0)\, r(r-1)\cdots(r-n+2)$$
$$+ \cdots + P_{n-1}(0)\, r + P_n(0) = 0$$

sein muß.

Ist ϱ_j eine einfache Wurzel dieser Gleichung und für keine andere Wurzel $\varrho_k \neq \varrho_j$ die Differenz $\varrho_j - \varrho_k$ eine streng positive ganze Zahl, so kann man die Koeffizienten der Taylorentwicklung von v im Punkte a in eindeutiger Weise bestimmen, indem man $v(a) = 1$ fordert, und Fuchs bewies mit Hilfe der Majorantenmethode, daß die so erhaltene Entwicklung in der Umgebung von a konvergiert.

Um andere Lösungen zu erhalten, die in der Umgebung von a ein System von n linear unabhängigen Lösungen bilden, wenn gewisse unter den Differenzen $\varrho_j - \varrho_k$ streng positive ganze Zahlen sind oder wenn mehrfache Wurzeln vorliegen, zeigte Fuchs, daß man als Lösungen allgemein Linearkombinationen von Funktionen $(z - a)^\varrho \left(\log (z - a)\right)^k \varphi(z)$ betrachten muß, wobei φ im Punkt a holomorph ist und k eine streng positive ganze Zahl bezeichnet. Für jeden regulären Punkt a ist damit das Monodromieproblem explizit gelöst ([12] und [15]).

Im Anschluß an die Arbeiten von Fuchs wurden dessen Resultate durch mehrere Mathematiker auf Systeme (17) ausgedehnt, wobei hier ein Punkt $a \in \boldsymbol{C}$ als *regulär* bezeichnet wird, wenn die Elemente der Matrix A im Punkte a einen Pol höchstens erster Ordnung besitzen.

Viele andere Arbeiten sind spezielleren Untersuchungen der linearen Gleichungen (18) zweiten Grades gewidmet, insbesondere auf Grund der Tatsache, daß zahlreiche der von Problemen der mathematischen Physik herrührenden Gleichungen von diesem Typus sind. Klein und Bôcher haben bemerkt, daß alle diese Gleichungen von einem einheitlichen allgemeinen Typ sind, nämlich

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{z - a_j}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{A_0 + A_1 z + \cdots + A_{p-3} z^{p-3}}{(z - a_1)(z - a_2)\cdots(z - a_{p-1})}\, y = 0\,, \quad (19)$$

wobei die a_j für $1 \leqq j \leqq p - 1$ beliebig aus $\boldsymbol{C}$ sind, ebenso wie die Konstanten A_k für $0 \leqq k \leqq p - 4$, und wo $A_{p-3} = (p - 2)(p - 4)/16$ ist [15]. Da die a_j verschieden sind, stellen sie für die Gleichung reguläre Punkte dar, und dasselbe gilt für den Punkt $z = \infty$ (was bedeutet, daß nach der Variablentransformation $z' = 1/z$ der Punkt 0 ein regulärer Punkt der transformierten Gleichung ist). Durch passende Wahl der Parameter a_j und A_k (wobei mehrere der a_j in einen einzigen Punkt zusammenfallen können, der dann „irregulär" ist) und durch geeignete Transformation der Variablen erhält man solche klassischen Gleichungen, wie die Hill-

sche Gleichung für die Theorie des Mondes,

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (C_0 + C_1 \cos 2z + \cdots + C_p \cos 2pz)\, y = 0\,, \tag{20}$$

die Mathieusche Gleichung, die hiervon der $p = 1$ entsprechende Spezialfall ist, die Lamésche Gleichung (vgl. 7.1.15.)

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \big(h + n(n+1)\, \wp(z)\big)\, y = 0\,, \tag{21}$$

wobei $\wp$ die Weierstraßsche elliptische Funktion bezeichnet, und viele andere.

Die Untersuchung von irregulären Punkten der Gleichungen (18) hatte im Jahre 1885 mit H. Poincaré ([25], Bd. I, S. 225—332) begonnen, von dem auch die grundlegenden Ideen bei der Behandlung dieses Problems stammen; seine Arbeiten wurden von G. D. Birkhoff fortgesetzt und vervollständigt ([6], Bd. I, S. 201 und 252), der den allgemeinsten Fall von Systemen (17) geklärt hat, wobei nur vorausgesetzt wird, daß a eine *Polstelle* der Elemente der Matrix A ist. Bequemerweise wählt man, durch eine Variablentransformation, für a den unendlich fernen Punkt. Birkhoff zeigte dann, daß es eine in der Umgebung des unendlich fernen Punktes analytische und invertierbare Matrix $\mathrm{B}(z)$ gibt derart, daß mit

$$y(z) = \mathrm{B}(z) \cdot Y(z)\,, \qquad Y(z) \in \boldsymbol{C}^n\,,$$

das System (17) in

$$\frac{z\, dY}{dz} = \mathrm{P}(z) \cdot Y(z) \tag{22}$$

übergeht, wobei P eine Matrix bezeichnet, deren Elemente *Polynome* in z sind; ist $q+1$ der höchste Grad dieser Polynome, so sagt man, der unendlich ferne Punkt sei vom *Rang* $q+1$, und man kann sich allgemein auf den Fall beschränken, daß die nichtdiagonalen Elemente der Matrix P Polynome höchstens q-ten Grades sind und die Koeffizienten von z^{q+1} in den Elementen der Diagonale paarweise verschieden sind.

Man versucht dann, das System (22) „formal" durch eine Funktion des Typs

$$\exp\big(Q(z)\big)\, z^{\varrho}\, (B_0 + B_1 z^{-1} + \cdots + B_k z^{-k} + \cdots) \tag{23}$$

mit

$$Q(z) = a_1 \frac{z^{q+1}}{q+1} + a_2 z^q + \cdots + a_{q+1} z \tag{24}$$

zu lösen, wobei die a_j Skalare und die B_k Vektoren aus $\boldsymbol{C}^n$ sind. Es zeigt sich, daß a_1 einer der Koeffizienten von Termen des Grades $q+1$ unter den Diagonalelementen von P sein muß; ist dieser Koeffizient erst einmal gewählt, so sind die anderen durch die Gleichung, ebenso wie der Exponent ϱ und die Vektoren B_k, (bis auf einen skalaren Faktor für B_0) wohlbestimmt. Abgesehen von dem Fall eines regulären Punktes (der $q = -1$ entspricht) sind jedoch die Reihen $\sum_k B_k z^{-k}$ für großes $|z|$ im allgemeinen nicht mehr konvergent.

Es war die Idee von Poincaré, die Ebene in *Sektoren*

$$\theta_j < \arg(z) < \theta_{j+1}$$

einzuteilen, so daß man in jedem dieser Sektoren ein System von n linear unabhängigen Lösungen hat, von denen jede eine *asymptotische Entwicklung* der Gestalt (23) besitzt, die auf einen beliebigen Grad k beschränkt werden kann. Darüber hinaus zeigte er, daß sich diese Lösungen durch die Laplacesche Methode (vgl. 1.5.) mit Hilfe von Integralen der Gestalt

$$\int_L \exp(\zeta z^{q+1}) \left(v_0(\zeta) + z v_1(\zeta) + \cdots + z^q v_q(\zeta)\right) d\zeta \tag{25}$$

ausdrücken lassen, wobei v_j geeignet gewählte Funktionen und L einen geeignet gewählten Weg in $\boldsymbol{C}$ bezeichnen.

Das Monodromieproblem reduziert sich dann auf die Beantwortung der Frage, wie man von einem System von n linear unabhängigen Lösungen in einem dieser Sektoren zu einem analogen System in einem benachbarten Sektor übergeht; es ist hier keine explizite Lösung mehr angebbar, wie es im Falle eines regulären Punktes möglich ist (vgl. [15]).

8.2.2. *Nichtlineare Gleichungen*

Die Untersuchung von nichtlinearen Gleichungen (1) im Komplexen führt auf zahlreiche, sehr schwierige Probleme, selbst wenn man sich auf den Fall beschränkt, daß f eine *rationale* Funktion in $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ ist mit auf einer offenen Teilmenge von $\boldsymbol{C}$ in z holomorphen Koeffizienten. Im Gegensatz zur Situation bei linearen Gleichungen können die singulären Punkte einer Lösung mit dieser Lösung variieren; man sagt dann, sie seien *beweglich.*

So ist zum Beispiel bereits für eine Riccatische Gleichung der Gestalt $y' = 1 + y^2$ jeder Punkt $z_1 \in \boldsymbol{C}$ ein Pol für die Lösung $y = -\cot(z - z_1)$. Für die Gleichung $y' = -z/y$ ist z_1 ein algebraischer kritischer Punkt (vgl. Kapitel 4) der Lösung $y = (z'^2 - z^2)^{1/2}$. Bei Gleichungen zweiter Ordnung können bewegliche wesentlich singuläre Punkte auftreten (vgl. Kapitel 4). Beispielsweise besitzt die Gleichung $y'' = y'^2(2y - 1)(y^2 + 1)^{-1}$ als allgemeine Lösung $y = \tan(\log(Az - B))$, und $z_1 = B/A$ ist also ein wesentlich singulärer Punkt, so daß $y(z)$ für längs eines Weges gegen z_1 strebendes z im allgemeinen nicht gegen einen Grenzwert strebt. Die Gleichung dritter Ordnung

$$\frac{y'''}{y'^3} - \frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'^4} = \frac{1}{2(y-1)^2} + \frac{4}{9y^2} - \frac{41}{72y(y-1)}$$

schließlich besitzt $j((az + b)(cz + d)^{-1})$ als Lösung, wobei j die Modulfunktion ist (vgl. 7.1.16.) und a, b, c, d beliebige Konstanten sind; der Kreis mit der Gleichung $\operatorname{Im}((az + b')/(cz + d)) = 0$ ist also eine Linie von beweglichen singulären Punkten.

Angesichts dieser Vielfalt möglicher Fälle richteten sich die Untersuchungen auf die Bestimmung von Klassen einfachster Gleichungen, nämlich solcher, bei

denen nur bewegliche *Pole* auftreten. Die ersten Untersuchungen dieser Art begannen mit Briot und Bouquet gegen 1850; sie wurden von Picard und Poincaré und in großem Umfang dann von Painlevé und seinen Schülern fortgesetzt, die gegen 1900 die tiefliegendsten Ergebnisse erhalten haben.

Für die Gleichungen erster Ordnung

$$y' = g(y, z)/h(y, z)\,, \tag{26}$$

worin g und h Polynome in y ohne gemeinsamen Faktor bezeichnen, deren Koeffizienten holomorphe Funktionen in z sind, nahmen Briot und Bouquet an, es könne keinen beweglichen Punkt z_1 geben derart, daß eine Lösung nicht gegen einen Grenzwert strebt, falls z längs eines beliebigen Weges gegen z_1 strebt. Diese Tatsache ist später von Painlevé streng bewiesen worden. Die einzigen Punkte z_1, in denen eine Lösung einen wesentlich singulären Punkt besitzen kann, sind also diejenigen, in denen die beiden Polynome $g(y, z_1)$ und $h(y, z_1)$ in y eine gemeinsame Nullstelle haben („Unbestimmtheitspunkte" von g/h); diese Punkte sind also *fest* und liegen isoliert. Für einen beweglichen singulären Punkt z_1 einer Lösung y strebt $y(z)$ somit gegen einen endlichen oder unendlichen Grenzwert, wenn z längs eines Weges gegen z_1 strebt. Ist dieser Grenzwert y_1 endlich, so kann g/h im Punkt (y_1, z_1) nicht holomorph sein; daher ist dieser Punkt notwendigerweise ein Pol von g/h (mit anderen Worten, h/g ist in diesem Punkt holomorph). Ist dieser Pol von der Ordnung k, so zeigt man, daß $y(z)$ die Gestalt $(z - z_1)^{1/(k+1)}\,\varphi(z)$ hat, wobei φ eine im Punkt z_1 holomorphe Funktion ist, oder, mit anderen Worten, dieser Punkt ist für y ein algebraischer kritischer Punkt. Ebenso behandelt man den Fall $y_1 = \infty$, indem man $Y = 1/y$ als neue unbekannte Funktion wählt. Es ist nun leicht einzusehen, daß die einzigen Gleichungen (26), die keine beweglichen kritischen Punkte besitzen, die Riccatischen Gleichungen $y' = p_0(z) + p_1(z)\,y + p_2(z)\,y^2$ mit holomorphen Koeffizienten sind ([24], Bd. II, und [15]).

Die Bestimmung der Gleichungen zweiter Ordnung

$$y'' = F(z, y, y')\,, \tag{27}$$

worin F eine rationale Funktion in y und y' mit in z holomorphen Koeffizienten ist, für welche es weder eine bewegliche wesentliche Singularität noch einen beweglichen kritischen Punkt gibt, stellte ein Problem von einem völlig anderen Schwierigkeitsgrad dar; es ist von Painlevé im Jahre 1899 gelöst worden. Die Grundidee seiner scharfsinnigen Methode besteht darin, die Gleichung (27) mit Hilfe einer Variablen- und Funktionstransformation, die analytisch von einem Parameter α abhängt, beispielsweise $z = z_0 + \alpha^{n+1}Z$, $y = y_0 + \alpha^{m+1}Y$, in eine Gleichung

$$Y'' = R(Z, Y, Y', \alpha) \tag{28}$$

umzuformen, die von α in der Weise abhängt, daß sie für einen speziellen Wert von α (beispielsweise $\alpha = 0$) explizit integriert werden kann. Wenn die Gleichung (28) für $\alpha \neq 0$ weder eine bewegliche wesentliche Singularität noch einen beweglichen kritischen Punkt besitzt, zeigt man, daß dies auch für $\alpha = 0$ gilt. Da man aber in letzterem Falle die allgemeine Lösung der Gleichung explizit kennt, ergeben sich somit *notwendige* Bedingungen dafür, daß jedes Integral der Ausgangsgleichung (27) nur bewegliche Pole besitzt.

Über die mehrfache Anwendung dieses Verfahrens gelangten Painlevé und sein Schüler Gambier schließlich auf 50 mögliche Typen von Gleichungen (bis auf Variablen- oder Funktionstransformationen). Im weiteren ging es darum, zu untersuchen, ob die Lösungen dieser Gleichungen tatsächlich nur bewegliche Pole besitzen. In 44 dieser Fälle bestätigt man dies, indem man die Gleichung explizit löst oder eine algebraische *Stammlösung*[1]) gewinnt, was auf die Untersuchung von Gleichungen erster Ordnung führt. Übrig bleiben sechs Gleichungen, die man nicht auf diese Weise behandeln kann; ihre einfachste ist

$$y'' = 6y^2 + z\,. \tag{29}$$

Mit sehr scharfsinnigen Betrachtungen konnte Painlevé zeigen, daß diese Gleichung nur uniforme Lösungen besitzt, die nur bewegliche Pole haben, und daß diese durch die Lösungen gegebenen neuen meromorphen Funktionen sich nicht mit Hilfe von elementaren oder elliptischen Funktionen ausdrücken lassen ([24], Bd. III, und [15]).

8.3. Differentialgleichungen im Reellen

Bis gegen Mitte des neunzehnten Jahrhunderts umfaßten die globalen Untersuchungen zu Differentialgleichungen im Reellen kaum mehr als die linearen Gleichungen; wir gehen darauf bei der Entwicklung der Spektraltheorie ein, mit welcher sie in engem Zusammenhang stehen (vgl. 8.5.1.).

Gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts hatte man untersucht, was geschieht, wenn für eine Differentialgleichung (2) die Lipschitzbedingung (3) nicht mehr erfüllt ist. Peano war der erste, der die Existenz von Lösungen unter alleiniger Annahme der Stetigkeit der Funktion f auf der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) nachwies. Ohne weitere Voraussetzungen ist jedoch die Lösung, die den Wert y_0 im Punkte x_0 annimmt, nicht mehr notwendigerweise eindeutig bestimmt, wie das einfache Beispiel der Gleichung $y' = 2\,|y|^{1/2}$ zeigt. Man kann sogar Beispiele angeben, bei denen durch *jeden* Punkt der Ebene unendlich viele Lösungskurven gehen ([14], S. 18).

Eine lokale Untersuchung anderen Typs, die mit Cauchy beginnt und in enger Beziehung zu den Arbeiten von Briot und Bouquet zu Differentialgleichungen im Komplexen steht, ist die der Untersuchung der Lösungskurven einer skalaren Differentialgleichung erster Ordnung (2) in der Umgebung eines Punktes (a, b) der Ebene $\boldsymbol{R}^2$, wobei die Funktion f nicht gegen einen Grenzwert strebt wie z.B. im Fall $f(x, y) = Y(x, y)/X(x, y)$, worin X und Y zwei Polynome in x, y ohne gemeinsamen Faktor sind, die den Bedingungen $X(a, b) = Y(a, b) = 0$ genügen. Man

---

[1]) So wird eine Gleichung erster Ordnung $G(z, y', y') = C$ genannt, worin G rational in y und y' mit in z holomorphen Koeffizienten ist, welche für jede Lösung von (27) für einen geeigneten Wert der Konstanten C auch Lösung von $G(z, y, y') = C$ ist. Beispielsweise ist $y'^2 + y^2 = C$ Stammlösung von $y'' + y = 0$.

schreibt die Gleichung dann allgemein in der Gestalt

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \tag{30}$$

und betrachtet zweckmäßigerweise die Lösungskurven in der Gestalt $x = x(t)$, $y = y(t)$, wobei die Funktionen $x(t)$, $y(t)$ Lösungen des Systems zweier Differentialgleichungen

$$x' = X(x, y), \qquad y' = Y(x, y) \tag{31}$$

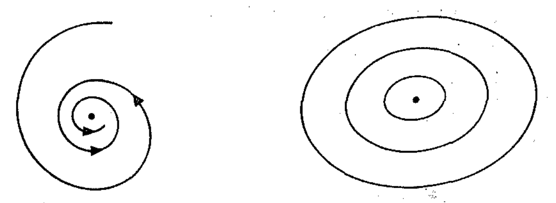
sind, in dem die Variable t nicht vorkommt; derartige Systeme werden *autonom* genannt, und ihre Lösungen als Funktionen von t sind auf ganz $\boldsymbol{R}$ definiert, wenn X und Y Polynome sind.

Der „allgemeine Fall“ liegt vor, wenn man (unter der Voraussetzung $(a, b) = (0, 0)$) in der Umgebung des Ursprungs

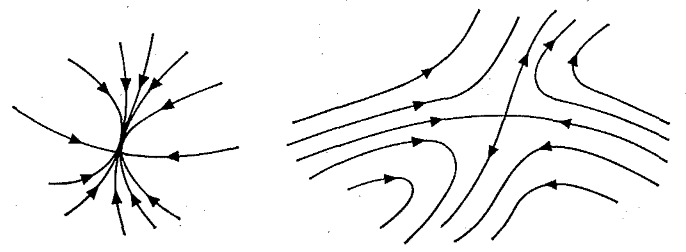
$$\begin{aligned} X(x, y) &= ax + by + f_1(x, y), \\ Y(x, y) &= cx + dy + f_2(x, y) \end{aligned} \tag{32}$$

schreiben kann, wobei die Konstanten a, b, c, d der Bedingung $ad - bd \neq 0$ genügen und die partiellen Ableitungen von f_1 und f_2 für ein $\varrho > 0$ von der Ordnung $o((|x| + |y|)^\varrho)$ sind. Bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts beschränkte man sich nahezu ausschließlich auf den Fall, daß f_1 und f_2 analytisch sind; so stark ist noch die vom achtzehnten Jahrhundert überkommene Tradition und der Vorrang ihrer Auffassungen.

Die Gestalt der Lösungskurven in der Umgebung des Ursprungs hängt von den Eigenwerten der reellen Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ab. Wenn die Eigenwerte konjugiert komplex sind, erhält man einen *Brennpunkt* (oder „asymptotischen Punkt“) oder in Ausnahmefällen ein *Zentrum* (mit einer diesen Punkt umschließenden unendlichen Folge von geschlossenen Lösungskurven):



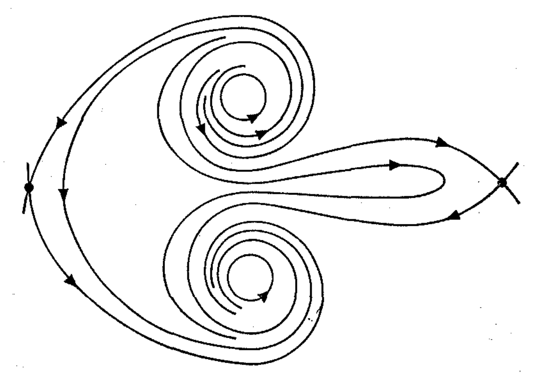
Wenn dagegen die Eigenwerte reell und verschieden sind, ergibt sich ein *Knotenpunkt*, wenn sie gleiches Vorzeichen haben, bzw. ein *Sattelpunkt* im Falle entgegengesetzter Vorzeichen:



Es gibt noch weitere mögliche Formen, so z.B. wenn die Eigenwerte einander gleich oder die Koeffizienten a, b, c, d sämtlich null sind ([19], [2]).

Diesen Stand hatte die Theorie (die somit im wesentlichen eine *lokale* Theorie war) im Jahre 1881 erreicht. Es war dies nun das Jahr, in dem — und das ohne ankündigende Vorarbeiten — die zahlreichen Veröffentlichungen von H. Poincaré zu erscheinen begannen, mit denen er aus dem Nichts die *globale* Theorie der Differentialgleichungen im Reellen schuf. Von Anfang an entwickelte Poincaré die Ideen und Methoden, welche die gesamte Theorie bis in unsere Tage beherrschen. Indem er sich zunächst auf Gleichungen (30) beschränkte, in denen X und Y Polynome sind, stellte er sich von Anfang an als Ziel das allgemeinste Problem, die „qualitative" Beschreibung *aller* Lösungskurven. Um die unendlichen Zweige dieser Kurven behandeln zu können, hatte er die glückliche Idee, die x,y-Ebene auf eine Sphäre (mit einem außerhalb der Ebene gelegenen Mittelpunkt) vom Zentrum der Sphäre aus zu projizieren, wodurch er in Wirklichkeit auf die Untersuchung der Integralkurven eines Tangentialvektorfeldes (vgl. Kapitel 9) auf der Sphäre geführt wurde ([25], Bd. I, S. 1—221).

Die entscheidenden Elemente der gesuchten Beschreibung sind die *kritischen Punkte* des Gleichungssystems (30), gemeinsame Lösungen von $X = Y = 0$, sowie die *geschlossenen* Integralkurven (die den *periodischen* Lösungen von (31) entsprechen), die nicht durch einen kritischen Punkt gehen. Hier liegt bereits der erste Bruch mit den bis dahin vorliegenden Ideen über die Gleichungen (30) vor, falls X und Y Polynome sind. Die klassischen Beispiele hatten glauben machen, die lokale Schreibweise der Lösungskurven in der Gestalt $\phi(x, y) = \text{const}$ mit analytischem ϕ wäre auch noch global gültig. Im Gegensatz dazu zeigte Poincaré, daß diese Situation nur in Ausnahmefällen eintritt, wenn nämlich unter den kritischen Punkten weder Knoten- noch Brennpunkte vorkommen. Im allgemeinen gibt es keine Zentren und nur endlich viele Knoten-, Sattel- bzw. Brennpunkte. Es gibt auch nur endlich viele geschlossene Integralkurven (auf der Sphäre), und alle anderen Integralkurven verbinden entweder zwei kritische Punkte oder gehen von einem kritischen Punkt aus (z.B. für $t = -\infty$) und wickeln sich um eine geschlossene Integralkurve als „Asymptote" für $t = +\infty$ oder zeigen schließlich auch dieses Verhalten für $t = -\infty$ [2].



Im Jahre 1901 vervollständigte und verallgemeinerte Bendixson [5] diese Ergebnisse, indem er auf die Voraussetzung verzichtete, X und Y seien Polynome, und die ersten allgemeinen Existenzkriterien für periodische Lösungen von (31) angab. In jüngerer Zeit hat dieses Problem im Zusammenhang mit der Entwicklung der Elektrotechnik, wo das Auftreten von permanenten Schwingungen in gewissen Erscheinungen auf die Existenz periodischer Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung führte, an Interesse gewonnen. Das erste Beispiel ist die van der Polsche Gleichung (1922)

$$u'' + \alpha(u^2 - 1)\,u' + \beta u = 0 \qquad (\alpha, \beta \text{ Konstante})\,, \tag{33}$$

die später von Liénard verallgemeinert wurde: Betrachtet man die Gleichung

$$u'' + h(u)\,u' + g(u) = 0\,, \tag{34}$$

so kann man sagen (wenn man sie in der Gestalt (30) schreibt), daß eine und nur eine geschlossene Lösungskurve existiert, wenn die Bedingungen

$$h(-u) = h(u)\,, \qquad H(u) = \int_0^u h(t)\,dt$$

erfüllt sind, wobei $H(u) < 0$ ist für $0 < u < a$, $H(u)$ für $u > a$ monoton wächst und

$$\lim_{u \to +\infty} H(u) = +\infty$$

ist, sowie schließlich $g(-u) = -g(u)$ und $ug(u) > 0$ für $u \neq 0$ gilt [14].

Sieht man sich die ersten Arbeiten Poincarés an, so erkennt man, mit welcher Schnelligkeit Poincaré den Gegenstand seiner Untersuchungen erweiterte, als er zunächst die nicht nach y' aufgelösten Gleichungen erster Ordnung $F(x, y, y') = 0$ betrachtete (noch beschränkte er sich auf den Fall, daß F ein Polynom ist). Da man das Problem als äquivalent dazu ansehen kann, auf der Fläche mit der Gleichung $F(x, y, p) = 0$ Integralkurven von $dy - p\,dx = 0$ zu bestimmen, erkennt man, daß es sich dabei um einen Spezialfall der Untersuchung von Integralkurven eines Vektorfeldes (vgl. Kapitel 9) auf einer kompakten Fläche S handelt.

Indem sich Poincaré stets auf den „generischen" Fall beschränkte (vgl. 8.6.), bei dem es nur endlich viele kritische Punkte gibt, welche Knotenpunkte, Sattelpunkte oder Brennpunkte sind, gelang es ihm, zwischen den Anzahlen k, s und b dieser Punkte die topologische Relation

$$k - s + b = 2 - 2p \tag{35}$$

herzuleiten, falls die betrachtete Fläche S orientierbar und vom Geschlecht p ist (vgl. Kapitel 10).

Dies nun ermöglichte es ihm, den Fall, daß S ein *Torus* ist ($p = 1$), einer gesonderten Untersuchung zu unterwerfen, den einzigen Fall also, in dem ein Differentialgleichungssystem *ohne* einen kritischen Punkt existieren könnte. Die geschlossenen Integralkurven zerlegen dann den Torus in Gebiete, in denen es keine geschlossenen Integralkurven gibt, und Poincaré untersuchte insbesondere den Fall, daß *keine* Integralkurve auf dem Torus geschlossen ist. Man kann dann voraussetzen, daß ein Meridian Γ des Torus zu keinem Vektor des gegebenen Feldes tangential

ist, und Poincaré zeigte, daß jede Integralkurve den Meridian Γ in einer perfekten Menge (vgl. Kapitel 6) schneidet, die entweder mit ganz Γ übereinstimmt oder total unzusammenhängend ist. Er konnte jedoch nicht entscheiden, ob diese beiden Fälle tatsächlich eintreten; erst 1932 gelang es A. Denjoy zu zeigen, daß nur der erste Fall möglich ist, falls das Vektorfeld der Klasse C^2 angehört (wobei der zweite Fall eintreten kann, wenn das Feld nur der Klasse C^1 angehört [9]).

In jüngster Zeit (1966) hat A. Schwartz [28] gezeigt, daß sich für ein Vektorfeld der Klasse C^∞ auf einer kompakten Fläche S, die kein Torus ist, eine *minimale* abgeschlossene Menge unter den stabilen Mengen (d. h. unter solchen Mengen, welche die Integralkurve enthalten, die durch irgendeinen ihrer Punkte geht) notwendigerweise auf einen kritischen Punkt reduziert oder eine geschlossene Integralkurve ist.

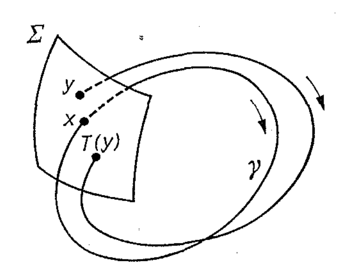
Auf Poincaré gehen auch die ersten Untersuchungen in der Theorie der autonomen Differentialgleichungssysteme mit einer beliebigen Anzahl unbekannter Funktionen

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt \tag{36}$$

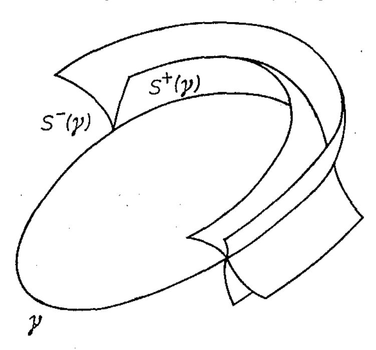
zurück, wobei die X_j Funktionen der Klasse C^∞ sind, die t nicht enthalten (was man auch so ausdrücken kann, daß es sich um einen Spezialfall der Untersuchung von Integralkurven eines Vektorfeldes auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension n handelt). Die Situation ist hier um vieles komplizierter als für $n = 2$, und es besteht kaum Hoffnung, allgemeine Ergebnisse zu erhalten, wenn man sich nicht auf „generische" Vektorfelder beschränkt (vgl. 8.6.).

Was die kritischen Punkte betrifft (d. h. die Punkte, in denen alle X_j zugleich verschwinden), so betrachtet man in der allgemeinen Theorie nur solche, die isoliert und „hyperbolisch" im folgenden Sinne sind: In einem derartigen Punkt besitzt die Matrix der Terme ersten Grades in X_j keinen Eigenwert vom Absolutbetrag 1. Für einen derartigen Punkt x gibt es eine Umgebung V von x und in V zwei Untermannigfaltigkeiten V^+, V^-, deren Tangentialräume in x komplementär sind und welche die Eigenschaft haben, daß für jeden Punkt $y \in V^+$ (bzw. $y \in V^-$) die durch y gehende Integralkurve $z = z(t)$ für gegen $+\infty$ (bzw. gegen $-\infty$) strebendes t gegen x strebt.

Wie Poincaré zeigte, kann man auch untersuchen, was in der Umgebung einer geschlossenen Integralkurve γ geschieht, und zwar aufbauend auf der folgenden Idee. Man geht von einem Punkt $x \in \gamma$ aus und betrachtet eine kleine, zu γ normale



Hyperfläche Σ in M; ist ein Punkt $y \in \Sigma$ zu x benachbart, so schneidet die durch y gehende Integralkurve die Hyperfläche Σ zum ersten Mal wieder (wenn man den Parameter t wachsen läßt) in einem Punkt $T(y)$, und man definiert so eine differenzierbare Transformation T von Σ in sich, die x fest läßt. Der Verlauf der Integralkurven in der Umgebung von γ hängt von den Eigenwerten der zu T im Punkte x tangentialen linearen Abbildung (vgl. 9.5.) ab; der „generische" Fall ist wieder derjenige, daß γ „hyperbolisch" ist, d. h., daß keiner der Eigenwerte dem absoluten Betrage nach gleich 1 ist. In der Umgebung von γ gibt es dann zwei γ enthaltende Untermannigfaltigkeiten $S^+(\gamma)$, $S^-(\gamma)$ derart, daß zum einen in jedem Punkt $x' \in \gamma$ der Durchschnitt der Tangentialräume an diese beiden Untermannigfaltigkeiten die Tangente an γ ist und ihre Summe der Tangentialraum an ganz M in x'. Ferner ist für jeden Punkt $y \in S^+(\gamma)$ (bzw. $y \in S^-(\gamma)$) die durch y gehende Integralkurve $z = z(t)$ ganz in $S^+(\gamma)$ (bzw. $S^-(\gamma)$) enthalten, und der Abstand von $z(t)$ zu γ strebt für $t \to +\infty$ (bzw. $t \to -\infty$) gegen null [1].



Hier werden die Probleme der *Stabilität* der Lösungen von Differentialgleichungen berührt, die in allgemeiner Form von Liapounoff [20] in eben dieser Zeit aufgegriffen wurden. *Allgemein gesagt, heißt eine Lösung $x = x(t)$ einer vektoriellen* Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ *stabil* im Sinne von Liapounoff, wenn für jedes zu $x_0 = x_0(t)$ hinreichend benachbarte y_0 die Lösung $y = y(t)$ mit $y(t_0) = y_0$ so beschaffen ist, daß $y(t) - x(t)$ für $t \to +\infty$ gegen 0 strebt.

Es ist übrigens von Interesse, weniger strenge „Stabilitätsbegriffe" einzuführen. So wird z.B. für die Integralkurven eines Vektorfeldes auf einer Mannigfaltigkeit M eine Kurve γ *stabiler Orbit* genannt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ in M eine Umgebung U eines Punktes $x_0 \in \gamma$ *gibt mit der folgenden Eigenschaft:* Alle Integralkurven $y = y(t)$ mit $y(t_0) \in U$ verlaufen so, daß der Abstand von $y(t)$ zur Kurve γ für $t \geqq t_0$ höchstens gleich ε ist. Ist M kompakt und γ eine im oben definierten Sinne „hyperbolische" geschlossene Integralkurve, so ist die Bedingung dafür, daß γ ein stabiler Orbit ist, daß $S^+(\gamma)$ insgesamt eine Umgebung von γ ist (oder anders ausgedrückt, daß die Eigenwerte der zu T tangentialen linearen Abbildung dem absoluten Betrage nach sämtlich kleiner als 1 sind).

Für die allgemeine Untersuchung der Stabilität im Sinne von Liapounoff führte letzterer mehrere Stabilitätskriterien ein; das interessanteste davon beruht auf der Existenz einer „Liapounoff-Funktion", die monoton abnimmt, wenn man sich in einer zur betrachteten Integralkurve senkrechten Richtung von dieser entfernt [20].

8.4. Hamiltonsche Systeme

Die Fragen nach der Existenz von geschlossenen Integralkurven für Systeme von Differentialgleichungen waren bereits im achtzehnten Jahrhundert gestellt worden, und zwar im Zusammenhang mit dem Dreikörperproblem (vgl. 1.5.). Euler war der erste gewesen, der für dieses Problem eine Lösung gefunden hat, wenn die drei Körper in einer gleichförmigen Bewegung konzentrische Kreise beschreiben und dabei stets auf einer Geraden liegen, die durch das gemeinsame Zentrum geht. Lagrange klärte einen weiteren Fall, nämlich den, daß sich die drei Körper stets in den Eckpunkten eines gleichseitigen Dreiecks befinden ([1], [30]).

Poincaré widmete diesem Problem eine Vielzahl von Arbeiten. Die Gleichungen des Dreikörperproblems sind Spezialfälle der sogenannten *Hamiltonschen* Systeme: Hierbei handelt es sich um ein System der Gestalt

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \qquad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (1 \leqq j \leqq n), \tag{37}$$

wobei die Funktion $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ der $2n$ unbekannten Funktionen p_j, q_j $(1 \leqq j \leqq n)$ die Variable t nicht enthält; hieraus folgt sofort, daß die Funktion H längs jeder Integralkurve *konstant* ist. (In den mechanischen Problemen, die auf Systeme der Gestalt (37) führen, bezeichnet H die Energie.)

Ein derartiges System ist nicht „generisch" (vgl. 8.6.): Für eine geschlossene Integralkurve γ sind, wenn (in den Bezeichnungen aus 8.3.) λ ein Eigenwert der zu T tangentialen linearen Abbildung ist, die Zahlen $\bar{\lambda}$, λ^{-1} und $\bar{\lambda}^{-1}$ ebenfalls Eigenwerte mit derselben Vielfachheit wie λ, und 1 ist stets ein Eigenwert ungerader Vielfachheit.

Jedenfalls konnte Poincaré zeigen, daß dann, wenn der Eigenwert 1 die Vielfachheit 1 besitzt, in der Umgebung von γ eine Familie von geschlossenen Integralkurven existiert, welche stetig von einem Parameter abhängt. Ferner gilt: Wenn in der Umgebung eines kritischen Punktes x des Systems (37) zwei Eigenwerte $e^{\pm i\beta}$ von der Vielfachheit 1 vorliegen, so gibt es eine x enthaltende zweidimensionale Untermannigfaltigkeit, die aus geschlossenen Integralkurven besteht, welche x auf dieser Fläche umschließen und gegen x streben; das wurde von Liapounoff bewiesen und jüngst durch A. Kelley verschärft [1].

Poincarés Arbeiten kennzeichnen den Beginn einer neuen Ära in der Himmelsmechanik. Es sei daran erinnert, daß bis dahin das n-Körperproblem (mit einer im Vergleich zu den anderen beträchtlich größeren Masse, wie es dem Fall des Sonnensystems entspricht) in der Weise untersucht wurde, daß die Bewegungsparameter in Reihen nach Potenzen der Massen entwickelt wurden, mit Koeffizienten, welche von der Zeit abhängen (vgl. 1.5.). In relativ kurzen Zeitintervallen gelangte man auf diese Weise für das Sonnensystem zu Ergebnissen, die gut mit den Beobachtungen übereinstimmten, aber niemand hatte jemals die Frage untersucht, ob diese Entwicklungen für beliebige Zeitwerte konvergieren. Es gelang Poincaré zu beweisen, daß keine gleichmäßige Konvergenz auftreten kann, daß jedoch das Vertrauen der Astronomen trotzdem gerechtfertigt war, in dem Sinne, daß die von

ihnen gewonnenen Entwicklungen (wie in der Theorie der linearen Differentialgleichungen) asymptotische Abschätzungen für die Parameter lieferten ([25 bis], Bd. II, S. 100).

Damit war jedoch die Frage nach der Existenz von periodischen Lösungen für das Dreikörperproblem nicht beantwortet. Im Jahre 1878 hatte Hill gezeigt, daß man, wenn man dieses Problem durch ein in gewissem Sinne „benachbartes" Problem ersetzt, die Existenz periodischer Lösungen für dieses neue Problem nachweisen kann. Gegen 1883 gelang es Poincaré, indem er das Dreikörperproblem als eine „Störung" des einfacheren Hillschen Problems ansah, die Existenz periodischer Lösungen zu beweisen, welche den oben angegebenen Eulerschen Lösungen „benachbart" sind. Unter Verwendung analoger Methoden hat Arenstorf 1963 weitere periodische Lösungen erhalten, welche Lösungen des Zweikörperproblems mit beliebiger Exzentrizität benachbart sind, woraus sich interessante praktische Schlußfolgerungen für die Steuerung der Apollo-Raketen ergaben [1]. Gegen Ende seines Lebens nahm Poincaré diese Fragen wieder auf, wobei er sich Methoden aus der algebraischen Topologie bediente (vgl. Kapitel 10); diese Untersuchungen Poincarés wurden von G. D. Birkhoff erfolgreich fortgesetzt [6].

Im Jahre 1954 hat Kolmogoroff eine neue Methode zur Behandlung Hamiltonscher Systeme mittels „Störungen" geschaffen, in der nicht die Schwierigkeiten auftreten, wie sie bei den klassischen Reihenentwicklungen durch das Vorhandensein von „Resonanzen" zwischen den Perioden der sich in den „nicht gestörten" Systemen bewegenden Körper hervorgerufen werden; durch diese Resonanzen werden die Glieder dieser Reihen viel zu groß (Problem der „kleinen Divisoren").

Man nimmt an, daß in (37) der Ausdruck H bezüglich der q_j periodisch sei, so daß man H als in einem Produktraum $\boldsymbol{T}^n \times B$ definiert ansehen kann, wobei $\boldsymbol{T}^n$ der n-dimensionale Torus und B eine beschränkte offene Menge in $\boldsymbol{R}^n$ ist; die q_j können als n „Winkel modulo 2π" aufgefaßt werden, die einen Punkt auf $\boldsymbol{T}^n$ bestimmen. Der einfache „nicht gestörte" Fall liegt vor, wenn H eine Funktion $H_0(p)$ ist, die nicht von den q_j abhängt, so daß jede Lösung von (37) eine Kurve ist, die auf einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit von $\boldsymbol{T}^n \times B$ liegt, welche durch n Gleichungen $p_j = \text{const}$ $(1 \leqq j \leqq n)$ definiert ist; mit anderen Worten, es handelt sich dabei um n-dimensionale *Tori*. Darüber hinaus kann man zeigen, daß dann, wenn die Determinante $\det\left(\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_j\, \partial p_k}\right)$ (die sogenannte Hessesche Determinante von H_0) nicht verschwindet, jeder Orbit im entsprechenden Torus $T_0(\omega)$ dicht liegt $\left(\text{dabei bezeichnet } \omega \text{ den Vektor } \left(\dfrac{\partial H_0}{\partial p_j}\right)_{1\leqq j\leqq n} \text{ aus } \boldsymbol{R}^n\right)$ bis auf eine Menge von Werten des Vektors ω, die in $\boldsymbol{R}^n$ vom Maß null ist.

Allgemein betrachtet man Ausdrücke der Gestalt $H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q)$, worin die „Störung" H_1 „klein" ist im Vergleich zu H_0. Die Arbeiten von Kolmogoroff, die insbesondere von J. Moser und V. Arnol'd fortgeführt wurden, haben gezeigt, daß zu fast allen Vektoren ω ein Torus $T(\omega)$ existiert, welcher Vereinigung von Integralkurven des gestörten Systems ist, wobei jeder Torus $T(\omega)$ „Nachbar" des entsprechenden Torus $T_0(\omega)$ des nicht gestörten Systems ist. Darüber hinaus

besitzt die Vereinigung der $T(\omega)$ in $\boldsymbol{T}^n \times B$ ein Komplement, dessen Maß mit der Norm der Störung H_1 gegen null strebt. Hierbei weiß man allerdings so gut wie nichts über das Verhalten der in diesem Komplement enthaltenen Integralkurven ([1], [3]).

8.5. Lineare partielle Differentialgleichungen und Spektraltheorie

Eine der großen mathematischen Schöpfungen des neunzehnten und zwanzigsten Jahrhunderts ist das Gebiet, das man *globale lineare Analysis* nennen könnte. Es handelt sich dabei um ein Bündel von Fragen, bezogen auf lineare Differentialgleichungen, die ihren Ursprung in der gegen 1800 beginnenden Untersuchung der drei grundlegenden Gleichungstypen der mathematischen Physik haben:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{(Laplacesche Gleichung)}, \tag{38}$$

$$\Box u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{(Wellengleichung)}, \tag{39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{(Wärmeleitungsgleichung)}, \tag{40}$$

die hier für drei „räumliche Variable" x, y, z angegeben worden sind, die jedoch auch für eine beliebige Anzahl von Variablen betrachtet werden können.

Diese Untersuchungen führten nacheinander zur Herausbildung der Theorie der Fourierreihen und der Fourierintegrale (der späteren kommutativen harmonischen Analysis), der Theorie des Newtonschen Potentials und der Theorie der harmonischen Funktionen, der Sturm-Louivilleschen Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen, der Theorie der linearen Integralgleichungen. Danach — um die Jahrhundertwende, nach den entscheidenden Arbeiten von Fredholm — kamen der Hilbertraum und die Spektraltheorie für Operatoren auf einem derartigen Raum hinzu. Nach 1950 schließlich erbrachte die Theorie der Distributionen eine beträchtliche Verallgemeinerung und Vereinfachung für alles, was mit linearen Differentialgleichungen zu tun hat; diese Entwicklung kulminiert in unserer Zeit in der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren und ihrer Ausweitung auf die Analysis auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ([D], Kapitel 23).

Die Konfusion, die im achtzehnten Jahrhundert hinsichtlich der Funktionen reeller Variabler und der Funktionen komplexer Variabler herrschte, hatte es nicht gestattet, klar zwischen den drei Typen (38), (39), (40) linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu unterscheiden. Als Laplace kanonische Formen für diese Gleichungen (in zwei Variablen) angab, glaubte er noch, man könne den elliptischen Typ (38) durch die Variablentransformation $x = u + iv$, $y = u - iv$ auf den hyperbolischen Typ (39) zurückführen. Erst als Poisson, Fourier und

Cauchy neue Probleme der mathematischen Physik aufgriffen, in denen Gleichungen mit partiellen Ableitungen zweiter Ordnung vorkommen, begann man, sich klar darüber zu werden, daß man die drei Grundtypen und die zu ihnen gehörenden sehr unterschiedlichen „Randwertprobleme" sorgfältig auseinanderhalten muß.

Im weiteren behandeln wir nacheinander die folgenden Fragen:

1. Fourierreihen und Sturm-Liouvillesches Problem,
2. Potentialtheorie, Laplacesche Gleichung und Dirichletsches Problem,
3. Gleichung der schwingenden Membran,
4. „Algebra des Unendlichen" und Geburt der Theorie der Integralgleichungen,
5. Hilbertraum.

8.5.1. *Fourierreihen und Sturm-Liouvillesches Problem*

Es sei daran erinnert (vgl. 1.7.), daß das erste Beispiel für ein Problem, das auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Randbedingungen führte, die homogene schwingende Saite gewesen war: Es handelte sich darum, die Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c \text{ konstant}) \tag{41}$$

zu finden, die für $t \in \boldsymbol{R}$, $x \in [0, a]$, definiert sind und für die gilt:

1. $u(0, t) = u(a, t) = 0$ für jedes t;
2. die Funktionen $u(x, 0) = \varphi(x)$ und $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$, die den Zustand der Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreiben, sind vorgegeben.

Mathematische Überlegungen und experimentelle Beobachtungen hatten dazu geführt, nach speziellen Lösungen der „stationären" Gestalt $u(x, t) = f(x)\, g(t)$ zu suchen. Eine Lösung dieses Typs muß so beschaffen sein, daß f und g die beiden Differentialgleichungen

$$g'' - \lambda g = 0\,, \qquad c^2 f'' - \lambda f = 0 \tag{42}$$

für eine Konstante λ erfüllen; sollen darüber hinaus die Bedingungen 1 erfüllt sein, so muß $f(0) = f(a) = 0$ gelten, was nur möglich ist, wenn $\lambda = n^2(c^2\pi^2/a^2)$ mit *ganzzahligem* n und bis auf einen konstanten Faktor $f(x) = \sin \sqrt{\lambda}\, x$ gilt. Bekanntlich hatte D. Bernoulli, um auch die Bedingungen 2 zu erfüllen, die Idee, $u(x, t)$ durch geeignete „Superposition" dieser „stationären" Lösungen zu gewinnen; das machte es erforderlich, die „willkürlichen" Funktionen φ und ψ als Summe trigonometrischer Reihen darzustellen, was von den meisten Zeitgenossen D. Bernoullis abgelehnt wurde.

Seit dem Beginn seiner Untersuchungen zur Theorie der Wärme (1807) behandelte Fourier die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{43}$$

worin a eine Konstante ist, ebenso; er stieß somit auf dasselbe Problem. Zahlreiche Beispiele ermöglichten es ihm nach einigen Jahren jedoch, den Zeitgenossen seine Überzeugung zu vermitteln, daß der Standpunkt D. Bernoullis wohlbegründet ist.

Dennoch waren seine Bemühungen, ebenso wie die Cauchys kurz danach, die Konvergenz der Fourierreihe einer stetigen Funktion zu beweisen, unzureichend; erst 1829 gelang es Dirichlet in einer berühmten Arbeit, die eines der ersten Beispiele für einen auf dem geschickten Gebrauch von *Ungleichungen* beruhenden Beweis ist, diese Konvergenz für eine stückweise stetige und monotone Funktion nachzuweisen (für weitere Details vgl. 6.2.1.).

Von diesem Augenblick an wurde die Idee, jeder Funktion, die eine periodische Erscheinung beschreibt, ihre Fourierreihe zuzuordnen, bis zum Überdruß benutzt, und zwar sowohl in den Anwendungen auf die experimentellen Wissenschaften als auch in den Untersuchungen der reinen Mathematik (vgl. Kapitel 6 und 7). Andererseits fand die während des ganzen neunzehnten Jahrhunderts herrschende Tendenz zu einer immer weiter getriebenen und immer feineren Untersuchung der lokalen Eigenschaften von Funktionen reeller Variablen ihren Prüfstein in den ständigen Bemühungen um Verbesserung und Vertiefung des Dirichletschen Konvergenzkriteriums, besonders seit du Bois-Reymond im Jahre 1873 das erste Beispiel einer stetigen Funktion konstruiert hatte, deren Fourierreihe in wenigstens einem Punkt divergiert (vgl. 6.6.).

Wir verweisen auf Kapitel 6, in dem detailliert auf die bedeutenden Auswirkungen dieser Entwicklung für die Mengenlehre, die Topologie im Raum $\boldsymbol{R}^n$ und die Integrationstheorie eingegangen wird. Hier sei nur darauf hingewiesen, daß das Problem, ob die Fourierreihe einer stetigen Funktion wenigstens in gewissen Punkten gegen den Funktionswert konvergiert, definitiv erst von L. Carleson im Jahre 1966 gelöst worden ist. Dank einer neuen, höchst scharfsinnigen und raffinierten Methode konnte er beweisen, daß die Menge der Divergenzpunkte stets vom Maß null ist [7]; nahezu unmittelbar danach haben Kahane und Katznelson gezeigt, daß dieses Resultat das bestmögliche ist, da jede Menge vom Maß null Menge der Divergenzpunkte der Fourierreihe einer geeignet gewählten stetigen Funktion sein kann [16].

Die weitere Untersuchung von Gleichungen der mathematischen Physik eröffnete der Analysis ganz verschiedene Wege. Bereits im achtzehnten Jahrhundert hatte das Studium der Schwingungen einer nichthomogenen Saite über eben die Methode der „Trennung der Variablen" auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung geführt, deren dem behandelten Problem angepaßte Lösungen die Gestalt $\sin \lambda_n x$ hatten, und zwar für eine unendliche Folge von Werten λ_n, die diesmal nicht mehr die ganzzahligen Vielfachen einer bestimmten „Frequenz" waren.

In seiner Theorie der Wärme stieß Fourier auf analoge Fragestellungen; so wird beispielsweise das Problem der Abkühlung einer Kugel vom Radius r beherrscht durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{44}$$

mit der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + hu = 0 \quad \text{für} \quad x = r\,, \tag{45}$$

wobei h und k Konstanten sind. Fourier erhielt hieraus die „stationären" Lösungen

$$u(x, t) = \frac{1}{x} \exp\left(-k\lambda^2 t\right) \left(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x\right)\,, \tag{46}$$

wobei der Parameter λ der transzendenten Gleichung

$$\frac{\lambda r}{\tan \lambda r} = 1 - hr \tag{47}$$

genügen muß. Fourier zeigte ohne Mühe, daß diese Gleichung unendlich viele reelle und gegen $+\infty$ strebende Wurzeln λ_n besitzt, aber er ging viel weiter als seine Vorgänger, indem er die „Orthogonalitätsrelationen"

$$\int_0^r \sin \lambda_n x \sin \lambda_m x \, dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n \tag{48}$$

bewies, die den klassischen Relationen für die Funktionen $\sin nx$ analog sind; abgesehen von diesem Fall kannte man bis dahin nur ein weiteres Beispiel, nämlich das der sphärischen Harmonischen (vgl. 1.4.6.). Er setzte dann (formal) „Entwicklungen" der Gestalt $\sum_n c_n \sin \lambda_n x$ für eine stetige Funktion $\varphi(x)$ an, deren Koeffizienten c_n er über die Untersuchung der Integrale $\int_0^r \varphi(x) \sin \lambda_n x \, dx$ und unter Verwendung der Relationen (48) erhielt, ganz wie im Fall der trigonometrischen Reihen ([10], Bd. I, S. 304).

Es steht außer Zweifel, daß es sich hierbei um diejenigen Resultate handelt, die — ebenso wie ähnliche Arbeiten Poissons — im Jahre 1836 C. Sturm (dem sich Liouville ein Jahr später anschloß) dazu brachten, das folgende allgemeine Problem anzugreifen: Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - q(x)\, y + \lambda y = 0\,, \tag{49}$$

worin q eine stetige reellwertige Funktion ist; für welche Werte des Parameters λ existieren Lösungen von (49), die außerdem in zwei Punkten a, b von $\boldsymbol{R}$ Bedingungen der Gestalt

$$y(a) + h_1 y'(a) = 0\,, \qquad y(b) + h_2 y'(b) = 0 \tag{50}$$

genügen, wobei h_1, h_2 gegebene reelle Konstanten sind?

Poisson hatte bereits einige Jahre zuvor bemerkt, daß λ notwendigerweise eine reelle Zahl ist. Um zu zeigen, daß tatsächlich eine unendliche Folge (λ_n) reeller Zahlen existiert, die gegen $+\infty$ strebt und das Gewünschte leistet, hatte Sturm die geniale Idee, die Nullstellen der Lösungen zweier Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$y'' - q_1(x)\, y = 0\,, \qquad y'' - q_2(x)\, y = 0 \tag{51}$$

zu *vergleichen*. Sind u bzw. v Lösungen dieser Gleichungen, so gilt in jedem Intervall $x_1 < x < x_2$ die Beziehung

$$(u'v - uv')\Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (q_1 - q_2)\, uv\, dx\,. \tag{52}$$

Hieraus leitete Sturm folgendes her: Gilt $q_1(x) > q_2(x)$ für jedes x und ist $u(x_1) = u(x_2) = 0$ sowie $u(x) > 0$ für $x_1 < x < x_2$, so muß v mindestens einmal auf diesem Intervall verschwinden [S]. Unter Verwendung dieses und analoger Ergebnisse betrachtete Sturm die Lösung u_λ von (49), die den Bedingungen $u_\lambda(a) = -h_1$, $u_\lambda'(a) = 1$ genügt; durch Untersuchung der Änderung von $u_\lambda'(b)/u_\lambda(b)$ als Funktion von λ konnte er die Existenz der unendlichen Folge (λ_n) beweisen. Schreibt man u_n für u_{λ_n} und ersetzt q_1 und q_2 in (52) durch $q - \lambda_m$ bzw. $q - \lambda_n$ sowie x_1, x_2 durch a, b, so erhält man überdies die „Orthogonalitätsrelation"

$$\int_a^b u_m u_n\, dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n\,. \tag{53}$$

In Weiterverfolgung der Analogie zu den Fourierreihen ordneten Sturm und Liouville jeder auf dem Intervall $[a, b]$ reellwertigen stetigen Funktion f ihre „Koeffizienten"

$$c_n = \Big(\int_a^b f u_n\, dx\Big)\Big/\Big(\int_a^b u_n^2\, dx\Big) \tag{54}$$

und die entsprechende „Entwicklung" $\sum_n c_n u_n$ zu. Um deren Konvergenz zu untersuchen, hatte Liouville nach Rückführung auf den Fall $[a, b] = [0, \pi]$ die Idee, die Gleichung (49) für großes λ als eine „Störung" der Gleichung $y'' + \lambda y = 0$ anzusehen, so daß er, als er $\lambda = \varrho^2$ setzte, unter Benutzung der Lagrangeschen Methode der „Variation der Konstanten" (vgl. 1.5.) eine Idendität erhielt, der jede Lösung u von (49) genügt:

$$u(x) = A \cos \varrho x + B \sin \varrho x + \frac{1}{\varrho} \int_0^x q(t)\, u(t) \sin \varrho(x - t)\, dt\,. \tag{55}$$

Dies ist das erste Beispiel einer Gleichung, die später eine „Volterrasche Integralgleichung zweiter Art" genannt wird (vgl. 8.5.4.). Unter Verwendung dieses Ausdrucks und des Ausdrucks für $u'(x)$, den man daraus durch Ableitung erhält, ergeben sich die asymptotischen Abschätzungen

$$\varrho_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{56}$$

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(nx\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) + \sin\left(nx\left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right). \tag{57}$$

Damit war es ihm möglich, die Konvergenz der Reihe $\sum_n c_n u_n(x)$ zu beweisen, wenn die Fourierreihe der Funktion f selbst konvergent ist. Es blieb aber noch zu zeigen, daß die Summe dieser Reihe mit $f(x)$ übereinstimmt, und Liouville bewies,

daß diese Aussage damit äquivalent ist, daß das System (u_n) „vollständig" ist in dem Sinne, daß keine nicht identisch verschwindende stetige Funktion g die „Orthogonalitätsrelationen" $\int_0^\pi g u_n \, dx = 0$ für alle Werte von n erfüllen kann. Er bewies diesen letzten Punkt jedoch nur unter der Voraussetzung, daß g nur endlich oft im Intervall $[0, \pi]$ verschwindet; der allgemeine Beweis wurde erst gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts erbracht.

Schließlich bemerkte Liouville, daß für jede ganze Zahl N die Ungleichung

$$c_1^2 + \cdots + c_N^2 \leqq \int_a^b f^2 \, dx \tag{58}$$

gilt, welche die von Bessel im Jahre 1828 für die Fourierreihen bewiesene Ungleichung verallgemeinert und zugleich den Bereich der wesentlichen Themen abschließt, aus denen an der Wende zum zwanzigsten Jahrhundert die *Spektraltheorie* erwachsen sollte ([21], [S]).

8.5.2. *Potentialtheorie, Laplacesche Gleichung und Dirichletsches Problem*

Ehe die Spektraltheorie geboren werden konnte, mußten jedoch ihre Probleme in einem allgemeineren Rahmen als in der Sturm-Liouvilleschen Theorie formuliert werden; diesen bilden die Potentialtheorie und die mit ihr verknüpften partiellen Differentialgleichungen.

Es sei daran erinnert (vgl. 1.4.6.), daß das Newtonsche Potential eines Körpers V von der Dichte ϱ in einem außerhalb V liegenden Punkt mit den Koordinaten x, y, z durch das dreifache Integral

$$U(x, y, z) = \iiint_V \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta}{r(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)} \tag{59}$$

mit

$$r(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2}$$

definiert ist; dabei sind die Komponenten der durch V auf den Punkt (x, y, z) ausgeübten Anziehung die drei partiellen Ableitungen von U in diesem Punkt. Laplace bemerkte, daß die Funktion U außerhalb V Lösung der Gleichung (38) ist. Poisson vervollständigte dieses Ergebnis durch die Feststellung, daß bei stetigem ϱ das Integral (59) selbst dann einen Sinn besitzt, wenn der Punkt (x, y, z) im Inneren von V liegt; die Laplacesche Gleichung wird dann durch die allgemeinere Gleichung (die sogenannte Poissonsche Gleichung)

$$\Delta U = 4\pi\varrho \tag{60}$$

ersetzt.

Obwohl man während des achtzehnten Jahrhunderts auch in der Hydrodynamik auf die Laplacesche Gleichung gestoßen war, begann sich ihre Theorie erst nach 1820 zu entwickeln, einmal im Zusammenhang mit der Theorie der Wärme (wo

sie die „stationären" Zustände beherrscht), zum anderen im Zusammenhang mit der Elektrostatik, wo der Begriff des Potentials nach der Coulombschen Entdeckung der Gesetzmäßigkeiten für die Anziehung elektrischer Ladungen (1785) grundlegend wurde.

In der Tat war es die Elektrostatik, der die erste mathematische Arbeit gewidmet war, welche die Entwicklung der Potentialtheorie einleitete, nämlich die Abhandlung von G. Green ([13], [S]) aus dem Jahre 1828 (in der das Wort „Potentialfunktion" zum ersten Male verwendet wird). Sie beginnt mit der Aufstellung der Formel, welche an die Stelle der partiellen Integration von (52) für das dreifache Integral tritt:

$$\iiint_V (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\omega = \iint_\Sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma\,. \tag{61}$$

Dabei ist Σ die Fläche, welche die offene Menge V begrenzt, u und v gehören auf einer Umgebung der Abschließung $\overline{V}$ der Klasse C^2 an, $\frac{\partial u}{\partial n}$ ist die Ableitung von u längs der äußeren Normale an Σ; ferner sind $d\omega$ und $d\sigma$ das Volumenelement von V bzw. das Flächenelement auf Σ (Lagrange hatte bereits analoge Formeln erhalten; [18], Bd. I, S. 263).

Green leitete aus (61) her, daß man, wenn die Funktion $u(P)$ mit Ausnahme eines Punktes M im Inneren von V der Klasse C^2 angehört und in diesem Punkt in einer solchen Weise unendlich wird, daß die Differenz $u(P) - (1/MP)$ beschränkt bleibt, die folgende Beziehung erhält:

$$4\pi v(M) + \iiint_V (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\omega = \iint_\Sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma\,. \tag{62}$$

Ist $r(P)$ der Abstand MP und wählt man $u = 1/r$, so erhält man den Ausdruck für eine Lösung v der Laplaceschen Gleichung:

$$4\pi v(M) = \iint_\Sigma \left(v\frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma\,. \tag{63}$$

Dies liefert also eine explizite Formel für die Lösung von $\Delta v = 0$ in V, wenn man die Werte von *v und der Normalenableitung* $\partial v/\partial n$ auf der Fläche Σ kennt, in Übereinstimmung mit den allgemeinen Vorstellungen über Randbedingungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (vgl. 8.1.1.). Die experimentellen Ergebnisse in der Elektrostatik zeigten aber, daß in Wirklichkeit *allein* die Angabe von v auf Σ ausreichen mußte, um diese Lösung in V vollständig zu bestimmen.

Green bemerkte dann, daß dies in der Tat aus seiner allgemeinen Formel (62) folgen würde, vorausgesetzt, man kennt eine Funktion $u(M, P)$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. u ist stetig und für $M \neq P$ in M und P zweimal differenzierbar; 2. $u(M, P) - (1/MP)$ bleibt in der Umgebung der „Diagonale" von $V \times V$ beschränkt; 3. $u(M, P) = 0$, wenn M im Inneren von V und P auf Σ liegt; 4. wird

M im Inneren von V fest gewählt und u nur als Funktion von P angesehen, dann ist $\Delta u = 0$ für $P \neq M$. Green beschränkte sich jedoch darauf, die Existenz einer solchen „Greenschen Funktion" plausibel zu machen, indem er sich auf die experimentelle Tatsache berief, daß eine elektrische Punktladung auf einem geerdeten Leiter eine Oberflächenladung „induziert". Er erkannte jedoch, daß diese Funktion die Symmetrieeigenschaft $u(P, M) = u(M, P)$ besitzen muß.

Es gab übrigens einen Fall, in dem die „Greensche Funktion" explizit bekannt war, nämlich der, daß V eine Kugel vom Radius a ist; im Jahre 1820 hatte nämlich Poisson die Formel

$$V(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{a^2 - \varrho^2}{a r^3} v(P)\, d\sigma \tag{64}$$

bewiesen, worin ϱ den Abstand zwischen M und dem Mittelpunkt O von V bezeichnet. Insbesondere erhält man für $\varrho = 0$ die Formel für den sphärischen Mittelwert, die von Gauß schon 1813 veröffentlicht worden war:

$$V(O) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma} v(P)\, d\sigma \,. \tag{65}$$

Nach 1830 fand Gauß im Zusammenhang mit der Theorie des Magnetismus (offenbar ohne die Arbeit von Green zu kennen) diese Ergebnisse wieder ([M], [S]). Es waren Gauß und etwas später W. Thompson (der spätere Lord Kelvin) und Dirichlet, welche die drei (sämtlich von der Mathematischen Physik aufgeworfenen) Probleme präzisierten, die sich seit jener Zeit zu den grundlegenden Problemen der Potentialtheorie entwickelten. Das erste, das später unter dem Namen „Dirichletsches Problem" bekannt wurde, besteht in der Bestimmung einer auf V harmonischen Funktion v, die sich stetig auf $\overline{V}$ fortsetzen läßt und deren Werte auf Σ vorgegeben sind. Das zweite (das „Neumannsches Problem" genannt werden wird) fordert, daß sich v stetig auf $\overline{V}$ fortsetzen läßt, daß $\partial v/\partial n$ auf Σ definiert ist und mit einer gegebenen Funktion übereinstimmt. Das dritte Problem schließlich (das sogenannte Problem der Richtungsableitung), auf das Fourier in der Theorie der Wärme gestoßen war, besteht darin, v zu bestimmen, wenn man auf Σ die Funktion $\frac{\partial v}{\partial n} + hv$ mit auf Σ stetigem h als bekannt voraussetzt.

Darüber hinaus kamen die drei genannten Mathematiker offenbar unabhängig voneinander auf den Gedanken, Lösungen dieser Probleme mit den Methoden der Variationsrechnung zu finden (vgl. 1.8.), im Zusammenhang mit dem in der Mechanik seit dem achtzehnten Jahrhundert eingeführten „Minimumprinzip". Beispielsweise muß die Lösung des Dirichletschen Problems die Funktion v sein, welche die auf Σ vorgegebenen Werte annimmt und für welche das Integral

$$\iiint_{V} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right) d\omega \tag{66}$$

den kleinstmöglichen Wert besitzt. Zu jener Zeit zweifelte niemand daran, daß eine solche Funktion existiert.

Seit 1816 war für Gauß der Zusammenhang zwischen den harmonischen Funktionen zweier Variablen, den holomorphen Funktionen einer Variablen und der konformen Abbildung klar; das Newtonsche Potential $1/r$ eines Massenpunktes wird dann durch die Funktion $\log 1/r$ ersetzt. Im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts griff man vielfach auf die reiche Struktur der holomorphen Funktionen zurück, um Eigenschaften der harmonischen Funktionen zweier Variablen aufzuhellen; dies wurde dann zur Verallgemeinerung auf drei (und später auf $n \geqq 4$) Variable mit Hilfe anderer Verfahren benutzt. Bemerkt sei als Beispiel, daß die zu (64) analoge *Poissonsche Formel* in der Ebene

$$v(M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{a^2 - \varrho^2}{ar^2} v(P)\, ds \tag{67}$$

aus der Taylorentwicklung einer auf der Umgebung der abgeschlossenen Kugel $\overline{V}$ holomorphen Funktion gewonnen werden kann. Ein anderes Beispiel ist das „Maximumprinzip": Ebensowenig wie die absoluten Werte holomorpher Funktionen kann eine nichtkonstante harmonische Funktion in einem Punkt der offenen Menge, auf der sie definiert ist, ein relatives Maximum annehmen; dies ergibt sich für $n \geqq 3$ aus der Formel (65) für den Mittelwert.

Es sei daran erinnert, daß Riemann als erster die Idee gehabt zu haben scheint, umgekehrt die Theorie der harmonischen Funktionen in den Dienst der Theorie der analytischen Funktionen zu stellen. Indem er (für zwei reelle Variablen) ein zu (66) analoges Doppelintegral einführte und die Existenz einer der Klasse C^2 angehörenden Funktion voraussetzte, für welche dieses Integral minimal ist (wobei gewisse Randbedingungen als erfüllt angenommen werden), konnte er den *Fundamentalsatz über die konforme Abbildung* eines einfach zusammenhängenden beschränkten Gebietes der Ebene auf einen Kreis herleiten, ebenso den Existenzsatz für Abelsche Funktionen auf einer Riemannschen Fläche (vgl. Kapitel 4 und 7).

Der Widerhall dieser Entdeckungen veranlaßte jedoch die Mathematiker, ihre Beweise und insbesondere das „Dirichletsche Prinzip", das Riemann zum Nachweis der Existenz von Funktionen herangezogen hatte, für welche (66) und analoge Integrale ihr Minimum annehmen, einer sorgfältigen Prüfung zu unterziehen. Weierstraß betonte in seiner Kritik der Arbeiten Riemanns (vgl. Kapitel 4), daß diese Existenz bewiesen werden müsse, und etwas später gab Hadamard Beispiele für auf V harmonische Funktionen an, die sich stetig auf $\overline{V}$ fortsetzen lassen, für die jedoch das Dirichletsche Integral (66) unendlich ist.

Das Problem der Existenz von Lösungen für die drei fundamentalen Probleme der Theorie der harmonischen Funktionen blieb also bis 1870 offen. In diesem Jahr gelang H. A. Schwarz der Beweis des Riemannschen Satzes über die konforme Abbildung eines von einer konvexen Randkurve begrenzten ebenen Gebietes, indem er einen Grenzübergang durchführte, bei dem er von polygonalen Bereichen ausgeht, für welche er die die gesuchte Abbildung vermittelnde Funktion direkt angeben konnte (vgl. 7.1.15.). Etwas später bewies er vermittels eines scharfsinnigen Grenzübergangs, des sogenannten „alternierenden Verfahrens", daß man das Dirichletsche Problem für die Vereinigung zweier konvexer Gebiete lösen kann, wenn dieses

Problem für jedes einzelne lösbar ist. Im Falle der Ebene ermöglichten es ihm diese Methoden dann, das Dirchletsche Problem für jeden durch eine stückweise analytische Kurve begrenzten beschränkten Bereich zu lösen ([S]; [29], Bd. II, S. 133).

Eine weitere Methode geht auf andere Entwicklungen in der Potentialtheorie zurück; sie sollte entscheidende Bedeutung erlangen. Seit dem ersten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts hatte man das Newtonsche Potential einer auf einer Fläche verteilten Masse (sogenanntes „Potential einer einfachen Schicht")

$$U(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\varrho(P)\, d\sigma}{MP} \tag{68}$$

betrachtet, auf das die Elektrostatik in natürlicher Weise führte, wo die von Leitern getragenen Ladungen auf deren Oberfläche konzentriert sind. Die Theorie des Magnetismus hatte in ähnlicher Weise zu dem Begriff „Potential einer Doppelschicht" geführt: Man kann es als Grenzwert einer Differenz von zwei Potentialen einfacher Schichten auffassen, falls die Flächen, welche diese Schichten tragen, gegeneinander streben und falls deren Dichten dem Abstand der beiden Flächen umgekehrt proportional sind; mathematisch ergibt das die Definition

$$U(M) = \iint_{\Sigma} \varrho(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(P)}\right) d\sigma \quad \text{mit} \quad r(P) = MP\,. \tag{69}$$

Man kann also sagen, daß die Greensche Formel (63) die harmonische Funktion v als Summe eines Potentials einer einfachen Schicht und eines Potentials einer Doppelschicht ausdrückt. Die Stetigkeitseigenschaften dieser Funktionen hatte man bis ins Einzelne gehend untersucht und dabei insbesondere festgestellt, daß ein Doppelschichtpotential beim Durchgang durch die Fläche Σ eine Unstetigkeit erfährt (wohingegen das Potential einer einfachen Schicht stetig bleibt, während seine ersten Ableitungen eine Unstetigkeit aufweisen). Um 1860 hatte C. Beer die Idee, zu versuchen, die Lösung des Dirichletschen Problems durch ein Doppelschichtpotential auszudrücken; dies führte darauf (obwohl er das nicht in dieser Weise aussprach), die Dichte ϱ in der Formel (69) durch eine Integralgleichung zu bestimmen:

$$2\pi\varrho(M) + \iint_{\Sigma} \varrho(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{MP}\right) d\sigma = v(M) \quad \text{für} \quad M \in \Sigma\,. \tag{70}$$

Seine Methode lief darauf hinaus, diese Gleichung mit Hilfe sukzessiver Approximation zu lösen; die Konvergenz dieses Verfahrens versuchte er dabei allerdings nicht zu beweisen. Erst 1877 wurde diese von Carl Neumann bewiesen (mit einer Lücke im Beweis übrigens, die man jedoch ohne Schwierigkeiten beseitigen kann); er beschränkte sich zu diesem Zweck auf konvexe Gebiete eines speziellen Typs [23].

Im Jahre 1887 trat Poincaré mit seiner berühmten „Fegemethode" zur Lösung des Dirichletschen Problems hervor ([S]; [25], Bd. IX, S. 28—113). Durch Approximation geht man auf den Fall zurück, daß die auf Σ gegebene Funktion auf einer Umgebung W von $\overline{V}$ zu einer der Klasse C^2 angehörenden Funktion ϕ

fortgesetzt werden kann, für welche $\Delta\phi \geqq 0$ gilt; auf Grund der Poissonschen Gleichung (60) ist ϕ also Summe einer harmonischen Funktion und eines Potentials ϕ_0 positiver Massen. Die grundlegende Idee besteht nun in folgendem: Ist B eine in W enthaltene Kugel und ersetzt man ϕ_0 durch das über die Oberfläche von B erstreckte Poissonsche Integral (64), so ändert sich ϕ_0 außerhalb B nicht und nimmt im Inneren ab. Man hat also ϕ_0 durch das Potential von Massen ersetzt, die das Innere von B nicht aufladen, oder, bildlich gesprochen, man hat die im Inneren von B befindlichen Massen auf die Oberfläche von B „gefegt".

Man wählt sodann eine unendliche Folge von Kugeln B_n, deren Vereinigung V ergibt, und „fegt" nacheinander die Massen in die Kugeln, und zwar in der Reihenfolge B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, B_1, B_2, B_3, B_4, ... (man muß unendlich oft zu jeder Kugel zurückkehren, da das „Ausfegen" der nachfolgenden Kugeln wieder Massen in ihr Inneres bringt). Für den Grenzfall zeigte Poincaré, daß die so erhaltene Funktion die gesuchte Lösung ist, vorausgesetzt, der Rand von V ist hinreichend regulär. Eine hinreichende Bedingung dafür (die schwächer als die von Poincaré angegebene ist) lautet: Zu jedem Punkt $M \in \Sigma$ gibt es einen kleinen Rotationskegel mit M als Spitze, der nicht auf seine Achse reduziert ist und der keinen inneren Punkt von V enthält (Zaremba).

Man hätte glauben können, daß die dem Rand von V auferlegten Einschränkungen in den unterschiedlichen Methoden aus deren Unvollkommenheit herrühren. Im Jahre 1912 konstruierte jedoch Lebesgue im Raum $\boldsymbol{R}^3$ ein Gebiet (den „Lebesgueschen Dorn"), das die Zarembabedingung nicht erfüllte und das die Eigenschaft besaß, daß für eine auf dem Rand geeignet gewählte stetige Funktion das Dirichletsche Problem keine auf $\overline{V}$ stetige Lösung besaß. Dies war der Ausgangspunkt für eine Vielzahl von Publikationen, die in der Folgezeit durch die neuen Methoden der modernen Funktionalanalysis bereichert wurden und die ein doppeltes Ziel verfolgten: Einerseits sollte das klassische Dirichletsche Problem durch ein verallgemeinertes Problem ersetzt werden, das stets (sogenannte „schwache") Lösungen besitzt; zum anderen sollte das Verhalten dieser „schwachen" Lösungen auf dem Rande des Gebietes untersucht werden ([B], [M]).

8.5.3. *Gleichung der schwingenden Membran*

Seit dem achtzehnten Jahrhundert kannte man die Gleichung der schwingenden Membran

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 p(x, y)\, u = 0\,, \qquad p(x, y) \geqq 0\,. \tag{71}$$

In seiner Theorie der Wärme war Fourier ebenfalls auf sie gestoßen, und man konnte sich für diese Differentialgleichung dieselben Probleme stellen wie für die Laplacesche Gleichung. Wie die Erfahrung zeigte, konnte die Membran, wenn die Randbedingung $u = 0$ lautet (die Membran in ihrer Randlinie eingespannt ist), wie im Falle einer Saite nur für eine diskrete Folge (λ_n) von Werten für λ (die „Frequenzen") schwingen; mit anderen Worten, nur für diese Werte können nicht-

triviale Lösungen von (71) existieren, die auf der Randlinie gleich null sind. Vor 1880 hatte man jedoch, abgesehen von einigen speziellen Randlinien, nicht versucht, diese Tatsache mathematisch zu beweisen.

Es war H. A. Schwarz, der sich im Jahre 1885 die Aufgabe stellte, die Gleichung (71) auf einer beschränkten offenen Menge $V \subset \boldsymbol{R}^2$ zu untersuchen, über die vorausgesetzt wird, daß man auf ihr das Dirichletsche Problem für die Gleichung $\Delta u = 0$ lösen kann. Er stieß übrigens auf die Gleichung (71) nicht im Zusammenhang mit einem Problem der mathematischen Physik, sondern im Laufe der Untersuchung von Minimalflächen (vgl. 9.2.4.) mit $p(x, y) = 8/(1 + x^2 + y^2)^2$. Seine Arbeit ist von einer höchst bemerkenswerten Originalität; denn die von ihm eingeführten Methoden (die sich als „natürlich" erweisen, nachdem erst einmal die Theorie des Hilbertraumes (vgl. 8.4.5.) entwickelt vorliegt) scheinen keine Berührungspunkte mit damals Bekanntem aufzuweisen, und er selbst sagte nicht, woher sie stammen.

Schwarz suchte eine Lösung w der Gleichung

$$\Delta w + \xi p w = 0\,, \tag{72}$$

die auf dem Rand von V gleich 1 sein soll; er setzte w als Potenzreihe nach dem reellen Parameter ξ an:

$$w = w_0 + \xi w_1 + \cdots + \xi^n w_n + \cdots\,, \tag{73}$$

wobei w_0 die Konstante 1 ist und die w_n für $n \geqq 1$ Funktionen sind, die auf dem Rand von V verschwinden. Er setzte in (72) ein und wurde dadurch auf die sukzessiven Approximationen

$$\Delta w_n + p w_{n-1} = 0 \tag{74}$$

geführt.

Da ihm nach Voraussetzung die Greensche Funktion $G(M, P)$ auf $V \times V$ zur Verfügung stand, stellte er fest, daß die auf dem Rand identisch verschwindende Lösung der Gleichung

$$\Delta w + f = 0 \tag{75}$$

durch die Formel

$$w(M) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_V f(P)\, G(M, P)\, d\omega \tag{76}$$

geliefert wird (wobei $d\omega = dx\, dy$ das Flächenelement ist); hieraus ergibt sich für die w_n

$$w_n(M) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_V p(P)\, w_{n-1}(P)\, G(M, P)\, d\omega\,, \tag{77}$$

und diese Ausdrücke sind auf V positiv. Die Untersuchung der Reihe (73) beruhte auf der Betrachtung der Integrale

$$W_{n,k} = \iint\limits_V p w_k w_{n-k}\, d\omega\,,$$

von denen er bewies, daß sie nicht von k abhängen (so daß $W_{n,k} = W_{n,0}$ ist und dafür auch W_n geschrieben werden kann) und sich auch durch das Integral

$$W_{n,k} = \iint_V \left(\frac{\partial w_{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{k-1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{k+1}}{\partial y} + \frac{\partial w_{n-k}}{\partial y} \right) dx\, dy$$

ausdrücken lassen. Mit Hilfe dieser Formeln (die wesentlich auf der *Symmetrie* $G(M, P) = G(P, M)$ der Greenschen Funktion beruhen) und der Ungleichung

$$\left(\iint fg\, d\omega\right)^2 \leqq \left(\iint f^2\, d\omega\right) \left(\iint g^2\, d\omega\right),$$

die man nach ihm benannt hat (obwohl sie 1859 von Buniakowsky eingeführt, bis 1880 anscheinend jedoch kaum genutzt wurde), konnte Schwarz die Ungleichungen

$$\frac{W_n}{W_{n-1}} \leqq \frac{W_{n+1}}{W_n}$$

sowie die Existenz eines endlichen Grenzwertes $c > 0$ für die Folge (W_{n+1}/W_n) beweisen. Er interpretierte übrigens $1/c$ als das Minimum des Ausdrucks

$$\frac{\displaystyle\iint_V \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right) d\omega}{\displaystyle\iint_V p u^2\, d\omega}$$

für die stetigen und auf $\overline{V}$ der Klasse C^2 angehörenden Funktionen.

Danach bewies er, daß die Reihe (73) absolut und gleichmäßig für $|\xi| < 1/c$ gegen die Lösung von (72) konvergiert, die auf dem Rand gleich 1 ist. Im Gegensatz dazu ist für $\xi = 1/c$ die Reihe nicht konvergent; tatsächlich strebt ihr allgemeines Glied $\xi^n w_n$ gegen eine von null verschiedene Funktion U_1, welche eine Lösung der Gleichung $\Delta w + (1/c)\, pw = 0$ ist und auf dem Rand identisch verschwindet. Mit anderen Worten, Schwarz hatte auf diese Weise die Existenz der kleinsten „Frequenz" $\lambda_1 = 1/\sqrt{c}$ für die Gleichung (71) mit der Bedingung $u = 0$ auf dem Rand nachgewiesen.

Nach einer scharfsinnigen Arbeit Picards, in welcher die Existenz der zweiten „Frequenz" λ_2 durch eine analytische Fortsetzung der Reihe (73) bewiesen wird, wurde die nächste Etappe 1894 von Poincaré gemeistert ([25], Bd. IX, S. 123–196). Er betrachtete die Gleichung

$$\Delta u + \xi u + f = 0\,, \tag{78}$$

worin f gegeben ist und eine Lösung gesucht wird, die auf dem Rand identisch verschwindet. Die Schwarzsche Methode ist für *hinreichend kleines* $|\xi|$ anwendbar und beweist die Existenz der Lösung v dieses Problemes, welche durch eine gleichmäßig konvergente Potenzreihe

$$v = v_0 + \xi v_1 + \cdots + \xi^n v_n + \cdots \tag{79}$$

gegeben wird, in der die v_n für $n \geqq 0$ auf dem Rand identisch verschwinden.

Poincaré nahm sich vor zu beweisen, daß diese Lösung analytisch zu einer in ξ *meromorphen* Funktion fortgesetzt werden kann, die er mit $[f, \xi]$ bezeichnete; sie ist Lösung von (78) und verschwindet auf dem Rand identisch, falls ξ keine *Polstelle* ist (unabhängig von (x, y)). Zu diesem Zweck bemerkte er, daß die Gleichungen

$$\Delta v_0 + f = 0\,, \quad \Delta v_1 + v_0 = 0\,, \dots, \Delta v_n + v_{n-1} = 0\,, \dots,$$

wenn man die Funktionen u_n (für $n \geqq 2$) durch

$$v - \xi u_2 = v_0\,, \quad u_2 - \xi u_3 = v_1, \dots, u_{n-1} - \xi u_n = v_{n-2}\,, \dots \tag{80}$$

für hinreichend kleines $\xi \neq 0$ rekursiv definiert, die Ausdrücke

$$u_n = [v_{n-2}, \xi] \tag{81}$$

liefern.

Andererseits hatte Poincaré in seiner Arbeit über das „Ausfegen" (vgl. 8.5.2.) gezeigt, daß der Quotient

$$\iint\limits_V \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right) d\omega \bigg/ \iint\limits_V F^2\, d\omega \tag{82}$$

eine streng positive untere Schranke besitzt, falls F die Menge der auf $\overline{V}$ der Klasse C^2 angehörenden Funktionen durchläuft, für welche $\iint\limits_V F\, d\omega = 0$ ist. (Das ist das erste Beispiel für eine später „a-priori-Ungleichung" genannte Ungleichung.) Hieraus leitete er her, daß sich zu p gegebenen willkürlichen Funktionen $F_1, \dots, F_p$, die auf $\overline{V}$ der Klasse C^2 angehören, stets Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ bestimmen lassen derart, daß für die Funktion $F = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_p F_p$ der Quotient (82) einen Wert besitzt, der größer als L_p ist, wobei L_p nur von V und von p abhängt und mit p gegen $+\infty$ strebt.

Unter Anwendung dieses Lemmas auf die Funktionen $v, u_2, \dots, u_p$ bewies Poincaré mit Hilfe der Schwarzschen Methode, daß man die Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ so bestimmen kann, daß die Potenzreihe in ξ, die gleich $w = \alpha_1 v + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$ ist, einen mit p gegen $+\infty$ strebenden Konvergenzradius besitzt. Nach Elimination von $u_2, \dots, u_p$ mit Hilfe von (80) und der Cramerschen Formeln erhielt er schließlich v als Quotienten einer solchen Potenzreihe und eines Polynoms in ξ (mit von x, y unabhängigen Koeffizienten), womit sein Satz bewiesen ist.

Zwei Jahre später kam Poincaré auf die Methode von C. Neumann für die Lösung des Dirichletschen Problems zurück ([25], Bd. IX, S. 202—272), um die Konvergenz der sukzessiven Approximationen in allgemeineren Fällen zu beweisen, als sie von Neumann betrachtet worden waren. Zweifellos inspiriert durch seine Arbeit über die Gleichung der Membranen führte er in der Integralgleichung (70) einen komplexen Parameter λ als Faktor des Integrals ein, entwickelte die Lösung in eine Potenzreihe nach λ und vermutete auf der Grundlage heuristischer Überlegungen, daß sich auch hier die gewonnene Reihe zu einer meromorphen Funktion von λ fortsetzen lassen muß. Wenn man seine Überlegungen durchdenkt, wird man gewahr, daß sie ihn auf die Existenz einer „schwachen" Lösung im modernen Sinne (vgl. 8.5.2.) für das Dirichletsche Problem führten; die Analysis seiner Zeit ermöglichte ihm jedoch nicht, die Differenzierbarkeit dieser Funktion zu beweisen.

Auch verfügte er nicht über die Symmetrie der „Kernfunktion“ seiner Integralgleichung, die es ihm gestattet hätte, der Schwarzschen Methode folgend einen Beweis zu finden. Ebenso wenig gelang es ihm, seine Vermutung zu beweisen, so daß er sich mit dem bescheideneren Ziel zufrieden geben mußte, das er sich zu Beginn seiner Arbeit gestellt hatte.

8.5.4. „Algebra des Unendlichen“ und Geburt der Theorie der Integralgleichungen

Bei Schwarz finden sich keine Hinweise auf Beziehungen zwischen seinen Resultaten und der elementaren Theorie der quadratischen Formen. Im Gegensatz dazu machte Poincaré in der Arbeit aus dem Jahre 1890, in der er die Existenz einer streng positiven unteren Schranke für den Ausdruck (82) nachwies ([25], Bd. IX, S. 28—113), eine interessante Bemerkung hinsichtlich des Problems der Theorie der Wärme, das seine Untersuchungen veranlaßte. Dieses Problem war von Fourier als ein „Grenzübergang“ dargestellt worden, bei dem man von einer physikalischen Situation im Molekularbereich ausgeht, in der eine große Anzahl von Molekülen als stetiges Milieu behandelt wird. Sind die M_i die Moleküle, v_i die Temperatur von M_i zum Zeitpunkt t, so erfüllen die v_i ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{dv_i}{dt} + \sum_k C_{ik}(v_i - v_k) + C_i v_i = 0\,, \tag{83}$$

wobei $C_{ik}(v_i - v_k)$ die Wärmemenge ist, welche M_i von M_k empfängt, und $C_i v_i$ die Wärmemenge bezeichnet, die von M_i nach außen abgestrahlt wird; durch Grenzübergang erhielt Fourier ausgehend von (83) eine partielle Differentialgleichung.

Poincaré hatte die Idee, das System (83) *vor* dem Grenzübergang zu integrieren. Da die C_{ik} nach Voraussetzung symmetrisch sind, zeigte die klassische Integrationsmethode vermittels der Exponentialfunktionen $v_i(t) = u_i\, e^{-\alpha t}$, daß die möglichen Werte von α die Eigenwerte der Matrix der nichtausgearteten quadratischen Form

$$\Phi(u_1, \dots, u_N) = \sum_{i \neq k} C_{ik}(u_i - u_k)^2 + \sum_i C_i u_i^2 \tag{84}$$

sind. Sind $\xi_1, \dots, \xi_N$ diese Eigenwerte, so läßt sich die Form Φ für geeignete Linearformen φ_i in den Variablen u_k als $\xi_1\varphi_1^2 + \cdots + \xi_N\varphi_N^2$ schreiben, wobei diese Linearformen bezüglich des üblichen Skalarprodukts

$$(\varphi \mid \psi) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k$$

für zwei Formen

$$\varphi = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_N u_N\,, \qquad \psi = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_N u_N$$

paarweise orthogonal sind.

Weiterhin bemerkte Poincaré, daß dann, wenn ξ_1 der kleinste Eigenwert ist, ξ_1 das Minimum des Ausdrucks

$$\frac{\xi_1\varphi_1^2 + \cdots + \xi_N\varphi_N^2}{\varphi_1^2 + \cdots + \varphi_N^2} \tag{85}$$

ist, und er erinnerte in diesem Zusammenhang an die Eigenschaft von aufeinanderfolgenden Extrema einer quadratischen Form, die in der Geometrie die Achsen eines Ellipsoids charakterisiert. Er betrachtete somit den Ausdruck (82) als den Grenzwert von (85) bei einem „Übergang vom Endlichen zum Unendlichen", wobei die ξ_i bei diesem Übergang die Pole seiner Funktion $[f, \xi]$ werden und die φ_i die entsprechenden Lösungen U_i der Gleichungen $\Delta U_i + \xi_i U_i = 0$, welche auf dem Rand identisch verschwinden und darüber hinaus den Relationen

$$\iint\limits_V U_i U_j \, d\omega = 0 \tag{86}$$

genügen, die der „Orthogonalität" der Linearformen φ_i entsprechen.

Das war offenbar nicht die erste Vorstellung eines „Übergangs vom Endlichen zum Unendlichen", da ja (ohne auf die Ideen des siebzehnten Jahrhunderts hinsichtlich des Übergangs vom endlichen Differenzenkalkül zur Differentialrechnung (vgl. 1.7.) zurückzugehen) bekanntlich D. Bernoulli auf einem derartigen Verfahren die Theorie der schwingenden Saite aufgebaut hatte. Im Jahre 1836 hatte Sturm in seiner Arbeit über die Differentialgleichung (49) bemerkt, seine Ideen seien ihm durch analoge Betrachtungen eines Systems von Differenzengleichungen nahegelegt worden.

Ungefähr ab 1880 begann man von verschiedenen Seiten die Notwendigkeit einer neuen Analysis zu empfinden, in der es anstelle der üblichen Funktionen um „Funktionen mit unendlich vielen Variablen" ging. Die allgemeine Idee der Abbildung einer Menge in eine andere, welche die von Dirichlet gegebene Definition der „Funktion" verallgemeinerte, begann mit der „mengentheoretischen" Auffassung der Mathematik zu verschmelzen, selbst wenn sie nicht für alle die Klarheit der Dedekindschen Definition besaß (vgl. 6.7.1.). Wenn die Mengen, um die es sich handelt, aus Funktionen (im üblichen Sinne) oder aus Kurven oder Flächen usw. bestehen, nennt man diese Abbildungen gern „Operatoren", und wenn die Menge ihrer Werte $\boldsymbol{R}$ oder $\boldsymbol{C}$ ist, bezeichnet man sie als „Funktionale". Klassische Beispiele für Funktionale werden durch das einfache Integral $f \mapsto \int_a^b p(x) f(x) \, dx$ sowie die Analoga für mehrfache Integrale geliefert, und Beispiele für Operatoren sind Ableitungen $f \mapsto \mathrm{D}^\nu f$ oder der Translationsoperator $f \mapsto \gamma(a) f$ (die Funktion $x \mapsto f(x - a)$). Selbst in der klassischen Analysis findet man Versuche, eine „Operatorenrechnung" zu begründen, etwa die Definitionen von Ableitungen gebrochener Ordnung durch Leibniz und Riemann oder die Beziehung $\gamma(-a) = e^{a\mathrm{D}}$, welche Translation und Ableitung verknüpft, wie sie (im Grunde genommen) von Lagrange als Ausdruck für die Taylorreihe verwendet wurde.

Im Jahre 1887 entwickelte Volterra, inspiriert durch die Variationsrechnung, die Idee einer neuen „Infinitesimalrechnung", in der die „Funktionale" die Funktionen der klassischen Analysis ersetzen sollten: Ein Versuch, der uns heute etwas übereilt

erscheint, da die algebraischen und topologischen Begriffe, die der gegenwärtigen Funktionalanalysis zugrunde liegen, zu jener Zeit praktisch nicht existierten; auch die in dieser Richtung insbesondere von Hadamard und P. Lévy veröffentlichten Arbeiten hatten sich bis dahin in bezug auf wichtige Konsequenzen nicht als sehr fruchtbar erwiesen.

Was die moderne Ära der Analysis eröffnen sollte, sind die Bemühungen um die Schaffung einer „Algebra des Unendlichen", die der klassischen *linearen* Algebra entspricht. Gegen 1890 weiß man, daß, abgesehen von der klaren Vorstellung der Dualität, die erst nach 1930 in angemessener Form formuliert wird, alle Methoden und Ergebnisse der elementaren linearen Algebra (über den Körpern $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{C}$) allgemein bekannt sind; Graßmann und Peano haben sie sogar koordinatenunabhängig formuliert, in einer Weise, die der heutigen sehr nahe kommt (vgl. 3.2.1.). Bis 1920 etwa bleibt jedoch die Mehrzahl der Mathematiker dem rechnerischen linearen Kalkül verhaftet, insbesondere den Matrizen und Determinanten. Es sind also nicht die Algebraiker, bei denen die Analytiker eine wirksame Hilfe finden, so daß die neue „Algebra des Unendlichen" den ganzen schweren Weg durchschreitet, den die lineare Algebra gegangen war, angefangen von den linearen Gleichungssystemen, um dann zu Determinanten, Linear- und Bilinearformen und Matrizen überzugehen, ehe sie schließlich bei der geometrischen Sprache und dem Begriff der linearen Abbildung anlangt. Kurz gesagt, wie so oft in der Geschichte der Mathematik ist die historische Reihenfolge fast die Umkehrung dessen, was als logische Reihenfolge erscheint, nachdem die Theorie erst einmal aufgestellt ist. Und, so unglaublich uns das erscheinen mag, es bedurfte langer Zeit, bis man sich darüber klar geworden war, daß das, wofür die Algebraiker $(\mathrm{I} - \lambda \mathrm{U})^{-1}$ für eine Matrix U schreiben, der Sache nach dasselbe ist, wie das, was die Analytiker für einen linearen Operator U durch eine Reihe $\mathrm{I} + \lambda \mathrm{U} + \lambda^2 \mathrm{U}^2 + \cdots$ darstellen.

Die Vorstellung, Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten zu lösen, ist schon recht alt. Als Fourier die Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe

$$a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx + \cdots = f(x)$$

für eine gegebene Funktion f bestimmen wollte, entwickelte er jede der Funktionen $f(x)$ und $\cos nx$ auf der Umgebung von 0 in eine Taylorreihe und setzte die Koeffizienten der gewonnenen Reihen gleich; dies lieferte ihm ein unendliches System linearer Gleichungen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\, n^{2\nu}}{(2\nu)!}\, a_n = A_{2\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

in den Unbekannten a_n. Er „löste" es folgendermaßen: In den ersten N Gleichungen beließ er nur die Glieder, welche die ersten N Unbekannten a_j $(0 \leqq j \leqq N-1)$ enthalten, löste das System nach der Cramerschen Regel und ließ danach in den erhaltenen Formeln N gegen $+\infty$ streben [S].

Im Jahre 1877 verfuhr Hill ebenso, um die Differentialgleichung (20) zu lösen, und seine Arbeit erweckte das Interesse von Poincaré, der im Jahre 1886 diese Art

formalen Rechnens zu rechtfertigen suchte, indem er die Konvergenz der darin auftretenden Determinanten überprüfte. Tatsächlich beschränkte er sich auf die „unendlichen Matrizen"

$$(\delta_{mn} + a_{mn})_{m\geqq 1,\, n\geqq 1} \qquad (\delta_{mn} \text{ Kroneckersymbol})\,, \tag{87}$$

wobei er voraussetzte, daß $a_{mm} = 0$ für jedes m ist; er bewies dann, daß die Folge der Determinanten

$$\Delta_N = \det\, (\delta_{mn} + a_{mn})_{1\leqq m,\, n\leqq N} \tag{88}$$

gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, wenn die Doppelreihe $\sum\limits_{m,n} |a_{m,n}|$ konvergent ist ([25], Bd. V, S. 95–107).

Seine Ideen wurden von 1893 an von H. v. Koch wiederaufgenommen und weiterentwickelt. Dieser behandelte auch „zweifach unendliche" Matrizen, bei denen die Indizes m und n die Menge $\mathbf{Z}$ aller ganzen Zahlen durchlaufen, und zeigte, daß unter geeigneten Voraussetzungen über die Konvergenz der a_{mn} das Fouriersche Lösungsverfahren gerechtfertigt werden kann. Darüber hinaus verwendete er in seinen Überlegungen die Darstellung einer Determinante Δ_N mit Hilfe ihrer Hauptminoren,

$$\Delta_n = 1 + \sum_{s=1}^{N} a_{ss} + \frac{1}{2!} \sum_{s_1, s_2} \begin{vmatrix} a_{s_1s_1} & a_{s_1s_2} \\ a_{s_2s_1} & a_{s_2s_2} \end{vmatrix} + \frac{1}{3!} \sum_{s_1, s_2, s_3} \begin{vmatrix} a_{s_1s_1} & a_{s_1s_2} & a_{s_1s_3} \\ a_{s_2s_1} & a_{s_2s_2} & a_{s_2s_3} \\ a_{s_3s_1} & a_{s_3s_2} & a_{s_3s_3} \end{vmatrix} + \cdots, \tag{89}$$

deren Form einige Jahre später Fredholm inspirieren sollte.

Es ist eigentlich keine Erweiterung der linearen Algebra, sondern vielmehr eine Analogie, die in den ersten allgemeinen Untersuchungen über die Integralgleichungen, der Habilitationsschrift von Le Roux (1894) und den Arbeiten Volterras (1896) zutage tritt. Sieht man von der Beer-Neumannschen Gleichung (70) ab, so hatte man bis dahin (Abel, Liouville, Sonine usw.) eigentlich nur Spezialfälle von Gleichungen behandelt, die später Integralgleichungen „erster Art"

$$\int_a^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx = f(y) \tag{90}$$

für die unbekannte Funktion φ genannt wurden; f und H sind auf einem Intervall $[a, b]$ mit $f(a) = 0$ gegeben, während das Integral über ein *variables* Intervall $[a, y]$ mit $y \leqq b$ und nicht über $[a, b]$ erstreckt wird.

Le Roux und Volterra zeigten, daß man die Gleichung (90) vermittels der Methode der sukzessiven Approximation lösen kann, wenn man voraussetzt, $h(y) = H(y, y)$ habe keine Nullstelle in $[a, b]$, und f und H seien stetig differenzierbar. Volterra gab die so erhaltene Lösung durch die Formel

$$\varphi(y) = \frac{f'(y)}{h(y)} - \frac{1}{h(y)} \int_a^y \Big(\sum_{i=0}^{\infty} S_i(x, y)\Big) f'(x)\, dx \tag{91}$$

explizit an, worin die Funktionen S_i durch die Rekursionsformeln

$$S_0(x, y) = \frac{1}{h(x)} \frac{\partial H}{\partial y} (x, y) ,$$
$$S_i(x, y) = \int_y^x S_0(\xi, y) \, S_{i-1}(x, \xi) \, d\xi \quad \text{für} \quad i \geqq 1 \tag{92}$$

definiert sind.

Darüber hinaus verwies er auf die Analogie, die zwischen der Gleichung (90) und einem linearen ,,Dreieckssystem"

$$\begin{aligned} h_{11}z_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad &= b_1 , \\ h_{21}z_1 + h_{22}z_2 \quad\quad\quad &= b_2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ h_{n1}z_1 + h_{n2}z_2 + \cdots + h_{nn}z_n &= b_n \end{aligned} \tag{93}$$

besteht, als dessen ,,Grenzfall" (90) angesehen werden kann: Man erteilt y die n Werte

$$y_k = a + k \frac{b - a}{n} \quad \text{für} \quad 1 \leqq k \leqq n$$

und ersetzt die Integrale aus (90), die für $1 \leqq k \leqq n$ von a bis y_k gebildet werden, durch die mit Hilfe der Teilungspunkte y_k berechneten ,,Riemannschen Summen".

In mehreren späteren Veröffentlichungen kam Volterra auf das Rekursionsverfahren (92) zurück, ohne jedoch die Analogie zum Matrizenprodukt explizit zu erwähnen. Mit der Abkürzung

$$(A * B)\,(x) = \int_a^y A(x, \xi) \, B(\xi, y) \, d\xi \tag{94}$$

(eine Bezeichnungsweise, die Volterra selbst erst in späteren Jahren einführte), mit der sich (92) in der Gestalt $S_i = S_0 * S_{i-1}$ darstellen läßt, zeigte er, daß im allgemeinen für jede stetige Funktion S_0 die Beziehung $S_i = S_{i-j} * S_{j-1}$ für $1 \leqq j \leqq i$ gilt, und leitete darüber hinaus die in jedem den Definitionsbereich von S_0 enthaltenden Quader geltende Abschätzung

$$|S_i(x, y)| \leqq \frac{M^{i+1}}{i!} \, |x - y|^i$$

her. Daraus ergeben sich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$F_0 = \sum_{i=0}^{\infty} S_i \tag{95}$$

auf jedem Quader und die Beziehung

$$F_0 - S_0 = S_0 * F_0 . \tag{96}$$

Volterra bemerkte, daß man diese Beziehung ,,umkehren" kann, indem man die Funktionen $F_i = F_0 * F_{i-1}$ für $i \geqq 1$ betrachtet; dies liefert den Ausdruck

$$S_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i F_i . \tag{97}$$

Schließlich gelangte er auf diese Weise zur allgemeinen Idee der Integralgleichung „zweiter Art“

$$\varphi(y) - \int_a^y S_0(x, y)\, \varphi(x)\, dx = f(y)\,, \tag{98}$$

deren Lösung φ auf Grund von (96) durch

$$\varphi(y) = f(y) + \int_a^y F_0(x, y)\, f(x)\, dx \tag{99}$$

gegeben wird, wobei die „Kernfunktion“ S_0 und die „lösende Kernfunktion“ F_0 völlig symmetrische Rollen spielen ([31], Bd. II, S. 216; [S]).

Die entscheidenden Arbeiten, welche die moderne Theorie der Integralgleichungen schufen, stammen von I. Fredholm (1900). Auch er betrachtete eine Integralgleichung „zweiter Art“

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b K(s, t)\, f(t)\, dt \tag{100}$$

für die unbekannte Funktion f, diesmal ist jedoch das Integrationsintervall *fest*. Es handelt sich also um Gleichungen, welche die Beer-Neumannsche Gleichung (70) verallgemeinern. Fredholm selbst wies darauf hin, daß sich seine Methode mühelos auf Integralgleichungen für Funktionen mehrerer Variabler verallgemeinern läßt, wenn das Intervall $[a, b]$ durch einen beliebigen beschränkten Bereich ersetzt wird. Die Funktion K wird als stückweise stetig vorausgesetzt; Fredholm nannte jedoch als unmittelbare Verallgemeinerung den Fall, daß nur vorausgesetzt wird, die Funktion $|s - t|^\alpha K(s, t)$ mit $\alpha < 1$ sei stückweise stetig. Wird $K(s, t) = 0$ für $s < t$ vorausgesetzt, so findet man die Volterrasche Gleichung (98) wieder (wobei bemerkt werden muß, daß Volterra auch Gleichungen des Typs (98) für Funktionen mehrerer Variabler betrachtet hatte).

Durch Kombination des Konzepts des Grenzübergangs von linearen Differentialgleichungssystemen und der v. Kochschen Formel (89) führte Fredholm für jede ganze Zahl $n \geqq 1$ die Funktionen von $2n$ Variablen

$$K\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & \dots & K(x_1, y_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K(x_n, y_1) & \dots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix} \tag{101}$$

ein und betrachtete danach einerseits die Reihe

$$\begin{aligned} \Delta = 1 &+ \int_a^b K(s, s)\, ds + \frac{1}{2!} \int_a^b \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_n + \cdots, \end{aligned} \tag{102}$$

andererseits die durch analoge Reihen definierten Funktionen

$$\Delta\begin{pmatrix}s_1 \dots s_\nu\\ t_1 \dots t_\nu\end{pmatrix} = K\begin{pmatrix}s_1 \dots s_\nu\\ t_1 \dots t_\nu\end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix}s_1 \dots s_\nu & \sigma_1 \dots \sigma_n\\ t_1 \dots t_\nu & \sigma_1 \dots \sigma_n\end{pmatrix} d\sigma_1 \cdots d\sigma_n\,. \quad (103)$$

Zunächst bewies er, daß diese Reihen stets absolut und gleichmäßig konvergieren, wobei er die folgende, von Hadamard im Jahre 1893 bewiesene Abschätzung für die Determinante einer quadratischen Matrix $\mathrm{A} = (a_{ij})$ der Ordnung n benutzte:

$$|\det(\mathrm{A})|^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right). \quad (104)$$

Die Zahl Δ ist das Analogon zur Determinante eines linearen Gleichungssystems. Ist $\Delta \neq 0$, so erhält man das Analogon zur Cramerschen Formel durch Einführung der Funktion

$$R(s, t) = -\frac{1}{\Delta}\Delta\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}, \quad (105)$$

die auch „lösender Kern" von (100) genannt wird; für jede stetige Funktion besitzt dann die Gleichung (100) genau eine Lösung, die durch

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b R(s, t)\, \varphi(t)\, dt \quad (106)$$

gegeben wird. Ist dagegen $\Delta = 0$, so zeigte Fredholm, daß die Lösungen der homogenen Gleichung

$$f(s) + \int_a^b K(s, t)\, f(t)\, dt = 0 \quad (106)$$

Linearkombinationen einer *endlichen* Anzahl $d \geqq 1$ von linear unabhängigen unter ihnen sind, wobei er die Zahl d explizit mit Hilfe der Funktionen (103) bestimmen konnte; darüber hinaus ist dann für die Existenz von Lösungen der Gleichung (100) notwendig und hinreichend, daß die Funktion φ ihrerseits d linear unabhängigen homogenen linearen Bedingungen genügt, die er ebenfalls explizit formulieren konnte.

Schließlich ersetzte er, einer Idee Poincarés folgend, den „Kern" K durch λK, wobei λ ein komplexer Parameter ist, und zeigte, daß seine „Determinante" $\Delta(\lambda)$ eine ganze Funktion von λ und der „lösende Kern" $R(s, t; \lambda)$ eine meromorphe Funktion von λ ist. Durch Anwendung dieser Ergebnisse auf die Beer-Neumannsche Gleichung (70) bewies er so die Poincaréschen Vermutungen vollständig, indem er sie in einen viel allgemeineren Zusammenhang stellte [S].

8.5.5. *Hilbertraum*

Die folgende Etappe wurde von Hilbert gemeistert. Die Ergebnisse von Schwarz und Poincaré führten ihn dazu, diejenigen Fredholmschen Gleichungen (100) näher zu untersuchen, in denen der Kern K *symmetrisch* ist, d. h. $K(t, s) = K(s, t)$ gilt. Wie Poincaré sah er hierin das Analogon zu den symmetrischen Matrizen aus der gewöhnlichen linearen Algebra oder, was auf dasselbe hinausläuft, zu den klassischen *quadratischen Formen*; geleitet von dieser Analogie zeigte er, daß die Fredholmsche Theorie in diesem Falle eine viel einfachere Gestalt gewinnt.

In der Tat sind dann die Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ sämtlich *reell* und bilden eine Folge (λ_ν) derart, daß die Reihe $\sum_n (1/\lambda_n^2)$ konvergiert (wobei jede Wurzel λ_n in der Folge so oft auftritt, wie ihre Vielfachheit angibt). Darüber hinaus ist jedem λ_n eine „Eigenfunktion" φ_n zugeordnet, welche Lösung der homogenen Gleichung

$$\varphi_n(s) = \lambda_n \int_a^b K(s, t)\, \varphi_n(t)\, dt \tag{107}$$

ist und die man bis auf das Vorzeichen durch die Zusatzbedingung

$$\int_a^b \varphi_n^2(t)\, dt = 1$$

bestimmen kann. Für voneinander verschiedene Indizes m, n gilt die „Orthogonalitätsrelation" (diese Bezeichnung ist von Hilbert eingeführt worden)

$$\int_a^b \varphi_n(t)\, \varphi_m(t)\, dt = 0\,, \tag{108}$$

welche (86) verallgemeinert. Schließlich leitete Hilbert für jede auf $[a, b]$ stetige Funktion $x(t)$ die fundamentale Formel

$$\int_a^b \int_a^b K(s, t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \frac{1}{\lambda_1}\left(\int_a^b x(t)\, \varphi_1(t)\, dt\right)^2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\left(\int_a^b x(t)\, \varphi_n(t)\, dt\right)^2 + \cdots \tag{109}$$

her, in welcher er das Analogon zur Hauptachsentransformation einer quadratischen Form in einem euklidischen Raum endlicher Dimension erkannte.

Nach Verschmelzung der Theorie der symmetrischen Integralgleichungen mit den Ideen aus der Theorie linearer Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten betrachtete Hilbert die unendlichen Folgen $x = (x_n)$ reeller Zahlen, für die $\sum_n x_n^2 < +\infty$ ist, und definierte in Analogie zu den gewöhnlichen Bilinearformen Ausdrücke, die er „vollstetige" Bilinearformen nannte. Das sind die Funktionen von Paaren solcher Folgen $x = (x_n)$, $y = (y_n)$,

$$K(x, y) = \sum_{m,n} k_{mn} x_m y_n\,, \tag{110}$$

wobei die rechte Seite sinnvoll wird aufgrund der Bedingung, daß für gegen $+\infty$ strebendes N die Partialsummen

$$\sum_{m \leqq N,\, n \leqq N} k_{mn} x_m y_n$$

einen Grenzwert besitzen müssen, der ein gleichmäßiger Limes ist, wenn die Folgen (x_n), (y_n) den Bedingungen

$$\sum_n x_n^2 \leqq 1\,, \qquad \sum_n y_n^2 \leqq 1$$

unterworfen sind; eine hinreichende (jedoch nicht notwendige) Bedingung dafür besteht darin, daß die Doppelreihe $\sum_{m,n} k_{mn}^2$ konvergiert.

Gleichzeitig verallgemeinerte Hilbert in offensichtlicher Weise den Begriff der orthogonalen Transformation und zeigte, daß sich nach einer orthogonalen Transformation jede vollstetige symmetrische Bilinearform $K(x, y)$ auf die Gestalt

$$K(x, y) = \frac{1}{\lambda_1} x_1 y_1 + \frac{1}{\lambda_2} x_2 y_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} x_n y_n + \cdots \tag{111}$$

bringen läßt, welche (109) verallgemeinert; dabei strebt die Folge der $|\lambda_n|$ gegen $+\infty$. Um (109) wiederzufinden, genügt es [H], jeder stetigen Funktion $x(t)$ die Folge der Zahlen

$$x_n = \int_a^b x(t)\, \varphi_n(t)\, dt$$

zuzuordnen.

Von nun an setzte sich bei den Analytikern die geometrische Sprache ebenso durch wie bei den Algebraikern seit 1850 (vgl. Kapitel 3), und die „Algebra des Unendlichen" wurde durch die Hilbertsche Schule zu einer „Geometrie des Unendlichen". Von 1908 an übertrugen E. Schmidt und, unabhängig von ihm, Fréchet die gesamte Terminologie der Euklidischen Geometrie auf die von Hilbert betrachtete Situation. Die Folgen $x = (x_n)$ mit $\sum_n x_n^2 < +\infty$ sind die *Punkte* (oder *Vektoren*) des *Hilbertraumes*. Für zwei solcher Punkte x, y ist die Zahl $(x \mid y) = \sum_n x_n y_n$ (wobei die Reihe automatisch absolut konvergent ist) ihr *Skalarprodukt*, und

$$||x|| = (x \mid x)^{1/2} = \left(\sum_n x_n^2\right)^{1/2}$$

bezeichnet die *Norm* von x, welche die Dreiecksungleichung

$$||x + y|| \leqq ||x|| + ||y|| \tag{112}$$

ebenso erfüllt wie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|(x \mid y)| \leqq ||x|| \cdot ||y||\,. \tag{113}$$

Ein lineares Gleichungssystem läßt sich also in der Gestalt

$$(a_m \mid x) = b_m\,, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{114}$$

schreiben, wobei die b_m gegebene Skalare, die a_m gegebene Vektoren und x ein unbekannter Vektor des Hilbertraumes sind. Die Art und Weise, in der E. Schmidt dieses Problem behandelte, war gänzlich von der Geometrie inspiriert: Er betrachtete die ersten N Gleichungen von (114) und bestimmte die orthogonale Projektion des Ursprungs auf die durch diese Gleichungen definierte „affine lineare Mannigfaltigkeit" des Hilbertraumes; die Bedingung für die Lösbarkeit des Systems (114) besteht dann darin, daß diese Punkte für gegen $+\infty$ strebendes N einen Grenzwert besitzen, und dieser Grenzwert ist dann die Lösung minimaler Norm des Gleichungssystems (114) im Hilbertraum.

Allerdings verwendete E. Schmidt noch keine unendlichen Matrizen; sie wurden 1906 von Hellinger und Toeplitz [H] eingeführt, um eine andere Interpretation für „beschränkte" Bilinearformen anzugeben, die früher von Hilbert benützt wurden und die eine Verallgemeinerung der „vollstetigen" Formen darstellen, welche er zu Anfang betrachtet hatte. Die unendlichen Matrizen $A = (a_{mn})_{m\geqq 1, n\geqq 1}$ von Hellinger-Toeplitz sind so beschaffen, daß für jeden Vektor $x = (x_n)$ des Hilbertraumes die Reihen $y_m = \sum_n a_{mn}x_n$ absolut konvergieren und (y_m) wieder ein Vektor $A \cdot x$ des Hilbertraumes ist derart, daß $\|A \cdot x\|$ für alle Vektoren x mit $\|x\| \leqq 1$ beschränkt bleibt. Dann ist $(A \cdot x \mid x)$ eine im Hilbertschen Sinne beschränkte quadratische Form, und umgekehrt läßt sich jede beschränkte quadratische Form auf diese Weise schreiben, wenn man die Matrix A als symmetrisch voraussetzt (d. h., daß für jedes Paar von Indizes $a_{mn} = a_{nm}$ ist).

Die Spektraltheorie der beschränkten quadratischen Formen ist zweifellos der neueste und tiefliegendste Teil des Werkes von Hilbert in der Analysis (vgl. 8.7.). Es ist aber kaum möglich, seine Tragweite zu erfassen, ohne diese Theorie in einer viel ausdrucksstärkeren Sprache zu beschreiben, als es die ihres Schöpfers ist, nämlich in der Sprache der *Topologie*, die eben in dieser Periode von 1900 bis 1910 in der Funktionalanalysis eine Rolle zu spielen begann.

8.6. Metrische Räume

Der Begriff einer gegen eine Grenzfunktion strebenden Funktionenfolge (f_n) ist zweifellos so alt wie die Infinitesimalrechnung. Bekanntlich konnte man sich aber lange Zeit, selbst noch im neunzehnten Jahrhundert, nur schwer vorstellen, daß die „einfache Konvergenz", bei der nur $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jeden Wert der Variablen x gefordert wird, nicht ausreicht, um interessante Eigenschaften von f zu erhalten, wie z. B. die Stetigkeit von f unter der Voraussetzung der Stetigkeit der f_n (vgl. 6.2.2. und 6.2.3.).

Nachdem gegen 1850 der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz erst einmal herausgearbeitet worden war, wurden seine Beziehungen zur einfachen Konvergenz und zu weiteren dazwischen liegenden Konvergenztypen zum Gegenstand zahlreicher Untersuchungen in der Weierstraßschen Schule sowie vor allem in den

Kreisen der Italiener um Dini, Ascoli und Arzelà. Einer der interessantesten neuen Begriffe ist der von Ascoli eingeführte und von Arzelá weiterentwickelte Begriff der *gleichgradigen Stetigkeit*. Eine Folge (f_n) von (beispielsweise) auf einem Intervall I definierten reellwertigen Funktionen ist *gleichgradig stetig*, wenn zu jedem $x_0 \in I$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, daß aus $|x - x_0| \leqq \delta$ die Beziehung $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqq \varepsilon$ für *jedes* n folgt; dies gilt z.B., wenn die f_n auf I differenzierbar und ihre Ableitungen dort dem absoluten Betrage nach durch eine von n unabhängige Zahl *beschränkt* sind. Die gleichgradige Stetigkeit einer Folge (f_n) zieht nach sich, daß bereits ihre einfache Konvergenz auf I (oder sogar nur auf einer in I dichten Teilmenge) für die Stetigkeit der Grenzfunktion auf I hinreichend ist. Darüber hinaus läßt sich aus jeder auf einem beschränkten Intervall I beschränkten und gleichgradig stetigen Folge eine Teilfolge auswählen, die gegen eine stetige Funktion konvergiert, wobei die Konvergenz auf jedem in I enthaltenen abgeschlossenen Intervall gleichmäßig ist.

Man untersuchte auch die einfache Konvergenz *monotoner* Folgen von reellwertigen stetigen Funktionen. Dini stellte fest, daß die Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge gleichmäßig ist, wenn man weiß, daß die Grenzfunktion *stetig* ist. Im allgemeinen ist jedoch die Grenzfunktion nicht stetig, sondern nur *halbstetig*. Dieser Begriff wurde von Baire [4] eingeführt und untersucht; er sollte später erhebliche Bedeutung erlangen: Eine Funktion f heißt in einem Punkt x_0 von unten (bzw. von oben) halbstetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung V von x_0 existiert derart, daß für $x \in V$

$$f(x) \geqq f(x_0) - \varepsilon \quad (\text{bzw. } f(x) \leqq f(x_0) + \varepsilon)$$

gilt (dabei braucht also nur „die Hälfte" der Bedingungen erfüllt zu sein, welche bei der Stetigkeit gelten). Ist dann (f_n) eine monoton wachsende (bzw. fallende) Folge stetiger Funktionen, so ist ihre Grenzfunktion von unten (bzw. von oben) halbstetig.

Zur gleichen Zeit setzte sich nach und nach die Vorstellung von der „Umgebung" einer Funktion durch. Zwar schälte sich selbst in der Ebene beispielsweise der Begriff der Umgebung eines Punktes nur langsam heraus, und während des neunzehnten Jahrhunderts blieb lange Zeit hindurch die Vorstellung von einem gegen einen Punkt a strebenden Punkt x im „Linearen" stecken, so als würde sich x dem Punkt a längs einer beliebigen zum Punkt a führenden *Kurve* nähern.

In der Analysis war es die Variationsrechnung, die das Nachdenken über diese Probleme am stärksten anregte. Beginnend mit Legendre glaubte man zu wissen, wann eine „Extremale" y eines Problems der Variationsrechnung, welche der Eulerschen Gleichung genügt (vgl. 1.8.), tatsächlich ein „relatives" Maximum bzw. Minimum für das Integral $\int_a^b F(x, y, y')\,dx$ des Problems liefert. Auch hier ist der erste Gedanke, einen „linearen" Grenzwert zu betrachten, indem man y durch $y + \varepsilon u$ ersetzt und aufschreibt, daß für $\varepsilon = 0$ ein relatives Maximum bzw. ein relatives Minimum der so erhaltenen Funktionen von ε vorliegt — und dies unabhängig von der „Variation" $u = \delta y$, einer beliebigen der Klasse C^1 angehörenden Funktion. Das eben machte Legendre. Man überzeugte sich jedoch schnell davon,

daß dies nicht hinreicht, um zu gewährleisten, daß der Wert des Integrals tatsächlich größer (bzw. kleiner) als *alle* Werte ist, die man bei der Ersetzung von y durch $y + \delta y$ für eine „kleine" Variation δy erhält.

Es ist offenbar der genaue Sinn des Wortes „klein", der hier ins Spiel kommt. Lange Zeit nahm man an (was vom Standpunkt der Homotopie „natürlich" ist), daß für eine kleine „Variation" δy auch die „Variation" $\delta y'$ ihrer Ableitung klein sei. In der Weierstraßschen Schule, die in der Weiterverfolgung präziser Begriffe geübt war, fand man jedoch heraus, daß diese Eigenschaft in Wirklichkeit eine zusätzliche Bedingung ist. Gegen Ende des Jahrhunderts gelangte man somit dahin, „starke Extrema" und „schwache Extrema" zu unterscheiden, wobei erstere einem „Umgebungsbegriff" entsprechen, bei dem nur gefordert wird, daß $z - y$ dem absoluten Betrage nach für zu y benachbartes z klein sei, während man im zweiten Falle z nur dann als zu y „benachbart" ansieht, wenn $z' - y'$ ebenfalls dem absoluten Betrage nach klein ist.

Diese etwas vagen und sich auf recht spezielle Probleme beziehenden Vorstellungen fanden ihre erste präzise und allgemeine Formulierung bei Fréchet im Jahre 1906 [11]. Um die allen Problemen, in denen „benachbarte" Objekte auftreten, zugrunde liegenden Prinzipien herauszuschälen, hatte er die glückliche Idee, nicht die Natur dieser Objekte zu spezifizieren, sondern von Anfang an eine völlig beliebige Menge E zu betrachten, von der er nur voraussetzte, es sei eine positive „Abstandsfunktion" $d(x, y)$ für je zwei Elemente x, y aus E definiert, welche drei der klassischen Eigenschaften des euklidischen Abstands erfüllt:

I. Die Beziehung $d(x, y) = 0$ ist äquivalent zu $x = y$.

II. Es gilt stets $d(y, x) = d(x, y)$.

III. Für drei beliebige Elemente x, y, z aus E gilt die Dreiecksungleichung $d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$.

Nun ist höchst bemerkenswert, daß man in diesen äußerst allgemeinen Rahmen den größten Teil der Begriffe und Überlegungen einordnen kann, die mit den Begriffen Umgebung, Grenzwert und Stetigkeit in den Räumen $\boldsymbol{R}^n$ zusammenhängen, insbesondere die wesentlichen Ergebnisse, die sich auf zwei grundlegende Begriffe beziehen, die bereits in diesen Räumen herausgearbeitet worden waren (vgl. Kapitel 6 und 10), nämlich auf den Begriff der *Kompaktheit* und auf den des *Zusammenhangs* ([D], Kapitel 3).

Fréchet legte besonderen Wert auf den ersten dieser beiden Begriffe. Er bemerkte, daß er den „direkten Methoden" der Variationsrechnung zugrunde liegt, die Hilbert 1900 geschaffen hatte, um insbesondere das „Dirichletsche Prinzip" dort zu rechtfertigen, wo Riemann es verwendet hatte (vgl. 8.5.2.).

Die klassische Variationsrechnung war nämlich zu Recht bei allen ihren Resultaten der von Weierstraß gegen das „Dirchletsche Prinzip" vorgebrachten Kritik ausgesetzt, daß sie für das jeweils betrachtete Problem die Existenz eines Extremums annahm, ohne diese jemals zu beweisen; eben diesen Beweis vermochte erst Hilbert zu führen, zumindest in gewissen Fällen [S]. So bewies Hilbert streng, um nur ein einfaches Beispiel zu nennen, daß auf jeder der Klasse C^∞ angehörenden kompakten zusammenhängenden Fläche in $\boldsymbol{R}^3$ eine Kurve kleinster Länge existiert,

die zwei gegebene Punkte a, b verbindet. Fréchet stellte fest [11], daß man auf der Menge der die Punkte a und b auf der Fläche verbindenden Kurvenbögen einen „Abstandsbegriff" definieren kann und daß die Menge dieser Bögen einer durch eine streng positive Zahl beschränkten Länge kompakt ist. Das Hilbertsche Ergebnis folgt dann aus einem allgemeinen Satz, der für die auf $\boldsymbol{R}^n$ definierten Funktionen von Baire bewiesen wurde; nach diesem Satz nimmt eine von unten halbstetige Funktion auf jeder kompakten Menge ihr Minimum an: Die von Fréchet definierte „Längenfunktion" ist nämlich auf der Menge der die Punkte a und b verbindenden Kurvenbögen von unten halbstetig.

Heute nennt man jede Menge E, auf der ein den Fréchetschen Axiomen genügender „Abstand" d definiert ist, einen *metrischen Raum*. Die meisten der in den Problemen der Analysis vorkommenden Funktionenmengen können mit „Abständen" versehen werden, die den jeweils untersuchten Problemen angepaßt sind. Im Gegensatz zur Situation in den Räumen $\boldsymbol{R}^n$ kann man jedoch auf ein und derselben Funktionenmenge wesentlich verschiedene Abstände definieren, d. h. solche, die zu voneinander verschiedenen topologischen Begriffen (wie etwa beim Grenzwert oder bei der Stetigkeit) führen.

Auf der Menge $C(I)$ der auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ aus $\boldsymbol{R}$ stetigen reellwertigen Funktionen beispielsweise ist der Ausdruck

$$d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| \tag{115}$$

ein Abstand, und der diesem entsprechende Konvergenzbegriff ist nichts anderes als die *gleichmäßige Konvergenz* (vgl. 6.2.3.). Die Arbeiten von Sturm-Liouville (vgl. 8.5.1.) und die der Wahrscheinlichkeitstheoretiker führten ihrerseits dahin, daß man auf derselben Menge die „mittlere quadratische Abweichung"

$$d_2(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \tag{116}$$

einführte, welche ebenfalls ein Abstand im Fréchetschen Sinne ist; es ist sehr leicht, eine bezüglich dieses Abstandes gegen 0 konvergierende Funktionenfolge in $C(I)$ anzugeben, die nicht gleichmäßig konvergent ist.

Eine weitere durch Fréchet geklärte Besonderheit besteht darin, daß in einem metrischen Raum E das Cauchysche Konvergenzkriterium (vgl. 6.2.3.) nicht mehr zu gelten braucht: Es gibt Folgen (f_n) von Elementen aus E derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ zwar $d(f_m, f_n) \leqq \varepsilon$ gilt, wenn m und n mindestens gleich einer ganzen Zahl $n_0(\varepsilon)$ sind, aber die Folge (f_n) in E nicht konvergiert; es ist leicht, solche Beispiele für den auf $C(I)$ durch (116) definierten Abstand d_2 anzugeben.

Ein metrischer Raum, in dem das Cauchysche Kriterium gilt, wird *vollständig* genannt. Bezüglich des in (115) definierten Abstandes d ist der Raum $C(I)$ vollständig. Im Jahre 1908 zeigten E. Schmidt und Fréchet, daß der Hilbertraum (vgl. 8.5.5.) ebenfalls vollständig ist. Im Jahre 1913 bewies Hausdorff, daß jeder metri-

sche Raum E stets (und dies im wesentlichen auf nur eine Weise) als überall dichter Teilraum eines vollständigen metrischen Raumes $\hat{E}$ aufgefaßt werden kann: Auf eben diese Weise geht man vom Raum $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen mit Hilfe des Verfahrens von Méray und Cantor (vgl. Kapitel 6) zum „vervollständigten" Raum $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen über.

Ein besonders wichtiges Beispiel für diese „Vervollständigung" war bereits 1907 durch einen berühmten Satz geliefert worden, der unabhängig von E. Fischer und von F. Riesz bewiesen wurde. Die Menge der auf dem Intervall I definierten und meßbaren Funktionen, deren Quadrat im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist (vgl. Kapitel 11), ist ein bezüglich des in (116) definierten Abstands vollständiger Raum $L^2(I)$, falls man zwei Funktionen identifiziert, die sich nur auf einer Menge vom Maß null unterscheiden. Dieser Raum läßt sich mit dem Hilbertraum identifizieren, indem man jeder Funktion $f \in L^2(I)$ die Folge ihrer Fourierkoeffizienten zuordnet (wobei der Einfachheit halber $I = [0, 2\pi]$ vorausgesetzt wird). Schließlich stimmt der Raum $L^2(I)$ auch mit der Vervollständigung des mit dem Abstand d_2 versehenen metrischen Raumes $C(I)$ überein.

In den *vollständigen* metrischen Räumen verfügt man über eine Methode, die es gestattet, für eine Abbildung f eines solchen Raumes E in sich die Existenz von *Fixpunkten* zu beweisen, worunter man diejenigen Punkte $x \in E$ versteht, für welche $f(x) = x$ ist (vgl. Kapitel 10). Es handelt sich hierbei um das *Kontraktionsprinzip*, bei dem nur die Existenz einer Zahl k mit $0 < k < 1$ vorausgesetzt wird derart, daß für jedes Paar von Punkten x, y aus E die Beziehung $d(f(x), f(y)) \leqq k \cdot d(x, y)$ gilt. Ausgehend von einem beliebigen $x_0 \in E$ definiert man $x_n = f(x_{n-1})$ für $n \geqq 1$ induktiv, und man sieht unmittelbar, daß $d(x_n, x_{n-1}) \leqq k^{n-1}\, d(x_1, x_0)$ ist; hieraus schließt man, daß die Folge (x_n) das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllt, nach Voraussetzung also gegen einen Punkt x konvergiert, und es ist $f(x) = x$. Auf dieses allgemeine Prinzip lassen sich die meisten Anwendungen der Methode der „sukzessiven Approximation" (vgl. 8.1.1.) zurückführen ([D], Kapitel 10).

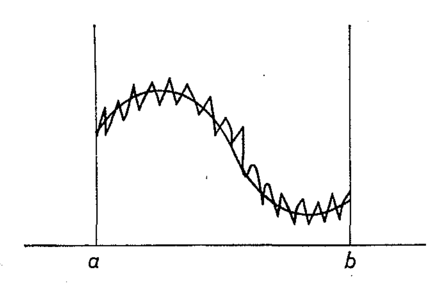
Eine weitere sehr nützliche Eigenschaft *vollständiger* metrischer Räume kommt in dem Satz zum Ausdruck, der unabhängig 1898 von Osgood für $\boldsymbol{R}$ und 1899 von Baire [4] für die Räume $\boldsymbol{R}^n$ bewiesen wurde: Ist (U_n) eine Folge von überall dichten offenen Mengen in einem vollständigen metrischen Raum E, so ist auch ihr Durchschnitt in E überall dicht.

Ein schönes Beispiel für die Anwendung dieses Satzes ist der von Banach im Jahre 1931 gefundene Beweis, daß „die meisten" stetigen Funktionen auf I in *keinem* Punkt eine endliche rechtsseitige Ableitung besitzen. Wir wählen $I = [0, 1]$ und versehen $C(I)$ mit dem Abstand d aus (115), für den der Raum $C(I)$ vollständig ist. Für jede ganze Zahl $n > 1$ betrachtet man die Menge A_n der Funktionen $f \in C(I)$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine (von f abhängende) Zahl x derart, daß $0 \leqq x \leqq 1 - (1/n)$ ist und darüber hinaus

$$|f(x') - f(x)| \leqq n(x' - x) \quad \text{für} \quad x \leqq x' \leqq x + \frac{1}{n}$$

gilt. Man kann leicht zeigen, daß A_n in $C(I)$ abgeschlossen ist und daß die zu A_n komplementäre offene Menge U_n überdall dicht ist. Dies folgt aus der Tatsache,

daß es zu jeder Funktion $f \in C(I)$ und zu jedem $M > 0$ Funktionen in $C(I)$ gibt, die zu f beliebig benachbart sind, deren rechtsseitige Ableitung jedoch in jedem Punkt existiert und dem absoluten Betrage nach größer als M ist („Sägezahnkurven"). Aufgrund des Satzes von Baire ist der Durchschnitt der U_n in $C(I)$ über-



all dicht, und aus der Definition der A_n ergibt sich, daß keine zu diesem Durchschnitt gehörende Funktion in einem Punkt aus $[0, 1]$ eine endliche rechtsseitige Ableitung besitzen kann.

Der Begriff des metrischen Raumes gestattet es, den Unterschied zwischen den in der Variationsrechnung notwendigen verschiedenen Arten von „Umgebungen" einer Funktion einfach zu formulieren. Ist zum Beispiel $C^{(r)}(I)$ die Menge der auf einem Intervall $I = [a, b]$ definierten Funktionen mit stetigen Ableitungen bis zur r-ten Ordnung, so definiert man auf $C^{(r)}(I)$ durch

$$d^{(r)}(f, g) = \sup_{x \in I} \left(|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| + \cdots + |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|\right) \tag{117}$$

einen Abstand. Bezüglich dieses Abstands ist $C^{(r)}(I)$ ein vollständiger metrischer Raum, für $s > r$ jedoch ist $C^{(s)}(I)$ bezüglich des Abstandes $d^{(r)}$ nicht vollständig, die Vervollständigung von $C^{(s)}(I)$ bezüglich $d^{(r)}$ ist $C^{(r)}(I)$.

Dies läßt sich auf verschiedene Weise verallgemeinern, insbesondere auf Vektorfelder der Klasse C^r auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit M (vgl. Kapitel 9). Hat man erst einmal auf der Menge dieser Felder einen Abstand definiert, der daraus einen vollständigen metrischen Raum macht, so kann man präzisieren, wann man eine Eigenschaft eines solchen Feldes als „generisch" auffassen will (vgl. 8.3.): Die Menge der Vektorfelder, die diese Eigenschaft besitzen, muß in dem metrischen Raum überall dicht und offen oder zumindest Durchschnitt abzählbar vieler solcher offenen Mengen sein (vgl. [1], S. 532).

Die Beschreibung derartiger Eigenschaften ist seit etwa 1960 Gegenstand sehr aktiver und fruchtbarer Untersuchungen, die von S. Smale, M. Peixoto und der Schule von A. Kolmogoroff angeregt wurden, und ist eng verknüpft mit Stabilitätsproblemen (vgl. 8.3.). Ist M zweidimensional, so kann man die „generischen" Felder dank eines schönen Satzes von Peixoto vollständig beschreiben. Für die höheren Dimensionen ist das Problem um vieles komplexer und trotz einer großen Anzahl wichtiger Teilergebnisse [1] bisher noch nicht gelöst.

8.7. Normierte Räume und Spektraltheorie

Der Begriff des metrischen Raumes ist es auch, der den Rahmen geliefert hat, in welchem sich von 1930 an die „Algebra des Unendlichen“ entwickelte, von der die Analytiker seit Beginn des Jahrhunderts geträumt hatten, nämlich die Theorie der *normierten Räume*. Die allgemeinen Begriffe und Algorithmen dieser Theorie haben es ermöglicht, einen großen Teil der Probleme der linearen Funktionalanalysis viel besser zu verstehen und sie in viel größerer Allgemeinheit und Effektivität anzugehen. Geschaffen zwischen 1910 und 1930 durch gemeinsame Anstrengungen mehrerer Analytiker, unter denen besonders F. Riesz, Helly, Hahn und Banach zu nennen sind, vereinigt diese Theorie die Ideen der linearen Algebra in ihrer koordinatenfreien Gestalt (vgl. 3.2. und 3.5.) mit dem Abstandsbegriff, entsprechend dem durch die „geometrische“ Beschreibung des Hilbertraumes von E. Schmidt und Fréchet gelieferten Modell [Bo].

Man betrachtet einen Vektorraum E über dem Körper der reellen bzw. der komplexen Zahlen und eine Funktion $x \mapsto ||x||$ auf E mit positiven Werten, welche die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

I. Die Beziehung $||x|| = 0$ ist äquivalent zu $x = 0$.

II. Es ist $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ für jeden Skalar λ.

III. Es ist $||x + y|| \leqq ||x|| + ||y||$ für je zwei Vektoren x, y aus E.

Man sagt auch, eine solche Funktion sei eine *Norm* auf E, und der mit dieser Norm versehene Raum E wird ein *normierter Raum* genannt. Die Funktion $d(x, y) = ||x - y||$ ist dann ein Abstand auf E, und ist E bezüglich dieses Abstands vollständig (vgl. 8.6.), so nennt man E einen *Banachraum*.

Die in 8.6. definierten Räume $C(I)$ und $C^{(r)}(I)$ sind Banachräume. Dasselbe gilt im Fall $1 \leqq p < \infty$ für die „l^p-Räume“, die 1913 von F. Riesz als Verallgemeinerung des Hilbertraumes eingeführt worden waren: Diesmal wird der Raum der Folgen $x = (x_n)$ von reellen (bzw. komplexen) Zahlen betrachtet, für welche die Reihe $\sum_n |x_n|^p$ konvergiert, und es wird gezeigt, daß es sich dabei um einen Vektorraum handelt, auf dem die Funktion

$$||x||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p} \tag{118}$$

eine Norm ist. Man kann auch einen Raum l^∞ definieren, der aus den beschränkten Folgen $x = (x_n)$ besteht und dessen Norm

$$||x||_\infty = \sup_n |x_n| \tag{119}$$

ist; mit dieser Norm ist der Raum der beschränkten Folgen ein Banachraum.

Eines der wesentlichen und grundlegenden Ergebnisse in der Theorie der normierten Räume ist die Charakterisierung der *stetigen linearen* Abbildungen eines normierten Raumes E in einen normierten Raum F. Eine derartige Abbildung wird durch eine Ungleichung der Gestalt

$$||A \cdot x|| \leqq c\, ||x|| \qquad \text{für jedes } x \in E \tag{120}$$

charakterisiert, wobei $c \geqq 0$ eine Konstante ist. Die kleinste Konstante c, für die eine solche Ungleichung in E gilt, wird mit $\|A\|$ bezeichnet, und es wird gezeigt, daß dies eine *Norm* auf dem Vektorraum $\mathscr{L}(E, F)$ aller stetigen linearen Abbildungen von E nach F ist; ist F vollständig, so ist auch $\mathscr{L}(E, F)$ vollständig. Die von Hellinger und Toeplitz in der Theorie des Hilbertraumes $H = l^2$ eingeführten „beschränkten" Matrizen (vgl. 8.5.5.) entsprechen genau den stetigen linearen Abbildungen von H in sich.

Ebenso ist eine bilineare Abbildung B eines Produkts $E_1 \times E_2$ von normierten Räumen in einen normierten Raum F genau dann stetig, wenn sie für alle $x_1 \in E_1$ und alle $x_2 \in E_2$ einer Ungleichung der Gestalt

$$\|B(x_1, x_2)\| \leqq c\,\|x_1\| \cdot \|x_2\| \tag{121}$$

für eine Konstante $c \geqq 0$ genügt. Ist $E_1 = E_2 = H$ (Hilbertraum) und $F = \boldsymbol{R}$, so stimmt dieser Begriff mit dem der Hilbertschen „beschränkten Bilinearform" (vgl. 8.5.5.) überein. In letzterem Fall gibt es darüber hinaus eine kanonische umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen dem Raum $\mathscr{L}(H, H)$ (den man der Einfachheit halber auch mit $\mathscr{L}(H)$ bezeichnet) und dem Raum der auf $H \times H$ stetigen Bilinearformen: Bei dieser Zuordnung entspricht jeder stetigen linearen Abbildung A von H in sich die auf $H \times H$ stetige Bilinearform

$$(x, y) \mapsto (A \cdot x \mid y)\,. \tag{122}$$

Es gibt jedoch noch eine andere kanonische umkehrbar eindeutige Zuordnung, bei welcher der Abbildung A die stetige Bilinearform $(x, y) \mapsto (x \mid A \cdot y)$ entspricht; hieraus erhält man eine in beiden Richtungen stetige lineare kanonische bijektive Abbildung von $\mathscr{L}(H)$ auf sich, die mit $A \mapsto A^*$ bezeichnet wird und durch die Beziehung

$$(A \cdot x \mid y) = (x \mid A^* \cdot y) \quad \text{für alle } x, y \text{ aus } H \tag{123}$$

definiert ist. Sie genügt den Relationen $(A_1A_2)^* = A_2^* \cdot A_1^*$ und $(A^*)^* = A$; man nennt A^* den zu A *adjungierten* Operator (ein Begriff, der dem klassischen Begriff für Matrizen entspricht, wenn H endlichdimensional, d. h. ein gewöhnlicher euklidischer Raum ist; vgl. Kapitel 3).

Der Begriff der *beschränkten* Menge in einem metrischen Raum E läßt sich in offensichtlicher Weise definieren, nämlich so, daß für eine solche Menge B die Abstände ihrer Punkte zu einem festen Punkt aus E eine beschränkte Menge von Zahlen bilden. Die Bedingung (120) besagt einfach, daß A jede beschränkte Teilmenge von E in eine beschränkte Teilmenge von F überführt.

Hier gibt es jedoch einen wesentlichen Unterschied zwischen den allgemeinen normierten Räumen und den endlichdimensionalen normierten Räumen (die notwendigerweise den Räumen $\boldsymbol{R}^n$ bzw. $\boldsymbol{C}^n$ isomorph sind in dem Sinne, daß stets eine in beiden Richtungen stetige lineare bijektive Abbildung eines derartigen Raumes auf einen $\boldsymbol{R}^n$ bzw. einen $\boldsymbol{C}^n$ existiert). In einem Raum $\boldsymbol{R}^n$ bzw. $\boldsymbol{C}^n$ ist nämlich jede beschränkte Menge relativ kompakt (d. h., ihre Abschließung ist eine kompakte Menge), während dies im allgemeinen nicht mehr zutrifft. Tatsächlich hat F. Riesz

im Jahre 1918 das folgende bemerkenswerte Kriterium gefunden: Ein normierter Raum, in dem jede beschränkte Menge relativ kompakt ist, besitzt notwendigerweise endliche Dimension ([D], Kapitel 5).

Noch bemerkenswerter ist allerdings die Entdeckung von F. Riesz, daß dieser Satz den Schlüssel zur gesamten Fredholmschen Theorie liefert und diese in beträchtlichem Umfang verallgemeinert und vereinfacht. Wie in der elementaren linearen Algebra (vgl. Kapitel 3) muß man in einen normierten Raum E über dem Körper der *komplexen* Zahlen gehen, um zu einfachen Ergebnissen zu gelangen. Die erste Bemerkung von F. Riesz ist, daß Hilberts Begriff der „vollstetigen Bilinearform" (vgl. 8.5.5.) auf eine einfachere Weise formuliert werden kann, die sich auf alle normierten Räume verallgemeinern läßt: Die einer stetigen linearen Abbildung A des Hilbertraumes H in sich entsprechende Bilinearform (122) ist genau dann im Hilbertschen Sinne vollstetig, wenn das Bild jeder beschränkten Teilmenge von H vermöge A nicht nur beschränkt, sondern *relativ kompakt* ist. Heute sagt man auch, eine stetige lineare Abbildung A eines *beliebigen* normierten Raumes E in einen normierten Raum F sei *kompakt*, wenn sie die vorstehende Eigenschaft besitzt.

F. Riesz ging also von einer kompakten linearen Abbildung A eines komplexen normierten Raumes E in sich aus (tatsächlich betrachtet er nur den Raum $C_{\boldsymbol{C}}(I)$, doch sind seine Überlegungen völlig allgemein). Er stellte sich das Ziel, wie in der elementaren Matrizentheorie (vgl. Kapitel 3) den Kern und den Bildraum des Operators $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}$ zu untersuchen, wenn der komplexe Skalar λ beliebige Werte annimmt. Seine Ergebnisse, die im wesentlichen auf dem weiter oben angegebenen Endlichkeitskriterium und auf sehr elementaren topologischen Überlegungen beruhen, beantworteten die Frage vollständig:

1. Bis auf eine höchstens abzählbare Menge S von komplexen Zahlen (die das *Spektrum* von A genannt wird) ist die Abbildung $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}$ bijektiv und in beiden Richtungen stetig.

2. Die Menge S ist in $\boldsymbol{C}$ kompakt, und jeder ihrer Punkte, mit eventueller Ausnahme von 0, liegt isoliert; 0 gehört immer zu S, falls E unendlichdimensional ist.

3. Für jedes $\lambda \neq 0$ aus S zerfällt der Raum E in die direkte Summe von zwei Teilräumen $N(\lambda)$ und $F(\lambda)$ derart, daß $N(\lambda)$ endlichdimensional und $F(\lambda)$ abgeschlossen ist. Darüber hinaus ist die Einschränkung von $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}$ auf $F(\lambda)$ eine in beiden Richtungen stetige lineare bijektive Abbildung dieses Teilraumes auf sich, während die Einschränkung von $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}$ auf $N(\lambda)$ diesen Teilraum in sich abbildet, wobei $(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})^k \cdot x = 0$ für alle $x \in N(\lambda)$ gilt, sobald $k \geqq k_0$ ist, einer Zahl, die höchstens gleich der Dimension von $N(\lambda)$ ist. Insbesondere bildet die Menge $E(\lambda)$ derjenigen $x \in E$, für welche $\mathrm{A} \cdot x = \lambda x$ ist (die Menge der zum „Eigenwert" $\lambda \neq 0$ gehörigen „Eigenvektoren" von A), einen vom Nullvektorraum verschiedenen Teilraum von $N(\lambda)$ (der also *endlichdimensional* ist).

4. Für voneinander und von null verschiedene λ, μ aus S ist $N(\mu) \subset F(\lambda)$ („Orthogonalität" der Eigenvektoren); vgl. [D], Kapitel 11.

Um die Fredholmschen Sätze in ihrer qualitativen Gestalt (d. h. ohne Einführung von Determinanten) wiederzuerhalten, genügt es zu bemerken, daß sich

aus der Stetigkeit der Funktion $K(x, y)$ auf $I \times I$ ergibt, daß der Operator, der jeder Funktion $f \in C(I)$ die Funktion

$$x \mapsto \int_a^b K(x, y) f(t) \, dy$$

zuordnet, im Banachraum $C(I)$ *kompakt* ist.

Die dem Fall $\lambda = 0$ entsprechende Situation ist vom bisher Gesagten völlig verschieden und erklärt die Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit den „Integralgleichungen erster Art" auftreten: Der Kern $A^{-1}(0)$ braucht nicht mehr endlichdimensional zu sein, und ist E ein Banachraum, so ist das Bild $A(E)$ nur dann abgeschlossen, wenn es von endlicher Dimension ist (der „ausgeartete" Fall in der klassischen Theorie).

In dem Spezialfall, daß E der *komplexe* Hilbertraum ist (der wie der reelle Hilbertraum definiert ist, nur daß die Folgen reeller Zahlen durch Folgen komplexer Zahlen (x_n) mit $\sum_n |x_n|^2$ ersetzt werden und als Skalarprodukt $(x \mid y) = \sum_n x_n \bar{y}_n$ genommen wird), vereinfacht sich die Theorie der kompakten Operatoren um vieles, falls es sich um *selbstadjungierte* kompakte Operatoren A handelt, d. h. um Operatoren A, für welche $A^* = A$ ist, wobei der Adjungierte A^* wieder durch Gleichung (123) definiert wird. Das Spektrum S besteht dann aus *reellen* Zahlen, die man in einer gegen 0 strebenden Folge (μ_n) anordnen kann, und S kann nur dann gleich null sein, wenn $A = 0$ ist; für $\mu_n \neq 0$ ist $E(\mu_n) = N(\mu_n)$, und die $E(\mu_n)$ sind paarweise orthogonal sowie zu $A^{-1}(0)$ orthogonal. Man findet somit (bis auf den Übergang vom Reellen zum Komplexen) die Hilbertschen Ergebnisse über die vollstetigen Formen wieder ([D], Kapitel 11).

Es gibt keine allgemeine Theorie der stetigen linearen Operatoren A auf einem beliebigen Banachraum E, wenn man auf die Voraussetzung verzichtet, A sei kompakt. Falls jedoch E ein komplexer Hilbertraum und A ein *selbstadjungierter* (oder allgemeiner ein *normaler*, d. h. mit seinem Adjungierten vertauschbarer) Operator ist, so liefert die Spektraltheorie, die moderne Form der Hilbertschen Theorie der „beschränkten quadratischen Formen" (vgl. 8.5.5.), eine explizite und vollständige Beschreibung dieser Operatoren, welche zahlreiche Anwendungen in der Analysis findet.

Diese Theorie verallgemeinert die klassische Theorie der selbstadjungierten Matrizen mit komplexen Elementen in einer recht unerwarteten Weise. Bekanntlich (vgl. Kapitel 3) kann eine selbstadjungierte Matrix n-ter Ordnung durch eine *unitäre* Transformation des Raumes $\boldsymbol{C}^n$ auf Diagonalform mit reellen Elementen gebracht werden. Dieses Ergebnis läßt sich folgendermaßen interpretieren: Der Raum $\boldsymbol{C}^n$ wird in die direkte Summe endlich vieler paarweise orthogonaler Teilräume E_k zerlegt; E_k kann man mit dem Raum der Abbildungen einer *endlichen* Teilmenge S_k von $\boldsymbol{R}$ in $\boldsymbol{C}$ identifizieren; der selbstadjungierte Operator A läßt jeden der Teilräume E_k stabil, und in E_k ist $A \cdot u$ für jede Abbildung $u \in E_k$ von S_k in $\boldsymbol{C}$ die Abbildung $\lambda \mapsto \lambda u(\lambda)$ von S_k in $\boldsymbol{C}$.

Eben diese ungewöhnliche Form der Reduktion selbstadjungierter Matrizen wird in der Spektraltheorie verallgemeinert. Es sei A ein selbstadjungierter stetiger

linearer Operator auf dem komplexen Hilbertraum H. Dann zerfällt H in die „Hilbertsche Summe" von abgeschlossenen paarweise orthogonalen Teilräumen H_k (wovon es im allgemeinen unendlich viele gibt). Jeder dieser Teilräume H_k läßt sich mit einem Raum $L^2(\sigma_k)$ identifizieren, wobei σ_k ein Stieltjessches Maß (vgl. Kapitel 11) auf $\boldsymbol{R}$ mit *kompaktem* Träger S_k ist. Der Raum $L^2(\sigma_k)$ besteht aus den auf $\boldsymbol{R}$ definierten bezüglich σ_k quadratisch integrierbaren Funktionen (wobei zwei Funktionen identifiziert werden, wenn sie sich nur auf einer Menge vom Maß null bezüglich σ_k unterscheiden); die Vereinigung der S_k ist eine beschränkte Teilmenge von $\boldsymbol{R}$. Schließlich läßt der Operator A jeden Teilraum H_k invariant, und wenn man H_k mit $L^2(\sigma_k)$ identifiziert, so ist $\mathrm{A} \cdot u$ für jedes $u \in L^2(\sigma_k)$ die Funktion $\xi \mapsto \xi u(\xi)$.

Wie man sieht, geht die Lebesgue-Stieltjessche Integrationstheorie wesentlich in diese Beschreibung ein, und das ist selbst dann der Fall, wenn sich A aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten ergibt. Für weitere technische Details über die Spektraltheorie und deren Anwendungen, insbesondere für die präzisen Definitionen der Begriffe, von denen soeben die Rede war, sei der Leser auf das Literaturverzeichnis verwiesen ([D], Kapitel 15, 21, 22 und 23).

8.8. Neuere Entwicklungen

Die oben dargelegten Begriffe sind seit 1930 zur Grundlage der gesamten Funktionalanalysis sowie ihrer von Tag zu Tag zahlreicheren Anwendungen in allen Gebieten der reinen Mathematik und der experimentellen Naturwissenschaften geworden. Sie entwickelten und verzweigten sich in mehrere Richtungen. Wir müssen uns damit begnügen, auf einige davon sehr kurz einzugehen, ohne auch nur genaue Definitionen vieler darin vorkommender Begriffe geben zu können; für diese Definitionen und alle technischen oder historischen Details können wir den interessierten Leser nur auf das Literaturverzeichnis verweisen.

Wir untersuchen die folgenden Probleme:

1. Frécheträume,
2. Dualität und Distributionen,
3. Normierte Algebren,
4. Kommutative harmonische Analysis,
5. Nichtlineare Gleichungen.

8.8.1. *Frécheträume*

Für viele Anwendungen, insbesondere in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, sind die normierten Räume nicht allgemein genug. Anstelle einer einzigen Norm auf einem Vektorraum E muß man oft eine unendliche Folge von „Halbnormen" p_n betrachten; das sind Funktionen mit positiven Werten, welche die Eigenschaften II und III der Normen (vgl. 8.7.), jedoch nicht die Eigenschaft I

besitzen. Mit anderen Worten, es kann zu jeder ganzen Zahl n in E von null verschiedene Vektoren x geben, die der Beziehung $p_n(x) = 0$ genügen; es wird jedoch gefordert, daß $x = 0$ ist, wenn die Beziehung $p_n(x) = 0$ für *jedes* n besteht. Auf E kann man dann mit Hilfe der Formel

$$d(x, y) = \frac{p_1(x-y)}{1+p_1(x-y)} + \frac{1}{2!}\frac{p_2(x-y)}{1+p_2(x-y)} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} + \cdots \quad (124)$$

einen Abstand definieren, und E wird ein *Fréchetraum* genannt, wenn E bezüglich dieses Abstandes *vollständig* ist (vgl. 8.6.).

Auf die ersten Räume dieses Typs war Fréchet 1906 gestoßen [11], beispielsweise auf den Vektorraum $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ *aller* Folgen $x = (x_n)$ reeller Zahlen, mit $p_n(x) = |x_n|$. Der Konvergenzbegriff bezüglich dieser Topologie ist die *einfache* Konvergenz: Eine Folge $(x^{(m)})_{m \geqq 1}$ konvergiert gegen x, wenn die Folge $(x_n^{(m)})_{m \geqq 1}$ für jedes n gegen x_n konvergiert. Ein anderes Beispiel ist der Raum E der auf der offenen Kreisscheibe $|z| < 1$ in $\boldsymbol{C}$ *holomorphen* Funktionen; man wählt hier $p_n(f) = \sup\limits_{|z| \leqq 1-(1/n)} |f(z)|$. Eine Folge (f_m) konvergiert bezüglich dieser Topologie gegen f, wenn sie auf jeder *kompakten* Teilmenge der offenen Kreisscheibe (doch nicht notwendig auf der ganzen Kreisscheibe) gleichmäßig gegen f konvergiert. Ein drittes, sehr wichtiges Beispiel ist der Raum $\mathscr{E}(\boldsymbol{R})$ der auf $\boldsymbol{R}$ *unendlich oft differenzierbaren* Funktionen; hier setzt man $p_n(f) = \sup\limits_{|x| \leqq n,\, k \leqq n} |\mathrm{D}^k f(x)|$. Eine Folge $(f_m)_{m \geqq 1}$ konvergiert bezüglich dieser Topologie gegen f, wenn die Ableitungen $\mathrm{D}^k f_m$ für *jede* ganze Zahl $k \geqq 0$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\boldsymbol{R}$ gleichmäßig gegen $\mathrm{D}^k f$ konvergieren.

8.8.2. Dualität und Distributionen

Eine fundamentale Eigenschaft des Hilbertraumes H, die 1907 unabhängig von Fréchet und von F. Riesz entdeckt wurde, besteht darin, daß sich jede *stetige Linearform* $F: H \to \boldsymbol{R}$ auf genau eine Weise in der Gestalt $x \mapsto (x \mid a)$ schreiben läßt, wobei a ein Vektor aus H ist. Die Untersuchung der stetigen Linearformen (oder, wie man um 1900 sagte, der „stetigen linearen Funktionale") auf unterschiedlichen Funktionenvektorräumen ist ein Problem, das seit Beginn des Jahrhunderts im Mittelpunkt zahlreicher Arbeiten stand. Außer im Falle des Hilbertraumes wurden die markantesten Ergebnisse von F. Riesz erzielt. Einerseits bewies er 1910, womit er einem früheren Ergebnis von Hadamard eine endgültige Form gab, daß sich jede stetige Linearform auf dem Raum $C(I)$ in der Gestalt $f \mapsto \int_I f\, d\sigma$ schreiben läßt, wobei σ ein Stieltjessches Maß ist (vgl. Kapitel 11). Andererseits zeigte er für $1 \leqq p < +\infty$, daß jede auf dem Banachraum l^p (vgl. 8.3.) stetige Linearform in der Gestalt $x \mapsto \sum a_n x_n$ geschrieben werden kann, wobei der Vektor $a = (a_n)$ zu l^q mit $q = p/(p-1)$ gehört; für $p = 1$ ist $q = \infty$ [27].

Die stetigen Linearformen $F: E \to \boldsymbol{R}$ (bzw. $F: E \to \boldsymbol{C}$) auf einem reellen oder komplexen normierten Raum E bilden selbst einen Banachraum $\mathscr{L}(E, \boldsymbol{R})$ (bzw.

$\mathcal{L}(E, \boldsymbol{C})$) bezüglich der weiter oben (vgl. 8.7.) definierten Norm $||F||$. Man nennt diesen Raum den zu E *dualen Raum* und bezeichnet ihn allgemein mit E'. Ist E von endlicher Dimension n, so ist n auch die Dimension von E' (vgl. Kapitel 3). Die Ergebnisse von F. Riesz über die Räume $C(I)$ und l^p zeigen jedoch, daß es im allgemeinen keine Isomorphie zwischen E und E' gibt; der Fall des Hilbertraumes erweist sich als singulär. Diese Ergebnisse haben die klassische lineare Algebra beeinflußt, in der man (unter dem Einfluß der Euklidischen Geometrie) der schlechten Gewohnheit verfallen war (ohne sich darüber klar zu sein), jeden endlichdimensionalen Vektorraum mit seinem dualen Raum zu identifizieren; Etwa seit 1930 hat man erkannt, daß dies das beste Mittel war, sich das Verständnis des Begriffs der Dualität zu verbauen.

Der Satz von F. Riesz über den zum Raum $C(I)$ der stetigen Funktionen dualen Raum (der sich auf die Räume stetiger Funktionen auf einem beliebigen kompakten Raum verallgemeinern läßt) ist in der Maß- und Integrationstheorie ein Wendepunkt gewesen, in der er zur Definition des Maßbegriffes dienen kann. Diese Auffassung ist, beginnend gegen 1937 mit Sobolev, durch das Studium der stetigen Linearformen auf dem Fréchetraum $\mathcal{E}(\boldsymbol{R})$, den Räumen $\mathcal{E}(\boldsymbol{R}^n)$ und später auf anderen Räumen unendlich oft differenzierbarer Funktionen, beträchtlich vertieft worden. Die Linearformen, die man dabei erhielt, sind unter dem Namen *Distributionen* bekannt geworden; sie verallgemeinern also den Maßbegriff. Sie haben sich seit 1950 in allen Untersuchungen der Funktionalanalysis als außerordentlich nützlich erwiesen, insbesondere in der Theorie der *linearen* partiellen Differentialgleichungen, die in 20 Jahren größere Fortschritte gemacht hat als während des ganzen Jahrhunderts vorher ([D], Kapitel 17 und 23).

8.8.3. Normierte Algebren

Der normierte Raum $C(I)$ der stetigen Funktionen ist nicht nur ein Vektorraum, sondern auch eine *Algebra* über $\boldsymbol{R}$ (vgl. Kapitel 3), da das Produkt zweier stetiger Funktionen wieder eine stetige Funktion ist; darüber hinaus zeigt die Definition (115) der Norm, daß für je zwei Elemente f, g aus $C(I)$ die Beziehung $||fg|| \leqq$ $\leqq ||f|| \cdot ||g||$ gilt. Ebenso ist die Menge $\mathcal{L}(E)$ der stetigen linearen Abbildungen eines normierten Raumes E in sich eine (im allgemeinen nicht kommutative) Algebra bezüglich der Verknüpfung $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{AB}$ dieser Abbildungen, und für die Norm $||\mathrm{A}||$ (vgl. 8.7.) gilt ebenfalls die Beziehung $||\mathrm{AB}|| \leqq ||\mathrm{A}|| \cdot ||\mathrm{B}||$. Diese Beispiele sind Spezialfälle des allgemeinen Begriffs der *normierten Algebra*, d. h. einer Algebra über $\boldsymbol{R}$ oder $\boldsymbol{C}$, die (als Vektorraum aufgefaßt) mit einer Norm $||x||$ versehen ist, welche der zusätzlichen Bedingung

$$||xy|| \leqq ||x|| \cdot ||y|| \tag{125}$$

genügt.

Nach ihrer Einführung durch I. Gel'fand im Jahre 1941 hat die Theorie dieser Algebren in der Funktionalanalysis rasch eine beachtliche Stellung gewonnen. Mit ihrer Hilfe gelang es, die Hilbertsche Spektraltheorie (vgl. 8.7.) besser zu verstehen und zu verallgemeinern, so daß sie auf einen der tiefliegendsten Zweige der

modernen Mathematik, die Untersuchung der linearen Darstellungen Liescher Gruppen (die man auch „nichtkommutative harmonische Analysis" nennt; [D], Kapitel 15 und 21), anwendbar wurde.

8.8.4. Kommutative harmonische Analysis

Es sei daran erinnert, daß Euler im achtzehnten Jahrhundert die Vorstellung hatte, gewöhnliche oder auch partielle Differentialgleichungen mit Hilfe von Integralen zu lösen, die von einem Parameter abhängen, und daß Laplace diese Idee systematisch weiterentwickelte (vgl. 1.5.). Dies lief darauf hinaus, einer für $x \geqq 0$ definierten sowie geeigneten Stetigkeits- und Wachstumsbedingungen (die damals nicht präzisiert worden waren) genügenden Funktion f einen Ausdruck zuzuordnen, der heute die „Laplacetransformierte" von f genannt wird:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-xs} f(x)\, dx\,. \tag{126}$$

Fourier seinerseits gelangte dahin, in den Formeln für die Koeffizienten der Fourierreihe einer auf einem Intervall $[0, A]$ definierten Funktion,

$$a_n = \int_0^A f(x) \cos \frac{n\pi x}{A}\, dx\,, \tag{127}$$

n und A gleichzeitig und unter Beibehaltung ihres Verhältnisses gegen $+\infty$ streben zu lassen, was ihn dazu führte, für f den heute „Fouriertransformierte" von f genannten Ausdruck

$$\mathcal{F}f(t) = \int_0^\infty f(x) \cos tx\, dx \tag{128}$$

zu definieren, dessen Verwandtschaft mit (127) offensichtlich ist.

Er fügte dem eine „Umkehrformel" bei, in der die Funktion f durch ihre Fouriertransformierte bestimmt wird (dabei wird der Begriff einer Funktion so erweitert, daß die Summe ihrer Fourierreihe mit erfaßt wird), und er schrieb die Umkehrformel in der Gestalt

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \int_0^{+\infty} \cos u(x-t)\, du\,. \tag{129}$$

Er selbst und seine Zeitgenossen, insbesondere Cauchy und Poisson, sahen in diesen Transformationen ein Hilfsmittel, um wie Laplace Lösungen von partiellen Differentialgleichungen zu erhalten, die von willkürlichen Funktionen abhängen. Beispielsweise integrierte Laplace im Jahre 1809 die Wärmeleitungsgleichung

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ vermittels der Formel

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2) f(x + 2\xi\sqrt{t})\, d\xi\,, \tag{130}$$

wobei f „willkürlich“ ist; diese Formel wurde von Poisson 1815 umgeformt:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) f(\xi)\, d\xi\,. \tag{131}$$

Fourier fand folgende allgemeinere Aussage: Will man ein Integral der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \cdots \tag{132}$$

mit konstanten Koeffizienten in der Gestalt $u(x, t) = e^{-mt} \cos \xi x$ erhalten, so muß man

$$m = \xi^2 - b\xi^4 + c\xi^6 - \cdots = P(\xi) \tag{133}$$

wählen. Dies führte ihn unter Verwendung eines „Superpositionsprinzips“, das auf D. Bernoulli zurückgeht, dazu,

$$u(x, t) = \iint e^{-P(\xi)t} \varphi(\alpha) \cos(\xi - \alpha)\, x\, d\alpha\, d\xi \tag{134}$$

als Lösung vorzuschlagen.

Später erkannte man, daß es vorteilhafter ist, die „Fouriertransformation“ mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion zu definieren:

$$\mathcal{F}f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi ixt} f(x)\, dx\,. \tag{135}$$

Dann erhält die Umkehrformel die Gestalt

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi itx}\, \mathcal{F}f(t)\, dt\,, \tag{136}$$

und im Laufe des neunzehnten und zwanzigsten Jahrhunderts beschäftigt man sich besonders mit den Bedingungen, denen f genügen muß, damit diese Formeln einen Sinn haben und gültig sind.

Zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts hatte Parseval (formal) die folgende Identität zwischen einer auf $[-\pi, +\pi]$ definierten Funktion f und ihren Fourierkoeffizienten bewiesen:

$$\begin{gathered} c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \qquad (n \in \mathbf{Z})\,, \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt\,. \end{gathered} \tag{137}$$

Im Jahre 1912 bewies Plancherel eine entsprechende Formel für die Fourierintegrale,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}f(t)|^2 \, dt \,, \tag{138}$$

die beispielsweise gilt, wenn f integrierbar, beschränkt und außerhalb eines beschränkten Intervalls null ist. Diese Formel sollte im weiteren große Bedeutung erlangen, da sie die Theorie der Fourierintegrale mit der Theorie des Hilbertraumes verbindet.

Die Arbeiten von H. Weyl über die Lieschen Gruppen (1925) haben die Tatsache verdeutlicht, daß in (135) die Abbildungen $x \mapsto e^{-2\pi i x t}$ Homomorphismen der additiven Gruppe $\boldsymbol{R}$ in die multiplikative Gruppe $\boldsymbol{U}$ der komplexen Zahlen vom absoluten Betrag 1 sind, ebenso wie ihre Einschränkungen $n \mapsto e^{-2\pi i n t}$ auf die additive Gruppe $\boldsymbol{Z}$ der ganzen Zahlen. Es handelt sich dabei also um Analoga zu den *Charakteren* der endlichen kommutativen Gruppen, wie sie in der Zahlentheorie seit Dirichlet verwendet werden (vgl. Kapitel 5 und 3.4.2.).

Schließlich ließen eben diese Arbeiten die Bedeutung einer im wesentlichen seit Mitte des neunzehnten Jahrhunderts bekannten, doch bis dahin wenig untersuchten Formel erkennen. Setzt man für zwei Funktionen f, g, die denselben Bedingungen wie in (138) genügen,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t) \, g(t) \, dt \tag{139}$$

(*Faltung* von f und g), so ergibt sich für die Fouriertransformierten die Beziehung

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) \,. \tag{140}$$

Alle diese Ergebnisse wurden im Zeitraum 1935—1945 in einer umfassenden und eleganten Theorie zusammengefaßt, die in enger Verbindung mit der Theorie der lokal kompakten kommutativen Gruppen und der Theorie der normierten Algebren steht, der kommutativen harmonischen Analysis. Sie vereint Fourierreihen und Fourierintegrale und erlangte rasch einen zentralen Platz in der modernen Mathematik. Ihre zahlreichen Anwendungen reichen von der Theorie der algebraischen Zahlen (vgl. Kapitel 5) bis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. Kapitel 12).

Darüber hinaus hat diese Disziplin seit 1950 dank der Theorie der Distributionen ihren Rahmen erweitern können. Dadurch wurde es ihr möglich, die Ideen von Laplace, Fourier, Poisson und Cauchy auf höherem und allgemeinerem Niveau zur Lösung von gewöhnlichen und von linearen partiellen Differentialgleichungen wieder aufzugreifen. Dank der neuen und leistungsfähigen, aus der Theorie der Distributionen hervorgegangenen Werkzeuge wie Sobolev-Räume und Pseudodifferentialoperatoren ist man jetzt in der Lage, allgemeine Theorien zu entwickeln, welche elliptische oder hyperbolische lineare Gleichungen (oder Gleichungssysteme) von beliebiger Ordnung zum Gegenstand haben, während man sich bis 1940 nahezu ausschließlich auf Gleichungen zweiter Ordnung beschränken mußte ([D], Kapitel 22 und 23).

8.8.5. *Nichtlineare Gleichungen*

Obwohl es seit Poincaré eine allgemeine Theorie der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt (vgl. 8.3. und 8.6.), kann man hinsichtlich der partiellen Differentialgleichungen nicht davon sprechen. Nur die vollständig integrierbaren Pfaffschen Systeme (vgl. 8.1.2.), welche die Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen unmittelbar verallgemeinern (die Integralkurven werden durch Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension ersetzt), wurden etwa 1948, Anregungen von Ehresmann und Reeb folgend, global studiert, und diese Untersuchungen entwickeln sich gegenwärtig sehr aktiv in Verbindung mit Ideen aus der algebraischen Topologie; es handelt sich hierbei um die sogenannte Theorie der *Blätterungen.*

Dagegen gibt es für die allgemeinen nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, außer für sehr spezielle Beispiele, kaum weiterführende Untersuchungen. Ein solches Beispiel ist die Gleichung der Minimalflächen (vgl. Kapitel 9). Die einzigen, ein wenig allgemeineren Existenzsätze, die man bisher erhalten hat, sind Aussagen, die sich aus einer scharfsinnigen Methode topologischer Natur herleiten lassen, der Methode von Leray-Schauder, die auf einer Ausdehnung des Indexbegriffs (vgl. Kapitel 10) auf Banachräume beruht. Doch gibt es selbst für relativ einfache Gleichungen wie die Gleichungen der Hydrodynamik viskoser Flüssigkeiten eine große Zahl offener Probleme.

8.9. Literatur

[B] M. Brelot, Historical Introduction, Centro internazionale matematico estivo (C.I.M.E.) 1969, 1º Ciclo: Potential Theory, Cremonese, Roma 1970.

[Bo] N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques, Neuauflage, Hermann, Paris 1974.

[Bo][1] Deutsche Übersetzung der ersten Auflage. Elemente der Mathematikgeschichte, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen und Zürich 1971.

[D] J. Dieudonné, Eléments d'Analyse, Bd. I—VIII, Gauthier-Villars, Paris 1969—1978.

[D][1] Deutsche Übersetzung: Grundzüge der Analysis, Bd. 1—8, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971 bis 1983.

[H] E. Hellinger und O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften 2 C 13, Teubner, Leipzig 1928 (Nachdruck: Chelsea, New York 1953).

[Hi] E. Hille, Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, J. Wiley, New York 1976.

[M] A. Monna, Dirichlet's Principle, Oosthoek, Scheltema and Holkema, Utrecht 1975.

[S] A source book in classical analysis, Hrsg. G. Birkhoff, Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.) 1973.

[1] R. Abraham, Foundations of Mechanics, W. Benjamin, New York-Amsterdam 1967, 2. Aufl. (mit J. E. Marsden) 1978.

[2] A. Andronov, E. Leontovich, I. Gordon, A. Maier, Qualitative Theory of Second-order-dynamic Systems (Übersetzung aus dem Russischen (Moskau 1966) von D. Louvish), J. Wiley, New York-Toronto 1973.

[3] V. Arnold et A. Avez, Théorie ergodique des systèmes dynamiques, Gauthier-Villars, Paris 1967.

[4] R. Baire, Sur les fonctions de variables réelles, Annali di Math. (3) *3* (1899), 1—123.

[5] I. Bendixson, Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math. *24* (1901), 1—88.

[6] G. D. Birkhoff, Collected Mathematical Papers, Amer. Math. Soc., Providence (R. I.), 3 Bde., 1950.

[7] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Math. *116* (1966), 135—157.

[8] A. L. Cauchy, Oeuvres complètes, 27 Bde. (2 Reihen), Gauthier-Villars, Paris 1882—1974.

[9] A. Denjoy, Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, J. Math. (9) *11* (1932), 333—375.

[10] J. Fourier, Oeuvres, 2 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1888—1890.

[11] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo *22* (1906), 1—74.

[12] L. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten, Crelle's J. *56* (1866), 121—160.

[13] G. Green, Mathematical Papers (Hrsg. N. Ferrers), Nachdruck, Hermann, Paris 1903.

[14] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, J. Wiley, New York 1964.

[15] E. Ince, Ordinary Differential Equations, Nachdruck Dover, New York 1956.

[16] J. P. Kahane et Y. Katznelson, Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques, Studia Math. *26* (1966), 305—306.

[17] S. Kowalewska, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Crelle's J. *80* (1875), 1—32.

[18] J. L. Lagrange, Oeuvres, 14 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1867—1892.

[19] S. Lefschetz, Differential Equations: Geometric Theory, Interscience, New York 1957.

[20] M. Liapounoff, Problème général de la stabilité du mouvement, Nachdruck Univ. Press Princeton 1949.

[21] J. Liouville. Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même èquation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable. J. Math. (1) *2* (1837), 17—35.

[22] R. Lipschitz, Sur la possibilité d'intéger complètement un systeme donné d'équations différentielles, Bull. Sci. Math. *10* (1876), 149—159.

[23] C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton's Potential, Teubner, Leipzig 1877.

[24] P. Painlevé, Oeuvres, 3 Bde., Hrsg. CNRS, Paris 1973—1975.

[25] H. Poincaré, Oeuvres, 11 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1916—1956.

[25 bis] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1893—1899.

[26] B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 2. Aufl., Teubner, Leipzig 1892.

[27] F. Riesz, Oeuvres complètes, 2 Bde., Akademiai Kiadó, Budapest 1960.

[28] A. Schwartz, A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds, Amer. J. Math. *85* (1963), 453—458.

[29] H. A. Schwarz, Gesammelte mathematische Abhandlungen., 2 Bde., Springer, Berlin 1890.

[30] S. Sternberg, Celestial Mechanics, 2 Bde., Benjamin, New York-Amsterdam 1969.

[31] V. Volterra, Opere matematiche, 5 Bde., Accad. dei Lincei, Roma 1954—1962.

Zusatz bei der deutschen Ausgabe:

[32] J. Dieudonné, History of Functional Analysis, North Holland Publ. Comp., Amsterdam-New York-Oxford 1981.

9. Differentialgeometrie

von Paulette Libermann

9.0. Einführung

Dieses Kapitel beschreibt die Geschichte der „klassischen" Differentialgeometrie vom Beginn des achtzehnten bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts. Diese Geschichte ist eng mit der Geschichte der Infinitesimalrechnung und der Geschichte der „analytischen Geometrie" einerseits (vgl. Kapitel 1 und 2), mit der der Astronomie, der Mechanik und der Physik andererseits verknüpft. Die Differentialgeometrie war während dieser beiden Jahrhunderte durch ein Übermaß an Ideen charakterisiert, deren Darlegung uns bisweilen wenig exakt erscheint; die Fortschritte der Analysis führten allmählich zu größerer Strenge in den Überlegungen, doch wurde selbst gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts der „lokale" Aspekt nicht immer klar vom „globalen" unterschieden.

Wegen der sehr großen Reichhaltigkeit des Themas haben wir unsere Untersuchung auf eine begrenzte Anzahl von Gegenständen beschränkt; dabei haben wir diejenigen bevorzugt, die sich ins zwanzigsten Jahrhundert hinein fortsetzen. Wir konnten nicht auf die Arbeiten von S. Lie und E. Cartan über die Transformationsgruppen und das Gebiet, das man heute die Theorie der „Lieschen Gruppen" nennt, eingehen; diese hat sich im zwanzigsten Jahrhundert zu einer selbständigen Disziplin entwickelt, die in der heutigen Mathematik eine zentrale Stellung einnimmt (zu diesen Begriffen siehe [D], Kapitel 16, 19 und 21, und zu ihrer Geschichte [Bo]).

Die wesentlichen Entwicklungsetappen der Differentialgeometrie sind die folgenden:

1. Im siebzehnten Jahrhundert schufen Fermat und Descartes die Koordinatenmethode (oder „analytische Geometrie"), während Leibniz und Newton die Algorithmen der Infinitesimalrechnung entwickelten, die es dann ermöglichen sollten, Kurven und Flächen unter dem Gesichtspunkt ihrer Differenzierbarkeitseigenschaften zu untersuchen. Die ebenen Kurven wurden in dieser Hinsicht (Tangenten, Wendepunkte, Krümmung) vor allem von Kepler, Descartes, Fermat und Pascal untersucht; das Problem des Pendels führte Huygens zur Einführung der Begriffe

Evolute und Evolvente. Im achtzehnten Jahrhundert und zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts befassen sich die Arbeiten Clairauts, Eulers, Monges, Meusniers, Dupins, Serrets und Frenets mit der Untersuchung von Kurven und Flächen, die in den dreidimensionalen Raum eingebettet sind.

2. Im Jahre 1827 wurden von Gauß neue Wege in der Differentialgeometrie eröffnet; er führte die „innere Geometrie" einer Fläche ein, indem er „krummlinige Koordinaten" anstelle der kartesischen Koordinaten benutzte und zeigte, daß die Krümmung nur vom Flächenelement ds^2 abhängt (vgl. 9.3.). Hier hat man den Entwurf der Vorstellung der „lokalen Karte" in einem Punkt einer Mannigfaltigkeit, die in der modernen Differentialgeometrie und Topologie zu einem fundamentalen Begriff geworden ist. Die sogenannte Gauß-Bonnetsche Formel, die den Flächeninhalt eines geodätischen Dreiecks mit der Gaußschen Krümmung der Fläche verknüpft, ist das erste Resultat, das die Krümmung mit globalen Eigenschaften verbindet; andere Eigenschaften dieser Art erhielt Bonnet bei seiner Untersuchung der geodätischen Linien (vgl. 9.4.2.). Die Untersuchung von Flächen konstanter negativer Krümmung erlaubte es Beltrami, den Zusammenhang zwischen der Differentialgeometrie und den sogenannten „nichteuklidischen" Geometrien von Lobačevskij und Bolyai (vgl. 9.4.3.) aufzuzeigen. Die *Leçons sur la théorie des surfaces* von Darboux [3] legen diese Resultate der klassischen Differentialgeometrie in ihrer bestausgearbeiteten Form dar. Man findet dort unter anderem einen systematischen Gebrauch der Methode des „begleitenden Dreibeins", die von Ribaucour und Darboux selbst stammt; im zwanzigsten Jahrhundert sollte E. Cartan diese Methode wesentlich verallgemeinern und sie sich mit großem Erfolg bei der Untersuchung der Lieschen Gruppen und der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zunutze machen ([D], Kapitel 20).

3. Um die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts gab Riemann der Differentialgeometrie einen neuen Impuls, indem er einerseits unter dem Einfluß der Mechanik und der Physik Räume beliebiger Dimension zu untersuchen begann, andererseits in Weiterentwicklung Gaußscher Ideen von vornherein Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension betrachtete, die nicht als in einen euklidischen Raum eingebettet vorausgesetzt werden. Dies ist der Beginn der modernen Differentialgeometrie (vgl. 9.5.).

Die unmittelbar an Riemann anknüpfenden Geometer (insbesondere Christoffel) beschäftigten sich vornehmlich damit, diejenigen der Riemannschen Sätze, welche die Eigenschaften von Flächen betreffen, auf n-dimensionale Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Etwas später führte Ricci systematisch den Tensorkalkül ein, der eine breite Anwendung in der Relativitätstheorie finden sollte, während Levi-Civita den Begriff der Parallelverschiebung entdeckte, der auf den Begriff des *Zusammenhangs* führt. Der Begriff des Zusammenhangs wurde von E. Cartan allgemein gefaßt und mit Hilfe der Methode des beweglichen Koordinatensystems (repère) weiterentwickelt; um die Mitte unseres Jahrhunderts sollte es die Theorie der Faserbündel C. Ehresmann und seinen Nachfolgern ermöglichen, eine Synthese der Arbeiten E. Cartans zu schaffen, welche die übliche Form der Darstellung der modernen Differentialgeometrie geworden ist ([Sp]; [D], Kapitel 20).

Im Laufe ihres zweihundertjährigen Bestehens hat die Differentialgeometrie nie ihren Kontakt mit den Anwendungen in den Experimentalwissenschaften verloren: Die Differentialgeometrie der Kurven wird in der Kinematik, die der Flächen in der Theorie der Zahnradgetriebe, in der Optik und in der Kapillartheorie angewandt, und auf die fundamentale Rolle, welche die pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten in der allgemeinen Relativitätstheorie spielen, haben wir schon hingewiesen.

9.1. Kurven im dreidimensionalen euklidischen Raum

In Fortsetzung der Arbeiten von Descartes untersuchte Clairaut in seinen 1731 veröffentlichten *Recherches sur les courbes à double courbure* Kurven im dreidimensionalen Raum, indem er sie auf die drei Koordinatenebenen projizierte. Diese Kurven wurden so genannt, weil sie „an der Krümmung zweier [ebener] Kurven beteiligt sind"; Clairaut untersuchte ihre Tangenten (ohne deren Gleichung zu analysieren), ihre Rektifikation sowie gewisse Arten der Erzeugung von Raumkurven, beschränkte sich aber auf Eigenschaften erster Ordnung (d. h. auf solche, bei denen nur erste Ableitungen eine Rolle spielen). Einen entscheidenden Fortschritt in dieser Untersuchung machte Monge [7] in seiner 1771 vorgelegten, 1785 veröffentlichten Abhandlung, welche sich mit Evoluten, Krümmungsradien und den verschiedenen Arten von Wendepunkten der Kurven mit doppelter Krümmung befaßt. In der Normalebene P einer Kurve C in einem nichtsingulären Punkt M zeichnete Monge eine „Achse" Δ aus, welche der Schnitt der Ebene P mit einer „unendlich benachbarten" Normalebene ist. Diese Geraden Δ sind Tangenten an ein und dieselbe Kurve Γ, erzeugen also eine sogenannte *abwickelbare Fläche* Σ, für welche die Ebene P in jedem Punkt von Δ tangential ist. Monge gab die Gleichung der Normalebene P im Punkt M mit den Koordinaten x', y', z' mit Hilfe der Differentiale in der Gestalt

$$(z - z')\,dz' + (y - y')\,dy' + (x - x')\,dx' = 0$$

oder mit Hilfe der Ableitungen in der Gestalt

$$\big(z - \psi(z')\big)\,\psi'(z') + \big(y - \varphi(x')\big)\,\varphi'(x') + x - x' = 0$$

an, wobei die Kurve C durch $y' = \varphi(x'), z' = \psi(x')$ definiert ist. Er erhielt eine Formel für den Krümmungsradius, den Abstand zwischen M und Δ:

$$\varrho = \frac{\big(1 + (\varphi'(x'))^2 + (\psi'(x'))^2\big)^{3/2}}{\sqrt{(\varphi''(x'))^2 + (\psi''(x'))^2 + \big(\psi'(x')\,\varphi''(x') - \varphi(x')\,\psi''(x')\big)^2}}\,.$$

Monge bemerkte, daß eine Kurve im Raum jede ihrer einzelnen Krümmungen oder alle beide im selben Punkt verlieren kann, d. h., daß es vorkommen kann, daß drei aufeinanderfolgende Elemente derselben Kurve zweifacher Krümmung sich in einer Ebene befinden oder daß zwei dieser Elemente in einer Geraden liegen. Ein „Element" war dabei für Monge eine „unendlich kleine" Sehne, und was er damit meinte, ist das, was wir heute dadurch ausdrücken, daß in einem Punkt die Win-

dung (Torsion) null ist oder daß sowohl Krümmung als auch Windung null sind. Monge hatte also bereits eine Vorstellung vom Begriff der Windung, ohne dies präzise auszudrücken; ebensowenig stellte er die Gleichung der Schmiegebene auf (die im wesentlichen bereits in der Arbeit von Johann Bernoulli über die Geodätischen am Ende des siebzehnten Jahrhunderts enthalten war (vgl. 9.2.4.)). Es war Lancret, ein Schüler Monges, der 1805 dessen Arbeit in diesen beiden Punkten vollendete (der Terminus Torsion wurde 1819 von Vallée eingeführt).

Im Anschluß an Euler, der die Formel $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ für das Bogenelement einer Raumkurve aufgestellt hatte, definierte Cauchy in seinen *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géometrie* (1826) ([2], (2), Bd. V) die in der Schmiegebene gelegene „Hauptnormale", deren Richtungskosinusse zu $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$ proportional sind; der Parameter s auf der Kurve ist dabei die Bogenlänge, und von den drei Variablen wird keine bevorzugt. Seine Methoden (welche die Taylorentwicklung von x, y, z als Funktionen von s in einer Umgebung eines Punktes benutzen) sind genauer als die von Monge. Er erhält für die Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ den Ausdruck

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

und für die Windung $\frac{1}{\tau}$ den Ausdruck $\frac{d\Omega}{ds}$, wobei Ω der Winkel zwischen der Schmiegebene der Kurve und einer festen Ebene ist.

Unabhängig von Cauchy bewiesen Frenet (1847) und Serret (1850) die nach ihnen benannten Formeln: Sind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinusse der Tangente, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die der Hauptnormalen, $\cos L$, $\cos M$, $\cos N$ die der „Binormalen" (der Normalen der Schmiegebene), so gilt

$$\frac{d(\cos\alpha)}{ds} = \frac{\cos\lambda}{\varrho}, \qquad \frac{d(\cos\beta)}{ds} = \frac{\cos\mu}{\varrho}, \qquad \frac{d(\cos\gamma)}{ds} = \frac{\cos\nu}{\varrho},$$

$$\frac{d(\cos L)}{ds} = \frac{\cos\lambda}{\tau}, \qquad \frac{d(\cos M)}{ds} = \frac{\cos\mu}{\tau}, \qquad \frac{d(\cos N)}{ds} = \frac{\cos\nu}{\tau},$$

$$\frac{d(\cos\lambda)}{ds} = -\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos L}{\tau}, \qquad \frac{d(\cos\mu)}{ds} = -\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{\cos M}{\tau},$$

$$\frac{d(\cos\gamma)}{ds} = -\frac{\cos\gamma}{\varrho} - \frac{\cos M}{\tau}.$$

Diese Formeln nehmen durch die Darbouxsche Einführung des „begleitenden Dreibeins", das in jedem Punkt M der betrachteten Kurve C als Ursprung angebracht ist und als Achsen die Tangente, die Hauptnormale und die Binormale hat, eine einfachere Gestalt an; die *Serret-Frenetschen Formeln* lauten dann in

vektorieller Gestalt:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\varrho}, \qquad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{\varrho} - \frac{\vec{b}}{\tau}, \qquad \frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\tau},$$

wobei $\vec{t}$, $\vec{n}$ und $\vec{b}$ Einheitsvektoren auf den Dreibeinachsen sind.

Die Cauchyschen Existenz- und Einzigkeitssätze für die Lösungen von Differentialgleichungen (vgl. 8.1.1.) ermöglichen den Beweis, daß die Kurve bis auf eine euklidische Bewegung durch die Vorgabe der Funktionen ϱ und τ (als Funktionen von s) bestimmt ist.

9.2. Die Untersuchung von in den dreidimensionalen euklidischen Raum eingebetteten Flächen vor Gauß

Diese Periode der Geschichte der Differentialgeometrie wird durch Euler (der durch seine Beschäftigung mit der Mechanik und der Variationsrechnung zu geometrischen Untersuchungen geführt wurde), durch Monge (der in vielen Gebieten der Geometrie bahnbrechend wirkte) und seine Schüler (insbesondere Meusnier und Dupin) beherrscht.

9.2.1. *Bestimmung der Tangentialebene einer Fläche*

Der Wegbereiter war A. Parent, der sich 1700 ausschließlich mit der Bestimmung der Gleichung für die kartesischen Koordinaten der Tangentialebene an eine Sphäre und an andere Flächen speziellen Typs beschäftigte. Dann kamen die Beiträge von Clairaut, Euler und Monge; doch nahmen alle diese Autoren implizit die Existenz einer Tangentialebene in jedem nichtsingulären Punkt der Fläche an. Lacroix zeigt 1803, daß unter allen durch einen Punkt (x, y, z) einer Fläche gehenden Ebenen eine solche existiert, für welche der Abstand dieser Ebene von einem zu (x, y, z) genügend „benachbarten" Punkt (x_1, y_1, z_1) der Fläche als Funktion des Abstandes dieser beiden Punkte von maximaler infinitesimaler Ordnung ist.

Schließlich zeigten Dupin 1831 und Cauchy 1826 explizit, daß die Tangenten an jede auf der Fläche verlaufende, durch einen gegebenen Punkt (x, y, z) gehende Kurve in ein und derselben Ebene liegen, welche als *Tangentialebene* definiert wird. Zu diesem Zweck definierte Cauchy die Fläche durch eine Gleichung $u(x, y, z) = 0$, die Kurve durch die Gleichungen $u(x, y, z) = 0$, $v(x, y, z) = 0$, und zeigte, daß die Ebene mit der Gleichung

$$(\xi - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial u}{\partial y} + (\zeta - z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

die Tangente an jede durch (x, y, z) gehende Kurve in der Fläche enthält.

9.2.2. *Krümmung der Flächen*

Ihre Untersuchung wurde von Euler 1760 aufgenommen, der in seiner Abhandlung *Recherches sur la courbure des surfaces* ([4], (1), Bd. XXVIII, S. 1–22) die Krümmung der verschiedenen Schnitte der Fläche mit Normalebenen dieser Fläche durch einen gegebenen Punkt P berechnete. Mit Hilfe recht komplizierter trigonometrischer Methoden bewies er das jetzt nach ihm benannte *Theorem*: Wenn nicht alle Normalenschnitte durch den Punkt P in P dieselbe Krümmung haben, so existieren in der Tangentialebene in P zwei durch P gehende zueinander orthogonale Geraden (die sogenannten *Hauptrichtungen*) derart, daß die durch diese Geraden gehenden Normalenschnitte einem Maximum $1/f$ und einem Minimum $1/g$ der Krümmung entsprechen. Für einen Normalenschnitt, der mit der ersten Hauptrichtung den Winkel φ einschließt, wird die Krümmung dann durch

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \varphi}{f} + \frac{\sin^2 \varphi}{g}$$

gegeben (wir schreiben im folgenden R_1 und R_2 statt f und g).

Meusnier verbesserte 1776 die Eulerschen Resultate dadurch, daß er die Krümmung beliebiger Ebenenschnitte durch einen Punkt P der Fläche in diesem Punkt P berechnete. Seine Methoden sind einfacher als die Eulerschen: Er betrachtete die Taylorentwicklung von z als Funktion von x und y und berechnete R_1 und R_2 als Funktionen der zweiten partiellen Ableitungen von z nach x und y. Als Folgerung erhielt er den heute als *Theorem von Meusnier* benannten Satz: Die Krümmung des Schnitts der Fläche im Punkt P mit einer Ebene, die den Winkel ω mit der durch dieselbe Tangente gehenden Normalebene einschließt, ist gleich dem Quotienten aus der Krümmung des Normalenschnitts und $\sin \omega$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sin \omega}\left(\frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}\right).$$

Infolgedessen befinden sich die Schmiegkreise der verschiedenen Schnitte der Fläche in P, welche dieselbe Tangente haben, auf ein und derselben Sphäre. Der Ausdruck $\frac{\sin \omega}{\varrho}$ wird *Normalkrümmung* des Ebenenschnitts genannt, ein Begriff, der sich auf Raumkurven ausdehnen läßt, wobei ω den Winkel zwischen der Schmiegebene in P und der Normalebene bezeichnet.

Die von Meusnier aufgestellten Formeln ermöglichten es ihm zu beweisen, daß die einzigen Flächen, für welche beide Krümmungsradien stets einander gleich sind (einer von Monge eingeführten Terminologie folgend nennt man einen Punkt, in dem die Krümmungsradien übereinstimmen, einen *Nabelpunkt*), Sphären oder Ebenen sind. Selbstverständlich war die Beweisführung nur lokal, denn es wurde vorausgesetzt, daß sich z als Funktion von x und y ausdrücken läßt.

Monge, der Professor an der Ecole du Génie in Mézières war, veröffentlichte 1784 eine Arbeit über das An- und das Abböschungsproblem, in der er an die Untersuchung der Normalen einer Fläche herangeführt wurde. Monge nannte die Kurven,

die in jedem ihrer (von Nabelpunkten verschiedenen) Punkte tangential zu einer der von Euler definierten Hauptrichtungen sind, *Krümmungslinien* und zeigte, daß die Normalen einer Fläche längs einer Krümmungslinie eine abwickelbare Fläche erzeugen; er zeigte ferner, daß die beiden Punkte, in denen jede Normale durch die beiden „unendlich benachbarten" Normalen auf den Krümmungslinien, die durch den betrachteten Punkt verlaufen, geschnitten wird, die beiden Endpunkte der von Euler definierten Radien der „größten" und der „kleinsten" Krümmung sind.

Im Jahre 1813 lieferte Dupin bedeutende Beiträge zur Untersuchung der Flächen. Er führte den Begriff der *konjugierten Richtungen* in einem Punkt ein, und zwar in folgender Weise. Die Tangentialebenen einer Fläche längs einer auf der Fläche gelegenen Kurve Γ haben als Einhüllende eine abwickelbare Fläche; in einem Punkt P von Γ wird die charakteristische Gerade (siehe 9.2.3.) *konjugiert* zur Tangente von Γ in P genannt. Dupin führte dann in jedem Punkt P der Fläche, in dem die Hauptkrümmungen von null verschieden sind, eine in der Tangentialebene in P gelegene Kurve ein, die sogenannte *Indikatrix*: Haben die Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 dasselbe Vorzeichen, so ist die Indikatrix die Ellipse mit dem Zentrum P und der Gleichung

$$\frac{x^2}{|R_1|} + \frac{y^2}{|R_2|} = 1$$

bezüglich der Hauptrichtungen; ist $R_1 R_2 < 0$, so bilden die beiden Hyperbeln mit den Gleichungen

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm 1$$

und dem Zentrum P die Indikatrix. Diese Kurven besitzen die beiden folgenden Eigenschaften: (1) Wenn eine Tangente der Fläche im Punkt P die Indikatrix in m und m' schneidet, so hat die Krümmung des durch diese Tangente gehenden Normalenschnitts im Punkt P den Absolutbetrag $(Pm)^2$. (2) Die im oben genannten Sinn konjugierten Richtungen sind in bezug auf die Indikatrix konjugiert.

In der Umgebung eines Punktes mit $R_1 R_2 < 0$ werden zwei Familien von *Asymptotenlinien* definiert; dies sind die Kurven, die in jedem Punkt tangential zu einer diesem Punkt zugeordneten Indikatrix sind.

In späteren Abhandlungen untersuchte Dupin die *dreifach orthogonalen Flächensysteme*; es handelt sich dabei um drei einparametrige Familien von Flächen mit der Eigenschaft, daß durch jeden Punkt eines Teils des Raums genau eine Fläche jeder Familie geht und diese drei Flächen paarweise orthogonal sind. Dupin zeigte dann, daß diese drei Flächen sich längs Krümmungslinien schneiden. Der Beweis dieses Satzes wurde später von Darboux verbessert.

Schließlich stellte Dupin fest, daß die Flächen, bei denen die beiden Familien von Krümmungslinien Kreise sind, als Enveloppen der drei feste Sphären berührenden Sphären definiert werden können; diese Flächen werden *Dupinsche Zykliden* genannt.

9.2.3. *Partielle Differentialgleichungen und Differentialgeometrie*

Unter den differentialgeometrischen Fragen mit direktem Bezug zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen finden sich die Theorie der Enveloppen und die Existenzsätze für Flächen, die gewissen Bedingungen genügen; die zweite dieser Fragen wurde besonders in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts behandelt und wird uns später beschäftigen (vgl. 9.4.2.).

Die Theorie der Enveloppen von ebenen Kurven wurde zu Ende des siebzehnten Jahrhunderts von Leibniz und Johann Bernoulli entwickelt und von Euler und Lagrange in der Theorie der „singulären" Integrale von Differentialgleichungen benutzt (vgl. 1.5.). In der Folge verallgemeinerte Lagrange diese Theorie in seinen Untersuchungen über die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung auf Enveloppen von Familien von Flächen (vgl. 1.6.). Monge nahm diese Frage in mehr systematischer Weise wieder auf. Er betrachtete zunächst eine einparametrige Familie von Flächen, die durch eine Gleichung $V(x, y, z, a) = 0$ definiert ist, in welcher der Parameter a vorkommt. Eine „unendlich benachbarte" Fläche schneidet die Fläche mit der Gleichung $V(x, y, z, a) = 0$ längs der *charakteristischen Kurve*, die durch die Gleichungen $V(x, y, z, a) = 0$, $\frac{\partial V}{\partial a}(x, y, z, a) = 0$ definiert ist. Durch Elimination von a aus diesen beiden Gleichungen erhält man den Ort der Charakteristiken oder die *einhüllende Fläche* der Familie. Monge nahm an, in jedem Punkt der charakteristischen Kurve hätten die Fläche $V(x,y,z,a) = 0$ und ihre Enveloppe dieselbe Tangentialebene; er zeigte, daß die charakteristischen Kurven ein und dieselbe Kurve berühren, die außerdem der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}(x, y, z, a) = 0$ genügt.

Monge interessierte sich speziell für Enveloppen einparametriger Familien von Ebenen; die charakteristischen Kurven sind dann Geraden, die eine abwickelbare Fläche erzeugen und im allgemeinen Tangenten einer Raumkurve sind, welche *Gratlinie* (*Rückkehrkante*) der Fläche genannt wird (und zwar, weil der Schnitt der abwickelbaren Fläche mit einer Normalebene in einem Punkt dieser Kurve in diesem Punkt einen Rückkehrpunkt hat). Die Gratlinie kann sich auf einen Punkt reduzieren (im Fall eines Kegels); wenn dieser Punkt „ins Unendliche gerückt" ist, hat man einen Zylinder. Monge zeigte, daß sich eine abwickelbare Fläche auf die Ebene „abwickeln" läßt (vgl. 9.4.3.), und löste somit ein von Euler ([7], S. 98—99) gestelltes Problem. Schließlich bewies er, daß die abwickelbaren Flächen mit einer Gleichung $z = f(x, y)$ diejenigen sind, welche der partiellen Differentialgleichung $rt - s^2 = 0$ in den Euler-Mongeschen Bezeichnungen

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

genügen.

Monge hat eine Serie von Abhandlungen über Flächen eingeleitet, welche gewissen geometrischen Bedingungen genügen; sie setzte sich das gesamte neunzehnte Jahrhundert hindurch fort. Er war besonders an Enveloppen von einparametrigen Familien von Sphären interessiert; dies sind Flächen, die dadurch charakterisiert

werden können, daß sie eine Familie von Kreisen als Krümmungslinien besitzen; speziell untersuchte er die *Röhrenflächen* (das sind Enveloppen einer Familie von Sphären mit konstanten Radien). Es war auch Monge, der die *Kehlungsflächen* studierte (eine solche Fläche wird von einer ebenen Kurve erzeugt, deren Ebene ohne zu gleiten, d. h. ohne Schlupf, auf einem Zylinder rollt). Von den zahlreichen Problemen dieser Art, die nach Monge behandelt wurden, nennen wir nur die Theorie der *Weingartenschen Flächen*, die durch die Eigenschaft definiert werden, daß eine Relation zwischen ihren Hauptkrümmungen existiert (siehe [3]).

Es sei bemerkt, daß in unserer Epoche festgestellt wurde, wie schwierig der Begriff der Enveloppe zu formulieren ist, vor allem wenn man ihn auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension erweitern will; er ist mit den Begriffen des Rangs und der Singularität einer differenzierbaren Abbildung verknüpft, die zum Gegenstand vieler Abhandlungen der heutigen Mathematik geworden sind (siehe z.B. [11]).

Wir erinnern daran, daß es Monge durch seine Arbeiten über die Enveloppen möglich wurde, der Lagrangeschen Methode zur Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, z, p, q) = 0$ eine geometrische Formulierung zu geben (vgl. 1.6.), indem er den Begriff des „charakteristischen Streifens" herausarbeitete, der dann von Cauchy und seinen Nachfolgern weiterentwickelt wurde (vgl. 8.1.2.). Dieselben Ideen wurden von Monge zur Integration gewisser Gleichungen zweiter Ordnung angewandt, die man die *Monge-Ampèreschen Gleichungen*

$$rt - s^2 + Ar + Bs + Ct + D = 0$$

nennt, wobei A, B, C, D Funktionen von x, y, z, p, q sind ([7], [9]).

9.2.4. *Variationsrechnung und Differentialgeometrie*

Wir erinnern daran (vgl. 1.8.), daß sich am Ende des siebzehnten Jahrhunderts Johann Bernoulli das Ziel gestellt hatte, die „kürzeste Linie zwischen zwei Punkten einer konvexen Fläche" zu finden. Er war damit erstmalig auf den Begriff der Schmiegebene (als Ebene, die durch einen Punkt und zwei „unendlich benachbarte" Punkte einer Kurve geht) gestoßen und hatte gezeigt, daß diese Ebene senkrecht zu der Fläche sein muß, in der die gesuchten Kurven liegen. Euler erhielt mit Hilfe seiner allgemeinen Theorie recht komplizierte Gleichungen zur Bestimmung der „Linien kürzester Länge", doch sollte die Theorie dieser Kurven (die von Liouville „Geodätische" genannt wurden) erst mit Gauß und Jacobi wesentliche Fortschritte machen (vgl. 9.3., 9.4.).

Der Begriff der *Minimalfläche* verallgemeinert den der Geodätischen auf das Zweidimensionale: Minimalflächen sind die Flächen, die minimalen Flächeninhalt unter allen Flächenstücken besitzen, welche von einer gegebenen geschlossenen Kurve begrenzt werden. Die von Lagrange erbrachten Vereinfachungen der allgemeinen Theorie der Variationsrechnung ermöglichten es ihm bereits 1760, die partielle Differentialgleichung für eine Minimalfläche aufzustellen, deren Gleichung in der Gestalt $z = f(x, y)$ geschrieben vorausgesetzt wird:

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0\,. \tag{1}$$

Meusnier zeigte 1785, daß die Minimalflächen diejenigen Flächen sind, für welche $R_2 = -R_1$ in jedem Punkt gilt. Sophie Germain definierte etwas später die *mittlere Flächenkrümmung* als den Mittelwert $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ der Hauptkrümmungen; daher sind die Minimalflächen die Flächen mit der mittleren Krümmung null. Euler hatte im wesentlichen bereits festgestellt, daß die einzige Minimalfläche unter den Rotationsflächen das *Katenoid* (die Kettenfläche) ist; sie entsteht durch Rotation der Kettenlinie mit der Gleichung $x = a \coth(z/a)$, $y = 0$ um die z-Achse. Meusnier fand dieses Resultat erneut; außerdem entdeckte er ein anderes „elementares" Beispiel einer Minimalfläche, nämlich die *gerade Schraubenfläche*, eine Regelfläche, die von einer zur Achse einer Schraubenlinie senkrechten Geraden erzeugt wird, welche durch die Achse und die Schraubenlinie geht. Catalan sollte 1842 zeigen, daß die gerade Schraubenfläche die einzige Regelfläche ist, die eine Minimalfläche ist.

Monge versuchte 1784 die Gleichung (1) zu integrieren. Seine Abhandlung enthielt jedoch Fehler, die 1787 von Legendre berichtigt wurden; bei dieser Gelegenheit führte Legendre die heute als *Legendretransformation* bezeichnete Umformung ein, einen Spezialfall einer Transformation durch reziproke Polaren (vgl. Kapitel 3); er wandte diese Transformation zur Integration der Gleichung (1) an. Später zeigte Monge [7], daß die Minimalflächen als *Translationsflächen* betrachtet werden können, d. h., daß sie eine Parameterdarstellung (vgl. 9.3.) der Gestalt

$$x = f_1(u) + g_1(v), \qquad y = f_2(u) + g_2(v), \qquad z = f_3(u) + g_3(v)$$

zulassen; er mußte dabei jedoch voraussetzen, daß die Kurven mit den Gleichungen

$$x = f_1(u), \qquad y = f_2(u), \qquad z = f_3(u)$$

und

$$x = g_1(v), \qquad y = g_2(v), \qquad z = g_3(v).$$

imaginär sind.

Die Theorie der Minimalflächen ist seitdem Gegenstand einer großen Anzahl von Abhandlungen geblieben, die gleichzeitig die Geometrie, die Analysis und die Topologie betrafen; einige der besten Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts (O. Bonnet, Weierstraß, Riemann, Schwarz, Lie) haben dazu beigetragen. Unter den nach 1800 entdeckten einfachen Beispielen für Minimalflächen seien die Scherksche Fläche (1834) mit der kartesischen Gleichung $e^{az} = \cos ax/\cos ay$ und die Ennepersche Fläche (1864), deren Krümmungslinien ebene algebraische Kurven der Ordnung drei sind, genannt.

Zur Zeit sind die Minimalflächen und ihre Verallgemeinerungen auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension ein Thema, das auch weiterhin sehr aktiv untersucht wird (Nitsche, Ossermann, Chern, Calabri, Bombieri u. a.; siehe [8]).

9.3. Der Beitrag von Gauß zur Untersuchung der Flächen

Zwar publizierte Gauß nur wenige Arbeiten zur Differentialgeometrie, doch ist die Bedeutung seines Werkes beträchtlich. Seine fundamentale Arbeit *Disquisitiones*

generales circa superficies curvas (Allgemeine Flächentheorie) wurde 1827 lateinisch publiziert und in viele Sprachen übersetzt ([5], [5][1]; [Sp], Bd. 2); diesem Artikel ging eine „Neue Untersuchungen von gekrümmten Flächen" genannte Skizze voraus, die 1825 geschrieben, aber erst 1901 veröffentlicht wurde. Bis zum Erscheinen dieser Arbeit stellte man die in den $\boldsymbol{R}^3$ eingebetteten Flächen entweder durch eine Gleichung $W(x, y, z) = 0$ dar oder dadurch, daß eine der Variablen x, y, z als Funktion der beiden anderen angesehen wurde. Euler hatte bemerkt, daß die Koordinaten eines Punktes einer Fläche als Funktionen zweier unabhängiger Variabler aufgefaßt werden können. Es war aber Gauß, der systematisch eine solche Parameterdarstellung benutzte (die Parameter bezeichnete er meist mit p, q; um eine Verwechslung mit den Euler-Mongeschen Bezeichnungen für die partiellen Ableitungen zu vermeiden, schreiben wir im folgenden u, v anstelle von p, q).

Damit hat man den Entwurf des Begriffs der *lokalen Karte* der modernen Differentialgeometrie (d. h. einer injektiven stetigen Abbildung einer offenen Teilmenge des $\boldsymbol{R}^2$ in die Fläche). Aber in Wirklichkeit drückte Gauß die Koordinaten eines Punktes x, y, z der Fläche als Funktion von u, v aus, ohne zu präzisieren, auf welchem Gebiet des $\boldsymbol{R}^2$ diese Funktionen definiert sind; er setzte stets implizit voraus, daß sie so oft wie notwendig differenzierbar sind. Die Variablen u und v werden traditionsgemäß (Gaußsche) „krummlinige Koordinaten" und die Kurven mit der Gleichung $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ „Koordinatenkurven" genannt. Durch Identifizierung mit der Gleichung einer Tangentialebene drückte Gauß die Richtungskosinusse der Flächennormalen als Funktionen der ersten partiellen Ableitungen von x, y, z nach u und v aus; er erhielt das Quadrat des Bogenelements (oder „ds^2") längs einer Kurve, wobei u und v als Funktion eines Parameters gegeben sind, in der Gestalt

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \tag{2}$$

mit

$$E = a^2 + b^2 + c^2\,, \qquad F = aa' + bb' + cc'\,, \qquad G = a'^2 + b'^2 + c'^2;$$

die Funktionen a, b, c, a', b', c' von u und v sind durch

$$dx = a\,du + a'\,dv\,, \qquad dy = b\,du + b'\,dv\,, \qquad dz = c\,du + c'\,dv$$

definiert; in moderner vektorieller Schreibweise mit $\vec{P} = (x, y, z)$:

$$E = \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial \vec{P}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial v}, \qquad G = \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial v}\right)^2 \quad \text{(Skalarprodukte).}$$

Die rechte Seite in (2) wird heute *erste Fundamentalform der Fläche* genannt.

Gauß betrachtete hierauf eine Transformation $(u, v) \mapsto (u', v')$ der krummlinigen Koordinaten (das entspricht dem modernen Begriff eines Übergangs der lokalen Karte), spezifizierte aber nie den Gültigkeitsbereich der Variablentransformation. Unter Ausnutzung der Invarianz von ds^2 drückte er E, F, G mit Hilfe der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u'}{\partial u}, \qquad \frac{\partial u'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial v'}{\partial u}, \qquad \frac{\partial v'}{\partial v},$$

der analogen Funktionen E', F', G', die den Variablen u', v' entsprechen, und den Sinus der Winkel zwischen den vier Koordinatenkurven aus. Seine Vertrautheit mit der algebraischen Theorie der quadratischen Formen (siehe Kapitel 3 und 5) ermöglichte es ihm zu zeigen, daß $EG - F^2 = J^2(E'G' - F'^2)$ gilt, wobei J die Determinante

$$\frac{\partial u'}{\partial u} \cdot \frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial u'}{\partial v} \cdot \frac{\partial v'}{\partial u}$$

ist.

Inspiriert durch seine Abhandlungen in der Astronomie und der Geodäsie führte Gauß den Begriff der *sphärischen Abbildung* von Flächen ein: Jedem Punkt (x, y, z) einer Fläche $\Sigma \subset \boldsymbol{R}^3$ ordnete er einen Punkt (X, Y, Z) der Einheitssphäre $\boldsymbol{S}_2$ zu, wobei X, Y, Z die Komponenten des Normaleneinheitsvektors auf Σ sind (den beiden Orientierungen der Normalen entsprechen zwei Diametralpunkte der Sphäre). Ist eine Orientierung auf Σ gewählt, so erhält man eine Abbildung $\mu: \Sigma \to \boldsymbol{S}_2$, die heute *Gaußsche Abbildung* genannt wird. Dieser Begriff wurde inzwischen auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension ausgedehnt und wird in der modernen Theorie der Faserbündel angewandt [Sp].

Für jede beschränkte Teilmenge U von Σ definierte Gauß die „totale Krümmung" oder „Integralkrümmung" von U als den Flächeninhalt von $\mu(U)$. Weiter führte er in jedem Punkt P von Σ das „Krümmungsmaß" in P ein; dies ist der Grenzwert $k(P)$ des Quotienten

$$\frac{\text{totale Krümmung von } U}{\text{Flächeninhalt von } U},$$

wenn der Flächeninhalt des den Punkt P enthaltenden Gebiets U gegen null strebt. Wenn man beachtet, daß die Tangentialebenen von Σ im Punkt P und von $\boldsymbol{S}_2$ im Punkt $\mu(P)$ parallel sind, so sieht man, daß der Grenzwert des obigen Quotienten gleich dem Limes des Quotienten der Flächeninhalte der Projektionen von $\mu(U)$ und von U auf ein und dieselbe Ebene sind. Unter der Voraussetzung, Σ sei durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ gegeben, bestimmte Gauß den Wert von k zu

$$k = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2}{\left(1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^2}; \tag{3}$$

dies ermöglichte es ihm, k mit den von Euler (vgl. 9.2.2.) definierten Hauptkrümmungen in Beziehung zu setzen. Er erhielt

$$k = \frac{1}{R_1 R_2} \tag{4}$$

(dies war schon 1815 von Olinde Rodrigues gezeigt worden, dessen Arbeit Gauß unbekannt geblieben war). Man nennt heute $k(P)$ die *totale* oder *Gaußsche Krümmung* im Punkt P.

Um den Wert von k mit Hilfe von „kummlinigen Koordinaten" u, v zu berechnen, führte Gauß drei neue Funktionen D, D', D'' ein, die man in den Bezeichnungen der Vektorrechnung als Skalarprodukte

$$D = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial u^2}, \qquad D' = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial u \cdot \partial v}, \qquad D'' = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial v^2} \tag{5}$$

beschreiben kann, wobei $\vec{n}$ das Vektorprodukt $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial v}$, also der Normalenvektor auf Σ ist; später wurde die Form $D \cdot du^2 + 2D' \cdot du \cdot dv + D'' \cdot dv^2$ *zweite Fundamentalform* der Fläche genannt.

Gauß zeigte, daß

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \tag{6}$$

gilt; anschließend erhielt er das berühmte „theorema egregium": Die Gaußsche Krümmung k läßt sich allein mit Hilfe der Funktionen E, F, G und ihrer Ableitungen ausdrücken. Daher haben, wenn eine Fläche Σ auf eine Fläche Σ' abwickelbar ist (vgl. 9.4.3.), die Flächen Σ und Σ' in einander entsprechenden Punkten dieselbe Gaußsche Krümmung. Insbesondere ergibt sich wiederum, daß für eine abwickelbare Fläche $k = 0$ gilt.

Gauß hat auch die *Geodätischen* einer Fläche untersucht, wobei er das Resultat von Johann Bernoulli über die Charakterisierung dieser Kurven als Kurven, deren Hauptnormale normal zur Fläche ist, von neuem bewies. Unter Benutzung der Differentialgleichung der Geodätischen zeigte er folgendes: Zeichnet man auf einer Fläche unendlich viele Geodätische gleicher Länge, die von ein und demselben Punkt ausgehen (oder normal zu ein und derselben Kurve sind), so liegen die Endpunkte auf einer zu jeder Geodätischen senkrechten Kurve. Daraus schloß er, daß man lokal krummlinige Koordinaten so wählen kann, daß die „Koordinatenkurven" eine Familie von ein und demselben Punkt entspringenden Geodätischen, die durch ihre Länge parametrisiert sind, und deren orthogonale Trajektorien sind; dann ist $E = 1$, $F = 0$, und der Ausdruck für die Gaußsche Krümmung lautet

$$k = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}, \tag{7}$$

wobei G eine Funktion von u allein ist. Durch Betrachtung eines hinreichend kleinen Dreiecks auf der Fläche Σ, dessen Seiten geodätische Bögen sind, und Berechnung der „Integralkrümmung" $\iint k\, d\sigma$ dieses Dreiecks erhielt Gauß einen seiner berühmtesten Sätze: Der Exzeß (Überschuß) der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks auf einer Fläche positiver Krümmung über 180° bzw. der Defekt der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks auf einer Fläche negativer Krümmung zu 180° ist gleich dem Flächeninhalt der Teilmenge der Sphäre, welche das Bild des Dreiecks bei der sphärischen Abbildung ist. Mit anderen Worten, sind A, B, C die Winkel des Dreiecks, so gilt

$$A + B + C - \pi = \iint k\, d\sigma\,. \tag{8}$$

Er erweiterte diesen Satz auf geodätische Polygone und wendete ihn auf praktische Probleme der Geodäsie an. Unter Benutzung abgebrochener Reihenentwicklungen verglich er die Winkel eines ebenen Dreiecks mit denen eines geodätischen Dreiecks auf der Fläche, dessen Seiten dieselben Längen haben. Im Fall der Sphäre stimmen seine Formeln bis auf Terme vierter Ordnung mit den von Legendre 1787 erhaltenen Formeln überein. Es ist kaum daran zu zweifeln, daß diese Untersuchungen mit den Gaußschen Überlegungen über die nichteuklidischen Geometrien in Beziehung stehen (vgl. Kapitel 13); sie bilden Vorstufen zu den Vorstellungen, aus denen später die „Modelle" dieser Geometrien entstehen sollten (vgl. 9.4.3.).

Schließlich sei bemerkt, daß Gauß in seiner Flächentheorie wie in seinem gesamten Werk um größere Strenge als seine Vorgänger bemüht war (obgleich es seiner Definition der Gaußschen Krümmung noch an Präzision zu mangeln scheint); unter anderem befaßte er sich mit Fragen der Existenz der Tangentialebene und bemerkte, daß die „Stetigkeit der Krümmung" beispielsweise in der Spitze eines Kegels unterbrochen ist.

9.4. Die Nachfolger von Gauß

9.4.1. Krümmung und bewegliches Reper

Im Jahre 1848 verallgemeinerte Ossian Bonnet den Satz von Gauß über den Flächeninhalt eines geodätischen Dreiecks. Für eine auf einer Fläche Σ gelegene Kurve C definierte er die *geodätische Krümmung* $1/\varrho_g$ von C in einem Punkt M von C als die Krümmung der orthogonalen Projektion von C auf die Tangentialebene zu Σ in M; für eine Geodätische gilt also $1/\varrho_g = 0$ in jedem Punkt. Ist U eine von einer geschlossenen Kurve C begrenzte Teilmenge von Σ, so gilt nach Bonnet die Formel

$$\int\limits_C d\omega - \int\limits_C \frac{ds}{\varrho_g} = \iint\limits_U k\, d\sigma\,, \tag{9}$$

wobei k die Gaußsche Krümmung, $d\sigma$ das Flächenelement von U und ω der Winkel der Tangente an C mit einer festgelegten Richtung ist. Im Fall eines geodätischen Dreiecks erhält man wiederum die Formel (8); deshalb wird (9) die *Gauß-Bonnetsche Formel* genannt.

Die Bedeutung dieser Formel von lokalem Charakter ist daraus ersichtlich, daß sie im zwanzigsten Jahrhundert zu einer globalen Formel verallgemeinert wurde. Es sei Σ eine orientierbare, kompakte, randlose Fläche; dann gibt es eine Triangulierung auf Σ, d. h. eine Zerlegung in von krummlinigen (nicht notwendig geodätischen) Dreiecken begrenzte Gebiete (vgl. Kapitel 10). Durch Anwendung der Formel (9) auf jedes Dreieck erhalten wir den *Gauß-Bonnetschen Satz*

$$\iint\limits_\Sigma k\, d\sigma = 2\pi(n_2 - n_1 + n_0);$$

dabei sind n_2, n_1, n_0 die Anzahlen der Dreiecksflächen, der Kanten bzw. der Ecken der Triangulierung. Da die linke Seite dieser Gleichung von der Triangulierung unabhängig ist, ist es auch die rechte; die ganze Zahl $\chi(\Sigma) = n_2 - n_1 + n_0$, die heute *Euler-Poincaré-Charakteristik* genannt wird, hängt folglich nur von der Topologie von Σ und nicht vom Flächenelement ds^2 ab (vgl. Kapitel 10). Damit hat man eine wesentliche Beziehung zwischen der Differentialgeometrie und der algebraischen Topologie erhalten, welche zahlreiche Verallgemeinerungen besitzt (vgl. Kapitel 10).

Kehren wir zu den Arbeiten von O. Bonnet zurück. In Verallgemeinerung des Satzes von Meusnier (vgl. 9.2.2.) zeigte er, daß die Normalkrümmung in jedem Punkt einer Fläche für alle Kurven, welche die gleiche Tangente haben, dieselbe ist (sie läßt sich mit Hilfe des Quotienten der beiden Fundamentalformen ausdrücken) und daß die geodätische Krümmung allein von der ersten Fundamentalform abhängt (dies folgt aus (9) und dem „theorema egregium" von Gauß). Eine einfache Interpretation dieses Resultats wurde später von Darboux gegeben, indem er in jedem Punkt einer auf einer Fläche gelegenen Kurve ein *bewegliches Dreibein* anbrachte, von dem eine Achse tangential zur Kurve und eine andere normal zur Fläche ist. Diese Idee, die unabhängig von Darboux auch von Ribaucour (1886) entwickelt wurde, wurde im zwanzigsten Jahrhundert von E. Cartan bedeutend verallgemeinert und von ihm (unter der Bezeichnung der Methode des *beweglichen Repers* (repère mobile)) in sehr fruchtbarer Weise zur Untersuchung der Lieschen Gruppen und der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten angewandt; dies führte schließlich mit C. Ehresmann zur modernen Theorie der Hauptfaserbündel und der Zusammenhänge (siehe [D], Kapitel 16 und 20).

Ein anderer Beitrag von O. Bonnet zur Untersuchung von Flächen bestand in der Aufstellung des sogenannten Fundamentalsatzes über die *Existenz* von Flächen mit den beiden vorgegebenen Fundamentalformen (vgl. 9.3.)

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \qquad (\text{mit } EG - F^2 > 0)$$

und

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2\,.$$

Mainardi (1856) und dann Codazzi (1867) hatten Verträglichkeitsbedingungen zwischen den sechs Funktionen E, F, G, D, D', D'' und ihren Ableitungen aufgestellt. O. Bonnet bewies 1867, daß diese Gleichungen (die sogenannten *Gauß-Codazzischen Gleichungen*) für die Existenz einer Fläche, deren beide Fundamentalformen in einem lokalen Koordinatensystem diese Funktionen als Koeffizienten haben, hinreichend sind; weiterhin ist eine solche Fläche bis auf eine euklidische Bewegung eindeutig bestimmt; der Beweis dieses Satzes ist ein Spezialfall des Satzes von Frobenius über die vollständig integrierbaren Differentialgleichungen (vgl. 8.1.2.). Dieser Satz wurde auf Hyperflächen im $\boldsymbol{R}^n$ verallgemeinert und unter Voraussetzungen über den Zusammenhang zu einem globalen Resultat erweitert.

9.4.2. Geodätische

Im Jahre 1836 untersuchte Jacobi, unter welchen Bedingungen eine Geodätische γ_0, die zwei Punkte P, P' einer Fläche verbindet, die kürzeste Verbindung zwischen

diesen Punkten ist; wenn $t \mapsto \gamma_0(t)$ die Parameterdarstellung dieses Bogens ist, so betrachtete er eine Familie $t \mapsto \gamma_u(t)$ von zu γ_0 „benachbarten“ Geodätischen, die von einem Parameter u abhängt. Dies definiert in jedem Punkt von γ_0 einen Tangentialvektor $J(t) = \frac{\partial}{\partial u} \gamma_u(t)$ der Fläche; man nennt heute ein solches Vektorfeld $t \mapsto J(t)$ längs γ_0 ein *Jacobifeld.* Man kann zeigen, daß diese Felder einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen, deren Koeffizienten nur von der Gaußschen Krümmung der Fläche längs γ_0 abhängen, also (wenn die Geodätischenfamilie variiert) einen vierdimensionalen Vektorraum bilden. Existiert ein Jacobifeld längs γ_0, das nicht identisch null ist, welches aber in den beiden Punkten P, P' null wird, so nennt man P und P' über γ_0 *konjugiert;* anschaulich sind Paare von konjugierten Punkten solche Paare, durch die ein Paar „unendlich benachbarter Geodätischer“ hindurchgeht. Jacobi stellte ohne Beweis den später von O. Bonnet bewiesenen Satz auf: Ein Bogen PP' von γ_0 ist genau dann die kürzeste Verbindung von P und P', wenn es auf diesem Bogen keinen einzigen zu P konjugierten Punkt gibt ([D], Kapitel 18 und 20).

Anschließend leitete O. Bonnet aus dem Jacobischen Kriterium den folgenden Satz her: „Wenn längs einer Geodätischen die Gaußsche Krümmung der Bedingung $0 < k < a^2$ genügt, so kann diese Geodätische nicht die kürzeste Verbindung zweier ihrer Punkte aus einem Intervall sein, das größer als a ist.“ Hieraus folgt als Korollar: „Wenn auf einer konvexen geschlossenen Fläche die Krümmung k zwischen 0 und a^2 liegt, so ist die Länge einer zwei beliebige Punkte der Fläche verbindenden Strecke kleiner als πa; folglich kann eine konvexe Fläche mit $0 < k < a^2$ kein unendliches Blatt (keinen unendlichen Mantel) haben.“

Diese Probleme wurden detailliert in dem großen Werk [3] von Darboux wieder aufgenommen; er zeigte unter anderem, daß es auf einer Fläche negativer Krümmung keine konjugierten Punkte gibt.

Auf einer Fläche Σ ist die untere Grenze der Bogenlängen einer zwei Punkte x, y von Σ verbindenden Kurve ein *Abstand* im Sinne der Theorie der metrischen Räume (vgl. 8.6.). Wenn Σ bei diesem *Abstand* ein *vollständiger* Raum und außerdem einfach zusammenhängend ist und in jedem Punkt eine Gaußsche Krümmung $k \leqq 0$ hat, so ist Σ *homöomorph zur Ebene*; dieses von Hadamard 1898 bewiesene Resultat wurde später von E. Cartan auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension verallgemeinert ([D], Kapitel 20). Außerdem bewies D. Hilbert 1899, daß es im $\boldsymbol{R}^3$ keine vollständige singularitätenfreie Fläche gibt, deren Krümmung in jedem Punkt streng negativ ist.

Man sieht also, daß seit dem letzten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts in der Flächentheorie Sätze globalen Charakters auftauchen. Derartige Probleme bekamen in der modernen Mathematik große Bedeutung, insbesondere in der Morseschen Theorie, welche die Anzahl der kritischen Punkte einer reellwertigen Funktion (d. h. der — als isoliert vorausgesetzten — Punkte, in denen die Ableitung der Funktion verschwindet) auf einer kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit der Homologie der Mannigfaltigkeit in Beziehung setzt (vgl. Kapitel 10); siehe dazu auch [6].

9.4.3. *Abwickelbarkeit von Flächen, Flächen konstanter Krümmung, Beziehung zur nichteuklidischen Geometrie*

Was von den Mathematikern des neunzehnten Jahrhunderts „Abwickelbarkeit" von Flächen genannt wurde, entspricht dem heutigen Begriff der *lokalen Isometrie*: Für zwei Flächen Σ, Σ' ist dies ein Diffeomorphismus (d.h. eine bijektive Funktion f, welche nebst ihrer Inversen f^{-1} unendlich oft differenzierbar ist) einer offenen Teilmenge $U \subset \Sigma$ auf eine offene Teilmenge $U' \subset \Sigma'$, welcher die erste Fundamentalform erhält, wobei U als Definitionsbereich eines „krummlinigen Koordinatensystems" vorausgesetzt wird. Man sagt dann, eine Fläche Σ sei auf eine Fläche Σ' *abwickelbar*, wenn zu jedem Punkt von Σ eine lokale Isometrie einer offenen Umgebung U dieses Punktes auf eine offene Teilmenge U' von Σ' existiert. Das „theorema egregium" von Gauß (vgl. 9.3.) zeigt, daß die Flächen Σ und Σ' in einander entsprechenden Punkten aus U und U' dieselbe Gaußsche Krümmung haben müssen; diese notwendige Bedingung ist jedoch im allgemeinen nicht hinreichend, wenn die Krümmung nicht konstant ist.

Weiter stellten sich in der Theorie der Abwickelbarkeit von Flächen u. a. folgende Probleme:

1. Wie stellt man fest, ob zwei gegebene Flächen „aufeinander abwickelbar" sind?

2. Man bestimme alle auf eine gegebene Fläche „abwickelbaren" Flächen.

3. Unter welcher Bedingung gehen zwei „aufeinander abwickelbare" Flächen notwendigerweise durch eine euklidische Bewegung auseinander hervor (*Starrheitsproblem*, Gegensatz zum Problem der *Verbiegbarkeit* einer Fläche in eine andere)?

Diese Probleme waren insbesondere von Euler ([4], (1), Bd. XXVIII, S. 161 bis 186) sowie von Bonnet, Minding, Weingarten und Darboux behandelt worden. Was das dritte Problem betrifft, so zeigt der Bonnetsche Existenzsatz aus 9.4.1., daß eine lokale Isometrie, welche auch die zweite Fundamentalform erhält, die Einschränkung einer euklidischen Bewegung ist. Bonnet bewies, daß dies auch der Fall ist, wenn man voraussetzt, die lokale Isometrie transformiere eine Familie von (nicht notwendig geradlinigen) Asymptoten in eine Asymptotenfamilie.

Was das zweite Problem betrifft, so zeigte Bour 1862, daß die Menge der auf eine gegebene Fläche abwickelbaren Flächen (lokal) einer Monge-Ampèreschen Gleichung (vgl. 9.2.4.) genügt. Schon 1812 hatte Lagrange vermutet, daß eine konvexe Fläche nicht verbogen werden kann; diese Vermutung wurde 1899 von Liebmann für die kompakten randlosen Flächen bewiesen.

Schließlich führte die Behandlung des ersten Problems Bonnet, Minding, Weingarten und Darboux zur Benutzung der von Beltrami 1865 eingeführten „differentialen Parameter". Diese nennen wir jetzt Differentialoperatoren, die auf die unendlich oft differenzierbaren auf einer Fläche definierten reellwertigen Funktionen wirken. Bereits 1859 hatte Lamé bei der Behandlung von Problemen der mathematischen Physik zwei Differentialoperatoren im euklidischen Raum $\boldsymbol{R}^3$ eingeführt:

$$\Delta_1 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = (\operatorname{grad} f)^2,$$

wobei $\operatorname{grad} f$ der Vektor mit den Komponenten $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ ist, und

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f);$$

dies ist der übliche Laplace-Operator ($\operatorname{div} X$ ist für ein Vektorfeld $X = (U, V, W)$ der Skalar $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$).

Man kann ebenso auf einer Fläche Σ für jede auf Σ definierte differenzierbare reellwertige Funktion f ein Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ („Gradient" von f) durch die Bedingung $d\vec{P} \cdot \operatorname{grad} f = df$ definieren, wobei die linke Seite das Skalarprodukt ist; in krummlinigen Koordinaten kann man

$$\operatorname{grad} f = \alpha \frac{\partial \vec{P}}{\partial u} + \beta \frac{\partial \vec{P}}{\partial v}$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{EG - F^2}\left(G \frac{\partial f}{\partial u} - F \frac{\partial f}{\partial v}\right), \qquad \beta = \frac{1}{EG - F^2}\left(-F \frac{\partial f}{\partial u} + E \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

schreiben; dieses Vektorfeld ist unabhängig vom gewählten krummlinigen Koordinatensystem. Desgleichen definiert man für jedes Vektorfeld

$$X = U \frac{\partial \vec{P}}{\partial u} + V \frac{\partial \vec{P}}{\partial v}$$

die skalare Funktion

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(U\sqrt{EG - F^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(V\sqrt{EG - F^2}\right)\right)$$

(„Divergenz" von X), welche ebenfalls von den krummlinigen Koordinaten unabhängig ist. Die *differentialen Parameter* von Beltrami auf Σ sind dann $\Delta_1 f = (\operatorname{grad} f)^2$ (skalares Quadrat) und $\Delta_2 f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ (den man auch als den Laplace-Beltrami-Operator bezeichnet). Für zwei reellwertige Funktionen f, g auf Σ setzt man auch $\Delta_1(f, g) = \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$ (Skalarprodukt).

Nun seien zwei solche Flächen Σ, Σ' gegeben, für die es einen Diffeomorphismus einer offenen Teilmenge von Σ auf eine offene Teilmenge von Σ' gibt derart, daß in einander entsprechenden Punkten die Gaußschen Krümmungen k, k' übereinstimmen. Wenn man auf die Funktion k die Differentialoperatoren Δ_1 und Δ_2 wiederholt anwendet und dabei die Funktionen $\Delta_1 k$, $\Delta_2 k$, $\Delta_1(k, \Delta_2 k)$ usw. erhält, so muß jede dieser Funktionen in jedem Punkt von Σ denselben Wert wie die gleiche, mit k' gebildete Funktion im entsprechenden Punkt von Σ' annehmen. Man kann zeigen, daß diese Bedingung hinreichend ist und daß sie in Wirklichkeit nur die Überprüfung *endlich* vieler aus k bzw. k' gebildeter Invarianten erfordert.

Wir bemerken nebenbei, daß das Problem der Abwickelbarkeit von Flächen jetzt ein sehr spezieller Fall in der von E. Cartan begründeten allgemeinen Theorie der „Äquivalenzprobleme" geworden ist; dabei geht es darum, festzustellen, ob zwei Systeme von Differentialformen oder von Differentialgleichungen mit Hilfe

von Koordinatentransformationen, die gegebenenfalls zusätzlichen Bedingungen unterworfen sind, ineinander transformiert werden können. Dieses Problem läßt sich auf die Integration eines Pfaffschen Systems zurückführen, was zu Gleichheitsbedingungen zwischen „Invarianten" führt, welche die oben betrachteten „differentialen Parameter" verallgemeinern ([1], Bd. II_2, S. 1311—1334a).

Wir weisen auch auf eine andere moderne Fortsetzung der Arbeiten über die Abwickelbarkeit von Flächen hin: Der Begriff des Laplace-Beltrami-Operators läßt sich auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension verallgemeinern, und die Untersuchung der Eigenwerte dieses Operators (vgl. 8.5.3.) ist für eine kompakte randlose Mannigfaltigkeit eng mit der Untersuchung der geometrischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit verknüpft [B—G—M].

Die Untersuchung der Flächen *konstanter Krümmung* war im Verlauf des neunzehnten Jahrhunderts Gegenstand zahlreicher Abhandlungen. Der Fall der Flächen mit der Krümmung $k = 0$ wurde von Monge aufgeklärt; diese Flächen sind nichts anderes als die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen. Für die Flächen mit konstanter Krümmung $k > 0$ läßt sich ds^2 auf die Gestalt

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 \frac{u}{\sqrt{k}} dv^2$$

zurückführen, und eine solche Fläche ist auf eine Sphäre vom Radius $1/\sqrt{k}$ abwickelbar. Für die Flächen mit konstanter Krümmung $k < 0$ läßt sich ds^2 auf die Gestalt

$$ds^2 = du^2 + \sinh^2 \frac{u}{\sqrt{-k}} dv^2$$

bringen, und die Fläche ist auf eine *Pseudosphäre* abwickelbar; dies ist eine Rotationsfläche, die bei der Rotation einer Traktrix (der Evolvente einer Kettenlinie) um ihre Asymptote entsteht. Genauer gilt: Für zwei Flächen Σ, Σ' gleicher konstanter Krümmung existiert, wenn auf Σ ein Punkt P und eine durch P gehende Geodätische Γ und auf Σ' ein Punkt P' und eine durch P' gehende Geodätische Γ' beliebig gewählt sind, eine lokale Isometrie einer offenen Teilmenge von Σ auf eine offene Teilmenge von Σ', die P in P' und Γ in Γ' überführt (Minding 1839).

Unter globalem Gesichtspunkt bewies Liebmann 1899, daß die einzigen vollständigen Flächen mit konstanter Krümmung $k > 0$ im $\boldsymbol{R}^3$ die Sphären sind. Der Satz von Hilbert über die vollständigen Flächen negativer Krümmung (vgl. 9.4.2.) zeigt andererseits, daß es im $\boldsymbol{R}^3$ keine vollständige singularitätenfreie Fläche mit konstanter Krümmung $k < 0$ geben kann; tatsächlich besitzt die Pseudosphäre einen Breitenkreis von singulären Punkten, der dem Rückkehrpunkt der Traktrix entspricht.

Einen anderen Gesichtspunkt entwickelte Beltrami in seinen zwischen 1865 und 1869 erschienenen Arbeiten. Er wollte eine „geodätische Darstellung" einer Fläche Σ finden, d. h. einen Diffeomorphismus von Σ auf eine offene Teilmenge der Ebene, welche die Geodätischen von Σ in Geraden überführt. Durch lokale Betrachtungen zeigte er, daß dies nur für Flächen mit konstanter Krümmung k möglich ist; indem er als krummlinige Koordinaten eines Punktes von Σ die kartesischen Koordinaten

des entsprechenden Punktes der Ebene wählte, erhielt er für das Flächenelement ds^2 den Ausdruck

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + k(x\,dy - y\,dx)^2}{(1 + k(x^2 + y^2))^2}. \tag{10}$$

Ist aber $k < 0$, so ist dieses ds^2 in allen Punkten der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 + (1/k) < 0$ definiert. Man kann also für eine in dieser Kreisscheibe enthaltene Kurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ die Länge der Kurve durch das Integral $\int ds$ definieren, wobei sich ds als Funktion von t durch die Formel (10) und der Winkel zwischen zwei durch einen Punkt gehenden Kurven durch die Formel, die den Winkel zwischen den entsprechenden Kurven auf Σ angibt, ausdrücken lassen. Beltrami bemerkte dann, daß mit diesen „Längen-" und „Winkel"-Definitionen die in der Kreisscheibe gelegenen Punkte und Geraden den Axiomen der nichteuklidischen (sogenannten *hyperbolischen*) Geometrie von Bolyai und Lobačevskij genügen; damit gab er erstmalig ein „Modell" dieser Theorie innerhalb der Euklidischen Geometrie an (siehe 13.1.). Tatsächlich ist die so von Beltrami beschriebene „Geometrie" mit der 1859 von Cayley (auf rein algebraischem Wege) ohne Erwähnung der nichteuklidischen Geometrie beschriebenen identisch (siehe Kapitel 3); der Randkreis der von Beltrami betrachteten Scheibe ist dabei das „Absolutum" von Cayley, und zwei Geraden sind „parallel" im Sinne von Lobačevskij, wenn ihr Schnitt außerhalb des Absolutums liegt. Weiter folgt aus dem Satz von Gauß (vgl. 9.3.) über den Flächeninhalt eines geodätischen Dreiecks, daß für ein Dreieck mit nichteuklidischen Winkeln A, B, C der nichteuklidische Flächeninhalt durch $-S/k = \pi - (A + B + C)$ angegeben wird; er ist durch $-k\pi$ beschränkt und strebt für ein Dreieck, dessen Ecken auf dem Absolutum liegen, gegen $-k\pi$. Anscheinend hat Beltrami die Abhandlung Cayleys nicht gekannt.

Wir setzen der Einfachheit halber $k = -1$, und T sei die bijektive Abbildung der Kreisscheibe $\Delta: x^2 + y^2 < 1$ in sich, welche dem Punkt (x, y) den Punkt (X, Y) von Δ mit

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \qquad Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}$$

zuordnet. Dann führt T^{-1} die Δ treffenden Geraden in Kreise über, die zu $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ orthogonal sind. Man erhält so ein neues Modell der hyperbolischen Geometrie, bei dem die nichteuklidischen „Winkel" zwischen zu Γ orthogonalen Kreisen in diesem Fall mit den euklidischen Winkeln übereinstimmen, während die Längen durch

$$ds^2 = \frac{4(dX^2 + dY^2)}{(X^2 + Y^2 - 1)^2}$$

gegeben werden. Schließlich erhält man durch eine Inversion mit dem Pol auf Γ das „Poincarésche Halbebene" genannte „Modell", das aus den Punkten (x, y) des $\boldsymbol{R}^2$ mit $y > 0$ besteht. Die nichteuklidischen „Geraden" sind hier die Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse sowie die Geraden $x = \text{const}$, die nichteuklidischen „Winkel" zwischen diesen Kreisen (bzw. Geraden) sind gleich den euklidi-

schen Winkeln, die Längen werden durch

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

und die Flächeninhalte durch

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{y^2}$$

gegeben. Diese Resultate lassen sich leicht auf beliebige Dimensionen verallgemeinern.

9.5. Riemann und die n-dimensionale Geometrie

Der Beitrag Riemanns zur Differentialgeometrie hatte einen noch größeren Einfluß als der von Gauß. Seine berühmte Abhandlung *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* war ein Habilitationsvortrag, den er 1854 an der Universität Göttingen vor einem nichtmathematischen Publikum hielt. Was er in dieser Vorlesung darstellte, ist, obwohl es reich an neuen Ideen war (Gauß hatte das Thema aus drei Vorschlägen Riemanns ausgewählt), in einem wenig mathematischen Stil abgefaßt und vermeidet Rechnungen; sie wurde erst 1866 veröffentlicht und scheint Beltrami nicht bekannt geworden zu sein. Gewisse Kalküle, welche in dieser Vorlesung eingeführte Begriffe betreffen, wurden in einer 1861 bei der Académie des Sciences in Paris vorgelegten Abhandlung wiederaufgenommen: Riemann bewarb sich um einen für den Autor einer Abhandlung über die Wärmeverteilung in einem festen Körper ausgeschriebenen Preis; der Preis wurde ihm nicht zuerkannt, Riemanns Darlegung wurde als unzureichend ausgearbeitet beurteilt. Krankheit hatte Riemann keine Zeit gelassen, die Beweise seiner Ergebnisse im Detail auszuführen.

Seit Riemann geht man an die nichteuklidische Geometrie von einem neuen Gesichtspunkt heran. Vor ihm beschränkte sich die Differentialgeometrie auf die Untersuchung von in den dreidimensionalen euklidischen Raum eingebetteten Kurven und Flächen. Unter dem Einfluß der Mechanik („Systeme mit n Freiheitsgraden") und der Physik führte Riemann erstmalig das ein, was er „n-fach ausgedehnte Größen" und „n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten" nannte, eine Vorstellung, die den modernen Begriff der n-dimensionalen *Mannigfaltigkeit* hervorbrachte (siehe unten). Er legte sogar die Idee einer „Mannigfaltigkeit" unendlicher Dimension nahe (z.B. die Menge der auf einer Teilmenge des Raumes stetigen Funktionen) und skizzierte damit erstmalig den modernen Begriff eines Funktionenraumes (vgl. 8.6.). Man findet übrigens in dem Habilitationsvortrag Riemanns auch andere Keime von Begriffen der modernen Differentialtopologie, wie den der Blätterung (eine Familie von $(n - 1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten mit der Eigenschaft, daß durch jeden Punkt eine Untermannigfaltigkeit geht) oder die Unterscheidung von kompakten (randlosen) und nichtkompakten Untermannigfaltigkeiten.

Doch blieb Riemann nicht bei diesen allgemeinen Betrachtungen stehen; sein Hauptanliegen war es, jeder in seiner „Mannigfaltigkeit" gelegenen Kurve eine Länge derart zuzuordnen, „daß die Länge der Linien unabhängig von ihrer Lage sei". Inspiriert von Gauß' Ideen und ohne präzise Definitionen zu geben, kam Riemann zu der Vorstellung, ein Punkt x werde in einer genügend kleinen Umgebung von n reellwertigen Funktionen $x^1, x^2, \dots, x^n$ des Punktes begleitet, die man seine „lokalen Koordinaten" nennt (welche die „krummlinigen Koordinaten[1])" verallgemeinern), und daß ein „unendlich benachbarter" Punkt durch $(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$ beschrieben werde, wobei sich die dx^j bei einem Wechsel der lokalen Koordinaten vermöge

$$dx^j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} dx'^k$$

transformieren. Er erlegte dann dem „Bogenelement" ds die Bedingung auf, eine positive, vom Grad 1 homogene Funktion der dx^j zu sein, und beschränkte sich in Wirklichkeit dabei auf den einfachsten Fall, daß nämlich ds die Gestalt

$$ds = (\sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j)^{1/2}$$

hat; die g_{ij} sind dabei Funktionen von $x^1, \dots, x^n$ derart, daß $g_{ji} = g_{ij}$ gilt und die quadratische Form $\sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ streng positiv ist, wenn nicht alle dx^j verschwinden. Der Bogen einer durch die Gleichungen $x^j = x^j(t)$ $(1 \leqq j \leqq n)$ definierten Kurve im Intervall $[a, b]$ ist dann nach Definition gleich

$$\int_a^b \left(\sum_{i,j} g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \right)^{1/2} dt \,.$$

Diese Definition ermöglichte es ihm, die *Geodätischen* seiner „Mannigfaltigkeiten" in derselben Weise wie auf einer Fläche zu definieren. Das Problem, das seine Aufmerksamkeit am meisten auf sich gezogen zu haben scheint, ist die Verallgemeinerung des Begriffs der „Abwickelbarkeit" (vgl. 9.4.3.), ein Problem, das er folgendermaßen formulierte: Unter welchen Voraussetzungen kann ein $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ in ein anderes $ds^2 = \sum_{k,l} h_{kl}\, dy^k\, dy^l$ durch einen Wechsel der „lokalen Koordinaten" transformiert werden? Da es $n(n+1)/2$ Funktionen g_{ij} von n unabhängigen Variablen gibt und man über n beliebige Funktionen für den Koordinatenwechsel verfügt, stellte sich Riemann vor, daß $n(n-1)/2$ Funktionen das ds^2 bis auf „Abwickelbarkeit" bestimmen. Von Gauß' Methoden beeinflußt, verwendete er ein System lokaler Koordinaten (die heute *Normalkoordinaten* genannt werden). Demgemäß konstruierte er für einen Punkt P_0 der „Mannigfaltigkeit"

---

[1]) Im Dreidimensionalen erbrachte die Theorie der dreifach orthogonalen Systeme Beispiele für krummlinige Koordinaten. Setzt man (lokal) die Gleichungen der drei Flächenfamilien in der Gestalt $X(x, y, z) = u$, $Y(x, y, z) = v$, $Z(x, y, z) = w$ an, wobei u, v, w drei Parameter sind, so können diese Gleichungen als Definition von u, v, w als lokale Koordinaten des Punktes (x, y, z) angesehen werden. Ein solches Koordinatensystem war 1837 von Lamé benutzt worden (vgl. 7.1.15.).

die von diesem Punkt ausgehenden Geodätischen. Die Lage eines Punktes P wird dann durch die Tangente an die P_0 mit P verbindende Geodätische in P_0 und die Länge des Bogens P_0P auf dieser Geodätischen bestimmt (Riemann nahm implizit an, durch zwei verschiedene Punkte verlaufe nur eine Geodätische, und sprach nicht von einem Tangentialvektor, sondern an dessen Stelle vom System der Zahlen

$$\left(\frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \ldots, \frac{dx^n}{ds}\right)$$

in einem Punkt der betrachteten Kurve). Riemann zeigte dann, daß in einer Umgebung von P_0 die Entwicklung von ds^2 in den Normalkoordinaten x^j $(1 \leqq j \leqq n)$ von P für Terme bis zur Ordnung 3 eine Darstellung der Gestalt

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + \sum_{i,j,k,l} C_{ij,kl}(x^k\,dx^i - x^i\,dx^k)\,(x^l\,dx^j - x^j\,dx^l)$$

hat; der Term

$$Q = \sum_{i,j,k,l} C_{ij,kl}(x^k\,dx^i - x^i\,dx^k)\,(x^l\,dx^j - x^j\,dx^l)$$

beschreibt die „Abweichung von der Ebenheit" der Mannigfaltigkeit. Dann dividierte er in recht undurchsichtig erscheinender Weise Q durch den Flächeninhalt eines „unendlich kleinen" Dreiecks, wodurch er bis auf einen Faktor eine Zahl erhielt, die er als Gaußsche Krümmung einer gewissen Fläche interpretierte. Dies ist in Wirklichkeit die Skizze dessen, was man jetzt als *Schnittkrümmung* bezeichnet: Sind $X = (X^1, \ldots, X^n)$ und $Y = (Y^1, \ldots, Y^n)$ zwei (linear unabhängige) Tangentialvektoren in P_0, so betrachtet man die Fläche, die von den durch P_0 gehenden Geodätischen erzeugt wird, deren Tangenten in diesem Punkt die Geraden der durch X und Y bestimmten Ebene sind; die Gaußsche Krümmung dieser Fläche im Punkt P_0 ist dann (in denselben Bezeichnungen)

$$-\frac{3}{4}\,\frac{\sum_{i,j,k,l} C_{ij,kl}(X^kY^i - X^iY^k)\,(X^lY^j - X^jY^l)}{\left(\sum_{i,j} g_{ij}X^iY^j\right)^2}. \tag{11}$$

Riemann glaubte, dann behaupten zu können, daß ein Diffeomorphismus f einer n-dimensionalen „Mannigfaltigkeit" V auf eine andere V' das ds^2 von V in das von V' überführt, wenn in jedem Punkt P von V die folgende Bedingung erfüllt ist: Man betrachtet n linear unabhängige Tangentialvektoren von V in P und die $n(n-1)/2$ Schnittkrümmungen, die den durch je zwei Vektoren bestimmten Ebenen entsprechen; dann betrachtet man die Bilder dieser Vektoren vermöge f im Punkt $f(P)$ von V' und die $n(n-1)/2$ in gleicher Weise definierten Schnittkrümmungen; die Bedingung besteht darin, daß die einander entsprechenden Schnittkrümmungen in V und V' übereinstimmen. Tatsächlich ist dieses Resultat keineswegs exakt (siehe [Sp], Bd. II, S. 7—26 und 7—29).

Der letzte (und vielleicht wichtigste) Beitrag Riemanns zur Differentialgeometrie ist die von ihm in der der Académie des Sciences eingereichten Abhandlung gegebene Lösung des folgenden Problems: Unter welchen Voraussetzungen kann der

Ausdruck $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dy^i\, dy^j$ durch einen Koordinatenwechsel in das $ds^2 = \sum_i (dx^i)^2$ des euklidischen Raums transformiert werden? Er erhielt als notwendige und hinreichende Bedingung die Relationen $Q_{ij,kl} = 0$, wobei die Größen $Q_{ij,kl}$ durch die g_{ij} folgendermaßen festgelegt werden: Man setzt

$$p_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i}, \tag{12}$$

$$G = \det (g_{ij}), \tag{13}$$

$$\gamma_{ij} = \text{Adjunkte von } g_{ij} \text{ in der Entwicklung von } G. \tag{14}$$

Dann gilt

$$Q_{ij,kl} = \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial y^j \partial y^l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial y^i \partial^k} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial y^i \partial y^l} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} (p_{\alpha jl} p_{\beta ik} - p_{\alpha il} p_{\beta jk}) \frac{\gamma_{\alpha\beta}}{G}. \tag{15}$$

Die Bedeutung dieser Rechnung konnte erst nach Einführung des Tensorkalküls in die Differentialgeometrie (siehe 9.6.) klarwerden. Einstweilen zeichnen wir rasch die Art und Weise nach, wie die Nachfolger Riemanns dessen Ideen zunehmend klarer und präziser faßten und der modernen Differentialgeometrie eine solide Grundlagen gaben (für Einzelheiten vgl. [B—G], [Sp] und [D], Kapitel 16 bis 20). In dem Habilitationsvortrag Riemanns findet sich bereits eine klare Unterscheidung zwischen der allgemeinen Untersuchung der „Mannigfaltigkeiten", welche nicht notwendigerweise mit einem ds^2 versehen sind, und den Eigenschaften, bei denen ds^2 eine Rolle spielt; diese beiden Richtungen der Differentialgeometrie entwickelten sich zur Untersuchung der *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* bzw. zur *Riemannschen Geometrie*.

Eine n-dimensionale, der Klasse C^p angehörende *differenzierbare* Mannigfaltigkeit ($p \geqq 1$) ist ein topologischer Raum V, der mit einer zusätzlichen Struktur versehen ist, die in der Vorgabe einer Familie (eines *Atlas*) von „lokalen Karten" $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ besteht, wobei jedes U_i eine offene Teilmenge von V und jedes φ_i ein Homöomorphismus von U_i auf eine offene Teilmenge des $\boldsymbol{R}^n$ ist; dabei sind die Karten den folgenden beiden Bedingungen unterworfen:

1. V ist die Vereinigung der U_i.

2. Für jedes Paar $(i, j) \in I \times I$ mit $U_i \cap U_j = \emptyset$ ist die zusammengesetzte Abbildung $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ von $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ auf $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ (die man *lokalen Kartenwechsel* oder *Übergangshomöomorphismus* nennt) eine der Klasse C^p angehörende Abbildung (d. h., die Komponenten dieser Abbildung sind p-mal stetig differenzierbar).

Für jede lokale Karte (U_i, φ_i) nennt man die Koordinaten von $\varphi_i(x)$ für $x \in U_i$ die *lokalen Koordinaten von x bezüglich* dieser Karte. Zwei Atlanten auf V sind äquivalent (und führen auf dieselbe Differenzierbarkeitsstruktur), wenn ihre Vereinigung wieder ein Atlas ist. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit wird C^∞-Mannigfaltigkeit (bzw. (reell-)*analytisch*) genannt, wenn die lokalen Kartenwechsel unendlich oft differenzierbar (bzw. analytisch) sind. Haben die φ_i ihre Werte in

einem komplexen Raum C^q und sind die Kartenwechsel holomorph, so heißt die Mannigfaltigkeit *komplex-analytisch* (oder *holomorph*) von komplexer Dimension q; sie hat dann eine unterliegende reell-analytische Struktur der Dimension $n = 2q$.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, wenn ein Atlas existiert, dessen lokale Kartenwechsel stets eine streng positive (Jacobische) Funktionaldeterminante haben. Beispielsweise ist der $\boldsymbol{R}^n$ mit einer Differenzierbarkeitsstruktur (sogar einer analytischen) versehen, welche durch eine einzige Karte $(\boldsymbol{R}^n, \mathrm{id})$ definiert ist; dies ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit.

Eine *Untermannigfaltigkeit* der Dimension $n - m$ einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit V ist eine Teilmenge W von V mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $y \in W$ gibt es eine lokale Karte (U, φ) von V derart, daß $y \in U$ und $\varphi(U \cap W) = \varphi(U) \cap \boldsymbol{R}^{n-m}$ ist, oder, anders ausgedrückt, für diese Karte haben die Punkte von $U \cap W$ die lokalen Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ mit $x^1 = \cdots = x^m = 0$; die Einschränkungen $(U \cap W, \varphi)$ dieser lokalen Karten definieren dann auf W eine Differenzierbarkeitsstruktur. Folglich sind die linearen Untermannigfaltigkeiten des Vektorraumes $\boldsymbol{R}^n$ (Vektorteilräume von $\boldsymbol{R}^n$) und ihre Verschiebungen differenzierbare Untermannigfaltigkeiten; die (singularitätenfreien) Flächen der klassischen Differentialgeometrie sind Untermannigfaltigkeiten des $\boldsymbol{R}^3$.

Die meisten der für differenzierbare Mannigfaltigkeiten definierten Begriffe werden mit Hilfe lokaler Karten eingeführt, aber die einzig interessanten Begriffe sind *innerer Natur*, d. h. unabhängig von den benutzten lokalen Karten. Beispielsweise definiert man eine *C^r-Abbildung u* einer C^p-Mannigfaltigkeit V in eine C^p-Mannigfaltigkeit W (für $r \leqq p$) durch die folgende Bedingung: Für jedes $x \in V$ muß, wenn (U, φ) eine lokale Karte von V mit $x \in U$ und (U', ψ) eine lokale Karte von W mit $u(x) \in U'$ und $u(U) \subset U'$ sind, die Abbildung $\psi \circ (u \mid U) \circ \varphi^{-1}$ von $\varphi(U)$ in $\psi(U')$ eine C^r-Abbildung sein; man kann zeigen, daß dieser Begriff von den gewählten Karten unabhängig ist.

Ein fundamentaler Begriff ist für eine C^p-Mannigfaltigkeit V ($p \geqq 2$) der des *Tangentialvektors* in einem Punkt $x \in V$. Man betrachtet die C^1-Abbildungen f eines (von f abhängigen) 0 enthaltenden offenen Intervalls $I \subset \boldsymbol{R}$ in V mit $f(0) = x$; man sagt, daß zwei solche Abbildungen f, g im Punkt 0 *tangential* sind (einander berühren), wenn für jede Karte (U, φ) von V im Punkt x die Funktionen $\varphi \circ f$ und $\varphi \circ g$ (welche hinreichend kleine Umgebungen von 0 in $\boldsymbol{R}$ in den $\boldsymbol{R}^n$ abbilden) in 0 dieselbe Ableitung besitzen (man kann die innere Natur dieses Begriffs nachweisen). Die so definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen die *Tangentialvektoren* von V in x genannt werden. Ist $T_x(V)$ die Menge der Tangentialvektoren von V in x, so definiert man eine bijektive Abbildung $\theta_{\varphi,x}\colon T_x(V) \to \boldsymbol{R}^n$, indem man der Klasse einer Abbildung $f\colon I \to \boldsymbol{R}$ den Vektor zuordnet, welcher gleich der Ableitung von $\varphi \circ f$ im Punkt 0 ist. Die inverse bijektive Abbildung prägt $T_x(V)$ die Struktur eines n-dimensionalen *Vektorraums* auf, und man kann zeigen, daß diese Struktur von der lokalen Karte (U, φ) *unabhängig* ist. Für eine solche Karte bilden die Vektoren $\theta_{\varphi,x}^{-1}(e_i)$ eine Basis von $T_x(V)$, wenn $(e_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ eine Basis des $\boldsymbol{R}^n$ ist. Die Vereinigung $T(V)$ der $T_x(V)$ für alle Punkte $x \in V$ ist auf kanonische Weise mit einer Topologie und der Struktur einer $2n$-dimensionalen C^{p-1}-Mannigfaltigkeit versehen (diese Vorstellungen gehen auf S. Lie

zurück): Ist $\pi: T(V) \to V$ die Abbildung, die jedem Tangentialvektor aus $T_x(V)$ seinen „Ursprung" x zuordnet, so ist π stetig, und jeder lokalen Karte (U, φ) von V entspricht eine lokale Karte $(\pi^{-1}(U), \psi)$ von $T(V)$ derart, daß für alle $x \in U$ und $h_x \in T_x(U)$

$$\psi(h_x) = (\varphi(x), \theta_{\varphi,x}(h_x))$$

gilt, wobei ψ ein Homöomorphismus von $\pi^{-1}(U)$ auf $\varphi(U) \times \boldsymbol{R}^n$ ist. Man kann dann eine präzise Definition des Begriffs eines C^r-*Tangentialvektorfeldes* auf V angeben ($r \leqq p - 1$). Dies ist eine Abbildung $\mathrm{X}: V \to T(V)$ derart, daß $\pi \circ \mathrm{X}$ die Identität von V ist; sie ordnet also jedem Punkt $x \in V$ einen Tangentialvektor $\mathrm{X}(x) \in T_x(V)$ zu. Für eine lokale Karte (U, φ) ist $\psi(X(x))$ (mit den obigen Bezeichnungen) ein Vektor $(X^1(x^1 \ldots, x^n), \ldots, X^n(x^1, \ldots, x^n))$ des $\boldsymbol{R}^n$, wobei die x_i die lokalen Koordinaten von x (die Komponenten von $\gamma(x)$) und die X^k der Klasse C^r angehörende Funktionen von $x^1, \ldots, x^n$ (Komponenten von X bei der Karte (U, φ)) sind. Die *Singularitäten* eines Vektorfeldes X sind die Punkte $x \in V$ mit $\mathrm{X}(x) = 0$. Ist u eine C^r-Abbildung ($r \geqq 1$) von V in W und sind f, g zwei Abbildungen von $I \subset \boldsymbol{R}$ in V mit $f(0) = g(0) = x$, die in 0 tangential sind, so haben $u \circ f$ und $u \circ g$ die Eigenschaft, daß $u(f(0)) = u(g(0))$ ist und $u \circ f$ und $u \circ g$ tangential im Punkt 0 sind. In dieser Weise wird eine Abbildung $T_x(u)$ von $T_x(V)$ in $T_{u(x)}(W)$ definiert, von der man sofort sieht, daß sie *linear* ist; sie wird die *lineare Tangentialabbildung* an u im Punkt x genannt.

Die moderne Definition einer *Riemannschen Struktur* auf einer C^p-Mannigfaltigkeit V ist die folgende: Sie besteht in der Vorgabe eines *Skalarprodukts* (einer symmetrischen Bilinearform, deren zugeordnete quadratische Form streng positiv definit ist) $(h, k) \mapsto (h \mid k)_x$ auf dem Vektorraum $T_x(V)$ für jedes $x \in V$. Man erlegt diesem Skalarprodukt außerdem die Bedingung der „differenzierbaren Abhängigkeit" von x im folgenden Sinn auf: Für jedes Paar (X, Y) von C^p-Vektorfeldern auf V ist $(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}): x \mapsto (\mathrm{X}(x) \mid \mathrm{Y}(x))_x$ eine reellwertige C^p-Funktion. Bezüglich einer lokalen Karte kann man diese Funktion in der Gestalt $\sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j$ schreiben, wobei die $g_{ij} = g_{ji}$ der Klasse C^p angehörende Funktionen in den lokalen Koordinaten und die X^i und Y^i ($1 \leqq i \leqq n$) die Komponenten der Vektorfelder X, Y bezüglich derselben lokalen Koordinaten sind. Um zu Riemanns Standpunkt zurückzugelangen, definiert man die *Länge* eines differenzierbaren Weges $\gamma: [a, b] \to V$ durch

$$\int_a^b ((\gamma'(t) \mid \gamma'(t))_{\gamma(t)})^{1/2} \, dt\,,$$

wobei $\gamma'(t)$ der Tangentialvektor an V im Punkt $\gamma(t)$, also die Äquivalenzklasse der Abbildung $\xi \to \gamma(t + \xi)$ einer Umgebung der Null von $\boldsymbol{R}$ in V ist.

9.6. Der Tensorkalkül. Entstehen des Zusammenhangsbegriffs

Bevor wir zeigen, wie sich Riemanns Resultate in der modernen Terminologie formulieren lassen, müssen wir zusammenfassend über die Art und Weise berichten,

wie diese nach der Veröffentlichung seiner Habilitationsvorlesung (1866) von seinen Nachfolgern weiterentwickelt wurden. Bereits 1869 verallgemeinerte Christoffel das von Riemann für den Spezialfall $\sum_i (dx^i)^2$ von ds^2 gelöste Problem, indem er nach den Bedingungen suchte, unter denen sich zwei beliebige ds^2 der Gestalt $\sum_{i,j} g_{ij}\, dy^i\, dy^j$ und $\sum_{k,l} h_{kl}\, dx^k\, dx^l$ durch einen lokalen Koordinatenwechsel ineinander transformieren lassen. Neben den von Riemann (Formel (12)) eingeführten Größen p_{ijk}, die er mit Γ_{ijk} bezeichnete (und die man heute *Christoffel-Symbole* erster Art nennt), führte er die Ausdrücke

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_l g^{il}\Gamma_{ljk} \qquad \text{(Symbole zweiter Art)} \tag{16}$$

mit

$$g^{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{G} \tag{17}$$

und den Bezeichnungen von (13) und (14) ein. Es gelten die Symmetrieeigenschaften $\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$, $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Die Symbole (16) ermöglichten es ihm im Verlauf seiner Arbeit, das Transformationsverhalten der *Ableitungen* der Komponenten eines Vektorfelds bei einem Koordinatenwechsel in einfacher Gestalt darzustellen. Es seien zwei Systeme lokaler Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ bzw. $x'^1, \ldots, x'^n$ und ein ds^2 gegeben, Γ^i_{jk} die Symbole zweiter Art für die Koordinaten (x^i) und Γ'^i_{jk} diese Symbole für die Koordinaten (x'^i). Ferner seien X ein Vektorfeld, $X^1, \ldots, X^n$ seine Komponenten bezüglich (x^i) und $X'^1, \ldots, X'^n$ seine Komponenten bezüglich (x'^i). Christoffel setzte dann

$$X^j_{;k} = \frac{\partial X^j}{\partial x^k} + \sum_l \Gamma^j_{kl} X^l, \qquad X'^j_{;k} = \frac{\partial X'^j}{\partial x'^k} + \sum_l \Gamma'^j_{kl} X'^l$$

und erhielt für diese Ausdrücke die einfachen Relationen

$$X'^j_{;k} = \sum_{h,l} \frac{\partial x'^j}{\partial x^h} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} X^h_{;l}\,. \tag{18}$$

Hiervon ging Ricci 1887 aus, um zu definieren, was er unter *Tensoren* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit verstand (jetzt spricht man meist von „Tensorfeldern"). Bei Ricci ist ein *Tensor vom Typ* (p, q) (oder ein *p-fach kontravarianter und q-fach kovarianter Tensor*) durch die Angabe einer Familie von Funktionen $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ der Variablen eines beliebigen lokalen Koordinatensystems $(x^1, \ldots, x^n)$ (der „Komponenten" eines Tensors bezüglich dieses Systems) festgelegt, wo jeder Index i_α, j_β alle möglichen Werte von 1 bis n annimmt. Weiterhin ist für ein anderes lokales Koordinatensystem $(x'^1, \ldots, x'^n)$ (das im selben Gebiet definiert ist) die Familie $A'^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ der entsprechenden Funktionen durch die ((18) verallgemeinernden) Formeln

$$A'^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = \sum_{(k_\alpha)(l_\beta)} \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_q}}{\partial x'^{j_q}} A^{k_1 k_2 \ldots k_p}_{l_1 l_2 \ldots l_q} \tag{19}$$

verknüpft. Die einfachsten solcher Tensoren werden durch die Koeffizienten g_{ij} eines ds^2 (Tensor vom Typ (0, 2)) und die aus (17) hergeleiteten Koeffizienten g^{ij}

(Tensor vom Typ (2, 0)) dargestellt. Gemeinsam mit Levi-Civita entwickelte Ricci einen analytisch-algebraischen Tensorkalkül, dessen algebraischer Teil später in der multilinearen Algebra aufging. Vom analytischen Standpunkt aus zeigen die Formeln (18) bereits, daß dann, wenn die Γ^i_{jk} nicht sämtlich null sind, die Ableitungen der Komponenten eines Tensors nicht mehr die Komponenten eines Tensors auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sind. Um diesen Mangel auszugleichen, definierte Ricci, in Analogie zu den Christoffelschen Formeln, eine allgemeine Operation, die man *kovariante Ableitung* (oder *absolute Ableitung*) nennt, die einem Tensor vom Typ (p, q) einen Tensor vom Typ $(p, q+1)$ zuordnet: Für einen Tensor mit den Komponenten $A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ werden die Komponenten der kovarianten Ableitung durch

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q ; h} = \frac{\partial A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}}{\partial x^h} + \sum_{r=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{n} A^{i_1 \ldots i_{r-1} \alpha i_{r+1} \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \Gamma^{i_r}_{h\alpha}$$

$$- \sum_{s=1}^{q} \sum_{\beta=1}^{n} A^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{s-1} \beta j_{s+1} \ldots j_q} \Gamma^{\beta}_{h j_s}$$

gegeben.

Speziell ist für die Tensoren g_{ij} und g^{ij} die kovariante Ableitung *null*. Andererseits gilt im allgemeinen im Gegensatz zum Verhalten der euklidischen ds^2 für ein beliebiges Tensorfeld nicht mehr, daß bei der Berechnung der zweiten kovarianten Ableitungen die Reihenfolge der Ableitungen keine Rolle spielt. Der Symmetrieverlust zeigt sich z. B. bei einem Tensor vom Typ (1, 3), der *Krümmungstensor* oder *Riemann-Christoffel-Tensor* genannt wird und dessen Komponenten durch

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \sum_{h=1}^{n} (\Gamma^h_{lj} \Gamma^i_{kh} - \Gamma^h_{kj} \Gamma^i_{lh}) \tag{20}$$

gegeben sind. Setzt man $R_{ijkl} = \sum_{r=1}^{n} g_{ir} R^r_{jkl}$, so erhält man die Funktionen $Q_{ij,kl}$ aus (15), die Riemann berechnet hatte. Die Schnittkrümmung (11) läßt sich mit Hilfe des Krümmungstensors bestimmen. F. Schur zeigte 1890, daß im Fall eines mindestens dreidimensionalen V die Schnittkrümmung, wenn sie für eine beliebige im Tangentialraum eines Punktes enthaltene Ebene von dieser Ebene unabhängig ist, dann auch von dem Punkt unabhängig ist; derartige Riemannsche Mannigfaltigkeiten werden *Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung* genannt. Die einfach zusammenhängenden darunter sind isometrisch zu einer Sphäre, wenn die Schnittkrümmung streng positiv ist, zum euklidischen Raum, wenn diese Krümmung null ist, und schließlich zu einem hyperbolischen nichteuklidischen Raum, wenn die Schnittkrümmung streng negativ ist, wobei ein derartiger Raum durch das auf n Dimensionen verallgemeinerte Cayley-Beltrami-Verfahren definiert wird (vgl. 9.4.3.).

Die folgende Etappe in der Entwicklung der Riemannschen Geometrie wurde 1917 von Levi-Civita eröffnet. Ist eine C^1-Kurve Γ durch $u\colon [a, b] \to V$ in V gegeben, so betrachten wir ein Vektorfeld von Tangentialvektoren von V längs dieser Kurve, d. h. eine C^1-Abbildung $t \mapsto \mathrm{X}(t)$ von $[a, b]$ in $T(V)$, wobei $\mathrm{X}(t)$ ein Tangential-

vektor von V im Punkt $u(t)$ ist. Für ein lokales Koordinatensystem hat der Punkt $u(t)$ die Komponenten $x^1(t), \ldots, x^n(t)$, der Vektor $\mathrm{X}(t)$ die Komponenten $X^1(t), \ldots$ $\ldots, X^n(t)$. Aber auch hier konnte der im Punkt $u(t)$ angebrachte Vektor mit den Komponenten $\frac{dX^1}{dt}, \ldots, \frac{dX^n}{dt}$ noch nicht auf innere Weise definiert werden, sondern hing vom gewählten lokalen Koordinatensystem ab. Um eine innere Definition zu erhalten, mußte man die kovariante Ableitung $\frac{\mathrm{DX}}{dt}$ des Feldes $\mathrm{X}(t)$ betrachten, welche die Komponenten

$$\frac{dX^i}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} X^j \frac{dx^k}{dt}$$

hat. Levi-Civita sagte dann, daß das Feld $\mathrm{X}(t)$ längs Γ durch *Parallelverschiebung* (*Parallelübertragung*) variiert, wenn $\frac{\mathrm{DX}}{dt} = 0$ gilt. Ist beispielsweise V eine Fläche im $\boldsymbol{R}^3$, so bedeutet die Bedingung $\frac{\mathrm{DX}}{dt} = 0$, daß der im üblichen Sinne abgeleitete Vektor $\frac{d\mathrm{X}}{dt}$ längs Γ normal zu V ist. Sind X, Y zwei Vektorfelder längs Γ, die durch Parallelverschiebung variieren, so ist das Skalarprodukt $(\mathrm{X}(t) \mid \mathrm{Y}(t))$ *konstant*; dies rechtfertigt die Terminologie. Da die Differentialgleichung der Geodätischen in lokalen Koordinaten die Gestalt

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} - \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n)$$

hat, läßt sie sich so interpretieren, daß der Geschwindigkeitsvektor

$$u'(t) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}\right)$$

längs einer Geodätischen *durch Parallelverschiebung variiert.*

Ist Γ eine *geschlossene* Kurve auf V, so erreicht ein längs Γ durch Parallelverschiebung variierendes Vektorfeld X im allgemeinen nicht wieder seine Ausgangsposition, wenn der Punkt nach Durchlaufen von Γ in den Anfangspunkt zurückkehrt. Man kann den Krümmungstensor in einem Punkt P definieren, indem man von dieser „Ablenkung" eines Vektorfeldes längs einer „unendlich kleinen" Schleife mit dem Ursprung P ausgeht.

In die vorangegangenen Definitionen und Resultate geht nicht ein, daß die quadratische Form $\sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ positiv definit ist, sondern nur, daß sie nichtausgeartet ist; hat diese Form irgendeine Signatur, so sagt man, sie definiere eine *pseudo-Riemannsche* Struktur. Diese Bemerkung hat eine den Rahmen der reinen Mathematik übersteigende Bedeutung: Im Anschluß an die von H. Minkowski (1908) gegebene Interpretation der speziellen Relativitätstheorie mit Hilfe einer quadratischen Form von vier Variablen mit der Signatur (3, 1) (die also zur Form $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ äquivalent ist) hat A. Einstein von 1915 an seine allgemeine Relativitätstheorie entwickelt, wobei er von dem Postulat ausging, daß die Raum-

Zeit eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, deren ds^2 eine quadratische Form der Signatur $(3, 1)$ ist.

Weiterhin entstanden unter dem Einfluß der allgemeinen Relativitätstheorie und in engem Zusammenhang mit ihr von 1918 an die Abhandlungen H. Weyls und vor allem die E. Cartans, die den pseudo-Riemannschen Rahmen bedeutend erweiterten. Man kann die Möglichkeit einer solchen Erweiterung aus der Bemerkung herleiten, daß in die Begriffe der kovarianten Ableitung nur die Christoffelsymbole Γ^i_{jk}, nicht aber die g_{ij}, aus denen sie gewonnen wurden, eingehen. Diese Symbole sind nicht die Komponenten eines Tensors, denn beim Übergang von einem lokalen Koordinatensystem $(x^1, \dots, x^n)$ zu einem anderen $(x'^1, \dots, x'^n)$ transformieren sie sich nach der komplizierteren Formel

$$\Gamma'^i_{jk} = \sum_{r,l,m} \Gamma^r_{lm} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^l}{\partial x'^j} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \, \partial x'^k} \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}. \tag{21}$$

Man wird daher veranlaßt, auf einer Mannigfaltigkeit V eine Struktur zu betrachten, die man erhält, indem man jedem lokalen Koordinatensystem $(x^1, \dots, x^n)$ eine Familie von Funktionen Γ^i_{jk} dieser Variablen (die nicht den Symmetriebedingungen $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$ zu genügen brauchten) zuordnet, wobei diese Funktionen der Bedingung unterworfen werden, sich bei einem beliebigen lokalen Koordinatenwechsel nach den Formeln (21) zu transformieren. Eine solche Struktur wird *Zusammenhang* genannt; der mit einer pseudo-Riemannschen Metrik durch die Formeln (12) und (16) verknüpfte Zusammenhang heißt der *Levi-Civita-Zusammenhang* der entsprechenden pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Die Vorstellungen E. Cartans vom Zusammenhangsbegriff waren in weitaus stärkerem Maße geometrisch und anschaulich; sie waren eng mit seinen auf der Verwendung des äußeren Differentialkalküls und der Verallgemeinerung des Begriffs des „beweglichen Repers" beruhenden Methoden verknüpft und wurden in der modernen Epoche vor allem dank der Arbeiten von H. Whitney und C. Ehresmann in eine strenge und präzise Form gebracht.

Diese Arbeiten stützen sich wesentlich auf den Begriff des (lokal trivialen) *Faserbündels*[1]). Ein solcher Raum ist nach Definition eine C^p-Mannigfaltigkeit ($p \geqq 1$ ganzzahlig oder ∞), die mit einer zusätzlichen Struktur versehen ist, welche durch die Vorgabe zweier weiterer C^p-Mannigfaltigkeiten B, F und einer C^p-Abbildung $\pi: E \to B$ mit der Eigenschaft gegeben ist, daß zu jedem $b \in B$ eine offene Umgebung U von b und ein C^p-Diffeomorphismus φ von $\pi^{-1}(U)$ auf $U \times F$ existieren derart, daß $\pi(\varphi^{-1}(x, y)) = x$ für jedes $x \in U$ und jedes $y \in F$ gilt. Man sagt dann, E sei ein Faserbündel der *Basis* B, vom *Fasertyp* F und der *Projektion* π. Für jedes $x \in U$ ist $\pi^{-1}(x)$ (die „Faser im Punkt x") zu F diffeomorph. Eine Mannigfaltigkeit der Gestalt $B \times F$, wobei π die erste Projektion ist, wird *triviales* Faserbündel genannt; im allgemeinen Fall sagt man, φ sei eine *Trivialisierung* von $\pi^{-1}(U)$.

Sind $\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$ und $\varphi_j: \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times F$ zwei lokale Trivialisierungen derart, daß $U_i \cap U_j$ nicht leer ist, so entspricht ihnen ein Diffeomorphis-

---

[1]) Die Faserbündel der Differentialgeometrie sind Spezialfälle des allgemeinen Begriffs des *Faserraumes* in der Topologie (vgl. 10.9.4.).

mus $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ (ein sogenannter Übergangsdiffeomorphismus) von $(U_i \cap U_j) \times F$ auf sich von der Gestalt $(x, y) \mapsto (x, g_{ij}(x, y))$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $x \in U_i \cap U_j$ die partielle Abbildung $y \mapsto g_{ij}(x, y)$ ein Diffeomorphismus von F ist. Häufig erlegt man diesen Diffeomorphismen die Bedingung auf, einer Untergruppe G der Gruppe der Diffeomorphismen von F anzugehören, welche dann die *Strukturgruppe* des Faserbündels E genannt wird.

Ist beispielsweise F ein m-dimensionaler *Vektorraum* und G die lineare Gruppe $\boldsymbol{GL}(m, \boldsymbol{R})$, so sagt man, die entsprechenden Faserbündel seien *Vektorbündel vom Rang m*; jede Faser E_x eines solchen Faserbündels E ist dann auf kanonische Weise mit einer m-dimensionalen Vektorraumstruktur versehen. Mit der in 9.5. gegebenen Definition ist die Mannigfaltigkeit $T(V)$ der Tangentialvektoren einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit V ein Vektorbündel mit der Basis V vom Fasertyp $\boldsymbol{R}^n$ und mit der Projektion π; man nennt es das *Tangentialbündel* von V.

Ein *Schnitt* eines C^p-Faserbündels E der Basis B ist eine C^r-Abbildung $(r \leqq p)$ $s: B \to E$ mit $\pi(s(x)) = x$ für jedes $x \in V$; diese Abbildung ist notwendigerweise injektiv. Für $E = T(V)$ ist ein Schnitt von $T(V)$ nichts anderes als ein *Vektorfeld* (vgl. 9.5.). Ist beispielsweise (U, φ) eine lokale Karte von V und (e_i) die kanonische Basis von $\boldsymbol{R}^n$, so sind die n Abbildungen $\mathrm{X}_i: x \mapsto \theta_{\varphi,x}^{-1}(e_i)$ (in den Bezeichnungen von 9.5.) die zur Karte (U, φ) assoziiert genannten C^{p-1}-Vektorfelder auf U. Für jedes C^r-Vektorfeld X auf V kann man $\mathrm{X}(x)$ für $x \in U$ eindeutig in der Gestalt $\mathrm{X}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^i(x)\, \mathrm{X}_i(x)$ darstellen, wobei die a^i der Klasse C^r angehörende reellwertige Funktionen auf U sind.

Über den Begriff des Faserbündels kann man zur modernen Konzeption des Tensorfeldes gelangen. Für jeden Punkt x einer Mannigfaltigkeit V bezeichnet man mit $T_x^*(V)$ den zum Tangentialraum $T_x(V)$ von V in x *dualen* Vektorraum; seine Elemente werden *Tangentialkovektoren* von V in x genannt. Dieser Begriff erlaubt es, auf innere Weise das *Differential* einer C^r-Funktion $f: V \to \boldsymbol{R}$ $(r \leqq p)$ zu definieren: Man betrachtet eine Karte (U, φ) von V und die entsprechenden lokalen Koordinaten $(u^1, \ldots, u^n)$; gilt $f(x) = F^n(u^1(x), \ldots, u^n(X))$ für $x \in U$ (wobei F eine C^r-Funktion in $\varphi(U)$ ist), so kann man zeigen, daß der Kovektor $d_x f$ im Punkt x, der durch

$$\left\langle d_x f, \sum_{j=1}^{n} \xi^j \theta_{\varphi,x}^{-1}(e_j) \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \frac{\partial F}{\partial u^j}$$

(in den oben eingeführten Bezeichnungen) definiert ist, von der gewählten Karte unabhängig ist. Ist $T^*(V)$ die Vereinigung der $T_x^*(V)$, so hat man somit eine Abbildung $df: x \mapsto d_x f$ von V in $T^*(V)$ definiert, welche das *Differential von f* genannt wird. Man sieht, daß es auf $T^*(V)$ eine eindeutig bestimmte Struktur eines C^{p-1}-Faserbündels der Basis V vom Range n gibt, für welche df ein C^{s-1}-*Schnitt* für jede C^s-Funktion $f: V \to \boldsymbol{R}$ ist; man sagt, dieses Faserbündel sei das *Kotangentialbündel* von V. Ist (U, φ) eine Karte von V und sind $u^1, \ldots, u^n$ die entsprechenden lokalen Koordinaten, so bilden die $d_x u^j$ für jedes $x \in U$ eine Basis von $T_x^*(V)$, und die Einschränkung jedes C^s-Schnittes $(s \leqq p - 1)$ von $T^*(V)$ auf U kann in eindeuti-

ger Weise als $\sum_{j=1}^{n} a_j\, du^j$ dargestellt werden, wobei die a_j der Klasse C^s angehörende Funktionen sind; ein solcher Schnitt wird eine *C^s-Differentialform* genannt.

Um zum Tensorbegriff zu gelangen, genügt es, die Konstruktionen der multilinearen Algebra (Kapitel 3) anzuwenden. In einem Punkt x von V ist der Raum der *Tensoren vom Typ* (r, q) der Vektorraum $(T_x(V))^{\otimes r} \otimes (T_x^*(V))^{\otimes q}$. Es sei $T^{(r,q)}(V)$ die Vereinigung der $T_x^{(r,q)}(V)$; dann besitzt $T^{(r,q)}(V)$ eine eindeutig bestimmte Struktur eines n^{r+q}-dimensionalen C^{p-1}-Faserraums mit der Basis V, mit der Eigenschaft, daß für r beliebige C^{p-1}-Vektorfelder X_j $(1 \leqq j \leqq r)$ und q beliebige C^{p-1}-Formen ω_k $(1 \leqq k \leqq q)$ die Abbildung

$$x \mapsto X_1(x) \otimes \cdots \otimes X_r(x) \otimes \omega_1(x) \otimes \cdots \otimes \omega_q(x)$$

ein C^{p-1}-Schnitt dieses Faserbündels ist. Jeder C^s-Schnitt $(s \leqq p-1)$ von $T^{(r,q)}(V)$ wird dann ein *C^s-Tensorfeld* vom Typ (r, q) genannt. Die Formeln (19), welche „Tensoren“ im Sinne von Ricci definieren, lassen sich nun als die Übergangsdiffeomorphismen eines Kartenwechsels im Tensorraum darstellen.

Bekanntlich (vgl. Kapitel 3) enthält der Raum $T_x^{(0,q)}(V)$ der kovarianten Tensoren zwei wichtige Teilräume, nämlich den Raum $S_x^q(V)$ der *symmetrischen* und den Raum $\Lambda_x^q(V)$ der *antisymmetrischen* Tensoren, die man auch als *q-Kovektoren* im Punkt x bezeichnet; dies sind die Fasern der beiden Unterfaserbündel $S^q(V)$ und $\Lambda^q(V)$ von $T^{(0,q)}(V)$, die in der Differentialgeometrie eine wichtige Rolle spielen. Beispielsweise ist eine pseudo-Riemannsche Metrik nichts anderes als ein kovariantes symmetrisches Tensorfeld g auf V, das der Bedingung genügt, daß $g(x)$ für jedes $x \in V$ eine *nichtausgeartete* symmetrische Bilinearform auf $T_x(V)$ ist.

Noch wichtiger sind die Schnitte der Faserung $\Lambda^q(V)$, die man (alternierende) *q-Formen* nennt (die alternierenden 1-Formen sind die oben definierten Differentialformen). Bekanntlich (vgl. Kapitel 3) existiert eine „alternierende (äußere) Multiplikation“, eine bilineare Abbildung $\Lambda_x^r(V) \times \Lambda_x^q(V) \to \Lambda_x^{r+q}(V)$, daher auch eine alternierende Multiplikation $(\alpha_r, \beta_q) \mapsto \alpha_r \wedge \beta_q$ für die alternierenden Differentialformen. Dank dieser Multiplikation kann für jede lokale Karte (U, φ) eine der Klasse C^s angehörende r-Differentialform in U in eindeutiger Weise in der Gestalt $\sum f_{i_1 i_2 \ldots i_r}\, du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}$ dargestellt werden, wobei (u^j) das lokale Koordinatensystem der Karte ist, bei der Summation $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ die Menge der streng monoton wachsenden Folgen ganzer Zahlen zwischen 1 und n durchläuft und die $f_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ der Klasse C^s angehörende reellwertige Funktionen sind.

Wie E. Cartan feststellte, können die alternierenden Differentialformen häufig vorteilhaft allgemeinere Tensoren ersetzen. Ihr Kalkül beruht auf der alternierenden Multiplikation und auf der Existenz eines Differentialoperators, der *äußeren Ableitung* (welcher 1877 von Frobenius unter der Bezeichnung „bilineare Kovariante“ eingeführt wurde), der das Differential einer Funktion verallgemeinert (letztere werden als „0-Formen“ angesehen). Für eine r-Form der speziellen Gestalt $\alpha = f\, dg_1 \wedge dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_r$ ist die $(r+1)$-Form $d\alpha = df\, dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_r$ die äußere Ableitung. Die wesentliche Eigenschaft der äußeren Ableitung ist nun, daß $d(d(\alpha)) = 0$ für jede alternierende Differentialform α gilt.

Für E. Cartan war ein *Zusammenhang* auf V (der Einfachheit halber ein C^∞-Zusammenhang) ein Gesetz, das es gestattete, die Vektoren zweier Tangentialräume von V in „unendlich benachbarten" Punkten zu „vergleichen". Um das mathematisch exakt auszudrücken, definiert man für ein C^1-Vektorfeld X auf V und einen Tangentialvektor $h \in T_x(V)$ die „kovariante Ableitung $\nabla_h \mathrm{X}$ von X im Punkt x bezüglich des Vektors h" (welche die „unendlich kleine Variation" von X „mißt", wenn x „unendlich wenig" in der Richtung von h verschoben wird) als einen Tangentialvektor an V in x, der linear von h und additiv von X abhängt; weiterhin soll, wenn X durch $f\mathrm{X}$ ersetzt wird, wobei f eine C^1-Funktion auf V ist, die Beziehung

$$\nabla_h(f\mathrm{X}) = \langle d_x f, h \rangle \, \mathrm{X}(x) + f(x) \, (\nabla_h \mathrm{X})$$

gelten. Dies erlaubt es, für ein Vektorfeld Y auf V ein neues Vektorfeld $\nabla_{\mathrm{Y}}\mathrm{X}$ zu definieren, dessen Wert in jedem Punkt $x \in V$ gerade $\nabla_{\mathrm{Y}(x)}\mathrm{X}$ ist; außerdem wird vorgeschrieben, daß dies ein C^∞-Vektorfeld ist, wenn **X** und Y solche Vektorfelder sind. Die kovariante Ableitung eines Vektorfelds $\mathrm{X}(t)$ längs einer Kurve $u(t)$ (im Sinne von Levi-Civita) ist nichts anderes als $\nabla_{u'(t)}\mathrm{X}$.

Der Operator ∇_h kann in kanonischer Weise auf Tensorfelder fortgesetzt werden. Dies erlaubt es, auf innere Weise die Riccische „kovariante Ableitung" zu definieren, die eine differenzierbare Abbildung von $T^{(r,q)}(V)$ in $T^{(r,q+1)}(V)$ ist. Bekanntlich (vgl. Kapitel 3) kann nämlich der Vektorraum $T_x^{(r,q)}(V)$ als der duale Raum des Vektorraumes $T_x^{(q,r)}(V)$ angesehen werden. Wenn U nun ein Tensorfeld vom Typ (r, q) ist, so definiert man das Tensorfeld ∇U vom Typ $(r, q + 1)$, indem man seinen Wert für jeden Tensor $h \otimes z \in T_x^{(q+1,r)}(V)$ (mit $z \in T^{(q,r)}(V)$) angibt; dies ist nach Definition $\langle \nabla_h \cdot \mathrm{U}, z \rangle$.

Die Methoden E. Cartans erwiesen sich in ihrer modernen Form in zahlreichen Untersuchungen der heutigen globalen Differentialgeometrie sowie in den Anwendungen der Differentialgeometrie in der Differentialtopologie, der Theorie der holomorphen Mannigfaltigkeiten und der algebraischen Geometrie als außerordentlich fruchtbar.

9.7. Literatur

[B—G] M. Berger et B. Gostiaux, Géometrie différentielle, Collection U, A. Colin, Paris 1972.

[B—G—M] M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet, Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Mathematics Nr. 194, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[Bo] N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques, Neuauflage, Hermann, Paris 1974.

[Bo][1] Deutsche Übersetzung der ersten Auflage von Anneliese Overschelp: Elemente der Mathematikgeschichte, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen und Zürich 1971.

[D] J. Dieudonné, Eléments d'Analyse, Bd. 1—8, Gauthiers-Villars, Paris 1968 bis 1978.

[D][1] Deutsche Übersetzung: Grundzüge der Analysis, Bd. 1—8, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971 bis 1983.

[Sp] M. Spivak, Differential geometry, Bd. 1—5, Publish or Perish, Boston 1970 bis 1975.

[1] E. Cartan, Oeuvres complètes, 6 Bde., Gauthiers-Villars, Paris 1955.

[2] A. Cauchy, Oeuvres complètes, 27 Bde., 2 Reihen, Gauthier-Villars, Paris 1882 bis 1974.

[3] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 4 Bde., Gauthiers-Villars, Paris 1887—1896. Nachdruck: Chelsea, New York 1972.

[4] L. Euler, Operia omnia (3 Reihen), Teubner und O. Füssli, Leipzig-Berlin-Zürich 1911—1976.

[5] C. F. Gauß, Werke, 12 Bde., Göttingen 1870—1927. Nachdruck: G. Olms, Hildesheim-New York 1973.

[5][1] C. F. Gauß, Allgemeine Flächentheorie (Deutsch herausgegeben von A. Wangerin), Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 5, 5. Aufl., Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1921.

[6] J. Milnor, Morse Theory, University Press, Princeton 1963.

[7] G. Monge, Applications de l'Analyse à la Géométrie, Paris 1809.

[8] J. Nitsche, Vorlesungen über Minimalflächen, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975.

[9] A. Pogorelov, Monge-Ampère equations of elliptic type (Übersetzung aus dem Russischen von L. Boron), Noordhoff, Groningen 1964 (Original: Charkov 1960).

[10] B. Riemann, Gesammelte Werke, 2. Aufl., Teubner, Leipzig 1892.

[11] R. Thom, Sur la théorie des enveloppes, J. Math. pures et appl. (9) *41* (1962), 177—192.

10. Topologie

von Guy Hirsch

10.0. Einführung

Die Topologie (insbesondere die algebraische Topologie) befindet sich auch heute noch in sehr schneller Entwicklung; dies bringt innerhalb weniger Jahrzehnte die völlige Umgestaltung bestimmter ihrer Teilgebiete mit sich. Daher sind die Auswahl der Themen und die Art und Weise, in der sie behandelt werden, in diesem Kapitel — und zwar in stärkerem Maße als in anderen Kapiteln — zwangsläufig von persönlichen Neigungen geprägt. Auch haben wir uns nicht ausschließlich von historischen Kriterien leiten lassen. Da es uns mehr um die Geschichte der mathematischen Ideen als um die Geschichte der Mathematiker geht, waren wir nicht so sehr bestrebt, im einzelnen nachzuzeichnen, welchem Autor die Priorität zukommt, also jeweils genau die Daten anzugeben, zu denen Begriffe, Termini, Methoden bzw. Sätze erstmals erwähnt wurden; vielmehr haben wir zu zeigen versucht, wie neue Probleme allmählich auftauchten, entsprechend dem Umfang, in welchem die Antworten auf schon formulierte Fragen präzisiert wurden. Zudem haben wir die Themen vor allem in dem Bemühen ausgewählt, Lesern, die keine spezialisierten Mathematiker sind, Vorstellungen nahezubringen, welche in fruchtbare, nicht allzu schwer zugängliche Theorien münden.

Die Geschichte der Topologie umfaßt zwar tatsächlich nur eine relativ kurze Periode der Geschichte der Mathematik, da ihre systematische Entwicklung erst vor etwa einem Jahrhundert einsetzte; trotzdem weist sie sehr interessante Beispiele für eine Tendenz zur Abstraktion und zur Verallgemeinerung auf, deren Früchte sich heute in vielen Gebieten finden. Da es Probleme sind, die zur Topologie gehören, welche ursprünglich zur Einführung dieser recht abstrakten Begriffe führten, ermöglicht es die Darlegung dieser Probleme, den Gebrauch und die Anwendung dieser Begriffe anhand relativ einfacher Beispiele zu illustrieren.

Zunächst war die Topologie unter der Bezeichnung *Analysis situs* bekannt geworden, die auf Leibniz [1] zurückgeht (für den es sich übrigens zweifellos um den Entwurf eines Kalküls ganz anderer Art handelte); diese Bezeichnung ist in den englisch- bzw. französischsprachigen Ländern bis ins erste Drittel des zwanzig-

sten Jahrhunderts gebräuchlich geblieben. Der deutsche Mathematiker Listing führte 1836 die Bezeichnung *Topologie* ein [2], aus der sich leicht abgeleitete Wörter bilden ließen und die vor allem im deutschen Sprachgebrauch mehr und mehr an die Stelle von *Analysis situs* trat. Beispielsweise verwendete Hilbert diese Bezeichnung in seinem berühmten Vortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900, ohne daß er es für notwendig hielt, ihren Sinn zu erklären.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß man unter *topologischen* Transformationen (Abbildungen) nicht diejenigen Transformationen versteht, die in der Topologie untersucht werden (letztere sind stetige Abbildungen), sondern den Spezialfall der bijektiven und in beiden Richtungen stetigen Abbildungen, welche später (zweifellos vor allem von Poincaré) *Homöomorphismen* genannt werden sollten. Dieser Begriff war 1860 von Möbius [3] unter dem Namen *elementare Verwandtschaften* eingeführt worden.

Schließlich ist bekanntlich das Wort *Topologie* durch einen Gebrauch in doppelter Bedeutung belastet, ähnlich wie es bei dem Terminus Algebra der Fall ist. Während *die Topologie* (bestimmter Artikel) eine mathematische Disziplin bezeichnet, gebraucht man *eine Topologie* (unbestimmter Artikel) als Synonym für eine topologische *Struktur* (wobei ein Raum eine mit einer Topologie versehene Menge ist); im Lauf der letzten Jahre hat dieser Begriff übrigens eine noch schärfer gefaßte Bedeutung erhalten, und zwar die, daß man unter einer Topologie das System der offenen Mengen eines Raumes versteht. Tatsächlich ist es die Existenz einer topologischen Struktur, die es ermöglicht, von stetigen Funktionen (bzw. Abbildungen) zu sprechen.

In der Funktionalanalysis stieß man sehr schnell auf Mengen, die mit verschiedenen Topologien versehen werden konnten (siehe 8.6.). Wenn man beispielsweise in der Menge der (auf einem Intervall bzw. auf der Geraden) stetigen (zahlenwertigen) Funktionen zwischen der gewöhnlichen („einfachen" oder „punktweisen") Konvergenz und der gleichmäßigen Konvergenz unterscheidet, so gibt es Folgen von Elementen, die im ersten Fall gegen ein Element der Menge streben, im zweiten Fall aber gegen kein solches Element konvergieren. Das bedeutet, daß man auf diese Weise die Menge der stetigen Funktionen mit zwei nicht äquivalenten Topologien versehen hat. Damit stand man vor dem Problem, daß es verschiedene Topologien gab, mit denen man eine gegebene Menge versehen konnte, und allgemeiner, daß man das, was man von topologischen Strukturen verlangen mußte, um fruchtbare Theorien zu erhalten, zu präzisieren hatte. (Für weitere Einzelheiten über die Art, in der die grundlegenden Begriffe der Topologie nach und nach herausgearbeitet wurden, vergleiche man 6.7. und 6.8. sowie 8.6.)

In einem erweiterten Sinne bezeichnet die Topologie die Untersuchung von Eigenschaften, die gegenüber Homöomorphismen invariant sind. Die Erforschung derartiger Eigenschaften und die Untersuchung der Beziehungen zwischen ihnen wurden notwendig, als die Mathematiker das Bedürfnis empfanden, gewisse mehr oder weniger anschauliche geometrische Vorstellungen genau zu definieren und ihnen eine strenge Grundlage zu geben, etwa denen der *Kompaktheit*, des *Zusammenhangs* oder auch der *Dimension*.

Ohne daß man es gewollt hätte, hat sich die Topologie in zwei mehr oder weniger getrennten Zweigen herausgebildet, der sogenannten *allgemeinen* (oder mengentheoretischen oder analytischen) Topologie und der *kombinatorischen* Topologie, die sich dann zur *algebraischen* Topologie entwickelte; wie schon die Namen zum Ausdruck bringen, unterscheiden sich diese Zweige durch den Charakter ihrer Methoden, vor allem aber sind sie verschiedenen Ursprungs. Die allgemeine Topologie entstand im Zusammenhang mit Problemen, welche von der Theorie der Funktionen reeller Veränderlichen aufgeworfen worden waren (vgl. 6.8.); sie hat sich weiterentwickelt, um insbesondere auf die Bedürfnisse der Funktionalanalysis, vor allem der Variationsrechnung und der Spektraltheorien (vgl. 8.5.5.) einzugehen. Die algebraische Topologie ihrerseits findet die Quelle ihrer systematischen Weiterentwicklung in den Riemannschen Arbeiten über die Funktionen einer komplexen Veränderlichen (siehe Kapitel 4 und Kapitel 7), die in die Untersuchung der topologischen Eigenschaften von Flächen münden. Es ist sehr schwer, diese beiden Aspekte der Topologie durch die Art ihrer Ziele zu charakterisieren, und wie es scheint, hat man sich dieser Mühe auch nicht unterzogen. Das folgende Kriterium, das nicht verabsolutiert werden sollte, ermöglicht es aber oft, diese Unterscheidung zu treffen: Wenn ein Begriff bzw. eine Theorie ihren ganzen Sinn und ihre ganze Tragweite behalten, wenn man sie nicht mehr auf den ganzen Raum, sondern nur auf die Umgebungen seiner Punkte anwenden will, so gehören sie zur allgemeinen Topologie; sind sie dagegen auf Umgebungen nicht anwendbar oder behalten sie dann nur einen Teil ihrer Bedeutung bei, so handelt es sich eher um algebraische Topologie. Dies verhindert selbstverständlich nicht die Existenz gemischter Theorien, wie beispielsweise der Dimensionstheorie, von der in 10.5.4. die Rede sein wird und die einen Begriff enthält, der seine volle Bedeutung in beliebigen Umgebungen bewahrt, dessen Behandlung jedoch Methoden der algebraischen Topologie erfordert.

10.1. Allgemeine Topologie

Wir werden hier nur relativ kurz auf die allgemeine Topologie eingehen; denn im Gegensatz zur algebraischen Topologie scheint sie bis heute nicht zur Herausbildung neuer Methoden geführt zu haben, welche in anderen Gebieten der Mathematik als denen, aus denen sie hervorging, anwendbar sind. Andererseits wurden ihre wichtigen grundlegenden Aspekte, die mit den Entwicklungen der Analysis und der Funktionalanalysis verknüpft sind, schon in anderen Kapiteln behandelt. Daher werden wir uns mit einer allgemeinen, recht gedrängten Zusammenfassung begnügen.

Eigentlich verdankt die allgemeine Topologie ihre Entstehung zum Teil einem Mißverständnis. Als Georg Cantor etwa um 1870 die Darstellbarkeit der Funktionen einer reellen Veränderlichen durch trigonometrische Reihen bzw. Fourierreihen untersuchte, interessierte er sich für die Charakterisierung der Mengen von Punkten, in denen der Wert der Funktion geändert werden kann, ohne daß sich die

Reihe ändert (siehe 6.7.2.). Deshalb sah er sich veranlaßt, die Eigenschaften von Teilmengen der reellen Geraden zu untersuchen. Er führte (neben dem Begriff des Häufungspunktes, den man Weierstraß verdankt) einige grundlegende Begriffe der Topologie ein, darunter den der abgeleiteten Menge, d. h. der Menge der Häufungspunkte (siehe 6.7.2.). Ausgehend davon definierte er dann die Mengen „von erster Gattung" (bei denen die Iteration der Bildung der abgeleiteten Menge nach endlich vielen Schritten zur leeren Menge führt; siehe 6.8.1.). Diese Mengen sind abzählbar und gehören somit zu der Klasse von Mengen, die Cantor beschreiben wollte. Es gibt deren aber noch andere, und Cantor, der sich bald ganz und gar der Untersuchung und der Rechtfertigung der unendlichen Mengen widmete, wandte sich von seinem ursprünglichen Problem ab, ohne es gelöst zu haben; übrigens ist die vollständige Lösung auch heute noch nicht bekannt. Arithmetische und algebraische Betrachtungen, die Cantor völlig außer Acht ließ, scheinen bei dieser Lösung eine wesentliche Rolle zu spielen [148]. Es ist also gewissermaßen zufällig, daß Cantor bei der Untersuchung bestimmter topologischer Aspekte eines Problems, dessen Lösung er bald anderen überlassen sollte, die ersten Eckpfeiler einer neuen Disziplin gesetzt hat.

Auf der anderen Seite vollzog sich die Untersuchung topologischer Strukturen jahrzehntelang meistens nicht losgelöst von der Mengenlehre, wie die Titel des Artikels von R. Baire [150] in der *Encyclopédie* (*Théorie des Ensembles*) oder des 1914 von F. Hausdorff publizierten Buches *Mengenlehre* [151], in dem die Umgebungsaxiome eingeführt werden, belegen. (Die ersten von Cantor betrachteten Mengen waren natürlich Teilmengen der Geraden oder der Ebene, da ihre Untersuchung durch Probleme der Analysis angeregt worden war. Erst ganz allmählich reduzierte sich die abstrakte Mengenlehre auf die Betrachtung der Begriffe Elementbeziehung (Zugehörigkeit zu einer Menge) bzw. Kardinalzahl und auf Ordnungsstrukturen. Die Einführung „abstrakter" Räume, d. h. von Mengen, die mit einer topologischen Struktur versehen sind, aber keine Teilmengen des euklidischen Raumes zu sein brauchen (siehe 8.6.), verdankt man im wesentlichen Fréchet [4] (1906). Da der allgemeinen Topologie erst relativ spät eine gewisse Selbständigkeit zuerkannt wurde, wird sie oft als mengentheoretische oder analytische Topologie bezeichnet; diese Termini erinnen daran, in welchem Rahmen (Mengenlehre bzw. Anwendungen in der Analysis) sie entstanden ist.

Es sollte hier auch erwähnt werden, daß die Bezeichnung *allgemeine* Topologie (in Gegenüberstellung zur algebraischen Topologie) nur teilweise gerechtfertigt ist, denn diese ist ebenso allgemein wie jene. Es wäre vielleicht besser gewesen, statt von allgemeiner Topologie von *grundlegender* Topologie zu sprechen, da diese Disziplin in der Tat eine der grundlegenden Strukturen der Analysis ist.

Schließlich verfolgt die allgemeine Topologie seit der Anerkennung ihrer Selbständigkeit ein Ziel, von dem nicht auszuschließen ist, daß es sich nur als Trugbild erweist. Ein zu viel forderndes Axiomensystem würde die Anwendung der Theorie auf bestimmte Räume (insbesondere auf die Räume der Funktionalanalysis) behindern, während zu weit formulierte Axiome nicht die Gültigkeit einiger Sätze (Analoga der topologischen Sätze der klassischen Analysis), die man zu erhalten wünscht, zu gewährleisten brauchen. Daher ist es wichtig, die Axiome sorgfältig

zu wählen, damit man — falls er überhaupt existiert — einen angemessenen Rahmen findet, um die Probleme zu behandeln, in denen stetige Abbildungen auftreten. Allgemein wurde angenommen, eine vernünftige Topologie müsse wenigstens *separiert* sein, d. h. dem Hausdorffschen Trennungsaxiom (das manchmal auch T_2-Axiom genannt wird) genügen, nach welchem zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen haben sollen. Daher nahm man mit einer gewissen Überraschung zur Kenntnis, daß Zariski unter Benutzung Stonescher Ideen [5] auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit eine nichtseparierte Topologie einführen konnte (wobei die abgeschlossenen Mengen im wesentlichen die Untermannigfaltigkeiten sind), eine Vorstellung, die von 1950 an wesentlich weiterentwickelt werden sollte (siehe [157], S. 150). Dies zeigt, daß das Hausdorffsche Trennungsaxiom manchmal zu einschränkend ist. Andererseits braucht sogar auf gewissen Hausdorffschen Räumen keine stetige Funktion zu existieren, die in zwei beliebig vorgegebenen Punkten die Werte 0 bzw. 1 annimmt. (Es gibt (sogar abzählbare) Hausdorffsche Räume, auf denen es außer den Konstanten keine stetigen Funktionen gibt [6].) Die Notwendigkeit, Punkte oder abgeschlossene Mengen nicht nur durch disjunkte Umgebungen, sondern auch durch stetige Funktionen trennen zu können, erzwang die Einführung verschiedener Trennungsaxiome, deren ad-hoc-Charakter sich besonders in ihrer Numerierung zeigt (ein Axiom Tichonovs [152], das nachträglich den oft mit T_3 und T_4 bezifferten Axiomen, welche den meist als regulär bzw. normal bezeichneten Räumen entsprechen, hinzugefügt wurde, wird manchmal mit 3,5 indiziert). Alle diese Trennungseigenschaften sind in den metrischen Räumen und allgemeiner in den 1944 von Dieudonné eingeführten *parakompakten*[1]) Räumen erfüllt.

Die parakompakten Räume scheinen gegenwärtig einen adäquaten Rahmen für die meisten Anwendungen zu liefern; man kann heute jedoch noch nicht behaupten, daß die Suche nach der geeignetsten Definition eines topologischen Raumes zu Resultaten geführt habe, die von den Mathematikern einmütig akzeptiert würden. (Hinsichtlich der Dimensionstheorie besteht eine analoge Situation; vgl. 10.5.4.).

10.2. Kombinatorische Topologie

10.2.1. *Graphen und Färbungsprobleme*

Die ersten Sätze zur kombinatorischen Topologie verdankt man im wesentlichen Euler. Im Jahre 1736 hatte ihn das wohlbekannte „Königsberger Brücken-

[1]) Eine Überdeckung $\mathfrak{A}$ einer Menge E wird *feiner* als eine Überdeckung $\mathfrak{B}$ derselben Menge E genannt, wenn zu jedem $A_\alpha \in \mathfrak{A}$ (mindestens) ein $B_\beta \in \mathfrak{B}$ mit $A_\alpha \subset B_\beta$ existiert. Man nennt eine Überdeckung $\mathfrak{R}$ eines Raumes E *lokal endlich*, wenn jeder Punkt von E eine Umgebung besitzt, welche nur mit endlich vielen Elementen von $\mathfrak{R}$ Punkte gemein hat. Ein Raum E wird *parakompakt* (auch *totalbeschränkt*) genannt, wenn er Hausdorffsch ist und wenn zu jeder offenen Überdeckung von E eine lokal endliche offene Überdeckung von E existiert, die feiner ist als die gegebene. (Einige Autoren fordern nicht, daß E ein Hausdorffscher Raum ist.)

problem" [7] dazu geführt, eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu formulieren, daß ein Graph[1]) in einem Zuge gezeichnet werden kann, wobei jede Kante genau einmal durchlaufen wird. Die Graphentheorie hat seither eine sehr bemerkenswerte Entwicklung genommen. Insbesondere hat sie aber in verschiedenen Gebieten Anwendungen gefunden, deren erste (wenn man von denjenigen absieht, die mehr den Charakter von Spielen tragen, wie dies beispielsweise bei Hamilton [8] im Jahre 1859 der Fall war) zweifellos durch die Kirchhoffschen Regeln [9] (1847) geliefert wurde, die den Fluß des elektrischen Stromes durch verzweigte Leiter betreffen. Da anscheinend die verwendeten Methoden bis heute keinen großen Einfluß auf die anderen Teile der Mathematik gehabt haben, werden wir hier nicht auf die Geschichte der Graphentheorie eingehen; wir erwähnen lediglich, wegen der Einfachheit seiner Aussage, einen Satz von Kuratowski (1930) [10] über ebene Graphen. Es ist unmöglich, fünf Punkte paarweise zu verbinden, ohne aus der Ebene herauszutreten oder ohne daß sich die Kanten in wenigstens einem von den gegebenen Punkten verschiedenen Punkt schneiden; ebenso wenig kann man, wenn man sechs Punkte in zwei Gruppen zu je drei aufteilt, jeden Punkt der einen Gruppe mit jedem Punkt der anderen Gruppe verbinden (Problem der drei Häuser und der drei Brunnen). Der Kuratowskische Satz besagt nun, daß ein Graph, wenn er nicht in einer Ebene konstruiert werden kann, notwendigerweise eine der beiden Anordnungen enthält.

Ferner geben wir hier einige Hinweise auf das Vier-Farben-Problem, das eng mit der Graphentheorie zusammenhängt.

Das Problem, Karten zu färben, verlangt zunächst, die Farben auf die Polygonflächen, die durch die Kanten eines auf einer Fläche vorgegebenen Geschlechts ([G—H], S. 445) gezeichneten Graphen begrenzt sind, so zu verteilen, daß zwei längs einer oder mehrerer Kanten aneinandergrenzende „Länder" niemals die gleiche Farbe haben. Es handelt sich dann darum, die kleinste Anzahl von Farben zu bestimmen, welche unabhängig von der Gestalt der gegebenen Karte für das Färben ausreicht. Dieses Problem scheint erstmals im Anschluß an eine 1852 von Francis Guthrie [11] an de Morgan gestellten Frage aufgetreten zu sein: Man hat bald festgestellt, daß auf der Sphäre (oder in der Ebene) vier Farben für alle bekannten Karten ausreichen. (Das heißt, man konnte keine Karte angeben, die mehr Farben erfordert hätte, während fünf Farben in jedem Fall genügten. — *Anm. d. Übers.*)

Allgemeiner hat man für jede Fläche vom Geschlecht p einen „n-Farben-Satz", wenn man beweisen kann, daß einerseits auf dieser Fläche Karten existieren, die n Farben erfordern, und daß andererseits jede Karte mit höchstens n Farben färbbar ist. Der n-Farben-Satz (wobei n als Funktion des Geschlechts der Fläche ausgedrückt wird) wurde 1890 von P. J. Heawood für die von der Sphäre (oder der Ebene) *verschiedenen* Flächen formuliert [12]. Er wurde nach und nach für ver-

[1]) Ein (nicht orientierter) *Graph* ist eine aus *Kanten* (homöomorphen Bildern von Strecken) bestehende Menge; die Endpunkte der Kanten werden *Knoten* oder *Ecken* genannt. Je zwei Kanten sind disjunkt oder haben nur ein oder zwei Ecken gemein. Die Graphen sind ein Beispiel für eindimensionale Polyeder oder Komplexe (vgl. 10.3.2.).

schiedene Werte des Geschlechts und schließlich im Jahre 1968 von G. Ringel und J. W. T. Youngs [13] vollständig bewiesen. Um festzustellen, daß n Farben genügen, kann man den Begriff der für $n + 1$ Farben *kritischen* Karte einführen, der auf G. Birkhoff [155] zurückgeht. Eine für $n + 1$ Farben kritische Karte ist eine Karte, deren Färbung $n + 1$ Farben erfordert, die aber so beschaffen ist, daß sich jede Karte mit einer echt kleineren Anzahl von „Ländern" schon mit n Farben färben läßt. Für den Nachweis, daß gewisse Konfigurationen (d. h. gewisse Polygone, die eventuell von gewissen anderen Polygonen umgeben sind, usw.) nicht als kritische Karte dargestellt werden können, benutzt man die Tatsache, daß nach Voraussetzung eine aus einer kritischen Karte durch Auslöschen einer Kante entstandene Karte sich mit n Farben färben läßt und daß man dann für bestimmte Konfigurationen aus dieser Färbung eine Färbung der ursprünglichen Karte mit n Farben herleiten kann. Das einfachste Beispiel ist das eines $(n - 1)$-seitigen Polygons: Wenn es sich in einer für $n + 1$ Farben kritischen Karte darstellen ließe, so würde man eine der Seiten des $(n - 1)$-Ecks löschen; diese Karte ist nach Voraussetzung mit n Farben färbbar, aber in dem Ring der Länder, die das $(n - 1)$-Eck umgeben, hat man höchstens $n - 1$ Farben benutzt, so daß also sicherlich eine von diesen verschiedene Farbe für die Färbung des $(n - 1)$-Ecks verfügbar ist, Andererseits existiert zu einer Fläche mit vorgegebenem Geschlecht p ein (von p abhängiges) m derart, daß jede auf der Fläche gezeichnete Karte wenigstens ein Land mit höchstens m Grenzen besitzt. (Für die Sphäre beispielsweise hat m den Wert 5, für den Torus oder die projektive Ebene hat m den Wert 6. Dieses Resultat ergibt sich aus dem Eulerschen Polyedersatz, von dem in 10.2.2. noch die Rede sein wird. Die gleiche Formel zeigt auch, daß die Polygone mit großer Seitenzahl verhältnismäßig selten auftreten und daß ihr Vorkommen notwendigerweise durch das Vorhandensein von Polygonen ausgeglichen wird, deren Seitenzahl die Zahl 5 nicht übersteigt.)

Für die Sphäre (oder die Ebene) ist das Problem lange Zeit ungelöst geblieben und Gegenstand einer Reihe falscher Beweise gewesen. Man wußte (seit Heawood), daß fünf Farben genügen, aber man kannte keine Karte, bei der fünf Farben notwendig gewesen wären; man hatte außerdem nachweisen können, daß jede Karte mit höchstens 40 Ländern mit vier Farben färbbar ist. Im Jahre 1976 haben Appel und Haken [156] versichert, den Vier-Farben-Satz für die Sphäre bewiesen zu haben. Ihre Methode (von der in den zitierten Artikeln keine Details veröffentlicht wurden und die im Verlaufe verschiedener Etappen einen Computer benutzt) besteht darin, eine große Anzahl von Konfigurationen zu beschreiben, die in einer für fünf Farben kritischen Karte nicht dargestellt werden können, um dann zu beweisen, daß wenigstens eine dieser Konfigurationen in jeder auf der Sphäre oder in der Ebene gezeichneten Karte auftreten muß. (Sie sprechen von einer *unvermeidbaren* Menge von Konfigurationen.)

Abschließend weisen wir darauf hin, daß ein analoger Satz im dreidimensionalen Raum nicht existiert; denn Frederic Guthrie hat bewiesen [14], daß man stets n Polyeder konstruieren kann, von denen jedes (längs einer Seitenfläche) an jedem anderen anliegt (siehe Abb. 10.1), und H. Tietze hat gezeigt [15], daß man zusätz-

lich sogar fordern kann, sie seien konvex (diese Bedingung ist übrigens nicht topologischer Natur).

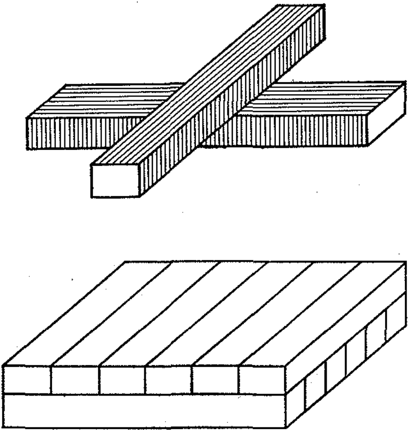


Abb. 1. Ist beispielsweise $n = 6$, so nehme man zwei quadratische Bretter, deren Dicke den sechsten Teil ihrer Länge betrage, zersäge sie in je sechs gleiche prismatische Balken und lege diese in zwei Schichten nebeneinander und die Schichten um 90° verdreht übereinander. Dann verleime man den ersten oberen Balken an der Auflagestelle mit dem ersten Balken der unteren Schicht, den zweiten mit dem zweiten usw., so daß sechs „Balkenkreuze" mit jeweils versetzter Auflagefläche entstehen, die jeweils als ein einziger Körper angesehen werden können. In der angegebenen Figur berührt jedes Kreuz jedes andere in einer Fläche. (Nach Tietze [15], Bd. 1, S. 87f.)

10.2.2. Der Eulersche Polyedersatz

Der andere Beitrag Eulers zur Analysis Situs ist für uns von größerem Interesse, denn er hat zu Verallgemeinerungen geführt, die in dieser Geschichte einen wichtigen Platz einnehmen. Außerdem ermöglicht er es, an einem sehr einfachen Beispiel die allmähliche Entwicklung der Ideen, die zur Topologie führten, mitzuerleben.

Als Euler sich mit der Klassifizierung der Polyeder mit Hilfe der Anzahl e ihrer Ecken, der Anzahl k ihrer Kanten und der Anzahl f ihrer Seitenflächen beschäftigte, fand er 1750 (vgl. [16]) die Beziehung $e - k + f = 2$. (Dieser Satz wird manchmal Descartes zugeschrieben; dieser hatte einen Satz über die Summe der Raumwinkel eines Polyeders aufgestellt [17], der im Fall einer Fläche dem Gaußschen Satz über die Gaußsche Krümmung analog ist (siehe 9.3.). In dieser Untersuchung erhielt er für die Zahl der ebenen Winkel den Ausdruck $2f + 2e - 4$; er bemerkte auch, daß diese Zahl den Wert $2k$ habe, woraus man unmittelbar die Eulersche Formel herleiten kann. Descartes hat aber diesen Satz nicht erkannt, ebenso wenig übrigens Leibniz, der eine Kopie des Descartesschen Textes besaß. Descartes hatte seine Aufmerksamkeit zwei Begriffen gewidmet, den ebenen Winkeln und den Raumwinkeln; die Ecken treten bei ihm im Zusammenhang mit den Raumwinkeln auf, während er sich nicht um die gegenseitige Lage der Ecken, der Kanten, der Seiten-

flächen kümmerte und im Gegensatz zu Euler nicht nach Relationen zwischen ihren Anzahlen suchte.)

Im Jahre 1751 gab Euler [18] einen Beweis seines Satzes, doch ist dieser Beweis nicht korrekt, ebensowenig wie übrigens die Aussage des Satzes, wenn man nicht bestimmte Präzisierungen und Einschränkungen in der Definition der Begriffe Polyeder, Seitenfläche und Kante vornimmt. Die Beweise beruhen auf bestimmten Arten der Induktion und Reduktion, um nach dem sukzessiven Weglassen einer gewissen Anzahl von Seitenflächen zu einfachen Polyedern zu gelangen (wie beispielsweise Dreiecken in der Ebene), für welche die Formel unbestreitbar gültig ist. Es wird jedoch nicht bewiesen, daß diese Reduktion, unabhängig von der Gestalt des Ausgangspolyeders oder gewisser seiner Seitenflächen, stets möglich ist.

Der Eulersche Satz läßt sich auf Polyeder anwenden, die zur Sphäre homöomorph sind und zur Kreisscheibe homöomorphe Seitenflächen haben. Wenn man nicht annimmt — was Euler selbstverständlich getan hat —, daß die Seitenflächen eben und die Kanten geradlinig sind, muß man noch fordern, daß die Kanten zu Strecken homöomorph sind. Sind diese Bedingungen nicht sämtlich erfüllt, so lassen sich leicht Gegenbeispiele zum Eulerschen Satz konstruieren; das gelang L'Huilier [19] im Jahre 1813. Eines seiner Gegenbeispiele ist ein hohles Polyeder, d. h. ein Körper zwischen zwei ineinandergeschachtelten Polyedern; anscheinend wurde er durch die Betrachtung gewisser Kristalle auf diese Konstruktion geführt.

Eine Reihe von Mathematikern[1]), unter ihnen Legendre, Cauchy, L'Huilier, Gergonne, v. Staudt, Steiner, Schläfli, Poinsot, Hessel, Möbius, Listing und Jordan, beschäftigten sich mit dem Eulerschen Satz, sei es, um einen Beweis anzugeben (der erste hinreichend exakte Beweis wurde 1847 von v. Staudt erbracht [20]), sei es, um die Gültigkeitsbedingungen zu präzisieren. Es ist bemerkenswert, daß diese Bedingungen nicht topologischer Natur sind (wie die oben formulierte Bedingung, die nur den Homöomorphiebegriff benutzt), sondern bezwecken, die Konstruktion von Gegenbeispielen auszuschließen (die als „pathologisch" angesehen werden und ausgeschlossen werden sollten; dieses Verhalten gegenüber „Pathologien" ist im neunzehnten Jahrhundert ziemlich verbreitet und findet sich in seiner zweiten Hälfte besonders in der Analysis). Erst 1861 mit Cayley und Listing (und 1866 mit Jordan) [21] erkannte man, daß der Eulersche Satz richtig bleibt, wenn die Seitenflächen und die Kanten gekrümmt sind, daß er daher mehr zur Topologie als zur metrischen oder projektiven Geometrie gehört (was beispielsweise Poinsot nicht erkannt hatte).

Daß der v. Staudtsche Beweis seit 1847 vorlag, verhinderte nicht, daß die von Schläfli 1852 formulierte Verallgemeinerung (welche die Formel auf den Fall n-dimensionaler Polyeder [22] ausdehnt) noch Lücken der gleichen Art enthält. Ähnliche Unsicherheiten sollten sich noch wiederholt in den ersten, der Entwicklung der kombinatorischen Topologie gewidmeten Arbeiten und besonders bei Poincaré zeigen.

---

[1]) Eine gedrängte Bibliographie findet man in dem Buch von J. C. Pont [158], eine vollständigere in dem Enzyklopädie-Artikel von Dehn und Heegard [38].

Auch Gauß hat sich für topologische Probleme interessiert (ihm verdankt man insbesondere den mit Hilfe von Integralen definierten Begriff der *Verschlingungszahl*[1]) zweier Kurven im dreidimensionalen Raum [23]); doch war sein Einfluß eher indirekt, insbesondere über seinen Schüler Listing, der den Eulerschen Satz wieder aufgriff und die Verallgemeinerung auf n Dimensionen ins Auge faßte (indem er von der Summe der Anzahlen der Elemente gerader Dimension die Summe der Anzahlen der Elemente ungerader Dimension subtrahierte). Listing hat nicht nur, wie oben erwähnt, die Bezeichnung *Topologie* geprägt, sondern scheint auch der erste gewesen zu sein, der sie als selbständige Disziplin auffaßte (zu der insbesondere der Eulersche Satz gehört). Ihm verdankt man auch den Begriff des *Komplexes*[2]) [25]. Fast zur gleichen Zeit wie Möbius (1858), und vielleicht weil sie erstmals von Gauß betrachtet worden waren, beschreibt Listing [26] auch *einseitige*[3]) bzw. nichtorientierbare Flächen (siehe [G — H], S. 273, 431, 446); im Gegensatz zu Möbius enthält sich Listing jedoch einer Ausnutzung dieser Entdeckung.

10.2.3. *Der Beitrag Riemanns*

Die zum Beweis des Eulerschen Satzes benutzten Überlegungen sollten in den Arbeiten Riemanns Anwendung und Erweiterung finden (siehe 4.5.). Um das Verhalten von Funktionen einer komplexen Veränderlichen zu untersuchen, entwickelte Riemann die Vorstellung, mehrere Exemplare des Bereichs der komplexen Veränderlichen übereinander zu lagern, die Verzweigungspunkte durch Schnitte zu verbinden und dann die verschiedenen Exemplare längs der Ränder (Ufer) der Schnitte miteinander zu verheften. Auf diese Weise erhielt er die heute nach ihm benannte Fläche der betrachteten Funktion, deren topologische Eigenschaften er untersuchte. Er wollte insbesondere diejenigen Eigenschaften herausfinden, die von der Art und Weise, in der die Schnitte gezogen und in der die Exemplare verheftet werden, unabhängig sind.

Riemann berücksichtigte nicht die Existenz nichtorientierbarer Flächen (und einseitiger Flächen, die übrigens nicht als Riemannsche Flächen in der Funktionentheorie auftreten); daher betrachtete er nicht die Orientierung der Kurven oder der Flächenelemente, die er beschrieb. Indem er die Fläche durch ein System von Rückkehrschnitten (d. h. von einfach geschlossenen Kurven, die durch den gewählten Punkt gehen) zerlegte, bis er ein einfach zusammenhängendes (zur Kreisscheibe homöomorphes) Flächenstück erhielt, bestimmte er die Ordnung des Zusammenhangs der Fläche, d. h. das, was später der Rang der Homologiegruppe mod 2 genannt werden wird (siehe 10.3.2.). Bei Riemann, und manchmal auch noch 40 Jahre später bei Poincaré, werden die Begriffe Homologie und Homotopie

---

[1]) Die Definition dieses Begriffs bringen wir in 10.4.1.

[2]) Die Definition dieses Begriffs findet sich in 10.3.3.

[3]) Eine in einen dreidimensionalen Raum eingebettete singularitätenfreie Fläche wird *einseitig* genannt, wenn es möglich ist, die Orientierung der Normalen beim Durchlaufen gewisser Wege auf der Fläche umzukehren (wie beim Möbiusschen Band). Auf einer derartigen Fläche kann man zwischen Innerem und Äußerem nicht unterscheiden.

nicht immer klar unterschieden, denn es wird nicht präzisiert, ob die Flächenstücke, deren Rand betrachtet wird, einfach zusammenhängend sind (was Poincaré 1904 in dem *Cinquième complément à l'Analysis Situs* zum Ausdruck bringen sollte).

Riemann hatte sich vorgenommen, die Homologietheorie auf n-dimensionale Mannigfaltigkeiten auszudehnen. Aber er starb jung, und so war es Betti [29], der Riemanns Ideen weiter entwickelte (er war Riemann begegnet und hatte von dessen Arbeiten Kenntnis). Soweit es die eigentliche Funktionentheorie betrifft, wurden die Riemannschen Untersuchungen von Felix Klein fortgesetzt, der, zur gleichen Zeit wie Schläfli, auch die topologischen Eigenschaften der reellen projektiven Ebene herausarbeitete [30]. Letztere ist eine nichtorientierbare Fläche (siehe [G—H], S. 446), die zur Sphäre (ihrer zweiblättrigen Überlagerung) lokal

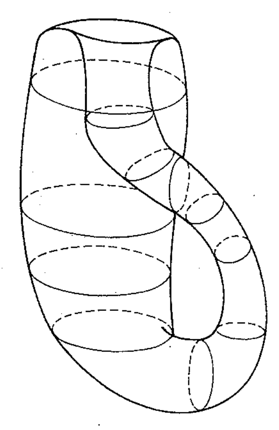


Abb. 2. Kleinsche Flasche

isometrisch ist; auf der Sphäre schneiden sich jedoch die geodätischen Linien immer in zwei Punkten, und es herrschte eine zeitlang bezüglich der Beziehungen zwischen der Sphäre und der projektiven Ebene eine gewisse Verwirrung. Klein verdankt man auch [31] die Entdeckung der nach der projektiven Ebene einfachsten geschlossenen nichtorientierbaren Fläche (die oft *Kleinscher Schlauch* oder *Kleinsche Flasche* genannt wird; siehe Abb. 10.2.), die man nicht ohne Selbstdurchdringung in den dreidimensionalen euklidischen Raum einbetten kann (siehe [G—H], S. 431). Klein unterstrich [32] den Unterschied zwischen der Eigenschaft einer Fläche, nicht orientierbar zu sein (einer inneren Eigenschaft) und ihrer Eigenschaft, einseitig zu sein, was von der Einbettung in eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit abhängt.[1]) Das konnte aber nicht verhindern, daß diese Verwechslung weiter vorkam; beispielsweise benutzte Poincaré systematisch das Wort *einseitig*, um nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten zu beschreiben.

Walther von Dyck, ein Assistent Kleins, führte eine systematische Untersuchung der Flächen durch [33], von denen er Normalformen angab und so bewies, daß eine

---

[1]) Der Unterschied zwischen nichtorientierbar und einseitig wird in [S—T], § 76, untersucht. Das einfachste Beispiel wird von der Einbettung der reellen projektiven Geraden (einer eindimensionalen Sphäre, einer orientierbaren Mannigfaltigkeit) geliefert, die in der reellen projektiven Ebene einseitig ist. (Das Phänomen hängt mit der Tatsache zusammen, daß die projektive Ebene selbst nicht orientierbar ist.)

kompakte Fläche (ohne Rand) einerseits durch die Eigenschaft, orientierbar zu sein oder nicht, andererseits durch die Eulersche Charakteristik bzw. das Geschlecht p charakterisiert wird. (Für eine Fläche vom Geschlecht p hat die Eulersche Charakteristik den Wert $2 - 2p$.) v. Dyck bemühte sich auch um eine ähnliche Theorie für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten [34]. (Wir werden später auf dieses Thema zurückkommen, das eine Reihe von Begriffen und Theorien entstehen ließ.) Seltsamerweise scheint v. Dyck den Zusammenhang zwischen seiner Charakterisierung und dem Eulerschen Polyedersatz nicht erkannt zu haben.

10.3. Die Anfänge der Homologietheorie

10.3.1. Die Arbeiten Poincarés

Wie Poincaré in einer Analyse seines wissenschaftlichen Schaffens schrieb [35], wurde er durch seine Arbeiten zur mathematischen Analysis (sowie zur Mechanik) dazu geführt, sich mit Problemen topologischer Natur zu beschäftigen, und zwar insbesondere durch die Untersuchung der durch Differentialgleichungen definierten Kurven (siehe 8.3.1.) sowie durch die Untersuchung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen; für diese konnte er im Jahre 1908 nach einem langen Wettbewerb mit den deutschen Mathematikern aus der Schule Felix Kleins die Lösung des Uniformisierungsproblems angeben.

Mit Poincaré nimmt die kombinatorische bzw. sogar die eigentliche algebraische Topologie wirklich ihren Aufschwung; im Keime findet man in seinen zwischen 1892 und 1904 veröffentlichten Arbeiten eine große Anzahl von Themen, die während der folgenden drei oder vier Jahrzehnte wiederaufgegriffen oder weiter entwickelt werden sollten. Die meisten seiner Ideen (von denen einige manchmal erst fast vierzig Jahre später verstanden wurden, wie im Falle der äußeren Differentialformen) finden sich schon in der Note aus dem Jahre 1892 oder in der ersten Abhandlung von 1895; die folgenden Abhandlungen (in dem Maße, in dem sie mehr zur Topologie als zur algebraischen Geometrie gehören) bringen im Grunde Verfahren oder ergänzende Beispiele. Die Exaktheit der Methoden läßt in der Tat oft zu wünschen übrig, so daß Poincaré mitunter in einer folgenden Note die in vorangegangenen Arbeiten formulierten inkorrekten Resultate korrigieren mußte. Insbesondere wird von der Bedeutung der Orientierung (und der Möglichkeit, daß es nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten gibt; siehe 10.2.3.) abgesehen, und die Torsion (siehe 10.3.2.) wird erst seit der Abhandlung aus dem Jahre 1900 berücksichtigt. Im Anschluß an die von P. Heegard 1898 formulierten kritischen Bemerkungen [37] ersetzte Poincaré den noch unklaren und in der ersten Abhandlung durch Gleichungen beschriebenen Begriff der Mannigfaltigkeit durch den des in Zellen zerlegten Polyeders (siehe 10.3.2.). Dieser Polyederbegriff, der bei Poincaré nur ein im euklidischen Raum angewandter Kunstgriff zur Erleichterung bestimmter Beweise ist, wird von Dehn und Heegaard in dem 1907 in der deutschen Ausgabe der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften [38] veröffentlichten Artikel

Analysis Situs in abstrakter Form definiert. Die von Poincaré gegebenen Definitionen und Beweise beruhen fast immer implizit auf der Möglichkeit, die Homologieklassen durch *Mannigfaltigkeiten*[1]) darzustellen, d. h. durch Räume, in denen jeder Punkt eine zu einer offenen Kugel homöomorphe Umgebung besitzt. (Diese Homöomorphie zu einer offenen Kugel wird mitunter (nach Ehresmann) eine *lokale Karte* genannt. Eine Menge von lokalen Karten, die zur Überdeckung aller Punkte der Mannigfaltigkeit ausreicht, wird *Atlas* genannt. Die zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten sind die Flächen ohne Selbstdurchdringung.)

Die Fortschritte der Homologietheorie (die besonders Veblen und Alexander zu verdanken sind) sollten es ermöglichen, auf diese Bedingung zu verzichten, und etwa 50 Jahre nach Poincaré sollte René Thom systematisch die Systeme von Mannigfaltigkeiten untersuchen, welche Ränder sein können [147]. Thom schuf so die *Kobordismentheorie*, die sich in mehreren Richtungen entwickelt hat und über den Rahmen dieses Werkes hinausgeht.

10.3.2. *Komplexe und Homologie*

Die Homologietheorie kann auf verschiedene Arten eingeführt werden; wir werden uns hier darauf beschränken, die *simpliziale Theorie* kurz zu beschreiben, welche es ermöglicht, gleichzeitig Polyeder und Komplexe zu definieren, und welche die Beschreibung der Dualität erleichtert (vgl. 10.4.1.). Zur Formulierung der Hauptresultate der Theorie nutzen wir von vornherein algebraische Eigenschaften aus, die erst von Heinz Hopf im Jahre 1928 herausgearbeitet worden sind (siehe unten).

Ein n-dimensionales *Simplex* σ ist das durch $n + 1$ affin unabhängige Punkte $a_0, a_1, \dots, a_n$ bestimmte (beschränkte) konvexe Teilstück des n-dimensionalen euklidischen Raumes. Diese Punkte heißen die *Eckpunkte* des Simplexes σ, und das Simplex ist die Menge der Punkte $\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$, wobei $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ die Menge der Systeme positiver Zahlen λ mit $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ durchläuft. In jeder durch $k + 1$ Eckpunkte von σ festgelegten linearen k-dimensionalen Mannigfaltigkeit heißt das Simplex, das diese Punkte zu Eckpunkten hat, eine k-dimensionale *Seite* von σ; insbesondere werden in der Homologietheorie die $n + 1$ Seiten der Dimension $n - 1$ von σ (die man erhält, indem man der Reihe nach einen der Eckpunkte von σ wegläßt) auftreten.

Ein *geordnetes* Simplex σ wird durch seine in einer gegebenen Ordnung vorgegebenen $n + 1$ Ecken definiert und mit $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ bezeichnet, wobei die Eckpunkte in dieser (vorgegebenen) Anordnung geschrieben werden. Man kann nun zwei geordnete Simplexe, deren Eckpunkte sich durch eine *gerade* Permutation auseinander herleiten lassen, als äquivalent ansehen; in diesem Fall spricht man von *orientierten* Simplexen. Die $n + 1$ Eckpunkte von σ definieren zwei orientierte Simplexe, die (einstweilen) mit $\sigma = \sigma^+$ und $\sigma = \sigma^-$ bezeichnet werden sollen.

Ein *Polyeder* (oder einen Komplex) erhält man (bis auf Homöomorphie), indem man Simplexe miteinander verheftet; zwei nichtdisjunkte Simplexe haben dabei

[1]) Vgl. [G—H], S. 442 (*Manifolds*).

genau eine ihrer Seiten (und alle Seiten von dieser) gemeinsam. Insbesondere läuft im Falle der Flächen ein Polyeder auf eine *Triangulation*, d. h. eine Zerlegung in zweidimensionale Simplexe, hinaus.

In einem gegebenen Polyeder betrachtet man Linearkombinationen (mit ganzzahligen Koeffizienten oder auch, allgemeiner, mit Koeffizienten aus einer kommutativen Gruppe) von n-dimensionalen Simplexen. Eine derartige Kombination wird eine n-dimensionale *Kette* (des betrachteten Polyeders) genannt, und diese Ketten sind die Elemente einer kommutativen Gruppe. Das mit dem Koeffizienten -1 versehene Simplex $\sigma = \sigma^+$ wird dann mit dem Simplex σ^- identifiziert. (Werden die Koeffizienten in der Gruppe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ gewählt — Homologie mod 2 —, so unterscheidet man nicht zwischen σ^- und σ^+. Dies taten die Begründer der Theorie unabsichtlich, die weniger aus Simplexen bestehende Ketten als durch Gleichungen definierte Mannigfaltigkeiten betrachteten.)

Eine vollständige (aber in der Praxis wenig handliche) Beschreibung der Polyeder erhält man mittels *Inzidenztabellen*, rechteckigen Matrizen, deren Spalten den k-dimensionalen und deren Zeilen den $(k-1)$-dimensionalen Simplexen entsprechen. Je nachdem, ob das $(k-1)$-dimensionale Simplex eine Seite des k-dimensionalen Simplexes ist oder nicht, setzt man 0 oder ± 1 an die Stelle, an der sich eine Zeile und eine Spalte schneiden. (Das Vorzeichen kann man genau bestimmen, wenn man den Koeffizienten des Simplexes im Rand berücksichtigt; siehe unten.)

Der *Rand* $\partial\sigma$ eines n-dimensionalen Simplexes $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ist eine $(n-1)$-dimensionale Kette, die man erhält, indem man die $(n-1)$-dimensionalen Seiten von σ mit den Koeffizienten $+1$ oder -1 versieht, d. h., es ist

$$\partial\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_n) + \cdots + (-1)^i (a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n) + \cdots + (-1)^n (a_0, a_1, \dots, a_{n-1});$$

dabei bedeutet das Symbol $\hat{a}_i$, daß der Eckpunkt a_i weggelassen wurde. (Die Berechnung des Randes eines orientierten Dreiecks mittels dieser Formel zeigt beispielsweise, daß dank der Vereinbarung $\sigma^- = -\sigma^+$ dann $\partial\sigma$ dem üblichen Begriff des Randes eines Polygons entspricht.)

Der Rand einer Kette wird durch lineare Fortsetzung der obigen Randbildung definiert.

Eine direkte Berechnung zeigt, daß $\partial\partial = 0$ gilt, d. h., daß ∂ ein Operator ist, dessen Quadrat null ist. Der Kern (von ∂) (in der Gruppe der n-dimensionalen Ketten) wird die Gruppe der n-dimensionalen *Zyklen* (des betrachteten Polyeders) genannt. Das Bild (von ∂) ist die Gruppe der ($(n-1)$-dimensionalen) Ränder, und die obige Eigenschaft bringt zum Ausdruck, daß jeder Rand ein Zyklus ist. Die n-dimensionale *Homologiegruppe* (des betrachteten Polyeders) ist die Faktorgruppe der (n-dimensionalen) Zyklengruppe nach der (n-dimensionalen) *Rändergruppe*. Wie wir in 10.5.1. sehen werden, hängt diese Gruppe nur vom Raum und nicht von der betrachteten simplizialen Zerlegung ab.

Diese (im Fall der gewöhnlich betrachteten Polyeder zyklische) kommutative Gruppe ist die direkte Summe (siehe 3.4.1.) aus einer gewissen Anzahl zyklischer (zu $\mathbf{Z}$ isomorpher) freier Gruppen (diese Zahl, der Rang der n-ten Homologiegruppe,

wird die *n-te Bettische Zahl* des Polyeders genannt) und gewisser zyklischer Gruppen von endlicher Ordnung. Dieser Teil der direkten Summe wird *Torsionsgruppe* genannt und kann durch gewisse ganze Zahlen, die *Torsionskoeffizienten* oder die Elementarteiler, beschrieben werden. Man verdankt Poincaré nicht nur den Terminus Bettische Zahl, sondern auch den der *Homologie,* um auszudrücken, daß eine Linearkombination von Zyklen ein Rand ist. (Ursprünglich handelte es sich bei Poincaré um Mannigfaltigkeiten, die eine Mannigfaltigkeit beranden. Poincaré betrachtete keine Linearkombinationen, er sprach von „Mannigfaltigkeiten, die sich von einer Mannigfaltigkeit wenig unterscheiden".) Dann betrachtete Poincaré linear unabhängige Zyklen, d. h. solche, die nicht durch irgendeine Homologie miteinander verknüpft sind; ihre maximale Anzahl ist die *Ordnung des Zusammenhangs,* die er ebenfalls Bettische Zahl (für die betrachtete Dimension) nannte. Diese Definitionen und die seiner Zeitgenossen sind jedoch nicht ganz exakt (vor allem, weil nicht immer die Torsion mit betrachtet wird), und daraus sollten sich zahlreiche Mißverständnisse ergeben. Diese Zahlen werden mit Hilfe von Transformationen von Matrizen berechnet, die ihrerseits Inzidenzschemata bilden.

Für die zusammenhängenden Polyeder stellte man beispielsweise fest, daß die nulldimensionale Homologiegruppe zyklisch und frei ist (da zwei beliebige Eckpunkte stets die Endpunkte eines aus Kanten zusammengesetzten Polygonzuges sind). Für die n-dimensionale Sphäre ist die (n-dimensionale) n-te Homologiegruppe zyklisch und frei, die Gruppen anderer Dimensionen sind trivial. Die eindimensionale Homologiegruppe des Torus ist die direkte Summe zweier zyklischer freier Gruppen (deren Erzeugende beispielsweise durch einen Parallel- und einen Meridiankreis dargestellt werden können), und ganz allgemein ist die eindimensionale Homologiegruppe einer orientierbaren Fläche vom Geschlecht p direkte Summe von $2p$ zyklischen freien Gruppen. Ein Beispiel für die Torsion wird durch die projektive Gerade in der projektiven Ebene geliefert; denn die projektive Gerade hat keinen Rand, aber zweifach genommen berandet sie eine zweidimensionale Kette.

Poincaré beschrieb die Homologie allein durch ganze Zahlen (Bettische Zahlen und Torsionskoeffizienten), und er scheint die Gruppenstruktur, mit der man die Homologieklassen versehen kann, völlig außer Acht gelassen zu haben. Das ist auf den ersten Blick um so erstaunlicher, da er doch selbst [39] die „Regel" zur Bestimmung der eindimensionalen Bettischen Zahl formulierte, wenn man die Fundamentalgruppe kennt (siehe 10.7.2.): Indem man die Relationen zwischen Elementen der Fundamentalgruppe kommutativ macht, erhält man „Homologien", d. h. Relationen in der Homologiegruppe. (Von Felix Klein war schon 1882 erwähnt worden, daß auf einer Fläche vom Geschlecht 2 eine geschlossene Kurve existiert, die ein Rand ist, ohne zu einem Punkt homotop zu sein [40]; siehe Abb. 10.3.) Wie wir in 10.7.2. sehen werden, gibt es gute Gründe, nicht zu versuchen, die Fundamentalgruppe durch ein System numerischer Invarianten zu ersetzen. Daß im Falle der Homologie derartige Invarianten einer Beschreibung der Gruppenstruktur vorgezogen wurden, beweist, daß sogar hervorragende Mathematiker am Anfang unseres Jahrhunderts kaum Interesse an Strukturen und an ihrer Herausarbeitung

hatten. Wir werden übrigens in 10.7.2. sehen, daß sich der Anerkennung der Gruppenstruktur der Homologieklassen noch ein anderes Hindernis entgegenstellte.

Die Bedeutung algebraischer Strukturen in der Topologie wurde etwa 1925 von Emmy Noether hervorgehoben, und unter ihrem Einfluß veröffentlichte Heinz Hopf im Jahre 1928 die Arbeit [41], auf die wir anschließend eingehen. Sie kann als erste Abhandlung zur algebraischen Topologie angesehen werden. (Wir werden in 10.4.2. sehen, wie der Zusammenhang zwischen der topologischen Struktur und den algebraischen Strukturen durch die Theorie der Kategorien und Funktoren klarer und präziser herausgearbeitet wurde.)

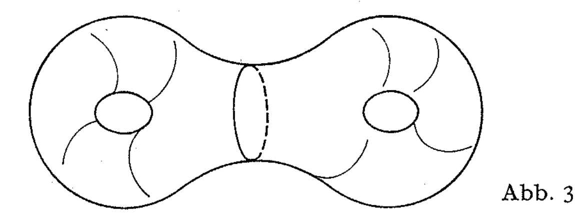


Abb. 3

Poincaré hatte den Eulerschen Polyedersatz verallgemeinert und gezeigt, daß die alternierende Summe der Anzahlen der Elemente mit gerader und der mit ungerader Dimension gleich der alternierenden Summe der entsprechenden Bettischen Zahlen ist. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß die Homologiegruppe die Faktorgruppe der Zyklengruppe nach der Rändergruppe ist, gab Hopf für den Euler-Poincaréschen Satz einen sehr eleganten Beweis, indem er für jede Dimension n die Kettengruppe in eine direkte Summe dreier Gruppen zerlegte, von denen eine die Rändergruppe ist, eine zur Homologiegruppe isomorph wird und die dritte (bei Anwendung von ∂) die $(n-1)$-dimensionale Rändergruppe liefert. Gleichzeitig verallgemeinerte Hopf den Satz, indem er ihn auf die algebraische Anzahl der Fixpunkte einer Abbildung eines Polyeders in sich ausdehnte. Auf diesen Gegenstand werden wir in 10.5.2. zurückkommen.

10.4. Die Dualität

10.4.1. Die Sätze von Poincaré und Alexander

Das Beispiel zweier linearer Mannigfaltigkeiten der Dimension p bzw. $n-p$ im n-dimensionalen euklidischen Raum führt in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit zum Begriff des Schnitts zweier Untermannigfaltigkeiten komplementärer Dimension in allgemeiner Lage (in einem Spezialfall hatte ihn schon Kronecker eingeführt [42]). Poincaré benutzte diesen Begriff, um für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten (nur für orientierbare, was er aber nicht erwähnte) einen Dualitätssatz zu beweisen, der besagt, daß die Bettischen Zahlen für die Paare komplementärer Dimensionen k und $n-k$ übereinstimmen. Übrigens schrieb Poincaré [43], daß dieser Satz, der nie formuliert worden war, mehreren Leuten bekannt gewesen und

von ihnen sogar angewandt worden sei. Der Beweis beruht auf der Konstruktion dualer Basen.

Zunächst wird die *baryzentrische Unterteilung* eines Polyeders [44] definiert, indem man den *Schwerpunkt* jedes einzelnen Simplexes des Polyeders einführt. Ist $(a_i)_{i\in I}$ die Familie der Eckpunkte des Polyeders und $(a_i)_{i\in H}$ die Teilfamilie der Eckpunkte eines Simplexes des Polyeders, so bezeichnen wir den Schwerpunkt

$$\frac{1}{\operatorname{Card}(H)} \sum_{i\in H} a_i$$

dieses Simplexes hier einfach mit H; man benutzt die Schwerpunkte als Eckpunkte zur Konstruktion von Simplexen, welche Teile des Ausgangssymplexes sind. Man sieht leicht, daß $k+1$ geeignet geordnete Eckpunkte $H_1, H_2, \ldots, H_{k+1}$ der baryzentrischen Unterteilung genau dann ein k-dimensionales Simplex dieser Unterteilung bestimmen, wenn die H_j verschieden sind und $H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_{k+1}$ gilt.

Da das hier betrachtete Polyeder eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, kann man mit Hilfe der baryzentrischen Unterteilung mit jedem Simplex eine „duale Zelle“[1]) komplementärer Dimension verknüpfen [44]. Jedes Simplex hat dann genau einen Punkt (seinen Schwerpunkt) mit der dualen Zelle gemein (Abb. 4). Ist nämlich $(a_i, a_j, \ldots, a_r)$ ein p-dimensionales Simplex des Ausgangspolyeders, so ist die Vereinigung aller $(n-p)$-dimensionalen Simplexe der baryzentrischen Unterteilung, welche $\{i, j, \ldots, r\}$ als Eckpunkt mit der kleinsten Indexzahl haben, eine zu einer Kugel homöomorphe $(n-p)$-dimensionale Zelle.

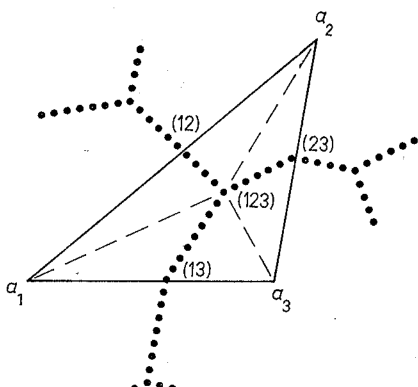


Abb. 4. Baryzentrische Unterteilung und duale Zellen

Statt zur Bestimmung der Homologiegruppen die Ränder der Simplexe zu benutzen, kann man sich auch der Ränder der Zellen bedienen; die Zuordnung zwischen Simplexen und dualen Zellen ermöglicht es, Relationen zwischen diesen Gruppen zu erhalten (in einer orientierbaren Mannigfaltigkeit insbesondere die Übereinstimmung der Bettischen Zahlen komplementärer Dimensionen, d. h. den Poincaréschen Satz).

[1]) Poincaré spricht von „cellule réciproque“ (reziproker Zelle).

Der algebraische Aspekt der geometrischen Dualität zwischen den Simplexen und den dualen Zellen wurde erst später (nach 1938) durch Einführung der Kohomologie (vgl. 10.6.1.) klar beschrieben. Die Homologie(gruppe) wird, wie wir in 10.3.2. gesehen haben, ausgehend von Ketten, d. h. von Linearkombinationen von Simplexen (oder eventuell von Zellen) konstruiert. An Stelle der Ketten kann man auch *Koketten*, d. h. auf den Simplexen (also auf den Ketten) definierte Linearformen mit ganzzahligen Werten oder allgemeiner mit Werten in einer gegebenen kommutativen Gruppe betrachten. Diese Dualität zwischen Ketten und Koketten ermöglicht die Definition eines *Korandoperators*, der zum Randoperator transponiert (dual) ist, und mündet in die Definition der Kohomologiegruppen (siehe 10.6.1.).

Poincaré mußte seinen ursprünglichen Beweis in einer späteren Abhandlung wieder aufgreifen, denn die Definition der Schnittzahl erforderte, daß die Untermannigfaltigkeiten hinreichend allgemeine Lagen einnehmen. Auf der anderen Seite wurde der von Poincaré stillschweigend übergangene Dualitätssatz für nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten im Jahre 1913 von Veblen und Alexander bewiesen [45].

Diese Sätze und, allgemeiner, der Dualitätsbegriff in der Topologie liegen einer Reihe von Entwicklungen zugrunde, auf die wir an dieser Stelle aufmerksam machen möchten.

Zunächst kann die Schnittzahl von Mannigfaltigkeiten mit den Dimensionen k bzw. $n - k$ durch die Verschlingungszahl der k- bzw. $(n - k - 1)$-dimensionalen Zyklen ersetzt werden, wenn man weiß, daß diese Zyklen in der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit die Ränder von $((k + 1)$- bzw. $(n - k)$-dimensionalen$)$ Ketten sind. Dies ist stets der Fall, wenn es sich bei der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit um eine Sphäre handelt, bei der außer für die Dimensionen 0 und n alle Zyklen Ränder sind. (Der Begriff der *Verschlingungszahl* geht auf Gauß [23] zurück und wurde von Lebesgue [46] und Brouwer [47] präzisiert; hier ist die Verschlingungszahl gleich der Schnittzahl eines der Zyklen mit der Kette, deren Rand der andere Zyklus ist; siehe Abb. 5).

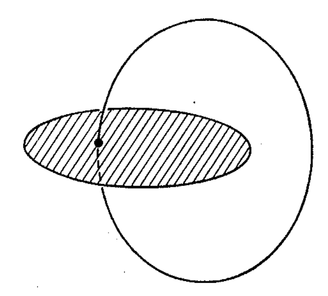


Abb. 5. Verschlingung zweier Zyklen

Dieser Begriff ermöglichte es Alexander, im Jahre 1922 einen Dualitätssatz bezüglich der Polyeder in der n-dimensionalen Sphäre (bzw. mit Hilfe einer leichten Abänderung in einem n-dimensionalen euklidischen Raum) zu beweisen [48]: Die k-dimensionale Bettische Zahl eines Polyeders ist gleich der $(n - k - 1)$-dimensionalen Bettischen Zahl seines Komplements. Das Resultat wurde 1931 von Pon-

trjagin [49] im Rahmen seiner Untersuchungen zur Dualität in Gruppen, insbesondere der *Charaktergruppe* (siehe 3.4.2.), wieder aufgegriffen; er bewies eine Dualität zwischen der Homologiegruppe einer Teilmenge der Sphäre und der Kohomologiegruppe (mit Koeffizienten mod 2; siehe 10.6.) ihres Komplements. Der Poincarésche Dualitätssatz läßt sich dann in analoger Weise formulieren.

Der Alexandersche Dualitätssatz ist eine Verallgemeinerung des Jordanschen Satzes ([G—H], S. 226), der besagt, daß in der Ebene das Komplement einer einfach geschlossenen Jordankurve aus genau zwei Gebieten besteht. (Brouwer hatte bewiesen [50], daß es möglich ist, in der Ebene „Kurven", d. h. abgeschlossene zusammenhängende Teilmengen ohne innere Punkte, zu beschreiben, welche gemeinsamer Rand von drei oder sogar von mehr Gebieten sind; siehe etwa [H—Y], S. 173.)

Im Jahre 1908 behauptete Schönflies [51], zwei Gebiete, welche das Komplement einer Jordankurve bilden, seien stets zu einer offenen Kreisscheibe und zum Komplement einer abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorph; der Beweis war jedoch nicht korrekt, wurde aber von Brouwer korrigiert und vervollständigt [50]. Brouwer stellte auch den Satz von der *Gebietsinvarianz* auf [52], der folgendes besagt: Ist A eine offene Teilmenge eines n-dimensionalen euklidischen Raumes und f ein Homöomorphismus, der A in eine Teilmenge eines n-dimensionalen euklidischen Raumes überführt, so ist das Bild von A vermöge f eine offene Menge dieses Raumes.[1])

Während aus dem Alexanderschen Dualitätssatz auch folgt, daß die Sphäre $\boldsymbol{S}_2$ den euklidischen Raum $\boldsymbol{R}^3$ in zwei Gebiete teilt (was in diesem Spezialfall übrigens schon Brouwer bewiesen hatte), gilt eine zum Schönfliesschen Satz analoge Aussage hier nicht mehr, wie ein auf Alexander zurückgehendes Beispiel [53] zeigt. Es handelt sich um die „gehörnte Sphäre" (siehe [G—H], S. 411, [H—Y], S. 176, oder *[R], S. 399), eine Sphäre, der unendlich viele, immer kleiner werdende ineinandergreifende Hörnerpaare aufgesetzt sind, die das Komplement der Alexanderschen „Sphäre" mehrfach zusammenhängend machen. Alexander bewies jedoch gleichzeitig, daß die Verallgemeinerung des Schönfliesschen Ergebnisses (d. h., daß in $\boldsymbol{R}^3$ das Komplement einer Sphäre $\boldsymbol{S}_2$ zum Komplement der Einheitssphäre homöomorph ist) richtig ist, wenn die Sphäre $\boldsymbol{S}_2$ durch ein endliches Polyeder dargestellt wird. Für die Einbettung der $\boldsymbol{S}_n$ in den $\boldsymbol{R}^{n+1}$ ergibt sich aus einem Satz von B. Mazur (1958) [54] ein analoges Resultat.

Es ist nicht möglich, hier Einzelheiten über die Konstruktionen von Mengen mit überraschenden oder pathologischen Eigenschaften anzugeben; immerhin möchten wir auf eines der ersten Beispiele hinweisen, das 1921 von Antoine (auf Anregung von Lebesgue) angegeben wurde: Antoine beschrieb die Konstruktion einer total unzusammenhängenden Menge im $\boldsymbol{R}^3$, deren Komplement nicht einfach zusammenhängend ist (siehe beispielsweise [H—Y], S. 177).

---

[1]) Diese Eigenschaft gilt nicht in beliebigen metrischen Räumen, wie das Beispiel des Hilbertraumes (vgl. 8.5.) zeigt, in dem eine Hyperebene dem ganzen Raum homöomorph ist und keinen inneren Punkt besitzt.

10.4.2. *Die Hopfschen Arbeiten und die Kategorien*

Ungefähr um 1920 war Salomon Lefschetz [56] durch die algebraische Geometrie, insbesondere durch eine Untersuchung der mit algebraischen Flächen zusammenhängenden Integrale — ein Problem, das von Picard mit transzendenten Methoden behandelt worden war ([157], Kap. VI, § 3) — zur Topologie gekommen. Lefschetz griff Ideen auf, welche schon von Riemann zur Untersuchung von Flächen, d. h. von Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension 1, verwendet worden waren (nämlich die Mannigfaltigkeit durch ein System von Schnitten auf eine Zelle, d. h. einen Raum mit trivialer Homotopie, zurückzuführen), und übertrug sie auf den Fall algebraischer Mannigfaltigkeiten beliebiger komplexer Dimension n (d. h. topologischer Dimension $2n$). Von 1923 an benutzte er auch systematisch [57] die Produkte von Mannigfaltigkeiten, insbesondere um den Graphen einer Abbildung einer Mannigfaltigkeit in eine andere zu beschreiben. Außerdem übertrug er den von Kronecker für komplementäre Dimensionen eingeführten Begriff der Schnittzahl (vgl. 10.4.1.) auf Zyklen beliebiger Dimension. In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit kann man für zwei Zyklen A, B der Dimension p bzw. q, die zueinander in „allgemeiner Lage" sind, einen Schnittzyklus $A \cdot B$ der Dimension $p + q - n$ definieren. Die Homologieklasse von $A \cdot B$ hängt nur von den Homologieklassen von A bzw. B ab. Dies ermöglicht die Definition eines *Produkts* zweier beliebiger Homologieklassen; daher kann man auf der direkten Summe der Homologiegruppen (aller Dimensionen) die Struktur eines (im allgemeinen nicht kommutativen) *Ringes* definieren, den man mitunter „Schnittring" nennt.

Ist bei einer Abbildung einer Mannigfaltigkeit in sich der Schnitt (im Produkt der Mannigfaltigkeit mit sich selbst) des Graphen der Abbildung mit der Diagonale nicht leer, so ist er ein nulldimensionaler Zyklus, und wenn seine Homologieklasse nicht null ist, so besitzt die Abbildung Fixpunkte. Heinz Hopf, der selbst schon [58] von 1925 an Resultate über Fixpunkte erhalten hatte (für welche er 1928 [41] einen in 10.3.2. erwähnten neuen Beweis gab), ging ein Jahr (1927—1928) nach Princeton, wo er Gelegenheit hatte, sich mit den Lefschetzschen Methoden vertraut zu machen.

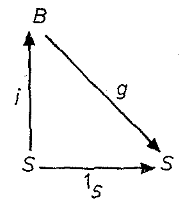
Von 1930 an nutzte Hopf in mehreren Arbeiten [59] auf sehr scharfsinnige Weise die Poincarésche Dualität in einer Mannigfaltigkeit aus. Wie wir in 10.6.1. noch sehen werden, lassen sich gewisse Ergebnisse, vor allem jene, in welchen die multiplikative Struktur vorkommt, in natürlicher Weise mit Hilfe von kontravarianten Homomorphismen formulieren. Diese zur Kohomologietheorie gehörigen Homomorphismen waren zu der Zeit, als Hopf seine in 10.6.1. und 10.6.2. geschilderten Untersuchungen über den Schnittring von Mannigfaltigkeiten bzw. über die Homologie der Gruppenmannigfaltigkeiten durchführte, noch nicht bekannt. Indem er die Homologieklassen, die er untersuchte, durch die dualen Klassen ersetzte und die üblichen (kovarianten) Homomorphismen der Homologietheorie auf diese Klassen anwandte, erhielt Hopf dank diesem scharfsinnigen Umweg Homomorphismen, welche die erforderlichen algebraischen Eigenschaften besaßen; dann transformierte er sie mittels der Poincaréschen Dualität zurück.

Schließlich ist die Dualität zwischen kommutativen Gruppen (vgl. 3.4.1.), so wie sie zum ersten Mal in der Topologie im Poincaréschen Satz auftritt, der Ausgangspunkt der *Kategorientheorie*, einer Theorie, deren vereinheitlichende Rolle in der modernen Mathematik mit der Bedeutung der in der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts aufgekommenen mengentheoretischen Denkweise vergleichbar ist oder auch mit der Bedeutung der Erkenntnis, daß es verschiedene Typen von Strukturen, wie Gruppen, Ringe usw., gibt. Tatsächlich führten im Jahre 1942 Eilenberg und MacLane die Begriffe *Funktor* und *Kategorie* ein [60], indem sie den Unterschied zwischen einem natürlichen (oder kanonischen) Isomorphismus zweier Gruppen und dem sich aus einer Dualität zwischen diesen Gruppen ergebenden Isomorphismus (bzw. den entsprechenden Isomorphismen) beschrieben; der letztgenannte Isomorphismus ist erst bestimmt, wenn Basen gewählt worden sind. Eine detaillierte Abhandlung [61], die 1945 erschien und den gleichen Themen gewidmet war, erläutert diese Situation durch die wohlbekannte Tatsache, daß in Vektorräumen die Zuordnung zwischen einem Vektorraum und seinem bidualen Raum natürlich ist (siehe 3.5.). Ein analoges Beispiel von Dualität wird auch durch den Isomorphismus zwischen Punkten und Hyperebenen eines projektiven Raumes (siehe 2.4.4.) geliefert. Diese Theorie, die ihre Erfinder mitunter humorvoll „allgemeiner abstrakter Unsinn" nannten, mündete insbesondere in eine neue Art von Dualität, wobei die Epimorphismen den Monomorphismen, die surjektiven Abbildungen den injektiven Abbildungen, die Teilobjekte den Quotienten usw. entsprechen; diese Theorie hat wirksame Hilfsmittel zur Behandlung mathematischer Probleme hervorgebracht ([G—H], Kap. 38).

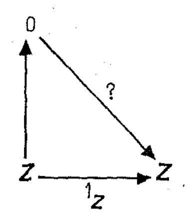
Die algebraische Topologie liefert auch einen geeigneten Rahmen, um die Rolle der Kategorien und Funktoren zu erläutern, wie das Buch *Foundations of Algebraic Topology* (1952) [94] von Eilenberg und Steenrod zeigt: Der „Homologiefunktor" ordnet beispielsweise jedem Raum der Kategorie der topologischen Räume eine Gruppe (für jede Dimension seine Homologiegruppe; vgl. 10.3.2.) in der Kategorie der kommutativen Gruppen zu; stetigen Abbildungen von Räumen (welche die Morphismen in der Kategorie der Räume sind) entsprechen vermöge des Homologiefunktors Homomorphismen (welche die Morphismen in der Kategorie der Gruppen sind) ihrer Homologiegruppen. Ähnliche Resultate gelten für die anderen Funktoren der algebraischen Topologie.

Für die Existenz von stetigen Abbildungen, welche gewissen Bedingungen genügen, ist es notwendig (aber im allgemeinen nicht hinreichend), daß entsprechende algebraische Morphismen existieren. Einschränkungen, welche diese Morphismen betreffen und aus der algebraischen Struktur herrühren, lassen sich also in Sätze der Topologie übersetzen. An Stelle einer Erläuterung dieser Methode bringen wir hier einen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes (siehe 10.5.2.). Der Satz besagt, daß jede stetige Abbildung einer abgeschlossenen n-dimensionalen Kugel in sich notwendigerweise einen Fixpunkt besitzt (d. h. einen Punkt, der mit seinem Bild übereinstimmt). Hätte die Abbildung f der Kugel B in sich (die keine Abbildung *auf* sich zu sein braucht) keinen Fixpunkt, so wäre der Vektor mit dem Ursprung x nach dem Endpunkt $f(x)$ für jeden Punkt x von B wohldefiniert (und seine Länge nicht null). Die durch diesen Vektor bestimmte Gerade durchbohrt die $(n - 1)$-

dimensionale Sphäre S, den Rand von B, in zwei Punkten; es sei $g(x)$ derjenige der Durchstoßpunkte, der auf der Seite von x liegt (der also mit x zusammenfällt, wenn x selbst zum Rand S gehört). Dann ist g eine stetige Abbildung von B auf S, und ihre Einschränkung auf S ist die identische Abbildung 1_S von S auf sich. Diese Situation wird durch das kommutative Diagramm



veranschaulicht, wobei i die Inklusion von S in B ist. Man geht nun mittels des Homologiefunktors für die Dimension $n - 1$ (vgl. 10.3.2.) von der Kategorie der Räume (und der stetigen Abbildungen) zur Kategorie der kommutativen Gruppen (und den durch die stetigen Abbildungen induzierten Homomorphismen) über oder auch durch den Funktor der $(n - 1)$-ten Homotopiegruppe (siehe 10.7.1. für $n = 2$ oder 10.8.1. für beliebiges n) zur Kategorie der Gruppen (und der durch die stetigen Abbildungen induzierten Homomorphismen). Wenn man nun weiß, daß die $(n - 1)$-te Homologie- bzw. Homotopiegruppe der Sphäre S eine freie zyklische Gruppe ist, während für $n \neq 0$ die Homologie- bzw. Homotopiegruppen der Kugel trivial sind (da sich eine Kugel stetig in einen Punkt deformieren läßt), so könnte man aus der Existenz der Abbildung g eine Faktorisierung der identischen Abbildung von $\mathbf{Z}$ in sich über die triviale Gruppe herleiten:



Das ist unmöglich; daher kann kein durch g induzierter Homomorphismus existieren.

Diese Idee, die topologischen Eigenschaften der stetigen Abbildungen mit den algebraischen Eigenschaften der Homomorphismen zu verknüpfen (die von diesen Abbildungen in den algebraischen Strukturen induziert werden, welche man den Räumen zuordnen kann), findet man schon in der Hopfschen Arbeit [59] aus dem Jahre 1930, die man also als Wegebereiter des Kategorien- und des Funktorbegriffs ansehen kann.

Schließlich war die Untersuchung der Wechselbeziehungen zwischen gewissen Funktoren (insbesondere der Homologiefunktor) Ausgangspunkt für ein neues Kapitel der Algebra, nämlich für die *homologische Algebra*. Hierauf gehen wir in 10.8.3. ein.

10.5. Invarianz. Die Arbeiten Brouwers. Vektorfelder

10.5.1. *Invarianz. Die Hauptvermutung*

Die Bettischen Zahlen und, allgemeiner, die Homologiegruppen sind auf Grund ihrer *Invarianzeigenschaft* interessant. Zerlegt man den gleichen Raum auf zwei verschiedene Arten in Zellen, so muß die Berechnung der Homologiegruppen aus diesen Zerlegungen isomorphe Gruppen liefern. Poincaré glaubte dies damit beweisen zu können, daß er zeigte, daß die Homologiegruppen invariant sind, wenn man das Polyeder unterteilt, wobei er implizit annahm, zwei simpliziale Zerlegungen eines Raumes würden isomorphe Verfeinerungen besitzen. Diese implizite Vermutung wurde 1908 von Tietze bezweifelt [62]; sie blieb als sogenannte *Hauptvermutung* bekannt. [Man kann nicht immer eine Verfeinerung zu gegebenen simplizialen Zerlegungen dadurch konstruieren, daß man den *Durchschnitt* der Komplexe als Teil der gesuchten Verfeinerung benutzt. Ein einfaches Beispiel wird durch ein Polyeder (oder ein Teilstück eines Polyeders) geliefert, das aus zwei längs einer Kante aneinanderliegenden Dreiecken (zweidimensionalen Simplexen) besteht. Durch Superposition (gemäß dem System der lokalen Karten (vgl. 10.3.1.))

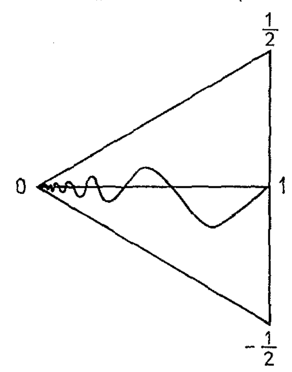


Abb. 6

der beiden Zerlegungen könnte man für die beiden Zerlegungen die Kanten $y = x/2$ und $y = -x/2$ für $0 \leqq x \leqq 1$ und $x = 1$ für $0 \leqq y \leqq 1/2$ und $-1/2 \leqq y \leqq 0$ erhalten und für die erste Zerlegung $y = 0$ für $0 \leqq x \leqq 1$, während die entsprechende Kante der zweiten Zerlegung durch $y = \frac{1}{3} x \sin \pi/x$ beschrieben wird (vgl. Abb. 6). Diese beiden letztgenannten Kanten haben unendlich viele Schnittpunkte; daher kann man diese Punkte nicht als Teilmenge der Menge der Eckpunkte der gemeinsamen Unterteilung ansehen.]

In 10.9.3. werden wir sehen, daß die *Hauptvermutung* 1961 tatsächlich widerlegt worden ist; inzwischen waren aber Invarianzbeweise von Alexander [63] (in den Jahren 1913—1915) erbracht worden. Seine erste Methode bestand darin, daß er in den betrachteten Simplexen Singularitäten (beispielsweise zusammenfallende Eckpunkte) zuließ. Sie brachte in den Arbeiten von Lefschetz [64] und S. Eilenberg [65] die heute als *singuläre Homologie* bezeichnete Theorie hervor, in der die (singulären) Simplexe keine Punktmengen mehr sind, sondern stetige *Abbildungen* eines Standardsimplexes. (Der Rand eines singulären Simplexes entspricht der

gegebenen Abbildung auf dem Rand des Standardsimplexes, der seinerseits aus Standardsimplexen besteht.) Durch ihre Definition ist die singuläre Homologie (die ausgehend von singulären Simplexen und ihrem Rand konstruiert wird) eine topologische Invariante. Daher genügt es zu zeigen, daß die mit Hilfe einer simplizialen Zerlegung gebildeten Homologiegruppen stets zu den singulären Homologiegruppen isomorph sind. Beiläufig bemerken wir, daß im Falle der Homologie die ursprüngliche Definition ausschließlich das durch eine gegebene simpliziale Zerlegung gelieferte kombinatorische Schema benutzt (vgl. 10.3.2.); daher braucht man erst später (mit der singulären Homologie) eine topologisch invariante Konstruktion zu benutzen, in der die Erzeugenden beliebige stetige Abbildungen sind. Wie wir später sehen werden, ist dieses Verfahren die Umkehrung desjenigen, das im Falle der Fundamentalgruppe benutzt wurde.

10.5.2. Die Arbeiten Brouwers. Fixpunkte

Ein zweiter Beweis für die Invarianz der Homologiegruppen (oder genauer: der numerischen Invarianten — Rang oder Bettische Zahl und Torsionskoeffizienten —, da, wie wir in 10.3.2. gesehen haben, die Gruppenstruktur erst von Hopf herausgearbeitet wurde) stammt ebenfalls von Alexander [66] (1926). Er beruht auf einer Approximation der Verfeinerungen von gegebenen simplizialen Zerlegungen. Dieser Beweis ist mit einem Gegenstand verknüpft, der um 1910 in den Arbeiten von L. E. J. Brouwer auftaucht. (Brouwer verdankt man auch eine relativ strenge Auffassung vom Wesen der Mathematik, den *Intuitionismus* (siehe 13.4.4.), der einige der in der Mathematik üblichen Schlußweisen ablehnt; merkwürdigerweise genügen die wichtigen Beiträge Brouwers auf dem Gebiet der Topologie nicht den scharfen Kriterien des Intuitionismus.)

Auf Brouwer geht die Methode der *simplizialen Approximation* [67] zurück, die nicht nur neue Resultate lieferte, sondern es auch ermöglichte, die Begriffe und Beweise, welche seit den Anfängen der kombinatorischen Topologie oft unklar und unvollständig geblieben waren, streng und präzis zu fassen. Ist eine stetige Abbildung eines Polyeders in ein anderes gegeben, so läßt sich diese über eine simpliziale Approximation (nach eventueller Unterteilung des Polyeders) durch eine hinreichend benachbarte Abbildung ersetzen, die simplizial ist, d. h. Simplexe durch eine *affine* Transformation auf (eventuell entartete) Simplexe abbildet. (Entartete Simplexe sind solche, deren Eckpunkte nicht sämtlich verschieden zu sein brauchen.) Dies gestattet insbesondere die Einführung des *Grades* einer Abbildung [68] (d. h. der algebraischen Summe der Anzahlen der Überdeckungen eines beliebigen Punktes durch das Bild, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob die Orientierungen erhalten bleiben oder umgekehrt werden). Brouwer benutzte seine Methode, indem er Homotopieklassen ([G—H], S. 435) von Abbildungen einer Mannigfaltigkeit in eine andere betrachtet; er bewies insbesondere [69], daß der Abbildungsgrad im Falle der Abbildungen einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit in die (zweidimensionale) Sphäre zur Klassifizierung ausreicht; dieser Satz sollte 1925 von Hopf auf beliebiges n erweitert werden [70].

Ein anderes Thema, das ebenfalls von Hopf [71] wieder aufgegriffen und weiter entwickelt wurde, sind die Tangentialvektorfelder (siehe 9.5.) und die Fixpunkte von Abbildungen, die offenbar miteinander verknüpft sind (da die Existenz eines singularitätenfreien Vektorfeldes (ein Vektor der Länge null wird als Singularität des Feldes betrachtet) die Existenz von fixpunktfreien, zur identischen Abbildung homotopen Abbildungen nach sich zieht; Brouwer scheint diese Relation nicht sofort gesehen zu haben). Brouwer bewies [72], daß jede stetige Abbildung einer Kugel in sich notwendigerweise wenigstens einen Fixpunkt hat.[1])

Die Sätze über die Existenz von Fixpunkten haben zahlreiche Anwendungen gefunden, besonders in der klassischen Analysis und in der Funktionalanalysis, denn die Existenz eines Fixpunkts hat beispielsweise die Existenz einer Lösung bestimmter Gleichungen zur Folge (siehe 8.6.). Diese Arbeiten sind unter anderem von Birkhoff, Schauder und Leray [73] fortgesetzt worden.

Diese Sätze über die Existenz von Fixpunkten können noch weiter präzisiert werden, wenn man den 1885 von Poincaré [74] eingeführten Begriff des *Index* eines Fixpunktes benutzt. (Im Falle eines isolierten Fixpunktes ist dieser Index gleich dem Grad der auf eine Umgebung des Punktes eingeschränkten Abbildung.) Im Jahre 1923 gab Lefschetz eine Formel an, welche die algebraische Anzahl der Fixpunkte, d. h. die algebraische Summe der Indizes, mit Eigenschaften der von einer stetigen Abbildung in den Homologiegruppen induzierten Homomorphismen verknüpft [75].

Der für Mannigfaltigkeiten gültige Lefschetzsche Satz wurde von Hopf (in der in 10.3. erwähnten Arbeit) auf den Fall beliebiger Polyeder erweitert. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer fixpunktfreien Abbildung ist offenbar die, daß die algebraische Anzahl der Fixpunkte null ist. Die Lefschetz-Hopfsche Formel ermöglicht es beispielsweise, den Grad einer Abbildung und die Existenz von Fixpunkten zu verknüpfen, und verallgemeinert so die spezielleren Ergebnisse, die man Brouwer insbesondere für die zweidimensionale Sphäre verdankt.

10.5.3. Vektorfelder. Stiefel-Whitneysche Klassen

Die von Brouwer vorgenommene Untersuchung der Vektorfelder [76] ist zuerst von Lefschetz und dann von Hopf [71] zusammen mit einigen seiner Schüler fortgeführt worden. Man kann einer isolierten Singularität eines Tangentialvektorfeldes einer orientierbaren (differenzierbaren[2])) Mannigfaltigkeit einen *Index* zuordnen, analog dem Index eines Fixpunktes. Die (algebraische) Summe der Indizes aller Singularitäten ist eine Invariante, die nur von der Mannigfaltigkeit abhängt und mit der Eulerschen Charakteristik übereinstimmt. Es existiert stets ein Vektorfeld mit

---

[1]) Einen Beweis dieses Satzes brachten wir in 10.4.2., um das Prinzip der algebraischen Topologie und ihren Funktoraspekt zu illustrieren.

[2]) Siehe [G—H, S. 447]; dort wird eine differenzierbare Mannigfaltigkeit dadurch definiert, daß in jedem Punkt eine sich stetig drehende Tangentialebene existiert. Man kann auch sagen, eine Mannigfaltigkeit sei differenzierbar, wenn sich der Übergang von einer lokalen Karte (vgl. 10.3.1.) zu einer anderen durch differenzierbare Funktionen vollziehen läßt (vgl. 9.5.).

(höchstens) einer Singularität, die einen Index hat, der mit der Charakteristik übereinstimmt. (Der erste Teil dieses Satzes war von Hadamard [77] infolge eines Mißverständnisses ohne Beweis formuliert worden. Den ersten Beweis erbrachte Lefschetz [75] im Jahre 1923.) Aus dem Dualiätssatz folgt dann, daß jede orientierbare Mannigfaltigkeit ungerader Dimension die Eulersche Charakteristik null hat, also ein singularitätenfreies Vektorfeld besitzt.

Man fragt sich nun ganz naturgemäß, unter welchen Bedingungen eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit *mehrere* linear unabhängige Vektorfelder besitzt, und insbesondere, wann n derartige Felder existieren. In diesem Fall bilden die n Vektoren in jedem Punkt ein Reper (ein n-Bein), so daß man in der Mannigfaltigkeit eine globale *Parallelübertragung* definieren kann.[1])

Ein Schüler von H. Hopf, E. Stiefel, zeigte 1939 [78], daß die Lösung dieser Probleme mit dem Vorhandensein bestimmter Homologieklassen modulo 2 verknüpft ist. Diese Probleme wurden auch von H. Whitney [79] im Rahmen von Untersuchungen über die Faserräume (von denen in 10.8.4. die Rede sein wird) gestellt; diese Klassen werden allgemein *Stiefel-Whitneysche Klassen* genannt. Ein analoges Problem ergibt sich für die mit einer komplexen Struktur versehenen Mannigfaltigkeiten; an die Stelle der orthogonalen Gruppe, die auf den Vektoren des Tangentialraumes der Mannigfaltigkeit operiert, tritt dann die unitäre Gruppe, und die entsprechenden Klassen, die sogenannten *Chernschen Klassen*, kommen insbesondere in den Sätzen der algebraischen Geometrie vor.

Wenn die Stiefel-Whitneyschen Klassen nicht null sind, können sie (ebenso wie übrigens schon die Eulersche Charakteristik im Falle eines einzigen Feldes) als *Hindernisse* angesehen werden, welche der Konstruktion von Vektorfeldern mit den geforderten Eigenschaften entgegenstehen. Häufig ist es interessant, das Hindernis, das sich bestimmten Konstruktionen entgegenstellt, durch einen mathematischen Begriff auszudrücken und irgendwie zu messen. Wir werden in 10.8.1. sehen, daß die Homotopiegruppen häufig ein sehr brauchbares Hilfsmittel liefern, um die Hindernisse zu beschreiben.

Man wußte, daß die ein-, die drei- bzw. die siebendimensionalen Sphären parallelisierbar sind (für die ersten beiden ist dies übrigens eine unmittelbare Folge aus der Tatsache, daß sie Gruppenmannigfaltigkeiten sind: Die Parallelübertragung kann dann ganz einfach durch Links- oder Rechtsverschiebung konstruiert werden). Für Mannigfaltigkeiten, welche keine Gruppenmannigfaltigkeiten sind, ist die Existenz einer globalen Parallelübertragung eine Ausnahme; insbesondere bewiesen Kervaire, Milnor und Bott [80] 1958, daß die einzigen parallelisierbaren Sphären die oben genannten sind. (Vorher hatte man bewiesen, daß die Dimension einer parallelisierbaren Sphäre eine um 1 verminderte Potenz von 2 sein muß.) Eine auf Adams (1962) zurückgehende Formel gibt die Maximalzahl linear unabhängiger Felder auf der n-dimensionalen Sphäre als Funktion von n an [81].

---

[1]) Jedem Tangentialvektor in einem Punkt x ordnet man in einem anderen Punkt y den Vektor zu, der in dem Reper in y dieselben Komponenten hat wie der gegebene Vektor in dem Reper in x. Eine Mannigfaltigkeit, auf der eine solche Parallelübertragung existiert, wird *parallelisierbar* genannt.

10.5.4. Dimension

Hier muß noch eines der wichtigsten Brouwerschen Ergebnisse zitiert werden, das auf den von ihm eingeführten Begriffen der Homotopie, der simplizialen Approximation und implizit auch des Abbildungsgrades beruht, und zwar der Satz von der *Invarianz der Dimension.*

Wenn auch der Dimensionsbegriff lange Zeit anschaulich klar zu sein schien und man der Ansicht sein konnte, die Dimension eines Raumes oder einer Figur ließe sich einfach als kleinste Anzahl der zur Beschreibung dieses Raumes oder dieser Figur notwendigen Parameter definieren, zeigten die Ergebnisse von Cantor, der 1877 [82] eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Geraden und denen der Ebene aufgestellt hatte (vgl. 6.8.), und vor allem von Peano (der eine stetige Abbildung einer Strecke auf ein ganzes Quadrat angegeben hatte [83]), daß diese Definition zumindest gewisser Präzisierungen bedurfte. Tatsächlich konnte man hoffen, daß die Dimension bei Abbildungen, die sowohl bijektiv (dies war bei der Peanoschen Kurve nicht der Fall) als auch stetig (das war bei der Cantorschen Zuordnung nicht der Fall) sind, invariant sei. Für die Dimension der euklidischen Räume wurde dieser Satz tatsächlich 1911 von Brouwer [67] bewiesen; Brouwer zeigte, daß zwischen einem n-dimensionalen Simplex und einem m-dimensionalen Simplex für $n \neq m$ kein Homöomorphismus existiert.

Der Inhalt des Dimensionsbegriffs war durch diesen Satz nicht erschöpft. Lebesgue hatte nämlich [84] eine Definition der *Dimension* angegeben, als er bemerkte, daß es, wenn man einen n-dimensionalen Raum durch Mengen hinreichend kleinen Durchmessers überdeckt, Punkte geben muß, die zu wenigstens $n + 1$ Mengen aus der Überdeckung gehören. Er hatte jedoch dafür keinen befriedigenden Beweis gegeben, so daß es zu einer Polemik mit Brouwer kam.[1]) Dieser nahm (1913) die Untersuchung dieses Problems wieder auf [85] und entwickelte seinerseits einen Dimensionsbegriff, wie ihn bereits Poincaré 1903 und 1912 skizziert hatte [86]: In einem n-dimensionalen Raum kann ein Punkt in eine Umgebung eingeschlossen werden, deren Rand $(n - 1)$-dimensional ist, usw. Es wurde nun möglich, eine Dimensionstheorie für andere als euklidische Räume aufzubauen, was um 1922 von Menger und Urysohn [87] getan wurde. Man erhielt so insbesondere Sätze bezüglich der Dimension eines topologischen Produkts (welche die Summe der Dimensionen der Faktoren nicht übersteigt) und der topologischen Summe oder Vereinigung zweier Räume (welche nicht größer ist als die um 1 vergrößerte Summe der Dimensionen der Summanden; dieses zusätzliche Glied ist notwendig, weil die Gerade die Vereinigung der Menge der Punkte mit rationaler Abszisse und der Menge der Punkte mit irrationaler Abszisse ist, die beide die Dimension null haben).

Die Dimensionstheorie in ihrer allgemeinen Form wirft jedoch Probleme auf, die noch nicht gelöst sind. In den metrischen Räumen, die separabel sind (d. h. eine überall dichte abzählbare Teilmenge besitzen), gelten die Sätze über die Produkte

---

[1]) Siehe H. Freudenthals Kommentare in den *Collected Works of L. E. J. Brouwer*, Bd. 2, insbesondere S. 438–445 und S. 548.

und die Summen, und die schon von Brouwer im Jahre 1913 bewiesene Äquivalenz zwischen der Lebesgueschen Definition und der induktiven Definition Poincarés bleibt richtig. In allgemeineren Räumen, etwa in beliebigen metrischen Räumen, ist das jedoch bereits nicht mehr so. Daher mußte man andere Definitionen der Dimension einführen, und man weiß bis heute nicht, ob diese unterschiedlichen Definitionen auf die verschiedenen Kategorien von Räumen anwendbar sind und ob eine Kategorie von Räumen existiert, die so allgemein sind, daß sie alle interessanten Fälle erfassen, die hauptsächlichen Sätze dabei jedoch gültig bleiben.

10.6. Multiplikative Strukturen

10.6.1. Kohomologie und multiplikative Struktur

In seiner Abhandlung aus dem Jahre 1895 betrachtete Poincaré äußere Differentialformen auf einer Mannigfaltigkeit und untersuchte mit Hilfe von Integralen ihre Beziehungen zu den Bettischen Zahlen. Der Gebrauch von Differentialformen wurde 1929 von Elie Cartan wieder aufgenommen und bildete im Jahre 1931 den Gegenstand einer Arbeit von G. de Rham [88]. Überträgt man de Rhams Ergebnisse in eine modernere Terminologie, so stellt man fest, daß das äußere Differential (vgl. 9.6.) ein Operator ist, dessen Quadrat null ist, und daß man also für jeden Grad n die Gruppe der *geschlossenen* Formen (d. h. derjenigen mit $d\omega = 0$) modulo der Untergruppe der *exakten* Differentialformen (d. h. derjenigen der Gestalt $\omega = d\tilde{\omega}$, wobei $\tilde{\omega}$ vom Grad $n - 1$ ist) betrachten kann. Einstweilen nennen wir diese Faktorgruppe die de Rhamsche Gruppe vom Grade n. Der Satz von de Rham besagt dann, daß die Ordnung dieser Gruppe gleich der n-ten Bettischen Zahl ist. Unter Benutzung einer erst um 1938 eingeführten Terminologie kann man die Differentialformen als *Koketten* betrachten, d. h. als Funktionen, die ihre Werte (durch Integration) auf den Ketten der Mannigfaltigkeit annehmen. Wir haben in 10.4.1. gesehen, daß man einen zum Randoperator dualen *Korandoperator* einführen kann, dessen Quadrat ebenfalls null ist und der es daher ermöglicht, *Kozyklen* und *Kohomologiegruppen* zu definieren (als Faktorgruppen des Kernes des Korandoperators (der Kozyklen) nach dem Bild des Korandoperators). Der Korandoperator transformiert Koketten der Dimension n in Koketten der Dimension $n + 1$. Der Satz von de Rham kann also im Rahmen der Kohomologie(theorie) interpretiert werden; er besagt, daß die de-Rham-Gruppe vom Grad n, d. h. die mittels des äußeren Differentials konstruierte Kohomologiegruppe, zur n-dimensionalen Kohomologiegruppe isomorph ist, die ausgehend von dem zum Randoperator dualen Korandoperator konstruiert wurde.

Die Kohomologie war 1932 noch auf einem anderen Weg in die Topologie hereingekommen. P. Alexandroff [89] hatte gezeigt, wie man die von Brouwer in die kombinatorische Topologie eingeführten Methoden auf allgemeinere Räume als Polyeder anwenden kann. Einer abgeschlossenen Überdeckung eines (kompakten metrischen) Raumes ordnete er einen Komplex zu, den *Nerv* der Überdeckung. In

einem euklidischen Raum hinreichend hoher Dimension wählte er Punkte in allgemeiner Lage und ordnete jeder abgeschlossenen Menge F_i der Überdeckung einen dieser Punkte zu. Die den $F_i, F_j, \ldots, F_r$ entsprechenden Punkte sind genau dann die Eckpunkte eines Simplexes des Nervs, wenn der Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen $F_i, F_j, \ldots, F_r$ nicht leer ist. (Abb. 7) Durch Betrachtung von Überdeckungen durch abgeschlossene Mengen, deren Durchmesser gegen null strebt, konstruierte er ein kombinatorisches Modell des untersuchten Raumes. Die Ausnutzung verwandter Ideen im Zusammenhang mit einem Grenzübergang in einer Folge von Verfeinerungen der Überdeckung führte E. Čech zur Definition der heute nach ihm benannten *Čechschen Kohomologie* [90]. Andererseits hatte Lefschetz schon 1930 Kozyklen betrachtet [91], die er Pseudozyklen nannte und die er durch Anwendung der Poincaréschen Dualität erhielt. Doch erst um 1938 wurden die Begriffe Kokette, Korandoperator und Kohomologie anläßlich der Untersuchung multiplikativer Eigenschaften, von denen noch die Rede sein wird, deutlich herausgearbeitet. Insbesondere im Zusammenhang mit den Pontrjaginschen Arbeiten über topologische Gruppen und Dualität [49] benutzte man die Gruppe der Charaktere als Koeffizientengruppe für die Homologie und die Kohomologie.

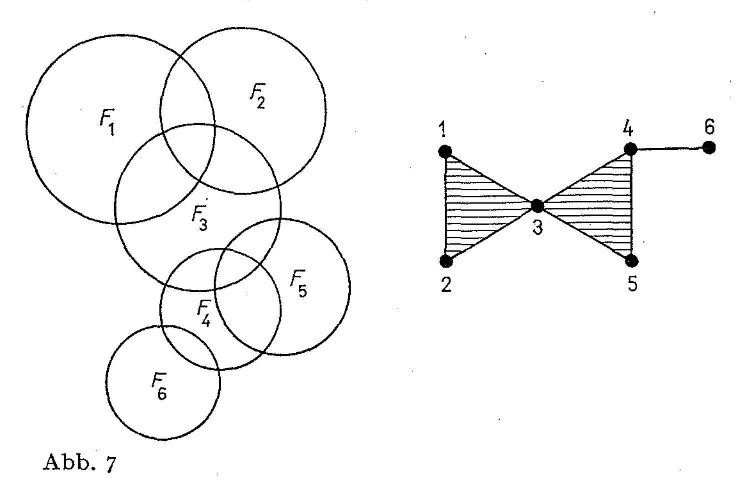


Abb. 7

Etwa 1945—1950 wurden insbesondere von Leray [92] und von Henri Cartan [93] Erweiterungen der Begriffe Kette bzw. Kokette eingeführt. Eine einheitliche und axiomatische Darstellung der verschiedenen, in diese Theorie eingeführten Begriffe wurde von Eilenberg und Steenrod [94] gegeben. Nach einem allgemeinen Verfahren können die in 10.3.2. beschriebenen Homologiegruppen eines Komplexes oder eines Polyeders auf den „relativen Fall" ausgedehnt werden: Ist K' ein Teilpolyeder von K (das heißt, sind jedes Simplex von K' und alle seine Ränder Simplexe von K), dann kann man die Ketten von K modulo der Untergruppe der Ketten von K' betrachten. In dieser Faktorgruppe induziert der Randoperator einen Operator (dessen Quadrat null ist), den man relativen Randoperator (oder Randoperator modulo K') nennt. Die Faktorgruppe des Kernes dieses Operators (relative Zyklen) nach dem Bild dieses Operators ist die relative Homologiegruppe

von K modulo K'. Ist K' die leere Menge, so reduzieren sich die relativen Homologiegruppen auf die in 10.3.2. beschrieben Homologiegruppen. Dieser Begriff wurde 1926—1927 von Lefschetz [95] bei der Untersuchung berandeter Mannigfaltigkeiten eingeführt.

Die axiomatische Darstellung benutzt systematisch den Begriff der relativen Homologie und arbeitet insbesondere mit den Beziehungen zwischen der Homologie von K, der Homologie von K' und der relativen Homologie von K modulo K'. Die Homologiegruppe wird dann als Funktor (vgl. 10.4.2.) der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der kommutativen Gruppen definiert, der einem System von Axiomen genügt. Anschließend zeigt man, daß in gewissen Kategorien, zu denen die Polyeder gehören, dieses System (bei Berücksichtigung der benutzten Koeffizienten) kategorisch ist; das bedeutet, daß alle Gruppen, die man einem beliebigen Raum (der betrachteten Kategorie) so zuordnen kann, daß die Axiome erfüllt sind, notwendigerweise einander isomorph sind. Dies liefert insbesondere einen neuen und indirekten Beweis des Satzes von de Rham.

Die Existenz einer multiplikativen Struktur auf den Elementen der Homologie- bzw. Kohomologiegruppen wird einerseits durch die Multiplikation der äußeren Differentialformen, andererseits durch die Schnitte in Mannigfaltigkeiten, die, wie wir in 10.4.2. gesehen haben, von Lefschetz und Hopf untersucht worden waren, nahegelegt. Diese Theorien bezogen sich jedoch nur auf Mannigfaltigkeiten, und nach einer in jener Zeit recht verbreiteten Auffassung war die multiplikative Struktur den Mannigfaltigkeiten vorbehalten. Doch schon 1935 legten Alexander und Gordon [96] die Definition einer Multiplikation (des sogenannten *Cup-Produkts*) in einem Komplex vor, die auch von Čech [97] und Whitney [98] untersucht wurde. Die Definition des Cup-Produkts in einem Komplex schien von einer gewissen Willkür abzuhängen. Ausgehend von Lefschetzschen Ideen zeigte N. Steenrod [99] sowohl die Ursachen für die Wahl des Cup-Produkts als auch, aus welchem Grunde das Produkt die Kohomologie und nicht die Homologie heranzieht: Es existiert eine kanonische Abbildung (vermöge der Diagonalabbildung) eines Raumes in das Produkt des Raumes mit sich, und der durch diese Abbildung (welche die Kohomologie des Produkts in die Kohomologie des gegebenen Raumes transformiert) in der Kohomologie induzierte kontravariante Homomorphismus ist dem Produkt zugeordnet. Andererseits ergibt sich die Diagonale nicht als kartesisches Produkt der Simplexe der beiden Faktoren, sondern ist nur einer Kombination derartiger Produkte homotop (Abb. 8), und diese Kombination kann auf mehrere Arten gewählt werden.

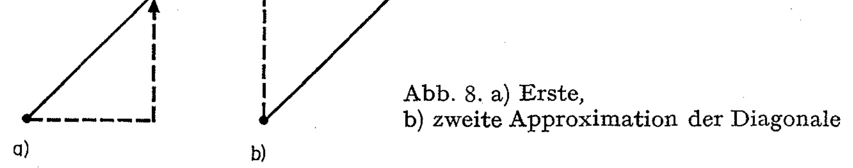


Abb. 8. a) Erste, b) zweite Approximation der Diagonale

Das Cup-Produkt ist nicht die einzige Operation, die man in den Kohomologiegruppen definieren kann. Eine systematische Untersuchung der verschiedenen Typen von Kohomologieoperationen, zu der N. Steenrod wichtige Beiträge geliefert

hat [100], ermöglichte es, die Relationen zwischen diesen Operationen zu klären, und hat zu einem besseren Verständnis der Struktur der möglichen topologischen Räume geführt.

10.6.2. *H-Räume und Hopf-Algebren*

Im Zusammenhang mit der multiplikativen Struktur sei ein Satz von Hopf aus dem Jahre 1939 [101] über die Homologie der Gruppenmannigfaltigkeiten (wie Hopf sagte) zitiert. In einer Gruppenmannigfaltigkeit existiert auf den Ketten und den Homologieklassen eine natürliche[1]), durch die Gruppenaxiome gegebene multiplikative Struktur. Andererseits sind auch die Kohomologieklassen selbst, wie wir schon gesagt haben, mit einer Ringstruktur versehen (die Hopf übrigens, wie wir oben gesehen haben, durch die Poincarésche Dualität auf den Homologieklassen erhielt). Durch die Untersuchung der Relationen zwischen diesen beiden Strukturen bewies Hopf, daß der Kohomologiering (mit rationalen Koeffizienten) einer Gruppenmannigfaltigkeit dem Kohomologiering eines topologischen Produktes von Sphären ungerader Dimension isomorph ist.

Dieser Hopfsche Satz ist Ausgangspunkt wichtiger Verallgemeinerungen. Einerseits läßt er sich auf allgemeinere Räume als Gruppenmannigfaltigkeiten anwenden (was übrigens Hopf selbst schon formuliert hatte) und hat so zur Betrachtung einer Klasse von Räumen geführt, die man (Hopf zu Ehren) *H-Räume* nennt; sie umfassen insbesondere die Schleifenräume[2]) (die keine Gruppenmannigfaltigkeiten sind). Andererseits ließ eine aufmerksame Überprüfung der algebraischen Eigenschaften, auf denen der Beweis des Satzes beruht, erkennen, daß man es mit einer additiven Gruppe zu tun hat, die gleichzeitig mit einem Produkt und einem Koprodukt im kategorientheoretischen Sinne ([G—H], S. 587 und S. 593) versehen ist. Diese Strukturen haben sich in verschiedenen Gebieten der Mathematik als nützlich erwiesen; sie sind meist unter dem Namen *Hopfsche Algebren* bekannt und werden in Bourbakis *Algèbre* (neue Auflage) [153] *Bigèbres* genannt. (Merkwürdigerweise wird darin Hopfs Name nirgends erwähnt.)

Die Bigebren sind eines der Beispiele für algebraische Methoden, wie sie bei der Untersuchung von Problemen der algebraischen Topologie eingeführt wurden (meistens übrigens in sehr ungeschickter Art und Weise). Seit 1945 konzentriert sich die Aufmerksamkeit verschiedener Algebraiker auf diese Methoden, die man mehr und mehr von zufälligen, ihrer topologischen Herkunft entstammenden Aspekten befreite, wobei sie gleichzeitig eine immer größere Tragweite erhielten. Insbesondere haben die der Berechnung der Homologie- und Kohomologiegruppen zugrunde

---

[1]) Diese Struktur darf nicht mit der in 10.4.2. definierten Struktur des Schnittringes verwechselt werden.

[2]) Die in einem Punkt x_0 eines Raumes X ausgehenden Schleifen sind stetige Abbildungen der Strecke [0, 1] in X, bei denen das Bild von 0 und von 1 eben x_0 ist. Es gibt eine natürliche Zusammensetzung der Schleifen (die sich durch Aneinanderreihung ergibt ([D], 16.27.)).

liegenden Verfahren ein neues Kapitel der Algebra, die *homologische Algebra*, entstehen lassen, von der in 10.8.3. noch die Rede sein wird.

10.7. Die Fundamentalgruppe und die Überlagerungen

10.7.1. Die Fundamentalgruppe

Die *Fundamentalgruppe* eines Raumes, die oft auch Poincaré-Gruppe genannt wird, wurde von Poincaré in seiner Note aus dem Jahre 1892 eingeführt und in seiner Abhandlung von 1895 ausführlicher dargestellt. Heute ist sie als Gruppe der Homotopieklassen von Schleifen bezüglich eines Basispunktes definiert; das Verknüpfungsgesetz ergibt sich einfach aus der Regel für das Aneinanderreihen von Schleifen.

Bei Poincaré ist von der Verknüpfung von Schleifen (die bei ihm übrigens Wege genannt werden; denn für ihn entspricht eine Schleife einem Weg, der nacheinander in den beiden Richtungen durchlaufen wird) nicht die Rede. Die Gruppe wird durch die Substitution der Werte gewisser auf der Mannigfaltigkeit definierter (nicht eindeutiger) Funktionen eingeführt, angeregt durch die in der Funktionentheorie untersuchten Automorphismen, ganz besonders durch diejenigen, die Poincaré Fuchssche Funktionen nannte (heute heißen sie allgemein automorphe Funktionen (vgl. 7.1.16.)). Die Homotopie wurde von Poincaré nicht beschrieben, doch genügt die Stetigkeit, um verständlich zu machen, daß homotope Schleifen (geschlossene Wege) die gleichen Substitutionen induzieren müssen. Die Rolle des Basispunktes wurde überhaupt nicht erwähnt, vielleicht weil es auch anschaulich ziemlich klar war, daß eine Änderung des Basispunktes in (bogenweise) zusammenhängenden Räumen einer Isomorphie der Gruppen entspricht.

Es ist zweifellos kein Zufall, daß sich bei Poincaré die Fundamentalgruppe zunächst als Gruppe von Substitutionen (oder Permutationen) darstellt und noch nicht als eine mit einem Kompositionsgesetz versehene Menge. (Das erklärt auch bis zu einem gewissen Maße, warum Poincaré, obwohl er selbst die Regel angab, die den Übergang von der Zusammensetzung der Elemente der Fundamentalgruppe zu der Zusammensetzung der Homologieklassen der eindimensionalen Zyklen ermöglicht — siehe 10.3.2. —, nicht die Gruppenstruktur erwähnte, mit der diese Menge versehen werden kann, ebensowenig wie die Homologiegruppen im allgemeinen.) Der abstrakte Gruppenbegriff war zwar von Cayley schon 1854 [102] und nochmals im Jahre 1878 [103] (siehe 3.4.1.) eingeführt worden, doch waren die von den Mathematikern betrachteten Beispiele im allgemeinen Substitutions- oder Permutationsgruppen (wie bei Jordan) oder Transformationsgruppen (insbesondere bei Klein). Daher ist es kaum überraschend, daß Poincaré leicht eine Gruppenstruktur erkennen konnte, wenn sie durch Substitutionen (von Funktionswerten) ausgedrückt wurde, und sie dort nicht sah (oder jedenfalls nicht darauf aufmerksam machte), wo sie eine explizite Beschreibung des Kompositionsgesetzes erforderte.

10.7.2. *Algorithmen*

Zur Beschreibung der Homologie hat Poincaré auf ein Polyeder zurückgegriffen, d. h. auf eine kombinatorische Methode (vgl. 10.3.2.). Die Fundamentalgruppe hat jedoch, worauf wir in 10.5.1. hingewiesen haben, im Gegensatz zur Homologiegruppe direkt eine innere Definition erhalten. Wie wir in 10.3.2. erwähnt haben, ließ sich für die Fundamentalgruppe von Anfang an die Gruppenstruktur erkennen, während die Homologie erst durch numerische Invarianten (Bettische Zahlen, d. h. den Rand und Torsionskoeffizienten) beschrieben wurde, die, wie man später erkannte, die Homologiegruppe vollständig bestimmen. Man verfügte nicht über eine analoge Beschreibung für die nichtkommutativen Gruppen, und schon 1908 machte Tietze [62] darauf aufmerksam, daß man kein allgemeines Kriterium besaß, das es ermöglicht hätte zu entscheiden, ob zwei durch Systeme von Erzeugenden und Systeme von Relationen[1]) dargestellte Gruppen isomorph sind oder nicht. Dieses Problem ist dem 1911 von Max Dehn [104] gestellten Wortproblem in der Gruppentheorie sehr ähnlich: Ist eine Gruppe durch Erzeugende und Relationen gegeben, so fragt man, ob zwei „Wörter", d. h. zwei Produkte von Erzeugenden, das gleiche Gruppenelement darstellen (das bedeutet, daß man unter Benutzung der Relationen das eine Wort in das andere transformieren kann). Probleme dieses Typs, die Beispiele für „Entscheidungsprobleme" sind, bildeten im Verlaufe der letzten Jahrzehnte den Gegenstand wichtiger Forschungen und haben zu einer allgemeinen *Algorithmentheorie* geführt (siehe 13.4.5.): Ein Algorithmus ist ein allgemeines, im voraus festgelegtes Verfahren, das in endlich vielen Schritten die Lösung des allgemeinen Problems liefern soll. Das klassische Beispiel ist der Euklidische Algorithmus zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen. Die Definition eines Algorithmus könnte vermuten lassen, daß es möglich sei, die Ausführung eines Algorithmus einer Maschine zu übertragen; die Logiker haben tatsächlich solche (idealen) Maschinen erdacht, die Turing-Maschinen und die Postsche Maschine (1936) sowie einen Typ von Funktionen, die rekursiven Funktionen, die ebenfalls zur Beschreibung eines Typs von Problemen dienen können, welche berechenbare Lösungen besitzen. Merkwürdigerweise näherten sich diese verschiedenen Begriffe einander an, und die sogenannte „Churchsche Hypothese" besagt, daß alle möglichen Interpretationen von „effektiver Berechenbarkeit" tatsächlich einander äquivalent sind. (Diese „Hypothese" ist kein Satz, den man beweisen kann, sondern eher eine mehr oder weniger empirische Feststellung, denn es existiert

---

[1]) Ist eine Menge F gegeben, so gibt es eine bis auf Isomorphie bestimmte Gruppe $L(F)$ derart, daß jede *Abbildung* $f\colon F \to G$ von F in eine Gruppe G in $F \xrightarrow{j} L(F) \xrightarrow{g} G$ faktorisiert werden kann, wobei j eine (von f unabhängige) injektive Abbildung und g ein *Gruppenhomomorphismus* ist und die Menge $j(F)$ (die man mit F identifiziert) $L(F)$ *erzeugt*, so daß jedes Element von $L(F)$ als $x_1 x_2 \cdots x_n$ geschrieben werden kann; dabei ist jedes x_j so beschaffen, daß $x_j \in F$ bzw. $x_j^{-1} \in F$ gilt. Diese Elemente werden die aus den Elementen von F gebildeten *Wörter* und $L(F)$ die von F erzeugte *freie Gruppe* genannt. Sind eine Menge $R \subset L(F)$ von Wörtern und der von R erzeugte Normalteiler $N(R)$ von $L(F)$ gegeben, so sagt man, die Faktorgruppe $L(F)/N(R)$ werde *durch das Erzeugendensystem F und das Relationensystem R dargestellt* ([154] und [L], Kapitel I, § 8).

a priori keine genaue Definition dessen, was man als „effektiv berechenbar" bezeichnet.)

Obwohl nichts die Mathematiker hätte daran hindern können, sich seit längerer Zeit zu fragen, ob Algorithmen zur Lösung gewisser Typen von Problemen existieren, ist diese Frage erst im Verlaufe der letzten Jahrzehnte wirklich gestellt worden, wie die Entwicklung des 10. Hilbertschen Problems beweist, das Hilbert im Jahre 1900 auf dem Internationalen Mathematikerkongreß formulierte und in dem er forderte, ein Verfahren anzugeben, um in endlich vielen Schritten zu bestimmen, ob eine beliebige diophantische Gleichung eine ganzzahlige Lösung besitzt oder nicht. (Der Begriff Algorithmus war noch nicht in exakter Weise in die Mathematik eingeführt worden; dies erklärt, warum Hilbert diesen Terminus noch nicht benutzt hat). Hilbert hat sich anscheinend das Problem, ob ein solcher Algorithmus überhaupt existiert, nicht gestellt, sondern seine Existenz stillschweigend angenommen. Erst nach und nach ist dieses Existenzproblem an die Stelle des ursprünglich von Hilbert formulierten Problems „Man soll ... angeben" getreten; im Jahre 1970 hat Matijasevič [105] schließlich zeigen können, daß ein allgemeiner Algorithmus für dieses Problem nicht existiert (vgl. 5.9.6.).

Auf nichtentscheidbare Probleme stieß man zuerst in der Logik (Church und Turing, 1936). Post und Markov bewiesen etwas später (1947) [106], daß algebraische Kalküle existieren, für die das Wortproblem algorithmisch unlösbar ist. Im Jahre 1955 zeigte P. Novikov [107], daß das oben genannte Problem der Isomorphie für Gruppen im allgemeinen Fall algorithmisch nicht lösbar ist.

10.7.3. Die Poincarésche Vermutung

Nach Einführung der Fundamentalgruppe benutzte Poincaré diese seit 1895, um zu beweisen, daß die Bettischen Zahlen nicht zur eindeutigen Charakterisierung der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ausreichen. Im 5. *Komplement* von 1904 gab Poincaré ein Beispiel für eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit an, deren Homologiegruppe trivial ist, ohne daß dies für ihre Fundamentalgruppe gilt (daraus ergibt sich, daß die entsprechende abelsche Gruppe trivial ist; der Poincaréschen Dualität zufolge sichert diese Bedingung in einer orientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit die Trivialität der Homologiegruppen). Gleichzeitig formulierte Poincaré eine Vermutung, die nach ihm benannt wurde und die besagt, daß jede dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe trivial ist, der Sphäre homöomorph sei. Diese Vermutung ist noch immer nicht bewiesen, doch kann man (wenn man höhere Homotopiegruppen, die wir in 10.8.1. behandeln, heranzieht) eine analoge Aussage bezüglich der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten formulieren: Für $n = 4$ ist die Vermutung genauso wenig wie die Ausgangsvermutung ($n = 3$) von Poincaré weder bestätigt noch widerlegt. Dagegen hat Smale für $n = 5$ effektiv gezeigt [108], daß eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit, die denselben Homologietyp wie die Sphäre hat (vgl. 10.8.1.), der Sphäre homöomorph ist. (Diesem Satz sehr ähnliche Aussagen haben — und ohne die

Existenz einer differenzierbaren Struktur vorauszusetzen — Stallings im Jahre 1960 und Zeeman 1962 bewiesen [109].)

10.7.4. *Überlagerungen*

Der Begriff der *Überlagerung* eines Raumes ist im zweidimensionalen Fall dem der Riemannschen Fläche verwandt und kommt auch in der Poincaréschen Abhandlung von 1895, in der er den Fundamentalbereich einer diskontinuierlichen Transformationsgruppe betrachtet, implizit vor. Eine Überlagerung $\tilde{X}$ eines Raumes X läßt sich auf X projizieren, das Urbild eines Punktes von X ist ein mit der diskreten Topologie versehener Raum, und es gibt einen lokalen Homöomorphismus der Umgebungen. Im Fall der Riemannschen Flächen existieren Punkte — die Verzweigungspunkte — in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist. (Die Überlagerungen erweisen sich später als ein Spezialfall der Faserräume; siehe 10.8.4.) Wenn der Raum gewissen lokalen Bedingungen genügt (die im Fall der Polyeder und insbesondere der Mannigfaltigkeiten stets erfüllt sind), entspricht jeder Untergruppe der Fundamentalgruppe von X (bis auf Isomorphie) eine Überlagerung, die genau diese Untergruppe als Fundamentalgruppe besitzt. Insbesondere ist die der trivialen Untergruppe entsprechende Überlagerung ein einfach zusammenhängender Raum, der die *universelle Überlagerung* von X genannt wird. Die Untersuchung der Überlagerungen (im Fall der Flächen) wurde schon früher als die der Fundamentalgruppe vorgenommen, und die universelle Überlagerung war Poincaré schon 1883 bekannt [110]. Diese Überlagerung spielt beim Uniformisierungsproblem für Funktionen einer komplexen Veränderlichen, das 1908 von Poincaré [111] und von Koebe gelöst wurde, eine wichtige Rolle: Die universelle Überlagerung einer durch die Gleichung $f(w, z) = 0$ definierten Riemannschen Fläche (vgl. 4.5.2.), die eine einfach zusammenhängende Fläche ist, ist entweder zur Kugel oder zur euklidischen Ebene homöomorph (oder zur offenen Kreisscheibe; aus Gründen, die sich aus der Funktionentheorie ergeben, unterscheidet man diese beiden Fälle). In beiden Fällen ist dieses Gebiet ein Teilraum der zweidimensionalen Sphäre, läßt sich also durch eine komplexe Veränderliche, die uniformisierende Veränderliche, parametrisieren, und die Koordinaten z und w eines Punktes der Riemannschen Fläche werden Funktionen dieser Veränderlichen. In dem von Riemann untersuchten Fall sind diese Funktionen analytisch.

Die Überlagerungen sind auch zum Beweis von Resultaten der Gruppentheorie benutzt worden, insbesondere für Sätze über freie Gruppen, denn diese können als Fundamentalgruppen von Graphen (oder von eindimensionalen Polyedern) interpretiert werden.

Ein Raum, der (nichttriviale) Überlagerung eines Raumes X ist, gestattet gewisse homöomorphe Abbildungen auf sich (die man *Automorphismen* des Raumes nennt), welche die Verzweigungspunkte, die sich auf den gleichen Punkt von X projizieren, ineinander überführen. Diese Automorphismen bilden eine Gruppe. Ist die Fundamentalgruppe der Überlagerung $\tilde{X}$ ein Normalteiler der Fundamentalgruppe von X, so ist die Automorphismengruppe der Faktorgruppe dieser beiden

Gruppen isomorph. Für die universelle Überlagerung von X ist die Automorphismengruppe zur Fundamentalgruppe von X isomorph. (Das einfachste Beispiel wird durch die Sphäre geliefert, die zweiblättrige universelle Überlagerung des projektiven Raumes; die Automorphismengruppe der Sphäre hat als Erzeugende die Antipodenabbildung, die jeden Punkt der Sphäre in den diametral gegenüberliegenden Punkt transformiert.)

Die Fundamentalgruppe spielt auch in der *Knotentheorie* eine wichtige Rolle. Diese Theorie beschäftigt sich mit der Einbettung von Kurven, die zum Kreis homöomorph und durch endliche Polyeder dargestellt sind, in den dreidimensionalen euklidischen Raum (oder, was äquivalent dazu ist, in die dreidimensionale Sphäre). Knoten werden *äquivalent* genannt, wenn ein Homöomorphismus der Sphäre auf sich existiert, der die Knoten aufeinander abbildet. Eine vollständige Klassifikation der Knoten nach dieser Äquivalenzrelation ist nicht bekannt, doch ermöglichen es die Fundamentalgruppe und die Überlagerungen des Knotenaußenraumes, notwendige Bedingungen für die Äquivalenz der Knoten anzugeben. Das Problem wurde auf den Fall von $(n-2)$-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten, die in eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit eingebettet sind, verallgemeinert, und dabei speziell auf die zweidimensionale Sphäre in der vierdimensionalen Sphäre.

10.8. Homotopiegruppen und Faserräume

10.8.1. *Homotopiegruppen*

Wie wir oben gesehen haben, hatte bereits Poincaré erkannt, daß die Fundamentalgruppe eine genauere Information liefert als die Homologiegruppen, da sie es ermöglicht, die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, deren Homologiegruppen trivial sind, zu unterscheiden; ferner liefert die abelsch gemachte Fundamentalgruppe die eindimensionale Homologiegruppe. Diese Resultate trugen zur Anerkennung der Auffassung bei, daß die nichtkommutativen algebraischen Strukturen notwendig seien, um Informationen beizusteuern, die nicht schon in der Homologietheorie enthalten sind. Hinzu kommt, daß Čech, als er 1932 auf dem Mathematikerkongreß in Zürich [112] die Definition der höheren *Homotopiegruppen* (d. h. der Homotopieklassen stetiger Abbildungen n-dimensionaler Sphären, $n \geqq 2$, in einen gegebenen Raum, mit einem Basispunkt) angab und dabei verlangen mußte, daß diese Gruppen kommutativ sind, wenig Resonanz fand, so daß er diese Untersuchungen nicht weiterverfolgte. Diese schon von Čech betrachteten Gruppen sollten jedoch 1935 bis 1936 den Gegenstand einer Reihe recht gehaltvoller Noten bilden, in denen W. Hurewicz sie definierte und einige ihrer grundlegenden Eigenschaften angab [113]. Die Poincarésche Fundamentalgruppe (vgl. 10.7.1.) erscheint dann als eindimensionale Homotopiegruppe, und so wird sie heute allgemein genannt.

Hurewicz führte auch den Begriff des *Homotopietyps* ein. (Zwei Räume X und Y sind vom gleichen Homotopietyp, wenn Abbildungen $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to X$ existieren derart, daß die Zusammensetzungen $f \circ g$ und $g \circ f$ zu den identischen

Abbildungen homotop ([G—H], S. 435) sind.) Nichthomöomorphe Räume können den gleichen Homotopietyp haben; beispielsweise haben eine Kugel oder ein Simplex den gleichen Homotopietyp wie ein Punkt (dies ergibt sich aus der Tatsache, daß eine beliebige stetige Abbildung eines Raumes X in eine Kugel B stets zur konstanten Abbildung homotop ist, die ganz X auf das Zentrum von B transformiert). Die meisten der in der algebraischen Topologie untersuchten Invarianten (Homologie, Kohomologie, Homotopiegruppen) hängen nur vom Homotopietyp des betrachteten Raumes ab.

Die anderen Hurewiczschen Sätze erweitern die Hopfschen Ergebnisse über die Klassifikation der Homotopieklassen von Abbildungen eines Raumes in einen anderen. Wie Hurewicz dabei nachwies, kann die Beschreibung der Homotopiegruppen auf die einer Fundamentalgruppe zurückgeführt werden, was sofort die Struktur der Gruppe liefert.

Unter Benutzung der „Einhängung“ (siehe unten) kann man die Sphäre $\boldsymbol{S}_{n+1}$ mit Hilfe gewisser Identifizierungen im topologischen Produkt von $\boldsymbol{S}_n$ und dem Intervall I erhalten. Man wendet dann einen allgemeinen Satz über Mengenabbildungen an, wodurch die Äquivalenz zwischen den Abbildungen des kartesischen Produkts $Y \times Z$ in X und den Abbildungen von Y in die Menge der Abbildungen von Z in X zum Ausdruck gebracht wird. Indem man dort eine geeignete Topologie einführt, zu den Homotopieklassen übergeht und die Rolle des Basispunktes berücksichtigt, zeigt man, daß $\pi_n(x)$, die n-te Homotopiegruppe von X, der $(n - 1)$-ten Homotopiegruppe des Schleifenraumes mit Basispunkt in X kanonisch isomorph ist, was sie rekursiv auf die Fundamentalgruppe eines iterierten Schleifenraumes zurückführt. Man kann daraus natürlich nicht sofort eine tatsächliche Berechnungsmethode herleiten, weil die Schleifenräume im allgemeinen unendlichdimensional sind. Es ist jedoch möglich, gewisse Eigenschaften des Schleifenraumes zu erhalten, was eine Information über die Homotopiegruppen von X liefert. Dies tat 1951 J. P. Serre in einer Arbeit [114], von der später die Rede sein wird.

Die Schleifenräume sind Beispiele für H-Räume (aber im allgemeinen nicht der Gruppen) (siehe 10.6.2.); sie wurden insbesondere von J. P. Serre untersucht. Die Fundamentalgruppe eines H-Raumes ist stets kommutativ; dies erklärt, warum die Gruppen π_n $(n \geqq 2)$ kommutativ sind.

Die Theorie der Hindernisse (von der schon im Zusammenhang mit den Vektorfeldern die Rede gewesen ist; vgl. 10.5.3.), hat sich oft der Homotopiegruppen bedient: Wenn eine Konstruktion über einem Polyeder gemacht werden soll, so kann man versuchen, sie durch Induktion über die Dimension der Simplexe zu erhalten. Die Möglichkeit, eine Konstruktion (beispielsweise die eines Schnittes in einem Faserraum; siehe 10.8.4.), die schon auf dem Rand eines n-dimensionalen Simplexes — einer $(n - 1)$-dimensionalen Sphäre — realisiert ist, auf das Innere dieses Simplexes auszudehnen, kommt oft darin zum Ausdruck, daß das Bild dieser Sphäre in einem geeigneten Raum in einen Punkt deformiert werden kann.

Die Berechnung der Homotopiegruppen $\pi_i(X)$ eines Raumes X sollte sich im allgemeinen als sehr schwierig erweisen. Wie Hopf am Beispiel der Abbildung der Sphäre $\boldsymbol{S}_3$ auf die Sphäre $\boldsymbol{S}_2$, auf das wir in 10.8.4. eingehen, bewies, wird ein endlichdimensionaler Raum (sogar ein Polyeder) meistens unendlich viele nichttriviale

Homotopiegruppen haben (siehe [G—H], S. 436). Ein Satz von Hurewicz ermöglicht es, die erste davon zu bestimmen: Wenn die ersten $n - 1$ Homotopiegruppen trivial sind (bei $n \geqq 2$), so ist die n-te Homotopiegruppe der n-ten Homologiegruppe (mit ganzzahligen Koeffizienten) isomorph.

Ein Satz von Freudenthal aus dem Jahre 1937 [115] sollte es ermöglichen, eine gewisse Anzahl von Homotopiegruppen der Sphären zu berechnen. Die Sphäre $\boldsymbol{S}_n$ kann nämlich bis auf Homöomorphie, ausgehend von ihrem Äquator $\boldsymbol{S}_{n-1}$, als *Einhängung* konstruiert werden, d. h. durch einen Doppelkegel mit dem Äquator als Basis und den Spitzen als Pole. Die Elemente von $\pi_m(\boldsymbol{S}_n)$ lassen sich mit Hilfe von Abbildungen von $\boldsymbol{S}_m$ in $\boldsymbol{S}_n$ erhalten; man kann die Einhängung zur Konstruktion der Abbildungen von $\boldsymbol{S}_{m+1}$ in $\boldsymbol{S}_{n+1}$ benutzen und so fort. Der Satz von Freudenthal besagt nun, daß der so erhaltene Homomorphismus von $\pi_m(\boldsymbol{S}_n)$ in $\pi_{m+1}(\boldsymbol{S}_{n+1})$ für $m < 2n - 1$ ein Isomorphismus und für $m = 2n - 1$ ein Epimorphismus ist. Ausgehend von der durch das Hopfsche Beispiel (siehe 10.8.4.) gelieferten Kenntnis von $\pi_3(\boldsymbol{S}_2)$ konnte Freudenthal eine gewisse Anzahl von Homotopiegruppen von Sphären berechnen.

Die Einhängung ermöglicht es auch, einen *Stabilitätsbegriff* zu definieren: Ein Begriff bzw. eine Eigenschaft ist stabil, wenn er bzw. sie sich bei Einhängung übertragen.

Neue Resultate über die Berechnung der Homotopiegruppen wurden auch in der Arbeit von J. P. Serre (1951) erzielt, und zwar mit Hilfe von Beziehungen zwischen der Homologie eines Faserraumes, der Faser und dem Basisraum. Mit der von Serre übernommenen Definition (von der in 10.8.4. die Rede sein wird) ist der Raum der Wege (mit einem gegebenen Punkt als Ursprung) eines Raumes X ein Faserraum, der X als Basisraum und den Schleifenraum als Faser hat: Die Projektion des Faserraumes auf seine Basis transformiert jeden Weg auf seinen Endpunkt; die Faser des Basispunktes ist nach Definition das Urbild dieses Punktes vermöge der Projektion, also die Menge der Schleifen, die den Basispunkt als Anfangs- und Endpunkt haben. Da der Wegeraum den gleichen Homotopietyp wie ein Punkt hat (da ja die Wege stetig auf ihren Ursprung transformiert werden können), ist seine Homologie trivial, und man erhält Relationen zwischen der Homologie von X und der Homologie des Schleifenraumes, die, wie wir oben gesehen haben, in die induktive Bestimmung der Homotopiegruppen eingeht. Insbesondere begründet Serre so, daß die Homotopiegruppen der Sphären $\boldsymbol{S}_n$ *endliche* Gruppen sind, mit Ausnahme von $\pi_n(\boldsymbol{S}_n)$, die offenbar frei und zyklisch ist, und von $\pi_{2n-1}(\boldsymbol{S}_n)$ für gerades n, welche direkte Summe einer freien zyklischen Gruppe und einer endlichen Gruppe ist.

10.8.2. *Adjungierte Funktoren*

Das Ersetzen eines Raumes X durch seine Einhängung ist ein Beispiel für einen Funktor, das Ersetzen eines Raumes Y durch seinen Schleifenraum ist ein anderes. Die Beziehung, die man hier zwischen den beiden Funktoren vorfindet, ist ein Spezialfall der Theorie der adjungierten Funktoren, die 1958 von Kan aufgestellt

worden war [116] und für welche man zahlreiche Beispiele angeben kann. Zwei Funktoren F und G werden *adjungiert* genannt, wenn eine kanonische Äquivalenz zwischen den Abbildungen von FX in Y und den Abbildungen von X in GY besteht.

10.8.3. Eilenberg-MacLane-Räume

Der Kreis S_1 ist ein Beispiel eines Raumes, der nur eine einzige nichttriviale Homotopiegruppe (seine Fundamentalgruppe π_1) besitzt. Die Konstruktion von Räumen, deren n-te Homotopiegruppe einer gegebenen Gruppe π (die für $n \geqq 2$ kommutativ ist) isomorph ist und deren andere Homotopiegruppen sämtlich trivial sind, stieß auf einige Schwierigkeiten, weil diese Räume, wie man später feststellte, fast immer unendlichdimensional sind. Ihre Konstruktion (um 1945—1950) war das Ergebnis einer langen Reihe von Arbeiten, die oft ganz oder teilweise eher zur homologischen Algebra als zur Topologie gehörten; denn es handelte sich dem Wesen nach um algebraische Konstruktionen, die auf Gruppen wirkten. Diese Räume (die man allgemein mit $K(\pi, n)$ bezeichnet) werden *Eilenberg-MacLane-Räume* genannt; man wies nach, daß ihre Homologie- und Kohomologiegruppen nur von der Gruppe π und der Dimension n abhängen. Für Koeffizienten modulo 2 sind diese Gruppen von J. P. Serre und für Koeffizienten modulo einer ungeraden Primzahl p von H. Cartan berechnet worden [159].

Die in 10.8.2. erwähnte Rolle der adjungierten Funktoren ermöglichte den Beweis, daß im Sinne der in 10.3.2. erwähnten Dualität die Sphären und die Eilenberg-MacLane-Räume duale Eigenschaften haben. Diese Art von Dualität wurde seit 1955 vor allem von Hilton und Eckmann [117] ausgenutzt. Den mit Hilfe der Homotopieklassen der Abbildungen der Sphären in einen Raum X definierten Homotopiegruppen von X entsprechen bei dieser Dualität die Gruppen der Homotopieklassen der Abbildungen von X in Eilenberg-MacLane-Räume. Diese Gruppen erwiesen sich als die Kohomologiegruppen, die früher auf einem ganz anderen Wege eingeführt worden waren (siehe 10.6.1.).

Ausgangspunkt für die Theorie der Eilenberg-MacLane-Räume bildete eine Arbeit von Hopf (1941) [118], die ihrerseits durch einen Satz angeregt wurde, den Hurewicz in seinen Noten über die Homotopiegruppen aus den Jahren 1935—1936 angegeben hatte: Die Homologiegruppen eines asphärischen Raumes (d. h. eines Raumes, dessen Homotopiegruppen für die Dimensionen $n \geqq 2$ trivial sind, mit anderen Worten, eines Raumes $K(\pi, 1)$) sind durch die Fundamentalgruppe bestimmt. Während sich jedoch der Hurewiczsche Satz darauf beschränkte, diese Abhängigkeit festzustellen, ohne eine effektive Beschreibung zu ermöglichen, formulierte Hopf 1941 (sogar ohne die Bedingung, daß der Raum asphärisch ist) die Beziehung zwischen der Fundamentalgruppe und der zweiten Homologiegruppe (diese besitzt eine im allgemeinen nichttriviale Faktorgruppe, die algebraisch durch die Fundamentalgruppe bestimmt ist). Er lieferte damit nicht nur die ersten Sätze einer neuen Theorie, der *Kohomologietheorie für Gruppen*, sondern auch das erste Beispiel (hier in einem geometrischen Rahmen) einer der in der

homologischen Algebra am häufigsten benutzten Methoden, des Gebrauchs von Auflösungen (siehe unten). In dem gleichen Ideenkreis waren weitere Ergebnisse von H. Freudenthal [119] und von B. Eckmann [120] erzielt worden.

Die homologische Algebra, die heute ein selbständiger Teil der Algebra geworden ist, hat ihre ersten Probleme und einen Teil ihrer Terminologie in der algebraischen Topologie gefunden. Diese hatte im Grunde die Homologie bezüglich der Koeffizienten, die zu einer kommutativen Gruppe G gehören, zu berechnen gehabt. (Meist war G eine endliche zyklische Gruppe $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.) Einigermaßen merkwürdig ist übrigens, daß, wie wir in 10.2.3. gesehen haben, die erste Untersuchung der Homologie, die in die Theorie des Zusammenhanges mündete, von der Orientierung der Ketten absah und demgemäß die Homologie modulo 2 lieferte. Eilenberg und MacLane [121] bewiesen 1942 den „universellen Koeffizientensatz" zur Berechnung der Homologie (oder der Kohomologie(gruppen)) mit Koeffizienten in (einer beliebigen kommutativen Gruppe) G, wenn man die Homologie bezüglich ganzzahliger Koeffizienten kennt. (Die umgekehrte Berechnung ist im allgemeinen nicht möglich.)

Die homologische Algebra umfaßt auch den *Satz von Künneth* (1923) [122], der die Homologiegruppen des topologischen Produkts zweier Räume als Funktion der Homologiegruppen der beiden Faktoren liefert. (Selbstverständlich drücken die Künnethschen Formeln in ihrer ursprünglichen Gestalt die Bettischen Zahlen und die Torsionskoeffizienten des Produktraumes als Funktion derjenigen der beiden Faktoren aus.) Tatsächlich ermöglicht ein Satz von Eilenberg-Zilber (1950) [123], den Modul der Ketten des Produktraumes durch das Tensorprodukt der aus den Ketten der Faktoren bestehenden Moduln zu ersetzen. Die Tensorprodukte waren explizit im Jahre 1938 von H. Whitney [124] eingeführt worden, und im Jahre 1941 beschrieben Eilenberg und MacLane den *Hom-Funktor* [121][1]).

Der universelle Koeffizientensatz kann als Spezialfall des Künnethschen Satzes angesehen werden, in welchem die Koeffizientengruppe G eine triviale Homologie hat.

Wie wir in 10.3.2. gesehen haben, ist in einem simplizialen Komplex der Operator ∂ ein Homomorphismus der n-dimensionalen Kettengruppe in die $(n-1)$-dimensionale Kettengruppe, dessen Quadrat null ist. Die homologische Algebra greift diese Situation wieder auf, indem sie eine Folge von Gruppen bzw. Moduln betrachtet, wobei jede(r) durch einen Homomorphismus in die (den) nächste(n) abgebildet wird und die Hintereinanderausführung zweier aufeinanderfolgender Homomorphismen stets null ergibt. Eine derartige Folge wird in der homologischen Algebra ein *Komplex* genannt (insbesondere bei MacLane, während andere Autoren von einer Nullfolge oder einer Folge der Ordnung 2 sprechen); dabei legt man also die Bedeutung der zur Folge gehörigen anderen Moduln nicht im voraus fest. Oft ist die Folge graduiert, und der Operator (der Homomorphismus, der einen Modul in den folgenden abbildet) hat den Grad $+1$ oder -1. Da das Bild des Operators im Kern

---

[1]) Sind A und B kommutative Gruppen bzw. Moduln, so kann die mit Hom (A, B) bezeichnete Menge der Homomorphismen von A nach B mit einer Gruppen- bzw. Modulstruktur versehen werden; die Funktoren Hom und Tensorprodukt können als adjungierte Funktoren angesehen werden (vgl. 10.8.2.).

enthalten ist, kann man die Homologie (bzw. die Kohomologie) eines Komplexes wie im Falle der simplizialen Komplexe (vgl. 10.3.2.) definieren.

Ein Spezialfall, der (sowohl in der algebraischen Topologie als auch in der homologischen Algebra) eine wichtige Rolle spielt, sind Komplexe mit trivialer Homologie, die *azyklische* Komplexe genannt werden (zwar konnte man im allgemeinen nicht behaupten, daß ein derartiger Komplex keine Zyklen besitzt, sondern nur, daß alle Zyklen darin Ränder sind; diese Bezeichnungsweise hat sich aber aus historischen Gründen erhalten). Betrachtet man den Komplex als eine Folge von Gruppen oder Moduln, die durch eine Folge von Homomorphismen verknüpft sind, so spricht man im Falle eines azyklischen Komplexes von einer *exakten Sequenz* [125]. (Diese Bezeichnung bringt zum Ausdruck, daß der Kern eines Homomorphismus *genau* das Bild des vorhergehenden ist.) In diesem Rahmen können die Homologiegruppen (bzw. -moduln) einer Folge (bzw. eines Komplexes) als ein Maß für die Abweichung der Folge von einer exakten Sequenz interpretiert werden.

Die exakten Sequenzen liefern der homologischen Algebra ein wirksames Werkzeug (siehe unten den Begriff Auflösung), eine Möglichkeit, bestimmte Ergebnisse bequem und elegant auszudrücken. Beispielsweise bedeutet eine „kurze exakte Sequenz" $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$, daß f injektiv (oder ein Monomorphismus), g surjektiv (oder ein Epimorphismus) ist und der Kern von g mit dem Bild von f zusammenfällt (oder aber, daß C zur Faktorgruppe $B/f(A)$ isomorph ist). Die exakten Sequenzen bzw. die azyklischen Komplexe können benutzt werden, um Informationen bezüglich einer gegebenen kommutativen Gruppe (oder eines Moduls) G zu liefern: Man nennt eine exakte Sequenz, die mit einem Epimorphismus auf G schließt (oder mit einem Monomorphismus von G in den folgenden Term beginnt) eine *Auflösung* von G. Im allgemeinen schreibt man für alle (von G verschiedenen) Glieder der Auflösung noch bestimmte Bedingungen vor. (Beispielsweise sollen alle diese Gruppen oder Moduln frei sein. Man sieht unter anderem, daß jede endliche kommutative Gruppe eine freie Auflösung besitzt, die eine kurze exakte Sequenz ist, da die kommutative Gruppe der Faktorgruppe einer freien kommutativen Gruppe nach der Untergruppe der Relationen, die ebenfalls eine freie Gruppe[1]) ist, isomorph ist. Diese Situation war von Hopf in der oben genannten Arbeit ausgenutzt worden, noch ehe der Begriff herausgearbeitet worden war.)

Mit der Einführung der Kategorien und der Funktoren (vgl. 10.4.2.) begann die homologische Algebra ihre Selbständigkeit zu erlangen, indem man unter anderem die Wirkung des Homologiefunktors auf Tensorprodukte bzw. den Hom-Funktor untersuchte. (In dem universellen Koeffizientensatz bzw. dem Künnethschen Satz beschreibt man beispielsweise $H(C \otimes G)$ als Funktion von $H(G)$ bzw. von $H(C)$ und $H(G)$.) Diese Beschreibung kann unter Benutzung der Auflösungen geschehen: Wenn man einen Funktor wie das Tensorprodukt oder Hom auf eine exakte Sequenz (d. h. auf einen azyklischen Komplex) anwendet, so erhält man eine Sequenz, die ein Komplex, aber im allgemeinen nicht azyklisch ist. Man kann also die Homologiegruppen (bzw. -moduln) der so erhaltenen Sequenz berechnen. Auf Grund bestimmter Bedingungen hängen diese nur von dem Modul, von dem man

---

[1]) Vgl. die Fußnote auf S. 671.

eine Auflösung bildet (und von dem angewandten Funktor) ab, während die Wahl der Auflösung selbst weitgehend willkürlich ist. Diese Homologiegruppen oder -moduln (bzw. Kohomologiegruppen oder -moduln) definieren die *abgeleiteten Funktoren*: Es sind genau die abgeleiteten Funktoren des Tensorprodukts bzw. des Hom-Funktors, welche im universellen Koeffizientensatz und im Künnethschen Satz auftreten.

Andere Begriffe der homologischen Algebra werden bei der Lösung von Problemen benutzt, welche die Faserräume, von denen in 10.8.4. die Rede sein wird, betreffen.

Die Methoden der homologischen Algebra fanden auch wichtige Anwendungen in der Algebra und in der algebraischen Geometrie.

10.8.4. Faserräume

In einigen Arbeiten hatte Hopf die Brouwerschen Resultate über die Beschreibung der Homotopieklassen von Abbildungen eines n-dimensionalen Raumes X in einen n-dimensionalen Raum Y erweitert — insbesondere für den Fall, daß Y eine Sphäre ist. Im Jahre 1931 untersuchte er Abbildungen der Sphäre $\boldsymbol{S}_3$ in die Sphäre $\boldsymbol{S}_2$ und konnte die Existenz von unendlich vielen Klassen nichthomotoper Abbildungen nachweisen (siehe [G—H], S. 441), deren Charakterisierung durch eine Invariante ihm gelang (die man beispielsweise mit Hilfe der Verschlingungszahl (vgl. 10.4.1) der Urbilder zweier Punkte beschreiben kann) [126]. Diese Abbildungen lieferten zunächst die Elemente von $\pi_3(\boldsymbol{S}_2)$ und bewiesen damit, daß diese Gruppe nicht trivial ist. Diese Hopfsche Arbeit brachte auch ein Beispiel für eine Zerlegung von $\boldsymbol{S}_3$ in Teilmengen, die zum Kreis $\boldsymbol{S}_1$ homöomorph sind. Der Raum dieser Teilmengen ist genau die Sphäre $\boldsymbol{S}_2$ (die man später als komplexe projektive Gerade betrachtete).[1]) In diesem Beispiel ist die Hopfsche Invariante gleich 1. Seifert sollte 1933 die Bezeichnung *Faserraum* zur Beschreibung einer ähnlichen Situation einführen [127]: In dieser Ausdrucksweise sind die *Fasern* $\boldsymbol{S}_1$ die Urbilder der Punkte des *Basisraumes* $\boldsymbol{S}_2$; die Abbildung des Faserraumes auf den Basisraum wird *Projektion* genannt. (Seifert betrachtete nur dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, ließ aber auch Ausnahmefasern zu, analog den Verzweigungspunkten einer Riemannschen Fläche.)

Das topologische Produkt zweier Räume X und Y kann stets als ein „trivialer" Faserraum angesehen werden (sogar auf zwei Arten, da sowohl X als Y die Faser sein kann); das Hopfsche Beispiel bewies aber, daß es Faserräume gibt, die nicht das topologische Produkt der Basis und der Faser sind. Ein Faserraum, so wie wir ihn hier betrachtet haben, ist lokal ein topologisches Produkt; das bedeutet, daß zu jeder Faser eine Umgebung existiert, die zum Produkt der Faser mit einer Umgebung des entsprechenden Punktes des Basisraumes homöomorph ist. Diese Faserräume werden „lokal trivial" genannt, um sie von den allgemeineren Faser-

[1]) In $\boldsymbol{C}^2$ schneiden die durch den Ursprung gehenden (komplexen) Geraden die Sphäre $\boldsymbol{S}_3$ in Kreisen (Fasern) $\boldsymbol{S}_1$, und der Raum dieser Fasern ist die komplexe projektive Gerade, d. h. die Sphäre $\boldsymbol{S}_2$.

räumen zu unterscheiden, für die das erste Beispiel im Jahre 1951 von J. P. Serre [114] in der oben erwähnten Arbeit angegeben wurde.

Ein Faserraum enthält im allgemeinen kein homöomorphes Bild des Basisraumes, das auf diesen durch die Projektion abgebildet würde; wenn ein derartiges Bild existiert, wird es ein *Schnitt* des Faserraumes genannt.

Die Faserräume haben in der Mathematik schnell eine wichtige Rolle zu spielen begonnen; denn sie treten beispielsweise jedesmal auf, wenn man einen Punkt einer Mannigfaltigkeit mit einer Struktur oder einem Reper verknüpft, ohne daß sich global die Struktur eines topologischen Produkts ergibt. So ist die Mannigfaltigkeit der Tangential(einheits)vektoren einer n-dimensionalen (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit ein $(2n - 1)$-dimensionaler Faserraum, wobei die Fasern die Sphären $\boldsymbol{S}_{n-1}$ sind, und die Projektion ordnet jedem Vektor seinen Berührungspunkt zu. Die Existenz eines Schnittes entspricht hier der Existenz eines stetigen Vektorfeldes (vgl. 10.5.3.) auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit.[1]) Die einfachsten Beispiele von Faserungen werden durch die oben erwähnten Überlagerungen geliefert (vgl. 10.7.4.), wobei die Faser ein diskreter Raum ist. Das Möbiussche Band wird in geradlinige Abschnitte (senkrecht zum Mittelkreis) mit einem Kreis (beispielsweise dem Mittelkreis) als Basisraum gefasert. Der Mittelkreis ist ein Schnitt. Der Rand des Möbiusschen Bandes ist eine zweiblättrige Überlagerung des Mittelkreises.

Die von Whitney [79] 1938 durchgeführte, in 10.5.3. erwähnte Untersuchung der Vektorfelder ordnet sich in diesen Rahmen ein. Die abstrakten Eigenschaften von Faserungen sind um 1942 von Ehresmann und Feldbau [128] beschrieben worden. Die Liftung der Homotopien (im Basisraum) in den Faserraum[2]), die Ehresmann definierte, wurde von J. P. Serre 1951 als Definition der Faserräume in einem umfassenderen Sinne übernommen. Die Relationen zwischen den Homologiegruppen der Faser, der Basis und des Faserraumes, die Serres Untersuchungsgegenstand bilden (und die, wie wir oben feststellten, insbesondere der Bestimmung einiger Homotopiegruppen dienen), bleiben tatsächlich für diese Faserräume im Serreschen Sinne gültig.

Hopf hatte die Beziehung zwischen seiner Konstruktion von Fasern $\boldsymbol{S}_1$ (die noch nicht diesen Namen trugen) in $\boldsymbol{S}_3$ und der Cliffordschen Parallelübertragung[3]) im reellen projektiven (oder elliptischen) Raum erwähnt. Studys parataktische Kongruenzen liefern analoge Beispiele im komplexen projektiven Raum; der Basisraum, die Sphäre $\boldsymbol{S}_4$, kann auch als projektive Quaternionengerade angesehen

[1]) Siehe auch die Definition eines *Zusammenhangs* (vgl. 9.6.).

[2]) Man nimmt eine Abbildung f eines Raumes Y in den Faserraum E als gegeben an, die durch Projektion eine Abbildung f_0 von Y in den Basisraum B liefert. Ist h eine Homotopie von f_0 in eine Abbildung g_0 von Y in B, so bedeutet das Liften der Homotopie h die Konstruktion einer zu f homotopen Abbildung g von Y in E, wobei sich die Homotopie zwischen f und g auf h projiziert. Diese Konstruktion ist effektiv möglich, wenn E ein lokal trivialer Faserraum ist.

[3]) Ein Punkt von $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{R})$ kann mit einer aus den skalaren Vielfachen einer Quaternion x bestehenden Geraden des $\boldsymbol{R}^4$ identifiziert werden. Eine durch eine Quaternion $q \neq 0$ definierte *Cliffordsche Schiebung* ordnet einer Quaternion x das Quaternionenprodukt qx zu. Für jede Gerade D in $\boldsymbol{P}_3(\boldsymbol{R})$ sind die *Cliffordschen Parallelen* von D die Bilder von D vermöge aller Cliffordschen Schiebungen (siehe [149], S. 206).

werden. Die hyperkomplexen Zahlensysteme wurden 1935 von Hopf [129] zur Konstruktion von Beispielen für Faserungen von S_7 in S_3 (Basis ist S_4 oder die Quaternionengerade) und von S_{15} in S_7 (Basis ist S_8 oder die Gerade der Cayleyschen Oktonionen; siehe 3.2.4.) benutzt. Ein Satz von Hurwitz (1898) [130], der besagt, daß es keine anderen Algebren mit einer reellen Norm gibt, verhinderte die Verallgemeinerung dieser Konstruktionsmethode. Es war aber a priori nicht ausgeschlossen, daß andere Faserungen existieren, ohne daß die Norm eines Produkts gleich dem Produkt der Normen ist oder ohne daß beispielsweise das Produkt distributiv ist. Kervaire einerseits und Bott und Milnor andererseits [80] haben 1958 gezeigt, daß solche Faserungen nicht möglich sind, und ebenfalls im Jahre 1958 bewies J. F. Adams [131], daß diese Hopfschen Faserungen ausschließlich Dimensionen entsprechen, für welche Abbildungen existieren, deren Hopfsche Invariante gleich 1 ist.

Schließlich sei auf eine Konstruktion hingewiesen, in der sowohl die Eilenberg-MacLane-Räume als auch die Faserungen auftraten. Postnikov hat 1955 bewiesen [132], daß man Räume konstruieren kann, welche den gleichen Homotopietyp wie ein gegebener Raum haben, indem man von einem Eilenberg-MacLane-Raum als ursprünglichem Basisraum ausgeht und andere Eilenberg-MacLane-Räume als aufeinanderfolgende Fasern benutzt. Überdies können diese Postnikovschen Räume sogar als CW-Komplexe, von denen in 10.9.3. die Rede sein wird, realisiert werden.

10.9. Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Der einfache Homotopietyp. CW-Komplexe

10.9.1. Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten. Linsenräume

Die ersten systematischen Untersuchungen der orientierbaren Flächen hatten es schon um die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts ermöglicht, diese vollständig zu charakterisieren (mit Hilfe des Geschlechts oder der Eulerschen Charakteristik oder der ersten Bettischen Zahl): Zwei orientierbare Flächen mit gleichem Geschlecht sind notwendigerweise homöomorph, und umgekehrt. Auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1897 hatte Hurwitz ein analoges Programm für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten vorgeschlagen, und dieses Programm hatte übrigens bereits implizit die Forschungen gewisser Mathematiker der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts inspiriert, als sie sich vornahmen, die insbesondere von Riemann eingeführten Methoden auf mehr als zwei Dimensionen zu erweitern. Das Problem hat bis heute den Bemühungen der Mathematiker widerstanden, wie der gegenwärtige Stand der Poincaréschen Vermutung (vgl. 10.7.3.) zeigt, da man noch immer nicht weiß, ob die Sphäre S_3 durch die Tatsache charakterisiert wird, daß ihre Fundamentalgruppe trivial ist (was zur Folge hat, daß ihre Homologiegruppen ebenfalls trivial sind). Beiläufig sei erwähnt, daß das Problem für (mindestens) vierdimensionale Mannigfaltigkeiten unlösbar ist. Dies ist von A. A. Markov [160]

im Jahre 1958 bewiesen worden, unter Benutzung einer Bemerkung von Seifert und Threlfall, die sich schon in ihrem *Lehrbuch der Topologie* (1934), S. 180, findet: Zu jeder durch endlich viele Erzeugende und Relationen gegebenen Gruppe (vgl. 10.7.2.) kann man eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit konstruieren, welche diese Gruppe als Fundamentalgruppe hat. Wenn man über einen Algorithmus zur Klassifikation der vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten verfügte, könnte man daraus einen Algorithmus für das Isomorphieproblem bei Gruppen herleiten; nun ist aber, wie wir in 10.7.2. erwähnt haben, bewiesen, daß es keinen solchen Algorithmus gibt.

Poincaré hatte geglaubt, die Lösung des Problems nacheinander mit den Bettischen Zahlen, mit den Bettischen Zahlen *und* den Torsionskoeffizienten oder schließlich mit der Fundamentalgruppe oder der ersten Homotopiegruppe (die auf Grund der Poincaréschen Dualität (vgl. 10.4.1.) zur Bestimmung der Homologiegruppen einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ausreicht) zu erbringen. Im Gegensatz zu den Flächen (zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten) bieten sich die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten unserer Anschauung nicht in natürlicher Weise dar, so daß es notwendig ist, solche zu konstruieren, insbesondere um die Gültigkeit der Poincaréschen Vermutung zu verifizieren. Speziell kann man sich fragen, ob durch unterschiedliche Verfahren konstruierte Mannigfaltigkeiten homöomorph sind oder nicht.

Poincaré selbst gab schon Beispiele für Konstruktionen, ausgehend von Polyedern, deren Seitenflächen in geeigneter Weise paarweise zu identifizieren sind. Von P. Heegaard [37] stammt ebenfalls ein Verfahren zur systematischen Konstruktion von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten (ausgehend von Flächen), das es aber im allgemeinen nicht erlaubt, unter den so erhaltenen Mannigfaltigkeiten diejenigen zu unterscheiden, die homöomorph sind. Die Zeit zwischen den beiden Weltkriegen brachte eine relativ große Anzahl von Beispielen (darunter die in 10.8.4. erwähnten Seifertschen Faserräume); schon 1908 hatte jedoch Tietze [62] die Konstruktion eines bestimmten Typs von Mannigfaltigkeiten, der *Linsenräume*, beschrieben, die zu sehr interessanten Ergebnissen führen. Diese Räume ergeben sich, indem man von einem linsenförmigen Teil des dreidimensionalen Raumes ausgeht, der zwischen zwei Kugelkappen, die miteinander einen Winkel von $2\pi/p$ bilden, eingeschlossen ist; die Fläche der einen Kugelkappe wird nach einer Drehung um $\frac{2\pi q}{p}$ mit der Fläche der anderen identifiziert. (Der einfachste nichttriviale Fall ist der projektive Raum, für den die Linse aus zwei Halbkugeln besteht und die Identifizierung unter dem Winkel π vorgenommen wird, was $p = 2$ entspricht.) Die Fundamentalgruppe eines Linsenraumes ist zyklisch von der Ordnung p und unabhängig von q. Daraus ergibt sich, daß Linsenräume, die verschiedenen p-Werten entsprechen, niemals homöomorph sind. Man kann sich aber fragen, ob für vorgegebenes p verschiedene Werte von q homöomorphe Räume liefern oder nicht. Im Jahre 1919 definierte Alexander [133] eine Invariante (die mit der Verschlingung und der Alexanderschen Dualität (vgl. 10.4.1.) verknüpft ist), mit deren Hilfe er beweisen konnte, daß die Linsenräume für $p = 5$ und $q = 1$ bzw. $q = 2$ nicht homöomorph sind, was gleichzeitig eine Vermutung Poincarés

(siehe oben — gemäß der die Fundamentalgruppe zur Charakterisierung der orientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ausreiche) widerlegte. Man kann zeigen, daß zwei Linsenräume genau dann vom gleichen Homotopietyp sind, wenn ihre Verschlingungsinvarianten den gleichen Wert haben. Es blieb aber noch festzustellen, wann zwei Linsenräume homöomorph sind, also insbesondere eventuell zu zeigen, daß der Homotopietyp keine hinreichend genaue Klassifikation dieser Räume liefert.

Im Jahre 1935 zeigten Franz und Reidemeister [134], wie man unter Benutzung der Automorphismen der universellen Überlagerung eine andere, und zwar ganzzahlige, Invariante einführen kann, nämlich die Franzsche oder Reidemeistersche *Torsion* (die G. de Rham [135] im Jahre 1950 auf n-dimensionale Linsenräume erweiterte, welche sich durch eine analoge Konstruktion aus der n-dimensionalen Sphäre ergeben). Franz und Reidemeister wiesen nach, daß diese Invariante die Lösung des Homöomorphieproblems für Linsenräume gestattet; insbesondere liefern für $p = 7$ die Werte $q = 1$ und $q = 2$ Räume, die den gleichen Homotopietyp haben, aber trotzdem nicht homöomorph sind.

10.9.2. Der einfache Homotopietyp

Die Homotopietheorie, so wie wir sie in 10.8. skizziert haben, macht von stetigen Abbildungen Gebrauch und nutzt die durch die simplizialen Zerlegungen erzeugte kombinatorische Struktur nicht aus. J. H. C. Whitehead versuchte zur Untersuchung des Homotopietyps von Polyedern kombinatorische Methoden zu verwenden und führte 1939 einen Begriff ein, den er *Kern* (nucleus) nannte und der heute als *einfacher Homotopietyp* bezeichnet wird. Zwei Komplexe haben den gleichen einfachen Homotopietyp, wenn sie durch eine (endliche) Folge elementarer simplizialer Operationen ineinander übergehen.

Zwei homöomorphe Polyeder haben den gleichen einfachen Homotopietyp. Zwei Polyeder vom gleichen einfachen Homotopietyp haben den gleichen Homotopietyp (vgl. 10.8.1.), doch konnte Whitehead beweisen, daß die Umkehrung im allgemeinen nicht richtig ist, falls die Polyeder nicht einfach zusammenhängend sind. Bei der Betrachtung der Automorphismen der universellen Überlagerung (vgl. 10.7.4.) ordnete Whitehead bestimmten Abbildungen eine *Torsion* zu, welche Element einer gewissen Gruppe (und im allgemeinen schwer zu berechnen) ist. Für Komplexe vom gleichen einfachen Homotopietyp ist diese Torsion null, für Komplexe, die nur den gleichen Homotopietyp haben, kann sie aber von null verschieden sein. Zwischen der Whiteheadschen Torsion und der Franzschen- bzw. Reidemeisterschen Torsion existiert ein Zusammenhang, falls letztere, beispielsweise in Linsenräumen, definiert ist (vgl. 10.9.1.).

10.9.3. CW-Komplexe

Im Jahre 1949 beschrieb Whitehead zur Untersuchung des einfachen Homotopietyps eine neue Art von Komplexen [137], die sogenannten *CW-Komplexe*, die statt

aus Simplexen aus disjunkten *Zellen* bestehen. Jede Zelle ist einer (offenen) Kugel homöomorph, und durch ihren Rand ist jede Zelle mit einem Gerüst von kleinerer Dimension (d. h. mit der Vereinigung von Zellen echt kleinerer Dimension) „verbunden", und zwar vermöge einer passenden stetigen, im allgemeinen aber nicht wie im Fall simplizialer Komplexe einer bijektiven linearen Abbildung. Der Begriff des CW-Komplexes erweist sich als anpassungsfähiger als der des simplizialen Komplexes und erfordert eine viel kleinere Anzahl von Zellen. Beispielsweise läßt sich die n-dimensionale Sphäre ($n \geqq 1$) aus einer nulldimensionalen Zelle e^0 (Punkt) und einer n-dimensionalen Zelle e^n (einer offenen Kugel) konstruieren: Der Rand der Kugel wird auf den Punkt e^0 abgebildet, was e^n mit dem $(n - 1)$-dimensionalen Gerüst (das sich auf den Punkt e^0 reduziert) *verbindet*. Die projektive Ebene ergibt sich aus drei Zellen e^0, e^1 und e^2; die Zelle e^1 wird wie ein Kreis mit dem Punkt e^0 verbunden (und wird zu einer projektiven Geraden), und e^2 (offene Kreisscheibe) wird mit e^1 in folgender Weise verbunden: Wird der Rand der Kreisscheibe e^2 durch eine Koordinate t ($0 \leqq t \leqq 2\pi$) und der Kreis e^1 durch eine Koordinate s beschrieben, so wird der Punkt t in den Punkt $s = 2t$ transformiert. Ein (zweidimensionaler) Torus ergibt sich, wenn man eine Zelle e^0, zwei Zellen e_1^1 und e_2^1, deren Rand so auf e^0 transformiert wird, daß man zwei Kreise (Meridian und Breitenkreis) erhält, und eine Zelle e^2 benutzt. Deren Rand unterteilt man in vier Abschnitte, die auf e_1^1 bzw. e_2^1, nochmals auf e_1^1 bzw. schließlich nochmals auf e_2^1 abgebildet werden. (Stellt man die Kreisscheibe e^2 durch ein Rechteck dar, so ergibt sich die klassische Beschreibung des Torus als Rechteck, dessen gegenüberliegende Seiten paarweise identifiziert werden.) Vergleicht man die „ökonomischste" simpliziale Zerlegung des Torus, welche sieben jeweils paarweise verbundene Eckpunkte (d. h. 21 Kanten und 14 Flächen, also insgesamt 42 Simplexe) erfordert, so kann man den Vorteil ermessen, den der Begriff des Zellenkomplexes mit sich bringt.

10.9.4. *Die Hauptvermutung. Stückweise lineare Struktur, Differentialstruktur*

Die Linsenräume, mit deren Hilfe 1935 bewiesen worden war, daß die Fundamentalgruppe zur Unterscheidung nichthomöomorpher dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten nicht ausreicht (vgl. 10.9.1.), sollten es auch ermöglichen, nach mehr als einem halben Jahrhundert die Antwort auf eine seit den Anfängen der Homologietheorie gestellte Frage zu geben. Wie wir in 10.5.1. gesehen haben, hatte man gehofft, die Invarianz der Homologiegruppen (oder, genauer, der sie charakterisierenden numerischen Invarianten, da nur diese in dieser Zeit die Aufmerksamkeit auf sich gezogen hatten) direkt beweisen zu können, indem man zeigte, daß zwei simpliziale Zerlegungen eines Raumes immer isomorphe Verfeinerungen besitzen. Ist dies der Fall, so werden die beiden Räume (oder Polyeder) kombinatorisch äquivalent genannt. Man hatte jedoch die Existenz derartiger Verfeinerungen nicht nachweisen können, und die Invarianz der Homologiegruppen war mit anderen Methoden bewiesen worden. Daß es in jedem Fall möglich sei, isomorphe Verfeinerungen zu konstruieren, war als Vermutung (sogenannte *Hauptvermutung*) geblieben.

J. Milnor konstruierte 1961 [138] zwei homöomorphe Räume, die nicht kombinatorisch äquivalent sind, und bewies so, daß die *Hauptvermutung* falsch ist. Er betrachtete zu diesem Zweck die Linsenräume mit $p = 7$ und $q = 1$ bzw. $q = 2$, die den gleichen Homotopietyp haben, aber nicht homöomorph sind (und nicht den gleichen einfachen Hotomopietyp haben), und bildete ihr topologisches Produkt mit einer mehr als vierdimensionalen Kugel; dann identifizierte er die Punkte des Produkts, die dem Rand der Kugel entsprechen, mit einem einzigen Punkt. Die beiden so erhaltenen Räume sind homöomorph, aber nicht kombinatorisch äquivalent. (Die Relationen zwischen topologischen Produkten sind nicht „simplifizierbar" („kürzbar"), das bedeutet, daß man aus der Homöomorphie der Produkte $A \times X$ und $A \times Y$ im allgemeinen nicht auf die Homöomorphie der Räume X und Y schließen kann.)

Diese von Milnor konstruierten Räume sind keine Mannigfaltigkeiten (sie besitzen einen Punkt, der keine zu einem euklidischen Raum homöomorphe Umgebung hat; dies ist der Punkt, den man durch Identifizierung des Kugelrandes erhält), und einige Zeit glaubte man, die Hauptvermutung könne vielleicht für Mannigfaltigkeiten richtig sein. Im Jahre 1969 konnten jedoch Kirby und Siebenmann zeigen [139], daß die Hauptvermutung auch für Mannigfaltigkeiten falsch ist. Die Arbeiten von Kirby und Siebenmann beruhen auf der systematischen Untersuchung der Hindernisse (siehe 10.5.3. und 10.8.1.), welche bestimmte Konstruktionen vereiteln können. Ihre Methode ist auch auf ein implizit schon bei Poincaré auftretendes Problem anwendbar, das Problem der Existenz einer Triangulierung oder, wie man heute im allgemeinen sagt, einer *stückweise linearen Struktur*. Poincaré hatte sich der Triangulationen bei der exakten Einführung bestimmter Begriffe bedienen müssen; es war aber nicht bekannt, ob jede Mannigfaltigkeit triangulierbar ist. Erst im Jahre 1925 konnte Radó zeigen [140], daß jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit, d. h. jede Fläche, triangulierbar ist. E. Moise bewies 1952 das analoge Ergebnis für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten [141] und für diese Mannigfaltigkeiten sogar die Hauptvermutung. Andererseits war es Kirby und Siebenmann 1969 möglich [161], mittels ihrer Methode die Existenz einer fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit nachzuweisen, welche keine kombinatorische Struktur besitzt. Dies zeigt, daß die Kategorie der topologischen Mannigfaltigkeiten (an die man keine anderen Bedingungen stellt als solche, welche die Umgebungen betreffen) und die Kategorie der stückweise linearen Mannigfaltigkeiten nicht zusammenfallen.

Inzwischen war auch der Fall der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten[1]) untersucht und die Existenz einer (mit der Differenzierbarkeitsstruktur verträglichen) Triangulierung für alle differenzierbaren Mannigfaltigkeiten im Jahre 1935 von S. S. Cairns [142] nachgewiesen worden. Andere Beweise waren 1937 von Brouwer [143], 1939 von Freudenthal und 1940 von J. H. C. Whitehead erbracht worden.

Man konnte sich nun fragen, ob es stets möglich ist, eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer Differenzierbarkeitsstruktur zu versehen (sogenannte *Glättung* (smoothing) einer Mannigfaltigkeit). Die Antwort ist negativ und zeigt, daß

---

[1]) Siehe 10.8.3. und 9.5.

die Kategorie der topologischen Mannigfaltigkeiten auch nicht mit der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zusammenfällt. Tatsächlich konstruierte Kervaire 1960 eine zehndimensionale Mannigfaltigkeit, welche keine Differenzierbarkeitsstruktur besitzt [144], und Tamura gab dazu 1961 unter Benutzung einer Milnorschen Konstruktion ein achtdimensionales Beispiel an [145]. Milnor hatte 1956 ein Ergebnis erzielt [146], das damals ebensoviel Erstaunen erregte wie einige Jahre später die Widerlegung der Hauptvermutung: Er bewies die Existenz homöomorpher Mannigfaltigkeiten, die mit untereinander unverträglichen Differenzierbarkeitsstrukturen versehen sind; es existiert also kein *Diffeomorphismus* (d. h. kein Homöomorphismus, bei dem die Abbildungen der lokalen Karten differenzierbar sind) dieser Mannigfaltigkeiten aufeinander. Einer der einfachsten Fälle ist der der siebendimensionalen Sphäre, die mit einer Differenzierbarkeitsstruktur versehen werden kann, welche mit der gewöhnlichen, durch die Einbettung der Einheitssphäre in den euklidischen Raum induzierten Differenzierbarkeit unverträglich ist; das bedeutet, daß alle diese Sphären homöomorph sind, aber diese Homöomorphien nicht durch differenzierbare Abbildungen beschrieben werden können. Die mit dieser Struktur versehenen Sphären werden *exotische* Sphären genannt.

Diese unterschiedlichen Beispiele offenbaren, daß sich die Eigenschaften der Räume mit mehr als drei Dimensionen von denen der uns vertrauten Räume in recht merkwürdiger Weise unterscheiden können. Gleichzeitig lassen uns gewisse Feststellungen (wie die mit der Poincaréschen Vermutung im drei- bzw. vierdimensionalen Fall zusammenhängenden Schwierigkeiten, während sie für $n \geqq 5$ Dimensionen bewiesen werden konnte) glauben, daß sich gerade im vierdimensionalen Fall gewisse Phänomene ergeben, die noch ziemlich geheimnisvoll sind (und die offenbar bei höherdimensionalen Räumen auftreten können).

10.10. Abschließende Bemerkungen

Diese Skizze der Geschichte der Topologie wäre unvollständig, würden wir nicht auch auf die Geschichte der dieser Disziplin gewidmeten Werke eingehen.

Zum Gegenstand der allgemeinen Topologie ist nichts Besonderes zu berichten; denn seit Hausdorff (und Baire) bis hin zu den sukzessiven Versionen der *Topologie Générale* von Bourbaki sind sehr zahlreiche Werke unterschiedlichen Niveaus in verschiedenen Sprachen erschienen und den Fortschritten der Theorie ziemlich dicht gefolgt. Dies war in der algebraischen Topologie (oder kombinatorischen Topologie, wie sie zuerst hieß) nicht so; während einer langen Zeit gab es dort viel weniger Bücher, und die Entwicklung der Methoden und vor allem der Standpunkte verlief so stürmisch, daß Bücher, denen eine freundliche Aufnahme sicher gewesen wäre, zum Zeitpunkt ihres Erscheinens nur mehr von historischem Interesse waren.

Dies war bei den ersten Werken, die wir Oswald Veblen (*Analysis Situs*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1921, 2. Auflage 1931) und Solomon Lefschetz (*Topology*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1930) verdanken, der Fall; ihnen folgten 1932 eine

Einführung in die Kombinatorische Topologie von Kurt Reidemeister (Vieweg, Braunschweig 1932), die sich übrigens im wesentlichen auf zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, d. h. auf Flächen beschränkte, und besonders das *Lehrbuch der Topologie* von H. Seifert und W. Threlfall (Teubner, Leipzig 1934; Nachdruck bei Chelsea) und *Topologie* I (in deutscher Sprache, wie dem Titel nicht ohne weiteres zu entnehmen ist) von P. Alexandroff und H. Hopf (Springer, Berlin 1935; Nachdruck Edwars Brothers, Ann Arbor 1945). Diese beiden Bücher können noch mehr als 40 Jahre nach ihrem Erscheinen mit Gewinn gelesen werden, insbesondere ist Seifert-Threlfall noch immer eine der besten Einführungen in die Theorie der Überlagerungen, ja sogar der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten und in die Theorie der Fundamentalgruppe. In diesen Werken wird zum ersten Mal der von der „modernen" Algebra gelieferte Apparat erfolgreich benutzt (vergessen wir nicht, daß sie ungefähr Zeitgenossen der ersten Auflage des van der Waerdenschen Buches sind!), im wesentlichen übrigens die Gruppentheorie, die ausgiebig zum Aufbau der Homologietheorie verwendet wird. Man sollte jedoch nicht aus dem Auge verlieren, daß diese Werke erschienen sind, ehe die Kohomologie (die in einigen Kapiteln der Homologietheorie eine elegantere und klarere Formulierung und Beweisführung ermöglicht) herausgearbeitet war, ehe sich die homologische Algebra (auf welche die gleiche Bemerkung zutrifft) herausgebildet hatte und natürlich, ehe die Rolle der Kategorien und Funktoren erkannt worden war.

Das Alexandroff-Hopfsche Buch sollte der erste Band eines dreibändigen Werkes sein; die Entwicklung der algebraischen Topologie zwischen 1935 und 1938 (insbesondere die Einführung der Kohomologie, siehe 10.6.1.) machte es den Autoren unmöglich, ihren Plan zu verwirklichen. P. S. Alexandroffs *Kombinatornaja Topologija* (1947 erschienen, aber schon etwa 1941 geschrieben; amerikanische Übersetzung in 3 Bänden, Graylock Press, Rochester, 1956, 1957, 1960) kann bis zu einem gewissen Grade als eine revidierte und teilweise vervollständigte Neuauflage des Alexandroff-Hopfschen Buches aus dem Jahre 1935 angesehen werden.

Im Jahre 1942 veröffentlicht Lefschetz seine *Algebraic Topology* (ursprünglich als Neuauflage des Buches aus dem Jahre 1930 geplant, in der, zweifellos zum ersten Mal, die „kombinatorische" Topologie offiziell als „algebraische" Topologie bezeichnet wird; schon 1935 haben jedoch Alexandroff und Hopf — Seite 8 des oben zitierten Buches — betont, daß die kombinatorische Topologie oder die Topologie der Komplexe als ein Zweig der reinen Algebra angesehen werden kann). Lefschetz hat darin das erste Auftreten der Kohomologie berücksichtigt; meiner Meinung nach verhindert dies aber nicht, daß dieses Buch ebenso veraltet ist wie die älteren Bücher von Seifert-Threlfall und von Alexandroff-Hopf.

Mit den *Foundations of Algebraic Topology* von S. Eilenberg und N. E. Steenrod (Princeton University Press, 1952) wurde die axiomatische und funktorielle Darstellung der Homologie eingeführt, welche die meisten der danach veröffentlichten Werke direkt oder indirekt beeinflussen sollte. (Seltsamerweise gilt dies nicht für die *Topology* von J. G. Hocking und G. S. Young —Addison-Wesley, 1961— die andererseits eine gewisse Anzahl von Themen, die in den meisten anderen Büchern nicht behandelt werden, klar und detailliert beschreibt. Diese Bemerkung trifft

auch für *Modern Algebraic Topology* von D. G. Bourgin —Macmillan, 1963 —zu, ein relativ unausgeglichenes Buch.)

Ungefähr ab 1960 erscheinen mehrere Werke, die darauf abzielen, eine Übersicht über die Entwicklungen der algebraischen Topologie zu bieten. Wir haben einige davon erwähnt. Die wichtigsten waren zweifellos die *Homology Theory* von P. J. Hilton und S. Wylie (Cambridge University Press, 1960; es gibt auch eine Taschenbuchausgabe) und die *Algebraic Topology* von E. H. Spanier (MacGraw-Hill, 1966), die den Leser auf ein ziemlich hohes Niveau führen und demgemäß nicht immer eine einfache Lektüre sind. Weniger anspruchsvoll sind verschiedene Bücher von S. T. Hu (*Homology Theory: A first course in Algebraic Topology*, Holden-Day, 1966, und *Cohomology Theory*, Markham, 1968; vom gleichen Autor könnte man auch die *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day, 1968 heranziehen), die im Verlaufe des gleichen Jahrzehnts erschienen sind und sich am axiomatischen Standpunkt des Werkes von Eilenberg-Steenrod orientieren.

S. MacLanes *Homology* (Springer, 1963) gehört gleichzeitig zur algebraischen Topologie und zur homologischen Algebra. Die zahlreichen Bezüge, die das Buch zur algebraischen Topologie herstellt (die tatsächlich einer beträchtlichen Anzahl von Kapiteln der homologischen Algebra zugrunde liegt), liefern ein recht gutes Verständnis der algebraischen Topologie, das für eine nutzbringende Lektüre dieses Buches wünschenswert ist. Wer diese Kenntnisse schon besitzt, wird in diesem, von einem der Schöpfer der homologischen Algebra und der Kategorientheorie geschriebenen Werk die Wechselwirkung der topologischen Probleme mit den algebraischen Methoden erkennen können.

Neben W. S. Masseys Buch *Algebraic Topology: An Introduction* (Harcourt, Brace & World, 1967), das Strenge mit Anschauung verbindet, sich aber auf die Behandlung der Fundamentalgruppe und der Überlagerungen (mit Anwendungen, besonders in der Algebra) beschränkt, zitieren wir noch M. J. Greenbergs, *Lectures on Algebraic Topology* (Benjamin, 1967), während wir die nach 1970 erschienenen Bücher im Prinzip nicht erwähnen. Allerdings machen wir einige Ausnahmen, die durch die folgende Bemerkung gerechtfertigt werden. Seit sich die algebraische Topologie als mehr oder weniger selbständige Disziplin herausgebildet hat, stößt ihre Vermittlung in der Lehre auf ein Problem methodologischer Natur: Welche algebraischen Begriffe kann man beim Leser wohl als bekannt voraussetzen und in welchem Maße muß man ihre genaue Beschreibung in ein Werk der algebraischen Topologie aufnehmen? So findet man beispielsweise in den zwischen 1934 und 1940 erschienenen Büchern eine Darlegung der Gruppentheorie, während die oben erwähnte Monographie von MacLane eher das umgekehrte Problem zu lösen hat, das der Vorkenntnisse in Topologie. Im Verlaufe der letzten Jahre sind einige Autoren, als sie Bücher einführenden Charakters schrieben, dieser Schwierigkeit auf unterschiedliche Art und Weise begegnet; wir verweisen den interessierten Leser beispielsweise auf R. Browns *Elements of Modern Topology* (McGraw-Hill, 1968; der der algebraischen Topologie gewidmete Teil — Fundamentalgruppe und Überlagerungen — benutzt systematisch den Begriff des Gruppoids), auf C. T. C. Walls *A Geometric Introduction to Topology* (Addison-Wesley, 1972; dieses Buch führt Homologie und Kohomologie invariant für die Dimensionen 0 und 1 ein und

beweist den Alexanderschen Dualitätssatz in der Ebene) oder auf M. Zismans *Topologie algébrique élémentaire* (Armand Colin, 1972; Sprache und abstrakter Apparat der Theorie der Kategorien und Funktoren werden zur Behandlung der Grundbegriffe der algebraischen Topologie benutzt).

Zur Erinnerung weisen wir schließlich noch darauf hin, daß verschiedene Kapitel der algebraischen Topologie (insbesondere die Differentialtopologie, die Homotopietheorie, die CW-Komplexe, die halbsimpliziale Theorie, die kohomologischen Operationen, die Theorie der Garben, ...) den Gegenstand von Monographien bilden, die im allgemeinen im Laufe des letzten Jahrzehnts erschienen sind und die wir hier nicht zitieren können. Ihre Vorläufer sind diejenigen Werke, die lange Zeit die einzigen ihrer Art blieben, so die *Dimension Theory* von W. Hurewicz und H. Wallman (Princeton University Press, 1941; eine recht einfache, aber stets nützliche Lektüre, auch wenn einige Kapitel hinsichtlich der algebraischen Topologie veraltet sind), ferner E. Steenrods *The Topology of Fibre Bundles* (Princeton University Press, 1951).

Die algebraische Topologie hat noch keine lange Geschichte; da sie aber in einer Epoche gewachsen ist, in der sich die Mathematik insgesamt in einem sehr schnellen, vorher nicht gekannten Tempo entwickelt hat und in der die Wißbegierde der Mathematiker ganz und gar darauf gerichtet war, neue Gebiete zu erforschen, illustriert ihre Geschichte manche Aspekte, die sich in anderen Teilgebieten der Mathematik in unterschiedlichem Grade wiederfinden.

Die Topologie bringt Ideen ins Spiel, die zugleich recht einfach und ziemlich abstrakt und für die Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts fast völlig neu sind. Die Geschichte der kombinatorischen Topologie (aus der die algebraische Topologie hervorging) zeigt, daß sich die einfachen und abstrakten Vorstellungen nur allmählich durchsetzen, weil sie lange Zeit mit wesensfremden (insbesondere metrischen und analytischen) Begriffen überladen sind, die anderen, den Mathematikern einer bestimmten Epoche vertrauteren Gebieten entstammen. So bedurfte es, wie wir gesehen haben, mehrerer Jahrzehnte, bis man zu einer rein topologischen (und außerordentlich einfachen) Charakterisierung der Polyeder gelangte, auf die sich der Eulersche Satz bezieht (vgl. 10.2.2.); ein anderes Beispiel wird durch die Beschreibung der Komplexe geliefert, die Poincaré mittels Gleichungssystemen gibt, oder auch, ebenfalls bei Poincaré, durch die Konstruktion der Fundamentalgruppe mit Hilfe von Funktionen, die den automorphen Funktionen analog sind (vgl. 10.7.1.). Wir haben auch gesehen, daß sich die algebraische Dualität (die beispielsweise in der homologischen Algebra und der Kategorientheorie einen zentralen Platz einnimmt) erst durchgesetzt hat, nachdem sie (durch Lefschetz und vor allem durch Heinz Hopf) einen Umweg über die geometrische Konstruktion der Poincaréschen Dualität gemacht hatte.

Andererseits bringt die Geschichte der Topologie vielleicht mehr als die Geschichte anderer Disziplinen einen typischen Abriß der Geschichte der Mathematik. Die algebraische Topologie hat tatsächlich ihren Ursprung in der Untersuchung von Problemen, die einerseits in anderen Teilgebieten der Mathematik, vor allem der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen und der algebraischen Geometrie, andererseits durch ihre eigene Entwicklung gestellt waren (wie die

Hauptvermutung). Ihre Lösung erforderte die Erarbeitung neuer Methoden und Verfahren, das Nachdenken über diese Methoden mündet in andere Typen von Problemen (wie etwa die der Algorithmentheorie oder der Entscheidbarkeit) ein oder läßt neue Begriffe oder Theorien (wie die Kategorien oder die homologische Algebra) entstehen, welche instruktive Synthesen ermöglichen sollten, indem sie die Fragen, auf die man in anderen Gebieten der Mathematik gestoßen war, in ein neues Licht rückten, oder die selbst Werkzeuge liefern sollten, welche die Untersuchung andersartiger Probleme entscheidend voranbrachten.

10.11. Literatur

[1] Brief von Leibniz an Huygens vom 8. September 1679. Siehe Correspondance in Oeuvres complètes de Christian Huygens, Bd. 8, S. 216, M. Nijhoff, La Haye 1899. Siehe H. Lebesgue, Notices d'histoire des mathématiques, S. 111 (1958), und H. Freudenthal, Leibniz und die Analysis situs, Homenaje a Millas-Vallicrosa, Bd. 1, S. 611–626 (1954).

[2] Der Terminus wird benutzt in einem Brief aus dem Jahre 1836, siehe [158], und im Jahre 1847 in Vorstudien zur Topologie, Göttinger Studien.

[3] In einem Mémoire sur les polyèdres, das der Akademie in Paris vorgelegt wurde = Möbius, Gesamm. Werke, Bd. 2.

[4] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo *22* (1906), 1–74.

[5] O. Zariski, Bull. Amer. Math. Soc. *1* (1944), 683–691; M. H. Stone, Trans. Amer. Math. Soc. *12* (1937), 375–481.

[6] P. Urysohn, Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. *94* (1925), 262–295.

[7] In einer der Akademie in St. Petersburg am 26. August 1735 vorgelegten Arbeit = Euler, Opera Omnia 1, Bd. 7, S. 1–10.

[8] Sir William Hamilton, 1859. Siehe W. W. R. Ball and H. S. M. Coxeter, Mathematical Recreations and Essays, 1947.

[9] G. Kirchhoff, Ann. Physik u. Chemie *72* (1847).

[10] K. Kuratowski, Fund. Math. *15* (1930), 271–283.

[11] Brief von A. de Morgan an Sir William Hamilton vom 23. Oktober 1852.

[12] P. J. Heawood, Quart. J. Math. *24* (1890), 332–338.

[13] Siehe G. Ringel, Map Color Theorem, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974.

[14] F. Guthrie, Proc. Royal Soc. Edinburgh *10* (1878–1880), 728.

[15] H. Tietze, Monatshefte für Math. und Physik *16* (1905), 211–216. Für nähere Details vgl. H. Tietze, Gelöste und ungelöste Probleme aus alter und neuer Zeit, Biederstein Verlag, München 1949 (2 Bde.). Amerikanische Übersetzung: Famous Problems of Mathematics, Graylock Press, New York 1965.

[16] Brief an Goldbach vom 14. November 1750; Note, die der Akademie der Wissenschaften in Berlin am 26. November 1750 vorgelegt wurde = Euler, Opera Omnia 1, Bd. 26, S. 71–93.

[17] Oeuvres inédites de Descartes, par le comte Foucher de Careil, Bd. 2 (1859); E. de Jonquières, C.R. Paris *110* (1890), 169–173, 261–266, 677–680.

[18] Novi comment. acad. sc. Petrop. *4* (1752–1753), 140–160, am 9. September 1751 vorgelegte Arbeit = Euler, Opera Omnia 1, Bd. 26, S. 94–108.

[19] S. L'Huilier, Ann. math. pures et appl. *3* (1812—1813), 169—192.

[20] Chr. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847.

[21] J.B. Listing, Abh. der k. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen *10* (1862), 97—182. A. Cayley, The London, Edinburgh and Dublin Philos. Magazine and Journal of Science (4) *21* (1861), 424—428 = Collected math. papers, Bd. 5, S. 62—65. C. Jordan, J. reine und angew. Math. *66* (1866), 22—85 = Oeuvres, Bd. 4, S. 15—91.

[22] L. Schläfli, J. math. pures et appl. *20* (1855), S. 359—394, und Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Ges. math. Abhandl., Bd. 2, S. 164—190 (1901).

[23] C. F. Gauss, Zur Electrodynamik, Text vom 22. Januar 1833 = Werke, Bd. 5, S. 605.

[24] Vgl. die in [21] zitierte Arbeit Jordans.

[25] J. B. Listing, Abh. der k. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen *10* (1862), 97—180.

[26] Siehe [158], S. 109.

[27] B. Riemann, J. Math. *54* (1857); = Ges. math. Werke, S. 88—142.

[28] B. Riemann, Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, Diss. 1851; = Ges. math. Werke, Teubner, Leipzig 1892, S. 3—43.

[29] E. Betti, Ann. Mat. pura ed appl. (2) *4* (1871), 140—158.

[30] F. Klein, Math. Ann. *6* (1873) und *7* (1874) = Ges. Abhandl. Bd. 2, S. 11—77, insbes. S. 64.

[31] F. Klein, Über Riemanns Theorie der Algebraischen Funktionen und ihrer Integrale (1882) = Ges. math. Abh. Bd. 3, S. 571.

[32] F. Klein, Math. Ann. *9* (1876), 476—482 = Ges. math. Abhandl., Bd. 2, S. 68.

[33] W. v. Dyck, Math. Ann. *32* (1888), 457—512, und *37* (1890), 273—316.

[34] W. v. Dyck, On the Analysis Situs of Threedimensional Spaces, Report of the meeting of the British Association for the Advancement of the Science (1894).

[35] H. Poincaré, Oeuvres, Bd. 6, S. 183.

[36] H. Poincaré, C. R. Acad. Sci. Paris, 31. Oktober 1892; J. Ecole Polytechn. *1* (1895), 1—121; Rend. circ. mat. Palermo *13* (1899), 285—343; Proc. London Math. Soc. *32* (1900), 277—308; Rend. circ. mat. Palermo *18* (1904), 45—110; Oeuvres Bd. 6, S. 181—498.

[37] P. Heegaard, Forstudier til en topologisk Teori for de algebraiske Fladers Sammenhäng, 1898. Französische Übersetzung: Bull. Soc. Math. France *44* (1916), 161—242.

[38] M. Dehn und P. Heegaard, Encykl. Math. Wiss. III AB/3, S. 153—220 (1907).

[39] H. Poincaré, Oeuvres, Bd. 6, S. 243.

[40] F. Klein, vgl. [31], S. 531.

[41] H. Hopf, Nachr. der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen. Math. Phys. Kl. (1928), S. 127—136.

[42] L. Kronecker, Monatsber. Akad. Berlin (1869), S. 159—193 = Werke, Bd. 1, S. 175—212.

[43] H. Poincaré, Oeuvres, Bd. 6, S. 228.

[44] H. Poincaré, Oeuvres, Bd. 6, S. 303.

[45] O. Veblen and J. W. Alexander, Ann. Math. *14* (1913), 163—178.

[46] H. Lebesgue, C. R. Acad. Sci. Paris *152* (1911), 841—843 = Oeuvres Scient., Bd. 4, S. 173—175.

[47] L. E. J. Brouwer, Proc. R. Acad. Amsterdam *15* (1912), 113—122 = Coll. Works, Bd. 2, S. 511—520.

[48] J. W. Alexander, Trans. Amer. Math. Soc. *23* (1922), 89—95.

[49] L. S. Pontrjagin, Math. Ann. *105* (1931), 165—205. Vgl. auch Ann. of Math. *35* (1934), 904—914.

[50] L. E. J. Brouwer, Math. Ann. *68* (1910), 422—434 = Coll. Works, Bd. 2, S. 352—434.

[51] A. Schoenflies, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II (1908).

[52] L. E. J. Brouwer, Math. Ann. *71* (1911), 305—313, und *72* (1912), 55—56; Coll. Works, Bd. 2, S. 477—485 und 509/10.

[53] J. W. Alexander, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *10* (1924), 8—10.

[54] B. Mazur, Bull. Amer. Math. Soc. *65* (1959), 59—65.

[55] L. Antoine, J. Math. (9) *8* (1921), 221—325.

[56] S. Lefschetz, Ann. of Math. *21* (1920), 225—228.

[57] S. Lefschetz, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *9* (1923), 90—93; Trans. Amer. Math. Soc. *28* (1926), 1—49, und *29* (1927), 429—462; Selected papers, S. 199—281.

[58] H. Hopf, Jahresber. DMV *34* (1926), 130—133; Math. Z. *26* (1927), 762—774; Proc. Nat. Acad. Sci. USA *14* (1928), 206—214.

[59] Siehe insbesondere J. reine und angew. Math. *163* (1930), 71—88; Selecta Hopf, S. 14—37.

[60] S. Eilenberg und S. MacLane, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *28* (1942), 537—543.

[61] S. Eilenberg und S. MacLane, Trans. Amer. Math. Soc. *58* (1945), 231—294.

[62] H. Tietze, Monatsh. Math. und Physik *19* (1908), 1—118.

[63] J. W. Alexander, Trans. Amer. Math. Soc. *16* (1915), 148—154.

[64] S. Lefschetz, Topology, 1930, und Bull. Amer. Math. Soc. *39* (1934), 124—129; Selected papers, S. 479—484.

[65] S. Eilenberg, Ann. of Math. *45* (1944), 407—447.

[66] J. W. Alexander, Trans. Amer. Math. Soc. *28* (1926), 301—329.

[67] L. E. J. Brouwer, Math. Annalen *70* (1911), 161—165 = Collected Works, Bd. 2, S. 430—434.

[68] L. E. J. Brouwer, Math. Annalen *71* (1911), 97—115 = Coll. Works, Bd. 2, 454—472; implizit schon in [67].

[69] L. E. J. Brouwer, Proc. Kon. Ned. Ak. Wetensch. *15* (1912), 352—360 = Coll. Works, Bd. 2, S. 527—536; Proc. Int. Congress Math. Cambridge, S. 9—10 (1912) = Coll. Works, Bd. 2, S. 538—539. Der Begriff wird auf S. 105 von [68] eingeführt, doch wird die Klasse nicht ausdrücklich erwähnt.

[70] H. Hopf, Jahresber. DMV *34* (1925), 130—133 = Selecta, S. 1—4, und Math. Ann. *96* (1926), 209—224.

[71] H. Hopf, Math. Ann. *96* (1926), 225—250.

[72] L. E. J. Brouwer, siehe [68], S. 115; Coll. Works, Bd. 2, S. 472.

[73] G. D. Birkhoff und O. D. Kellogg, Trans. Amer. Math. Soc. *23* (1922), 26—115, und G. D. Birkhoff, Dynamical Systems, 1927. J. Leray und J. Schauder, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. *51* (1934), 45—78. J. Leray, Proc. Int. Congress Math. Cambridge (Mass.), Bd. 2, S. 202—208 (1950).

[74] H. Poincaré, J. Math. (4) *1* (1885), 167—244 = Oeuvres, Bd. 2, S. 90—161.

[75] S. Lefschetz, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *9* (1923), 90—93.

[76] L. E. J. Brouwer, Proc. Kon. Ned. Ak. Wetensch. *11* (1909), 850—858; *12* (1910), 716—734, und *13* (1910), 171—186 = Coll. Works Bd. 2, S. 273—318; Math. Ann. *71* (1911), 97—115 = Coll. Works, Bd. 2, S. 454—472.

[77] J. Hadamard, Note additionnelle à la 2ième édition de l'Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable de J. Tannery (1910) = Oeuvres, Bd. 2, S. 875—915.

[78] E. Stiefel, Comment. Math. Helvet. *8* (1935/36), 305—353.

[79] H. Whitney, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *21* (1935), 464—468.

[80] M. Kervaire, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *44* (1958), 280—283. R. Bott und J. M. Milnor, Bull. Amer. Math. Soc. *64* (1958), 87—89.

[81] F. Adams, Ann. of Math. *75* (1962), 603—632.

[82] G. Cantor, J. reine und angew. Math. *84* (1878), 242—258 = Ges. Abhandl., S. 119—133.

[83] G. Peano, Math. Ann. *26* (1890), 157—160. Englische Übersetzung in Selected works of Giuseppe Peano, übersetzt und herausgegeben von H. C. Kennedy, S. 143—149 (1973).

[84] H. Lebesgue, Math. Ann. *70* (1911), 166—168; C.R. Acad. Sci. Paris *152* (1911), 841—843 = Oeuvres Scientifiques, Bd. 4, S. 170—172 und 173—175.

[85] L. E. J. Brouwer, J. reine und angew. Math. *142* (1913), 146—152 = Coll. Works, Bd. 2, S. 540—546.

[86] H. Poincaré, Rev. de Métaph. et de Morale *11* (1903), 281—301 und 407—429, abgedruckt in La valeur de la science, Flammarion, Paris, S. 56—136 (1905); Rev. de Métaph. et de Morale *20* (1912), 486—493, abgedruckt in Dernières pensées, Flammarion, Paris, S. 57—97 (1913). Deutsche Übersetzung, siehe 13.5., [237][1].

[87] K. Menger, Monatshefte Math. und Phys. *33* (1923), 148—160; *34* (1924), 137—161. P. Urysohn, C. R. Acad. Wci. Paris *175* (1922), 440—442. K. Menger, Dimensionstheorie, 1928.

[88] G. de Rham, J. Math. (9) *10* (1931), 115—200.

[89] P. Alexandrov, Math. Ann. *98* (1928), 617—635.

[90] E. Čech, Topological papers, Prague 1968, S. 90—117.

[91] S. Lefschetz, Topology, 2. Aufl., Chelsea, New York 1971, S. 282—286.

[92] J. Leray, C. R. Acad. Sci. Paris *214* (1942), 781—783; J. Math. pures et appl. (9) *24* (1945), 95—248.

[93] H. Cartan, Comm. Math. Helv. *18* (1945), 1—15; Coll. de Topologie algébrique, CNRS, Paris 1947. Der 1949 publizierte Text gibt auf S. 1 und 2 einige Einzelheiten über die Entstehung dieser Untersuchungen.

[94] S. Eilenberg and N. Steenrod, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *31* (1945), 117—120; Foundations of algebraic topology, Univ. Press, Princeton 1952.

[95] S. Lefschetz, Selected papers, Chelsea, New York 1971, S. 248—281.

[96] I. Gordon, Ann. of Math. *37* (1936), 519—525. J. Alexander, Ann. of Math. *37* (1936), 698—708.

[97] E. Čech, Ann. of Math. *37* (1936), 681—697.

[98] H. Whitney, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *23* (1937), 285—291; Ann. of Math. *39* (1938), 397—432.

[99] N. Steenrod, Ann. of Math. *56* (1952), 47—67.

[100] N. Steenrod and D. Epstein, Cohomology operations, Univ. Press, Princeton 1962.

[101] H. Hopf, C. R. Acad. Sci. Paris *208* (1939), 1266—1267; Ann. of Math. *42* (1941), 22—52.

[102] A. Cayley, Coll. Papers, Bd. 2, S. 123—130 und 131—132.
[103] A. Cayley, Coll. Papers, Bd. 10, S. 149—152, 324—330, 401—405.
[104] M. Dehn, Math. Ann. *71* (1911), 116—144.
[105] Ju. V. Matijasevič, Doklady Akad. Nauk SSSR *191* (1970), 279—282; Séminaire Bourbaki, exposé 383, Lecture Notes in Math. Nr. 244, S. 11—28.
[106] A. Church, Amer. J. Math. *58* (1936), 345—363; A. M. Turing, Proc. Lond. Math. Soc. (2) *42* (1936), 230—265; A. Markov. C. R. Acad. Sci. UdSSR *55* (1947), 583—586; E. Post, J. Symb. Logic *12* (1947), 1—11.
[107] P. S. Novikov, Trudy Math. Inst. Steklov Nr. 44 (1955).
[108] S. Smale, Bull. Amer. Math. Soc. *66* (1960), 373—375; Ann. of Math. *74* (1961), 391—466.
[109] J. Stallings, Bull. Amer. Math. Soc. *66* (1960), 465—488; E. C. Zeeman, in: Topology of 3-manifolds and related topics, S. 199—204 (1962). Séminaire Bourbaki, exposé 208 (1960/61).
[110] H. Poincaré, Oeuvres, Bd. 4, S. 57—69.
[111] H. Poncaré, Oeuvres, Bd. 4, S. 70—139. P. Koebe, Göttinger Nachr. S. 191 bis 210 (1907).
[112] E. Čech, in: Verhandl. des intern. Math. Kongresses Zürich (1932), Bd. 2, S. 203.
[113] W. Hurewicz, Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam *38* (1935), 112—119 und 521—528; *39* (1936), 117—126 und 215—224.
[114] J. P. Serre, Ann. of Math. *54* (1951), 425—505.
[115] H. Freudenthal, Compos. Math. *5* (1937), 299—314.
[116] D. Kan, Trans. Amer. Math. Soc. *87* (1958), 294—329.
[117] B. Eckmann, in: Coll. de Topologie algébrique du CBRM Louvain 1956, S. 41 bis 53. B. Eckmann et P. Hilton, C. R. Acad. Sci. Paris *246* (1958), 2444—2447, 2555—2558, 2991—2993.
[118] H. Hopf, Comm. Math. Helv. *14* (1941—1942), 257—309; *17* (1941—42), 37—79.
[119] H. Freudenthal, Ann. of Math. *47* (1946), 274—316.
[120] B. Eckmann, Comm. Math. Helv. *18* (1945—1946), 232—282.
[121] S. Eilenberg and S. MacLane, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *27* (1941), 535—539; Ann. of Math. *43* (1942), 757—831.
[122] H. Künneth, Math. Ann. *90* (1923), 65—85; *91* (1924), 125—134.
[123] S. Eilenberg and J. Zilber, Ann. of Math. *51* (1950), 499—513; Amer. J. Math. *75* (1953), 200—204.
[124] H. Whitney, Duke Math. J. *4* (1938), 495—528.
[125] W. Hurewicz, Bull. Amer. Math. Soc. *47* (1941), 562—563, Abstract 47-7-329.
[126] H. Hopf, Math. Ann. *104* (1931), 637—665.
[127] H. Seifert, Acta Math. *60* (1932), 147—238.
[128] C. Ehresmann et J. Feldbau, C. R. Acad. Sci. Paris *212* (1941), 945—948; C. Ehresmann, ebenda *213* (1941), 762—764, und *214* (1942), 144—147.
[129] H. Hopf, Fund. Math. *25* (1935), 427—440.
[130] A. Hurwitz, Gött. Nachr., S. 309—316 (1898) = Ges. Werke Bd. X, S. 565—571.
[131] J. F. Adams, Bull. Amer. Math. Soc. *64* (1958), 279—282; Ann. of Math. *72* (1960), 60—104.
[132] M. Postnikov, Amer. Math. Soc. Transl. (2) *7* (1957), 1—134.
[133] J. Alexander, Trans. Amer. Math. Soc. *20* (1919), 339—342.
[134] K. Reidemeister, J. reine und angew. Math. 173 (1935), 164—173; W. Franz, J. reine und angew. Math. *173* (1935), 245—253.

[135] G. de Rham, Ann. Inst. Fourier *2* (1950), 51—67.
[136] J. H. C. Whitehead, Proc. Lond. Math. Soc. (2) *45* (1939), 243—327 = Math. Works, Bd. 2, S. 1—83.
[137] J. H. C. Whitehead, Bull. Amer. Math. Soc. *55* (1949), 213—245 und 453—496 = Math. Works, Bd. 3, S. 85—162.
[138] J. Milnor, Ann. of Math. *74* (1961), 575—590.
[139] R. Kirby and L. Siebenmann, Bull. Amer. Math. Soc. *75* (1969), 742—749.
[140] T. Radó, Acta Litt. Scient. Univ. Szeged *2* (1924—1926), 101—121.
[141] E. Moise, Ann. of Math. *54* (1951), 506—553; *55* (1952), 172—176, 203—222; *56* (1952), 96—114.
[142] S. Cairns, Bull. Amer. Math. Soc. *41* (1935), 549—552.
[143] L. E. J. Brouwer, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. *42* (1939), 701—706; Coll. Works, Bd. 1, S. 453—458. H. Freudenthal, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. *42* (1939), 880—901. J. H. C. Whitehead, Ann. of Math. *41* (1940), 809—824 = Math. Works, Bd. 2, S. 217—222.
[144] M. Kervaire, Comm. Math. Helv. *34* (1960), 127—139.
[145] I. Tamura, J. Math. Soc. Japan *13* (1961), 377—382.
[146] J. Milnor, Ann. of Math. *64* (1956), 399—405.
[147] R. Thom, C. R. Acad. Sci. Paris *236* (1953), 453—454, 573—575 und 1733—1735; Comm. Math. Helv. *28* (1954), 17—86.
[148] N. Bari, Trigonometričeskije rjady, Moskva 1961, Kap. 1 und 12. Englische Übersetzung: A treatise on trigonometric series, 2 Bde., Pergamon Press, Oxford 1964.
[149] J. Dieudonné, Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire, Hermann, Paris 1964. Russische Übersetzung: Nauka, Moskva 1972.
[150] R. Baire, Théorie des ensembles, Encyclopédie des Sciences math., 17 (Darlegung nach dem deutschen Enzyklopädie-Artikel von A. Schoenflies), Gauthier-Villars, Paris 1909.
[151] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914. Nachdruck: Chelsea, New York 1949.
[152] Es handelt sich um sogenannte vollständig reguläre Räume; vgl. N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Topologie générale, Kapitel I—X, Neuauflage, Hermann, Paris. Russische Übersetzung: Moskva 1958 bzw. 1968.
[153] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Algèbre, Kapitel I—III, Neuauflage, Hermann, Paris. Russische Übersetzung: Moskva 1976.
[154] W. Magnus, A. Karras, D. Solitar, Combinatorial Group Theory, Interscience, New York 1966. Russische Übersetzung: Moskva 1974.
[155] G. D. Birkhoff, Amer. J. Math. *35* (1913), 115—128.
[156] K. Appel, W. Haken, Bull. Amer. Math. Soc. *82* (1976), 711—712, Discrete Math. *16* (1976), 179—180.
[157] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, Bd. 1, Coll. SUP, Presses Univ. de France, Paris 1974.
[158] J. C. Pont, La topologie algébrique des origines à Poincaré, Presses Univ. de France, Paris 1974.
[159] J. P. Serre, Comm. Math. Helv. *27* (1953), 198—231; H. Cartan, Proc. Nat. Acad. Sci. USA *40* (1955), 467—471 und 704—707; Comm. Math. Helv. *29* (1955), 40—58. Siehe auch Séminaire Henri Cartan, 7. Jahrg. 1954/1955, Paris 1955.
[160] A. A. Markov, Doklady Akad. Nauk SSSR *121* (1958), 218—220; Proc. Intern. Congress Math. Edinburgh 1958, S. 300—306.

[161] R. Kirby, L. Siebenmann, Notices Amer. Math. Soc. *16* (1969), 695.

[G—H] H. Griffiths, P. Hilton, A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics: A Contemporary Interpretation, Van Nostrand-Reinhold, London 1970. Nachdruck: Springer-Verlag, New York 1978. Deutsche Übersetzung: Klassische Mathematik in zeitgenössischer Darstellung, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1976—1978 (in 3 Bänden).

[H—Y] J. C. Hocking, G. S. Young, Topology, Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1961.

[D] J. Dieudonné, Eléments d'Analyse, Bd. 1—8, Gauthier-Villars, Paris 1965—1978. Deutsche Übersetzung: Grundzüge der Analysis, Bd. 1—8, Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden/VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1971 bis 1983.

[L] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1965. Russische Übersetzung; Moskva 1968.

*[R] W. Rinow, Lehrbuch der Topologie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.

[S—T] H. Seifert, W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, Leipzig 1934. Nachdruck: Chelsea, New York 1947.

Empfehlungen für zusätzliche Literatur

Zusätzliche Informationen über die Geschichte einiger Kapitel der Topologie

Zu 10.1. J. H. Manheim: The Genesis of Point Set Topology, Pergamon Press, Oxford 1964.

Zu 10.2.1. N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. Wilson, Graph Theory 1736—1936, Clarendon Press/Oxford University Press 1976.

Zu 10.2.2. Eine Geschichte der Beweise des Eulerschen Polyedersatzes (nebst methodologischen und philosophischen Betrachtungen) findet man in: Imre Lakatos, Proofs and Refutations, Cambridge University Press 1976.

Zu 10.2. und 10.3. Majà Bollinger, Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs, Archive Hist. Exact Sciences *9* (1972), 94—170.
Über die Arbeiten von Heinz Hopf findet man Hinweise in: H. Hopf, Ein Abschnitt aus der Entwicklung der Topologie, Jahresber. DMV *68* (1966), 182—192, sowie in: Colloque de Topologie du CBRM, Bruxelles 1964, S. 9—20.

Ausführlichere (oder illustrierte) Informationen über bestimmte Themen

In 10.10. findet der Leser neben einer Übersicht über die Geschichte der Lehrbücher zur Topologie auch einige Bemerkungen darüber, welches Interesse manche dieser Werke noch heute verdienen.

Zu 10.3.2. Eine ausführliche elementare Einführung in die simpliziale Homologie findet sich in: Max K. Agoston, Algebraic Topology, Marcel Dekker 1976.

Zu 10.4.1. Die Alexandersche ,,gehörnte Sphäre" und das Antoinesche ,,Halsband" sind insbesondere in [H—Y], S. 176 und 177, abgebildet.

Zu 10.7. und 10.8. Eine recht elementare Einführung in einige hier behandelte Begriffe findet sich in: G. Hirsch, Introduction à la topologie algébrique, I, Bull. Soc. Math. Belg. *16* (1964), 152—188, und II, Bull. Soc. Math. Belg. *18* (1966), 227—244.
Auf die Anwendung der Theorie der Fundamentalgruppe und der Überlagerungen zum Beweis von Sätzen der Algebra (vgl. 10.7.4.) wird in dem in 10.10. erwähnten Buch von Massey ausdrücklich eingegangen.

11. Integrations- und Maßtheorie

von Jean Dieudonné

11.1. Die Definition des Integrals

Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, hatten es seit der Zeit Fouriers und Dirichlets die Bedürfnisse der Analysis notwendig gemacht, den Integralbegriff für „immer unstetigere" Funktionen zu definieren. Bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts bestand die einzige Methode zur Definition des Integrals einer Funktion f einer reellen Veränderlichen auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ darin, für eine „Unterteilung" $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ von $[a, b]$ eine „Riemannsche Summe"

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,(t_{j+1} - t_j) \quad \text{mit} \quad t_j \leqq \xi_j \leqq t_{j+1}$$

zu bilden (diese Idee geht mindestens auf Archimedes zurück). Riemann hatte eine hinreichende Bedingung (die in Wirklichkeit auch notwendig ist) dafür angegeben, daß diese Summe für $\sup_j (t_{j+1} - t_j) \to 0$ unabhängig von der Wahl der Punkte t_j und $\xi_j \in [t_j, t_{j+1}]$ gegen einen (dann mit $\int_a^b f(t)\,dt$ bezeichneten) Grenzwert strebt; sie lautet: Für jedes $\alpha > 0$ ist die Menge der Punkte aus $[a, b]$, in denen die *Schwankung*[1]) von f mindestens α ist, in einer endlichen Vereinigung von Intervallen enthalten, deren Längen eine beliebig kleine Summe haben (eine Bedingung, die man heute kurz so formuliert: Die Unstetigkeitspunkte von f bilden eine Menge vom Maß null). Dieser Riemannsche Hilfssatz läßt sich mühelos auf Mehrfachintegrale in einem $\boldsymbol{R}^m$ ausdehnen, indem man die „Unterteilung" in Intervalle (bei einem Integral, das sich über einen Quader erstreckt) durch eine „Unterteilung" in Quader ohne gemeinsame innere Punkte ersetzt, wobei der größte Durchmesser der Quader einer solchen Unterteilung gegen null streben muß.

[1]) Die Schwankung einer Funktion f auf einer Menge V ist die obere Grenze der Zahlen $|f(x) - f(y)|$ für x, y in V. Die Schwankung von f in einem Punkt a ist die untere Grenze der Schwankungen von f in den Umgebungen V von a; sie ist dann und nur dann null, wenn f im Punkt a stetig ist.

Parallel dazu und unter dem Einfluß dieses Riemannschen Resultats wurden (vgl. Kapitel 6) die ersten Versuche unternommen, auch Teilmengen von $\boldsymbol{R}$ oder von $\boldsymbol{R}^m$, die allgemeiner waren als die klassischen „Figuren", für welche man einen „Flächeninhalt" (im $\boldsymbol{R}^2$) oder ein „Volumen" (im $\boldsymbol{R}^3$) definieren konnte, ein „Maß" zuzuordnen. Die Methoden der Integralrechnung verknüpften diese Möglichkeit übrigens eng mit den Erweiterungen des Integralbegriffs, da beispielsweise für eine Funktion $f \geqq 0$ auf einem Rechteck $I \subset \boldsymbol{R}^2$ der Wert des Integrals $\iint_I f(x, y)\, dx\, dy$ mit dem „Volumen" der Menge H_f der Punkte $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$ mit $(x, y) \in I$ und $0 \leqq z \leqq f(x, y)$ identifiziert wurde (diese Menge wurde mitunter der „Hypograph" von f genannt).

Seit 1870 hatte jedoch die Benutzung des „Riemannschen Integrals" nach und nach eine Reihe von Phänomenen hervortreten lassen, die sich einem wirksamen Gebrauch dieses mathematischen Werkzeugs entgegenstellten:

1°. Für die Funktionen einer Veränderlichen schien der traditionelle Zusammenhang zwischen „Stammfunktion" und „Integral" nicht mehr ohne Einschränkung zu bestehen. Man war nämlich auf Beispiele für im Riemannschen Sinne über einem Intervall $[a, b]$ integrierbare Funktionen f gestoßen, für welche die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ in gewissen Punkten weder eine rechtsseitige noch eine linksseitige Ableitung hatte. Andererseits kannte man überall differenzierbare Funktionen F, deren Ableitung F' jedoch nicht im Riemannschen Sinne integrierbar war.

2°. Für eine im Riemannschen Sinne über einem Rechteck $I = [a, b] \times [c, d]$ von $\boldsymbol{R}^2$ integrierbare Funktion f zweier Veränderlichen kann die klassische Formel

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

ihren Sinn verlieren, da das eine oder das andere der beiden einfachen Integrale auf der rechten Seite nicht als Integral im Riemannschen Sinne definiert zu sein braucht.

3°. Es sei (f_n) eine auf einem beschränkten Intervall I von $\boldsymbol{R}$ gleichmäßig beschränkte Folge im Riemannschen Sinne integrierbarer Funktionen, welche auf I *einfach* (d. h. punktweise) gegen eine Funktion f konvergiert. Dann braucht f nicht im Riemannschen Sinne integrierbar zu sein, so daß man ohne zusätzliche Voraussetzungen beim Riemannschen Integral nicht „unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen" kann. Wir wählen beispielsweise $I = [0, 1]$ und $f_n(x) = 0$ mit Ausnahme der Punkte $x = k/2^n$ für ganzzahliges k mit $0 \leqq k \leqq 2^n$, in denen $f_n(k/2^n) = 1$ sei. Da f bis auf die endlich vielen Punkte $k/2^n$ stetig ist, ist f im Riemannschen Sinne integrierbar; dies gilt aber nicht für die Grenzfunktion f, die in jedem Punkt von I die Schwankung 1 hat.

Den entscheidenden Fortschritt erzielte Lebesgue im Jahre 1901 ([3], Bd. I, S. 201) mit dem Beweis, daß es möglich ist, die Definition des Integrals auf eine viel umfassendere Klasse von Funktionen auszudehnen. Diese Erweiterung beseitigte gleichzeitig die oben genannten „Pathologien", was das „Lebesguesche Integral" und seine Verallgemeinerungen zu einem der mächtigsten und nützlichsten Instrumente der modernen Analysis machen sollte.

Ausgangspunkt für Lebesgue war der 1898 von E. Borel (vgl. 6.9.3.) eingeführte Begriff des Maßes. Der wesentliche Punkt, in dem sich dieser Begriff von den früher betrachteten unterscheidet, besteht in der Definition des Maßes einer *beschränkten offenen* Menge. Auf der Geraden nahm Borel als Maß einer solchen offenen Menge U die Summe der Längen der Intervalle, welche als zusammenhängende Komponenten U darstellen und die eine höchstens abzählbare Familie bilden; mit anderen Worten, er approximierte gewissermaßen das Maß von U „von innen", während seine Vorgänger die Menge U in eine *endliche* Vereinigung von Intervallen *eingeschlossen* hatten. Im $\boldsymbol{R}^m$ $(m > 1)$ muß man diese Definition durch die obere Grenze der „Volumina" der in U enthaltenen Elementarpolyeder (Vereinigungen von endlich vielen Quadern ohne gemeinsame innere Punkte) ersetzen. Nach diesem Anfangsschritt bestand Borels Idee darin, ausgehend von den beschränkten offenen Mengen vermittels der im Bedarfsfall „transfinit" iterierten Operationen Differenzbildung und abzählbare Vereinigung eine Familie von später „Borelsch" genannten Mengen „zu erzeugen" ([G—H], S. 101). Das Maß der beschränkten Borelschen Mengen ist dann (ausgehend vom Maß der beschränkten offenen Mengen) wohldefiniert, wenn man noch die *Volladditivität* fordert: Für eine abzählbare Vereinigung X von paarweise disjunkten und in einer beschränkten Menge des $\boldsymbol{R}^m$ enthaltenen Borelschen Mengen X_n soll das Maß $m(X)$ gleich der Summe $\sum_n m(X_n)$ sein. Für eine beliebige Borelsche Menge X kann man $m(X)$ wieder als obere Grenze der beschränkten Borelschen Teilmengen von X definieren, wobei diese Grenze $+\infty$ sein kann; dabei gilt wieder Volladditivität.

Die Beweise Borels waren nur skizzenhaft. Lebesgue nahm sie im Detail wieder auf, wobei er eine sehr nützliche Modifikation der Borelschen Definition vornahm. Er nannte die Mengen der Gestalt $B \cup N$ „meßbar", wobei B Borelsch und N eine *beliebige* Teilmenge einer Borelschen Menge vom Maß null ist (es gibt Teilmengen einer Borelschen Menge vom Maß null, die nicht Borelsch sind); da solche Mengen auf natürliche Weise in allen Anwendungen auftreten, ist diese Erweiterung sehr bequem. Das Maß von $B \cup N$ wird gleich dem Maß von B genommen. Die Familie der in einem $\boldsymbol{R}^m$ meßbaren Mengen hat wieder die Eigenschaft, invariant gegenüber der Differenzbildung und der abzählbaren Vereinigung zu sein; auch ist das Maß dieser Mengen wieder volladditiv.

Nachdem diese Maßtheorie einmal begründet war, ergab sich der Begriff des Integrals daraus sofort durch das Verfahren des „Hypographen": Eine auf einer meßbaren Menge $A \subset \boldsymbol{R}^m$ definierte Funktion $f \geqq 0$ (die den Wert $+\infty$ annehmen kann) heißt *integrierbar* (Lebesgue sagte „summierbar"), wenn ihr Hypograph $H_f \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$ meßbar ist und im $\boldsymbol{R}^{m+1}$ ein endliches Maß hat; das Maß von H_f wird als Integral $\int_A f(x)\,dx$ definiert. Funktionen mit beliebigem Vorzeichen werden in der Gestalt $f = f^+ - f^-$ mit $f^+ = \sup(f, 0) = \frac{1}{2}(f + |f|)$ und $f^- = \sup(-f, 0) = \frac{1}{2}(|f| - f)$ geschrieben. Man sagt, f sei integrierbar, wenn f^+ und f^- integrierbar sind, und man setzt

$$\int_A f(x)\,dx = \int_A f^+(x)\,dx - \int_A f^-(x)\,dx\,.$$

Es sei bemerkt, daß f genau dann integrierbar ist, wenn $|f|$ integrierbar ist. ,,Uneigentliche Integrale" existieren in der Lebesgueschen Theorie nicht. Es ist angebracht, auch meßbare (bzw. Borelsche) Funktionen zu definieren, die nicht integrierbar zu sein brauchen: Für eine Funktion $f \geqq 0$ bedeutet dies, daß H_f meßbar (bzw. Borelsch) ist, und für eine Funktion f mit beliebigen Vorzeichen, daß f^+ und f^- meßbar (bzw. Borelsch) sind. Eine äquivalente Bedingung ist, daß für jedes Paar reeller Zahlen $\alpha < \beta$ die Menge der $x \in \boldsymbol{R}^m$ mit $\alpha \leqq f(x) \leqq \beta$ meßbar (bzw. Borelsch) ist.

Es ist höchst bemerkenswert, daß die von Borel eingeführte Modifikation, die zunächst unwesentlich zu sein schien, die sehr eingeschränkte Klasse der im Riemannschen Sinne integrierbaren Funktionen ungeheuer erweitert. Tatsächlich kann man *nichtmeßbare* Funktionen nur mit Hilfe der allgemeinsten Form des Auswahlaxioms (vgl. 13.5.2.) definieren; die Funktionen, die in den Anwendungen auftreten, sind stets meßbar (obwohl der Beweis dafür nicht immer leicht ist). Dies liegt an der *Stabilität* des Begriffs der meßbaren Funktion: Für die meßbaren endlichen positiven Funktionen sind Summe und Produkt zweier solcher Funktionen meßbar; ist (f_n) eine Folge solcher Funktionen, so sind $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$ meßbar, und wenn die Folge *einfach* (punktweise) konvergiert, ist auch $\lim_{n\to\infty} f_n$ meßbar. Die Volladditivität des Maßes zieht andererseits für das Integral die Eigenschaft des ,,monotonen Grenzwerts" nach sich, worin Lebesgue schon 1903 ([3], Bd. II, S. 11) den Eckstein der ganzen Theorie erblickte: Ist (f_n) eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen und ist die (monoton wachsende) Folge der Integrale $\int f_n(x)\,dx$ gleichmäßig nach oben beschränkt, so ist $f = \sup_n f_n = \lim_{n\to\infty} f_n$ integrierbar, und es gilt

$$\int f(x)\,dx = \sup_n \int f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx\,.$$

11.2. Die grundlegenden Sätze

Nachdem diese Definitionen einmal vorlagen, zog das Lebesguesche Integral sofort die Aufmerksamkeit zahlreicher Mathematiker auf sich, und schon 1910 waren fast alle grundlegenden Sätze der Theorie von Lebesgue und seinen Mitstreitern bewiesen worden.

Das erste (und zweifellos das nützlichste) unter diesen Resultaten ist das *Majorantenkriterium*: Konvergiert eine Folge (f_n) von integrierbaren Funktionen einfach (punktweise) gegen eine Funktion f und existiert eine integrierbare Funktion $g \geqq 0$ derart, daß $|f_n| \leqq g$ für jedes n gilt, so ist f integrierbar, und man kann ,,unter dem Integralzeichen zur Grenze übergehen":

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx\,.$$

In allen mit der Integration verknüpften Problemen zeigte sich schnell, daß man, wenn man von der Stetigkeit absieht, zwischen einer meßbaren Funktion f und der

durch beliebige Abänderung der Werte von f auf einer Menge *vom Maß null* daraus entstehenden Funktion nicht zu unterscheiden braucht. Ist f integrierbar, so ist auch jede der so abgeänderten Funktionen integrierbar, und das Integral hat denselben Wert. Man wird folglich dazu geführt, zwischen den auf $\boldsymbol{R}^m$ definierten Funktionen die folgende Äquivalenzrelation zu betrachten: „f und g stimmen bis auf eine Menge vom Maß null überein"; man sagt dann, f und g stimmen *fast überall* überein (allgemeiner sagt man, eine Eigenschaft eines Punktes des $\boldsymbol{R}^m$ gelte *fast überall*, wenn sie bis auf die Punkte einer Menge vom Maß null gilt). Dies ermöglicht es, mit Funktionen, die nur *fast überall* definiert sind, zu arbeiten, indem man ihnen die Äquivalenzklasse der überall definierten und fast überall mit der betrachteten Funktion übereinstimmenden Funktionen entsprechen läßt. Beispielsweise ist das Majorantenkriterium noch gültig, wenn man nur voraussetzt, daß die f_n fast überall definiert sind, daß sie fast überall gegen einen Grenzwert streben und fast überall der Relation $|f_n(x)| \leqq g(x)$ genügen.

In vielen Problemen der Funktionalanalysis treten in natürlicher Weise Räume auf, die aus Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen bestehen und nicht mehr aus Funktionen. Die wichtigsten sind die von F. Riesz definierten Räume $L^p(A)$ ([6], Bd. I, S. 44); dabei ist A eine meßbare Menge des $\boldsymbol{R}^m$ und p eine Zahl mit $1 \leqq p < < +\infty$, die Elemente von $L^p(A)$ sind die Klassen der Funktionen f, die auf A meßbar sind und für welche $|f|^p$ auf A integrierbar ist. Man zeigt, daß durch die Relation

$$\|\tilde{f}\|_p = (\int_A |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$$

auf $L^p(A)$ eine Norm definiert wird (dabei ist $\tilde{f}$ die Äquivalenzklasse der Funktion f) und daß der Raum $L^p(A)$ bezüglich dieser Norm *vollständig* ist (vgl. 8.7.); das ist der zweite grundlegende Satz der Integrationstheorie, der sogenannte *Satz von Fischer-Riesz*. Er ermöglicht die Anwendung aller Techniken der Banachräume (vgl. 8.7.). Der Raum $L^2(A)$ ist besonders wichtig, denn auf diesem Raum kann man durch das Skalarprodukt

$$(\tilde{f} \mid \tilde{g}) = \int_A f(x)\, g(x)\, dx$$

eine *Hilbertraumstruktur* (vgl. 8.5.5.) erklären.

Der dritte grundlegende Satz (der sogenannte *Satz von Lebesgue-Fubini*) betrifft die mehrfachen Integrale. Wir nehmen an, die auf $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^p$ definierte Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$ sei integrierbar. Dann ist für fast alle $x \in \boldsymbol{R}^m$ die partielle Funktion $y \mapsto f(x, y)$ auf $\boldsymbol{R}^p$ integrierbar, die fast überall definierte Funktion $x \mapsto \int_{\boldsymbol{R}^p} f(x, y)\, dy$ ist auf $\boldsymbol{R}^m$ integrierbar, und es ist

$$\int_{\boldsymbol{R}^m} \int_{\boldsymbol{R}^p} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\boldsymbol{R}^m} dx \int_{\boldsymbol{R}^p} f(x, y)\, dy .$$

Lebesgue hatte dieses Ergebnis unter der Voraussetzung, f sei Borelsch, erhalten (in diesem Fall ist $y \mapsto f(x, y)$ für jedes x Borelsch). Etwas später hat dann Fubini den Satz auf beliebige integrierbare Funktionen verallgemeinert.

11.3. Stieltjes-Maße und Radon-Maße

Die Geschichte des letzten der Hauptsätze der Theorie, den man heutzutage den *Satz von Lebesgue-Nikodym* nennt, ist komplizierter; es hat längere Zeit gedauert, bis der Satz seine heutige Form erlangte. Eines der von Lebesgue in seinen ersten Arbeiten in Angriff genommenen Probleme war es, für die Funktionen einer Variablen die Beziehungen zwischen seinem neuen Integralbegriff und der Operation des Differenzierens zu klären. Er stellte schnell fest, daß dieses Problem von einem ganz anderen Schwierigkeitsgrad war als die obengenannten.

Eines seiner ersten und schönsten Ergebnisse (von dem man sogar heute noch keinen Beweis kennt, der nicht sehr scharfsinnige Überlegungen erfordert) ist das folgende: Ist f auf $[a, b]$ integrierbar und setzt man $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ für $a \leqq x \leqq b$, so besitzt die stetige Funktion F *fast überall* eine Ableitung, die gleich f ist. Das umgekehrte Problem ist jedoch viel schwieriger. Ist g auf $[a, b]$ stetig und differenzierbar, so ist die Ableitung g' meßbar, braucht aber, falls sie nicht beschränkt ist, nicht integrierbar zu sein. Die Bestimmung von g (bis auf eine additive Konstante), ausgehend von g', kann dann nur durch eine Operation vorgenommen werden, die viel komplizierter ist als die Integration; sie wurde von 1912 an unter dem Namen *Totalisierung* von A. Denjoy und seinen Nachfolgern entwickelt.

Diese Untersuchungen sind jedoch im wesentlichen mit Funktionen einer einzigen Veränderlichen verknüpft geblieben; Lebesgues Arbeiten wiesen in eine andere Richtung, die sich für umfangreiche Verallgemeinerungen als geeignet herausstellen sollte. Jordan hatte den Begriff der Funktion (einer Veränderlichen) *beschränkter Variation* (heute sagt man meist „*endlicher Schwankung*") in die Analysis eingeführt [2]: Für eine auf einem Intervall $[a, b]$ definierte reellwertige Funktion f betrachtet man für alle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ die Zahl $\sum_{j=0}^{n-1} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|$ und die obere Grenze $V(f; a, b)$ dieser Zahlen für alle möglichen Unterteilungen durch eine beliebige Anzahl von Punkten t_j. Ist $V(f; a, b)$ endlich, so nennt man f auf $[a, b]$ eine Funktion endlicher Schwankung und $V(f; a, b)$ die *Totalvariation* von f auf diesem Intervall. Jordan hatte außerdem bewiesen, daß eine Funktion endlicher Schwankung auf $[a, b]$ als Differenz $g - h$ zweier auf $[a, b]$ *monoton wachsender* Funktionen dargestellt werden kann; daß umgekehrt jede solche Differenz von endlicher Schwankung ist, ist evident.

Ist f eine auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbare Funktion und $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ eine Stammfunktion von f, so folgt aus der Tatsache, daß $|f|$ ebenfalls integrierbar ist, sofort, daß F von endlicher Schwankung ist und daß $V(F; a, b) = \int_a^x |f(t)|\, dt$ gilt. Eines der tiefgründigsten Resultate Lebesgues ist, daß umgekehrt für jede auf $[a, b]$ monoton wachsende Funktion g (bzw. für jede Funktion g von endlicher Schwankung) die Ableitung g' von g wieder fast überall existiert und integrierbar ist; doch *braucht* sogar für stetiges g *die Beziehung*

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)\, dt \tag{1}$$

nicht zu gelten.

Mit anderen Worten: Es gibt stetige, nicht konstante und monoton wachsende Funktionen, die fast überall die Ableitung null haben; diese Funktionen werden *singulär* genannt.

Die beiden Seiten von (1) stimmen, wie Lebesgue bewies, genau dann überein, wenn die Funktion g *absolut stetig* ist. Das bedeutet, daß die Totalvariation von g auf einer offenen Menge U (die nach Definition die Summe ihrer Totalvariationen auf den Intervallen ist, welche die zusammenhängenden Komponenten von U sind) mit dem Maß von U gegen null strebt. Lebesgue zeigte dann, daß jede monoton wachsende Funktion (ob sie nun stetig ist oder nicht) in kanonischer Weise in die Summe von drei anderen Funktionen zerlegt werden kann: in die Summe ihrer „Sprungfunktion"

$$f_1(x) = \sum_{y \leqq x} \left(f(y+) - f(y-)\right),$$

einer absolut stetigen Funktion

$$f_2(x) = \int_a^x f'(t)\, dt$$

und einer singulären Funktion f_3.

Im Jahre 1910 nahm Lebesgue die Erweiterung dieser Resultate auf den Raum $\boldsymbol{R}^m$ für $m \geqq 2$ in Angriff und führte dabei einen neuen Gesichtspunkt ein. Er ordnete jeder meßbaren Funktion f, die auf jeder kompakten Teilmenge des $\boldsymbol{R}^m$ integrierbar ist, die für jede meßbare und beschränkte Teilmenge E des $\boldsymbol{R}^m$ definierte *Mengenfunktion* $F(E) = \int_E f(x)\, dx$ zu, welche den Begriff des „unbestimmten Integrals" auf der Geraden verallgemeinert, im Gegensatz zum Maß jedoch nicht positiv zu sein braucht. Er zeigte, daß diese Funktion die beiden folgenden Eigenschaften besitzt: 1. Sie ist *volladditiv*; dies bedeutet hier, daß für meßbares und beschränktes E, welches Vereinigung einer Folge (E_n) meßbarer, paarweise disjunkter Mengen E_n ist, die Beziehung $F(E) = \sum_n F(E_n)$ gilt, wobei die Reihe absolut konvergent ist. 2. Sie ist *absolut stetig*; das bedeutet hier, daß $F(E)$ mit dem Maß von E gegen null strebt. Der wesentliche Teil seiner Abhandlung besteht darin, die Umkehrung dieser Aussage zu beweisen ([3], Bd. II, S. 185). Er ließ es aber nicht dabei bewenden und machte auf die Möglichkeit aufmerksam, den Begriff der Funktion endlicher Schwankung zu verallgemeinern, indem man die Mengenfunktionen $F(E)$ betrachtet, welche volladditiv sind, bei denen man jedoch nicht mehr die absolute Stetigkeit voraussetzt, sondern nur die Tatsache, daß $\sum_n |F(E_n)|$ für jede abzählbare Zerlegung (E_n) von E in meßbare Teilmengen gleichmäßig beschränkt bleibt.

Tatsächlich drückte sich Lebesgue nicht genau in dieser Form aus; denn da er noch unter dem Einfluß der klassischen Theorie stand (in der nur von *Punktfunktionen* die Rede ist) beschränkte er sich auf den Fall, daß die von ihm betrachteten Mengen E Quader des $\boldsymbol{R}^m$ sind. Nachdem jedoch die allgemeine Idee der Mengenfunktion einmal eingeführt worden war, war es J. Radon 1913 möglich [5], sie voll

tragfähig zu machen und gleichzeitig die Synthese mit einer anderen Ideenströmung, die auf eine Arbeit von Stieltjes aus dem Jahre 1894 zurückgeht, zu vollziehen [7].

Stieltjes stellte und löste darin mit außerordentlicher Eleganz eine ganze Reihe von neuartigen Problemen bezüglich der analytischen Funktionen und der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Um die Grenzfunktion einer gewissen Folge analytischer Funktionen darzustellen, wurde Stieltjes unter anderem dazu geführt, auf der Geraden den Begriff einer positiven „Massenverteilung" einzuführen, einen Begriff, mit dem man in der Physik seit langem vertraut war, der aber bis dahin in der Mathematik nur unter einschränkenden Voraussetzungen (im allgemeinen unter Annahme der Existenz einer sich in jedem Punkt stetig ändernden „Dichte") betrachtet worden war. Er stellte fest, daß die Angabe einer solchen „Verteilung" äquivalent ist der Vorgabe einer monoton wachsenden Funktion $\varphi(x)$, welche für $x > 0$ die im Intervall $0 < t \leqq x$ enthaltene Gesamtmasse und für $x < 0$ die im Intervall $x < t \leqq 0$ enthaltene Masse mit entgegengesetztem Vorzeichen angibt; die Unstetigkeiten von φ entsprechen dabei den „in einem Punkt konzentrierten" Massen. Für eine solche Massenverteilung in einem Intervall $[a, b]$ bildete Stieltjes dann die „Riemannschen Summen" $\sum_j f(\xi_j)\,(\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j))$ und zeigte, daß für auf $[a, b]$ stetiges f diese Summen gegen einen Grenzwert konvergieren, den er mit $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ bezeichnete.

An Stelle einer monoton wachsenden Funktion kann man übrigens für φ eine beliebige Funktion endlicher Schwankung wählen; außerdem ist es leicht (mittels Bedingungen, die das Wachstum von f im Unendlichen beschränken), $[a, b]$ durch $\boldsymbol{R}$ zu ersetzen. Es sei darauf hingewiesen, daß man so eine Vorstellung erhielt, welche die klassischen Begriffe Reihe und Integral zugleich umfaßte; denn eine absolut konvergente Reihe kann als Stieltjesintegral geschrieben werden, indem man für φ eine auf jedem Intervall $n < x \leqq n + 1$ konstante Funktion wählt, für welche $\varphi(n+) - \varphi(n-) = 1$ für alle $n \geqq 1$ ist.

Da Stieltjes nur stetige (sogar nur differenzierbare) Funktionen zu integrieren brauchte, hat er die Untersuchung seines Integrals nicht weiter vorangetrieben. Der Beitrag Radons ließ erkennen, daß man auf das Stieltjesintegral die Methoden von Borel und Lebesgue übertragen kann, indem man in der Definition des Maßes einer offenen Menge $U \subset \boldsymbol{R}$ überall die Länge $b - a$ eines Intervalls durch $\varphi(b) - \varphi(a)$ ersetzt. Durch Übergang zum Raum $\boldsymbol{R}^m$ verallgemeinerte er dann sogar den Begriff des mehrfachen Integrals, wobei er von einer auf den beschränkten (im Lebesgueschen Sinne) meßbaren Mengen definierten Mengenfunktion $\mu(E)$ ausging, welche nur der Bedingung genügt, volladditiv zu sein. Das ist das, was man seither ein *Radonsches Maß* auf dem $\boldsymbol{R}^m$ nennt; das entsprechende Integral wird mit $\int f(x)\,d\mu(x)$ oder $\int f\,d\mu$ bezeichnet. Radon konnte dann feststellen, daß die grundlegenden Sätze über Lebesgueintegrale ohne Änderung für sein Integral gültig bleiben. Mit anderen Worten, auf die Translationsinvarianz des „Lebesgueschen Maßes" (die es übrigens bis auf einen konstanten Faktor unter den Radonschen Maßen charakterisiert) kann in der allgemeinen Theorie verzichtet werden.

11.4. Die „abstrakten" Maße

Die Verallgemeinerungen des Integralbegriffs sollten dabei nicht stehenbleiben. Schon 1915 bemerkte Fréchet [1], daß in Radons Überlegungen die Lebesgue-Meßbarkeit der Mengen E, für welche $\mu(E)$ definiert ist, keine wesentliche Rolle spielt. Wichtig ist folgendes:

1. Diese Mengen gehören zu einer Familie $\mathcal{T}$, die gegenüber der Bildung von Differenz und abzählbarer Vereinigung stabil ist und die den ganzen Raum enthält (Eigenschaften, die besagen, daß $\mathcal{T}$ ein Borelscher Mengenkörper ist).
2. $\mu(E)$ ist auf einer Teilfamilie $\mathcal{M}$ von $\mathcal{T}$ definiert und so beschaffen, daß für $E \in \mathcal{M}$, $F \in \mathcal{T}$ und $F \subset E$ auch $\mu(F)$ definiert ist.
3. Ist $E \in \mathcal{T}$ die Vereinigung einer Folge (E_n) von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{M}$, so gilt genau dann $E \in \mathcal{M}$, wenn die Reihe $\sum_n \mu(E_n)$ absolut konvergent und dann $\mu(E) = \sum_n \mu(E_n)$ ist (Volladditivität).

Diese Eigenschaften lassen jedoch nirgends die Tatsache in Erscheinung treten, daß der ganze Raum der $\boldsymbol{R}^m$ ist, noch daß er mit einer Topologie versehen ist, so daß sie auch sinnvoll sind, wenn es sich um Teilmengen einer beliebigen Menge Ω handelt. Man kann dann ohne jede Änderung alle Sätze über das Lebesguesche (bzw. das Radonsche) Integral von neuem für das Integral $\int f\,d\mu$ bezüglich eines solchen „abstrakten Maßes" μ auf Ω aufstellen. Das aus einer Menge Ω und einem Borelschen Körper $\mathcal{T}$ von Teilmengen von Ω gebildete Paar $(\Omega, \mathcal{T})$ wird *Maßraum* genannt.

Gerade in diesem „abstrakten" Rahmen haben 1930 die Lebesgueschen Sätze aus dem Jahre 1910 durch O. Nikodym [4] ihre endgültige Gestalt angenommen (Radons Verallgemeinerungen waren nur von spezieller Art gewesen). Die Volladditivität eines Maßes (beliebigen Vorzeichens) hat automatisch zur Folge, daß es im Lebesgueschen Sinne von „endlicher Schwankung" ist; der klassische Jordansche Satz über die Darstellung einer Funktion endlicher Schwankung auf $\boldsymbol{R}$ als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen läßt sich in der Weise verallgemeinern, daß ein Maß immer als Differenz zweier positiver Maße geschrieben werden kann. Sind μ und ν zwei positive, auf der gleichen Teilfamilie $\mathcal{M}$ eines Borelkörpers $\mathcal{T}$ definierte Maße, so heißt ν ein *Maß der Basis* μ, wenn eine auf jeder Menge $E \in \mathcal{M}$ μ-meßbare und integrierbare Funktion f existiert (die als *Dichte* von ν bezüglich μ bezeichnet wird), für welche $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$ gilt. Der Satz von Lebesgue-Nikodym besagt dann, daß ν genau dann die Basis μ hat, wenn für jede Menge $N \in \mathcal{M}$ mit dem Maß $\mu(N) = 0$ auch $\nu(N) = 0$ gilt.

Im allgemeinen kann jedes auf $\mathcal{M}$ definierte positive Maß ν in der Gestalt $\nu = \nu' + \nu''$ geschrieben werden, wobei ν' die Basis μ hat und ν'' zu μ *disjunkt* ist; d. h., es gibt eine Zerlegung von Ω in zwei Mengen Ω', Ω'' von $\mathcal{T}$ derart, daß $\nu''(E) = 0$ für jede in Ω' enthaltene Menge $E \in \mathcal{M}$ und $\mu(E) = 0$ für jede in Ω'' enthaltene Menge $E \in \mathcal{M}$ gilt. Das ist die Verallgemeinerung der Lebesgueschen Zerlegung einer Funktion endlicher Schwankung auf $\boldsymbol{R}$ in eine absolut stetige und eine „singuläre" Funktion.

Der Begriff des „abstrakten“ Maßes ist besonders in der modernen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nützlich gewesen. Dort benötigt man einen Integralbegriff auf Mengen, die nicht mit einer Topologie versehen sind; andererseits muß man dort Maße auf ein und derselben Menge Ω betrachten können, welche ausgehend von Borelkörpern definiert sind, die von dem betrachteten Maß *abhängen können* (vgl. Kapitel 12).

11.5. Literatur

[1] M. Fréchet, Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, Bull. Soc. Math. France *43* (1915), 248—265.

[2] C. Jordan, Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 3. Aufl., 3 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1909—1915.

[3] H. Lebesgue, Oeuvres scientifiques, 5 Bde., L'Enseignement math., Genève 1972.

[4] O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. Radon, Fund. Math. *15* (1930), 131—179.

[5] J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, Sitzungsber. der math. naturwiss. Klasse der Akad. der Wiss. (Wien) CXXII, Abt. IIa, S. 1295—1438 (1913).

[6] F. Riesz, Oeuvres complètes, 2 Bde., Akademiai Kiadó, Budapest 1960.

[7] T. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues, Ann. Fac. Sci. Toulouse *8* (1894), J.-1 bis J.-122.

12. Wahrscheinlichkeitsrechnung

von Michel Loève

12.0. Einführung[1])

Eines der schönsten Resultate der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das „0-1-Gesetz" von P. Lévy. Sein anschaulicher Inhalt scheint evident, ja sogar trivial, wenn es in der Sprache der Glücksspiele formuliert wird: Ein Spieler beteiligt sich an einer Folge von Glücksspielen ein und derselben Art. Bei jedem dieser Spiele kann er sein gesamtes Vermögen verlieren, d. h. ruiniert werden. Nach n Spielen schätzt er die Chancen ein, irgendwann ruiniert zu werden. Diese Chance wird für unbegrenzt wachsendes n gegen 100% streben und die Chance, dem Ruin zu entgehen, gegen 0%.

In der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung lautet es folgendermaßen: Ist ein Ereignis A eine Funktion einer Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$, so konvergiert seine bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$, wenn die ersten n Glieder dieser Folge gegeben sind, für $n \to \infty$ fast sicher (d. h. mit Wahrscheinlichkeit 1) gegen die Indikatorfunktion I_A dieses Ereignisses, die durch $I_A = 1$ auf A und $I_A = 0$ für das Komplement von A definiert ist.[2])

In der Sprache der Maßtheorie (vgl. Kapitel 11) wird derselbe Sachverhalt folgendermaßen formuliert: Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge meßbarer Abbildungen eines Maßraumes $(\Omega, \mathcal{A})$ in die Borelsche Gerade (d. h. in die mit dem System $\mathcal{A}$ der Borelmengen versehene Menge $\boldsymbol{R}$), und es sei P ein positives Maß auf dieser Mengenalgebra $\mathcal{A}$ mit $P(\Omega) = 1$. Es sei $\mathcal{B}_n$ (bzw. $\mathcal{B}_\infty$) die kleinste Unteralgebra von $\mathcal{A}$, für welche $X_1, \ldots, X_n$ (bzw. alle X_j) meßbare Funktionen sind. Ist A ein Element von $\mathcal{B}_\infty$ und $P(A \mid \mathcal{B}_n)$ die Dichte der Einschränkung des Maßes $V \mapsto P(A \cap V)$

---

[1]) Die genauen Definitionen der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzten Begriffe und Bezeichnungen bringen wir in 12.2. und den darauffolgenden Abschnitten.

[2]) Die „Indikatorfunktion" ist also diejenige Funktion, die in der Mengenlehre oft „charakteristische Funktion" von A genannt wird. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat der Terminus „charakteristische Funktion" traditionell eine andere Bedeutung (siehe 12.2.).

auf $\mathscr{B}_n$ in bezug auf die Einschränkung von P auf $\mathscr{B}_n$, so konvergiert $P(A \mid \mathscr{B}_n)$ für $n \to \infty$ fast sicher gegen I_A.

Eine solche unterschiedliche Beschreibung des gleichen Sachverhalts findet sich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig. Der phänomenologische Inhalt einer Aussage kann plausibel oder sogar trivial erscheinen. Seine mathematische Formulierung ist abstrakt, und sein Beweis kann scharfsinniges Umgehen mit Begriffen und tiefliegende mathematische Sätze erfordern, deren Zusammenhang mit der anschaulichen Vorstellung nicht erkennbar ist.

Es ist eine Tatsache, daß die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Grund derschrittweisen Entwicklung dieser Theorie zu einer mathematischen Disziplin — verglichen mit allen anderen Zweigen der Mathematik — eine Sonderstellung einnimmt. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand als Theorie der Glücksspiele. Sehr schnell wurde sie, oft ohne ausreichende Begründung, zur Untersuchung von Massenerscheinungen, etwa aus dem Versicherungswesen, benutzt, beginnend mit der Berechnung von Lebenserwartungen und der Auswertung von Sterbetafeln. Während ihrer klassischen Periode, d. h. während des achtzehnten und des neunzehnten Jahrhunderts und bis zu ihrer „heroischen Periode" 1925 bis 1940, wurden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ökonomische und soziale Risiken aller Art untersucht, statistische Prognosen angefertigt, Gesetze über die Fehler bei astronomischen und anderen Beobachtungen aufgestellt, schließlich juristische Probleme, wie Zusammensetzung und Entscheidungen von Geschworenengerichten diskutiert usw. Darüber hinaus wurde sie auf metaphysische Fragen wie die nach der Existenz Gottes (vgl. Pascals Wette), aber auch auf Erscheinungen angewandt, bei denen der Zufall keine Rolle spielt, wie auf den täglichen Sonnenaufgang (Laplace). Parallel dazu haben seit ihrer Entstehung ständig Auseinandersetzungen über den Gegenstand ihrer philosophischen und phänomenologischen Interpretationen getobt, die sich bis in unsere Tage fortsetzen.

Während nahezu drei Jahrhunderten kam die Motivierung der Begriffe und Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung in erster Linie von außen. Dieser Aspekt findet sich in den Ausdrücken „Zufall" und „Chance", in ihrer Terminologie und ihrem anschaulichen Inhalt wieder. Erst im zwanzigsten Jahrhundert hat sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung von ihrer Rolle als Hilfsmittel befreit und zu einem vollberechtigten Mitglied der mathematischen Familie entwickelt. Damit kam zu der Motivierung von außen die innere Motivation einer mathematischen Disziplin. Die „wahrscheinlichkeitstheoretischen" Quellen der aktuellen Ideen und Probleme sind verschiedene Kombinationen der phänomenologischen und der mathematischen Intuition.

Die Entdeckung und Nutzung der Quantenphysik, also die Tatsache, daß die Natur das gewaltigste der Glücksspiele spielt, weist der Wahrscheinlichkeitsrechnung sogar einen Platz innerhalb der rationalen Erklärung der Natur zu. Philosophen gehen noch weiter. Ohne Kommentar sei Hacking [20] zitiert:[1]) „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nicht nur eine mathematische Disziplin neben anderen. Sie ist ein Teil eines außerordentlichen philosophischen Erfolgs moderner Zeiten.

[1]) Zitat aus dem Französischen übersetzt. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

Die Metaphysik ist, in allgemeiner Form beschrieben, das Studium dessen, was existiert. Die Epistemologie ist das Studium der Art und Weise, wie wir erkennen, was existiert. Diese Zweige der Philosophie sind beide von der Wahrscheinlichkeitstheorie erobert worden."

12.1. Genesis und klassische Periode

„ein Würfelwurf
niemals auslöschen wird
den Zufall"
Stéphane Mallarmé[1])

12.1.1. *Die Genesis*

Die Anfänge der Glücksspiele und der Probleme, die aus ihnen erwachsen, verlieren sich im Dunkel der Zeiten. Ihr erster Theoretiker war ohne Zweifel derjenige, der als erster seine Würfel fälschte. Die frühesten Schriften, in denen die Vorstellung der numerischen Wahrscheinlichkeit und gewisse Regeln, denen sie unterworfen ist, enthalten sind, dürften die von Cardano 1525 verfaßten, aber erst 1663 veröffentlichten Arbeiten und die 1718 erschienenen Arbeiten Galileis sein. „Es ist jedoch ein Problem der Glücksspiele, das von einem Weltmanne einem strengen Jansenisten vorgelegt worden ist, das den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet" (Poisson). Tatsächlich hat der Weltmann — es war der Chevalier de Méré — B. Pascal und Roberval zwei *alte* Probleme vorgelegt. Beide Herren waren Mitglieder des Kreises der Schützlinge und Bekannten des Herzogs de Roannez, in dem häufig mathematische Themen diskutiert wurden.

Das erste der beiden Probleme bestand darin, die Anzahl n der Würfe mit zwei Würfeln zu ermitteln, für welche die Chancen, einen „Sechserpasch" zu werfen, größer als 50% sind. Da $p_n = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$ ist, findet man $p_{24} = 0{,}4914$ und $p_{25} = 0{,}5055$. Eine alte, bei Spielern wohlbekannte Regel lieferte de Méré jedoch für p_{24} den Wert $\frac{1}{2}$. Daraus schlußfolgerte „der feine Geist, der jedoch kein Geometer ist",[2]) daß „die Arithmetik sich Lügen straft". Sechzig Jahre später formulierte de Moivre die Näherungsregel $n = (\log 2)\, N$, wobei N eine hinreichend große Zahl möglicher Fälle ist. Im vorliegenden Problem ist $N = 36$, also $n = 24{,}95 \approx 25$.

Es ist jedoch das zweite Problem, das den Ursprung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet. Es ist das Problem „der Punkte" oder „der Teile" oder „der Teilungen", ein sogenanntes Aufteilungsproblem: Der Preis eines Turniers wird demjenigen der Teilnehmer zuerkannt, der als erster eine gewisse Anzahl von Punkten

[1]) Aus: Stéphane Mallarmé, Sämtliche Gedichte. Deutsche Übertragung von Carl Fischer, Verlag Lambert Schneider, Heidelberg 1957, S. 155. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) „dieser Anonymus hat zwar im Allgemeinen ein gesundes Urtheil, versteht aber nichts von Mathematik", heißt es bei Jakob Bernoulli, Wahrscheinlichkeitsrechnung [3][1], S. 32. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

erreicht. Wie soll dieser Preis verteilt werden, wenn das Turnier vorher abgebrochen wird? Das Problem selbst war mindestens zwei Jahrhunderte alt. Es findet sich in einem Buch von Paciuoli[1]) aus dem Jahre 1494 sowie in der *Arithmetik* von Forestani aus dem Jahre 1603; Ore sagte, er habe es in italienischen Manuskripten von 1380 gefunden. Alle bis dahin angegebenen Lösungen waren falsch. Diejenigen, die es zu lösen versuchten, zeigten zunächst, daß ihr Vorgänger sich geirrt hatte: Cardano in bezug auf Paciuoli, Tartaglia in bezug auf Cardano usw. Roberval konnte es nicht nur nicht lösen, sondern bestritt auch die richtige Lösung von Pascal auf das heftigste. Da Pascal sich nicht ganz sicher war, unterbreitete er Fermat seine Lösung. So begann der berühmte Briefwechsel von 1654. Er wurde erst 1679 veröffentlicht, und zwar nur zum Teil, da einige Briefe verloren gegangen waren (vgl. dazu *[46]. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe*).

In diesen Briefen werden die Begriffe Wahrscheinlichkeit und mathematischer Erwartungswert korrekt verwendet, doch werden diese Begriffe und die Regeln, denen sie genügen, weder definiert noch an Hand numerischer Aufgaben herausgearbeitet. Später, in seinem 1665 postum erschienenen *Traité du triangle arithmétique* benutzt Pascal das „arithmetische Dreieck", d. h. die Kombinatorik, um die Lösung des allgemeinen „Problems der Punkte" zu ermitteln.

Einer breiteren Öffentlichkeit wurde die Wahrscheinlichkeitsrechnung durch die Huygenssche[2]) Arbeit *De ratiociniis in ludo aleae*, die sich am Schluß des 1657 erschienenen Buches seines Lehrers F. van Schooten ([21], Bd. XIV, S. 1—179) findet, vorgelegt. Damit waren ihr erstmals die korrekt formulierten und benutzten Grundbegriffe zugänglich. Im Jahre 1655 war Huygens nach Frankreich gekommen, wo er mit Roberval und anderen Mitgliedern des Kreises um de Roannez zusammentraf. Sie erzählten ihm von den Problemen, die Pascal und Fermat gelöst hatten, und vermittelten ihm möglicherweise auch eine Vorstellung von den Lösungen. Jedenfalls erkannte Huygens die Ehre, die Wahrscheinlichkeitsrechnung erfunden zu haben, Pascal und Fermat zu.[3]) Er scheint jedoch der erste gewesen zu sein, der ihre Bedeutung erkannte; er schreibt nämlich, daß „der Leser . . . bemerkt, daß es nicht nur um Spiele geht, sondern daß hier die Grundlagen einer sehr interessanten und ergiebigen Theorie entwickelt werden".[4])

Huygens definierte die „mathematische Erwartung" (den Erwartungswert) von Zufallsvariablen mit endlich vielen möglichen Werten und löste verschiedene numerische Aufgaben, insbesondere Spezialfälle der „Aufteilungsaufgabe". Seine Rechnungen sind eher schwerfällig, und er benutzte die Kombinatorik nicht. Im Jahre 1656 legte er sein Manuskript Pascal und Fermat vor, die es billigten. Die beiden wiederum schickten ihm drei Probleme. Eines von ihnen ist das berühmte Problem des Ruins von Spielern, auf das die „Irrfahrten" von heute zurückgehen.

---

[1]) Gelegentlich auch Pacci(u)oli geschrieben. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) Gelegentlich auch Huyghens geschrieben. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) Vgl. [3][1], S. 137. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

[4]) Zitiert nach B. W. Gnedenko *[45], S. 334. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

Es gehört zur „Sequentialanalyse" der modernen Statistik. Diese drei Probleme gehören zu den fünf, welche in *Ludo aleae* ohne Lösung aufgeführt werden. Schließlich weisen wir darauf hin, daß sich aus seinem Terminus „expectatio" das englische „mathematical expectation" (ebenso das russische Äquivalent) entwickelt hat, während das französische „espérance mathématique" auf den von ihm ebenfalls verwendeten Ausdruck „spes" zurückgeht. (Im Deutschen wird meist „Erwartungswert" benutzt.)

Um die gleiche Zeit tauchte das philosophische Problem des Doppelsinnes von „probabilité" auf. „Probabilitas" und „probabilis" scheinen von Cicero geprägt worden zu sein, und bis ins achtzehnte Jahrhundert hat das französische Wort „probable" die ursprüngliche Bedeutung „verdient Billigung" — auf Grund von Zeugnissen von Autoritäten — bewahrt. Die theologische Doktrin des „Probabilismus" wurde in den Händen der Kasuisten zur Möglichkeit, unter den im obigen Sinne „probablen" Meinungen diejenigen zu wählen, welche ihre Handlungen rechtfertigten. Pascal hatte diese Interpretation in seinem sechsten „Lettre Provinciale" (1656) auf das heftigste angegriffen. In der *Logique* oder der *Art de penser* der jansenistischen Klosterschule von Port-Royal (1662), an der Pascal beteiligt war, findet man nicht nur einen Angriff auf den „Probabilismus", sondern auch zum ersten Mal den Ausdruck „probabilité" im Sinne von numerischem Wert des Verhältnisses der Chancen, ebenso wie eine Darlegung der Pascalschen Wette. Damals begann der Konflikt der Auffassungen von Wahrscheinlichkeit im Sinne von Grad der Glaubwürdigkeit und von Wahrscheinlichkeit in der Bedeutung von Verhältnis der Chancen. Dieser Doppelsinn führte zu Strömen von Tinte, die sich unter anderem über fast alle Werke über Wahrscheinlichkeitsrechnung ergossen und die heute noch fließen, wenn sie auch die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung kaum mehr berühren.

12.1.2. *Die klassische Periode*

Die ersten Schritte zu einer mathematischen Disziplin „Wahrscheinlichkeitsrechnung" verdanken wir Jakob Bernoulli. Nach seinem Tode 1705 hielt Fontenelle eine Laudatio, die ein Jahr später veröffentlicht wurde. Man findet darin eine Zusammenfassung eines Manuskripts von Jakob Bernoulli. In dem Glauben, dieses Manuskript würde nicht veröffentlicht werden, beschloß de Montmort, ein Buch nach den Angaben der Zusammenfassung herauszugeben. So erschien 1708 das erste Buch zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Essai d'Analyse sur les jeux de hasard.* Darin werden zahlreiche Karten- und Würfelspiele mit Hilfe der Kombinatorik untersucht, einschließlich der fünf von Huygens vorgelegten Probleme. Die zweite Auflage von 1713 enthält mehr als 150 Seiten einer Korrespondenz, die über verschiedene Probleme mit Nikolaus Bernoulli geführt worden war, sowie einen Brief von Johann Bernoulli. In einem seiner Briefe stellte Nikolaus ein Problem, das als „Petersburger Paradoxon" (auch „Petersburger Problem") berühmt geworden ist; es wurde von Daniel Bernoulli in vielen Abhandlungen untersucht, die von der Petersburger Akademie veröffentlicht worden sind: Man spielt Kopf und Adler.

Der Mitspieler erhält 2^n Francs, falls sich „Kopf" zum ersten Mal beim n-ten Versuch einstellt (Wahrscheinlichkeit $1/2^n$). Welchen Betrag muß er als Einsatz zahlen, damit ein gerechtes Spiel entsteht? Die klassische Antwort lautet, daß sein Einsatz gleich dem mathematischen Erwartungswert seines Gewinnes sein muß. Dieser ist aber unendlich! Um dieses „Paradoxon" zu lösen, schlug D. Bernoulli vor, die „mathematische Erwartung" durch „moralische Erwartung" zu ersetzen, die dem Glück des Spielers Rechnung trägt. Im Verlaufe von zwei Jahrhunderten diskutierte jedes Werk zur Wahrscheinlichkeitsrechnung dieses Paradoxon und die moralische Erwartung. Im Jahre 1937 zeigte Feller, als er den Begriff des „gerechten" Spieles im Zusammenhang mit dem Gesetz der großen Zahlen untersuchte, daß bei unendlich großem mathematischen Erwartungswert ein verallgemeinertes Gesetz der großen Zahlen zur Anwendung kommt, so daß das Paradoxon und mit ihm die moralische Erwartung aus der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie verschwunden sind.

Erst mit der postumen Veröffentlichung des Werkes von Jakob Bernoulli [3], genauer mit dem, was er sein „goldenes Theorem" (das Gesetz der großen Zahlen) nennt, beginnt langsam die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer rein mathematischen Disziplin. Im ersten Teil gibt er die Huygenssche Abhandlung wieder, vertieft und verallgemeinert sie aber Schritt für Schritt. Im zweiten Teil (Permutations- und Combinationslehre) untersucht er sehr detailliert die Kombinatorik, die er im dritten Abschnitt „auf verschiedene Glücks- und Würfelspiele" anwendet. Das, was zählt, ist aber sein „goldenes Theorem" im vierten Teil. Der Titel des Werkes *Ars conjectandi* läßt vermuten, daß der betreffende Abschnitt, der mit *Applicationes Doctrinae in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis* überschrieben ist, als Fortsetzung der *Logique* (der *Ars cogitandi*) von Port-Royal dienen sollte. Es blieb jedoch unvollendet und bricht mit dem Bernoullischen Gesetz der großen Zahlen ab (dieser Name stammt von Poisson), dem er mehr als zwanzig Jahre intensiver Überlegungen gewidmet hatte.

Auf Jakob Bernoulli folgte das mathematische Dreigestirn der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung: de Moivre, Laplace und Čebyšev. Im Jahre 1733 formuliert de Moivre durch Vertiefung des „goldenen Theorems" mittels der asymptotischen Formel für $n!$, die außer ihm auch Stirling gefunden hatte, das Gesetz der Normalverteilung (dieser Name stammt von Poincaré). Das Leitmotiv der mathematischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung war damit geboren.

De Moivre, der erste dieses Dreigestirns, hatte ein schweres Leben. Mit 18 Jahren floh er vor den Hugenottenverfolgungen nach England. Obwohl er ein enger Freund Newtons wurde, gelang es ihm nicht, seinen Traum von einer Karriere als Universitätsprofessor zu verwirklichen. Er lebte in Armut und ernährte sich von Privatstunden. Wenn er zu schwach war, von Haus zu Haus zu gehen, hielt er sich nur dank dem Verkauf seines Buches und der Zuwendungen über Wasser, die ihm Spieler für seine Ratschläge zukommen ließen. Sein Werk *Doctrine of Chances*, das 1718 und in Nachauflagen 1738 oder 1740 und 1756 (postum) erschien, war für nahezu ein Jahrhundert das klassische Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das auch einen sehr tiefen Einfluß auf Laplace ausübte. Abgesehen von einigen metaphysischen Bemerkungen ist es ein Werk, dessen mathematische

Strenge praktisch heute noch akzeptabel ist. Es behandelt zum ersten Mal Differenzengleichungen, erzeugende Funktionen (siehe 1.4.1.) und rekurrente Reihen, die auf wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme angewendet werden. In dem Buch werden die Begriffe Wahrscheinlichkeit, Erwartungswert, Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit definiert und der Additions- und der Multiplikationssatz (oder „zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten") klar und exakt bewiesen. Darüber hinaus erhielt der Moivre, wie F. N. David [10] bemerkt, für nur wenig von 0 verschiedenes p und großes n eine Approximation, die ohne Schwierigkeiten zur Poisson-Verteilung führt.

Das mathematische Leitmotiv der Wahrscheinlichkeitsrechnung, an dessen „Instrumentierung" noch heute gearbeitet wird, basiert auf dem *Bernoullischen Schema,* einer Idealisierung des Kopf- und Adler-Spiels. Ein Versuch wird n-mal unter gleichen Bedingungen wiederholt, wobei alle Versuche unabhängig vom Ausgang der vorhergehenden durchgeführt werden. Jedesmal wird beobachtet, ob ein gewisses Ereignis A eintritt; dessen Wahrscheinlichkeit sei p. Tritt A bei den n Versuchen S_n-mal ein, so lautet die *Bernoullische Formel* (mit $q = 1 - p$)

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Das Bernoullische *Gesetz der großen Zahlen* besagt, daß für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ und $n \to +\infty$ die Beziehung

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1 \tag{2}$$

gilt; man spricht auch vom Gesetz der *„Stabilität der Häufigkeiten"*.

Der *zentrale Grenzwertsatz* (der Name stammt von Pólya) lautet: Im Fall $pq \neq 0$ gilt für jedes reelle x bei $n \to +\infty$ die Beziehung

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy\,. \tag{3}$$

Das ist der Satz von de Moivre-Laplace. De Moivre wählte $p = 1/2$ und bemerkte, seine Methode liefere auch im allgemeinen Fall ($p \neq q$) das Ergebnis; dies wurde aber erst von Laplace explizit bewiesen. Das uneigentliche Integral auf der rechten Seite von (3) ist die *Verteilungsfunktion* (vgl. 12.2.2.) der „Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$".

Das monumentale Werk von Laplace, *Théorie analytique des Probabilités* ([25], Bd. VII), das in mehreren Auflagen (1812, 1814, 1820) erschien, ist die Zusammenfassung sowohl seiner zahlreichen eigenen Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung seit 1774 als auch der Arbeiten seiner Vorgänger. Laplace verallgemeinerte und vertiefte darin die mathematischen und die statistischen Erkenntnisse sowie die philosophische Problematik. Er ist streckenweise schwer verständlich, seine Beweise sind häufig unvollständig, und sein Gefühl für Strenge kann sich mit dem heutigen nicht messen, aber das Werk strömt über von Ideen und Ergebnissen. Dieses Werk sollte die Bibel der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden und bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts eine Quelle für Anregungen bilden.

Bei dem Bemühen, die Methode der kleinsten Quadrate von Legendre und Gauß aus der Theorie der Beobachtungsfehler zu „begründen", gelangte Laplace dahin, den Grenzwertsatz, der von de Moivre und ihm stammt, auf Summen S_n unabhängiger Zufallsvariabler $X_1, \ldots, X_n$ zu erweitern, wobei es sich um sehr viele unabhängige und im Verhältnis zu den Summen gleichmäßig kleine Variablen handeln soll. Sein „Beweis" ist außerordentlich verschwommen, so daß sich Poisson 1827 und 1830 bemühte, seine Überlegungen zu verdeutlichen.

Erst Čebyšev gab dem klassischen Grenzwertsatz eine klare Formulierung und einen verständlichen Beweis (1887) (siehe 12.3.2.5.). Auch bei ihm sind beide noch unvollständig: Die Tatsache, daß die Zufallsvariablen unabhängig sind, wird nirgends erwähnt. Im Jahre 1898 lieferte sein Schüler A. Markoff eine klare Formulierung und einen strengen Beweis. Er benutzt die von Čebyšev geschaffene Momentenmethode (siehe [42]) und nimmt vor allem an, daß alle Momente $E(X_n^k)$ jeder Zufallsvariablen X_n endlich sind. Zwei Jahre später stellte Liapounoff den zentralen Grenzwertsatz auf, der die moderne Periode einleitete.

Čebyšev ist es auch, der das Gesetz der großen Zahlen auf Zufallsvariable erweitert, nachdem schon Poisson es auf Folgen unabhängiger Ereignisse A_n mit Wahrscheinlichkeit p_n ausgedehnt hatte:

Ist $S_n = I_{A_1} + \cdots + I_{A_n}$ und $\bar{p}_n = (p_1 + \cdots + p_n)/n$, so gilt für $\varepsilon > 0$ im Fall $n \to \infty$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \bar{p}_n\right| < \varepsilon\right) \to 1 . \tag{4}$$

Diese Formel geht in

$$P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \to 1 \tag{5}$$

über, wenn die Indikatorfunktionen I_{A_n} der unabhängigen Ereignisse durch unabhängige Zufallsvariablen X_n ersetzt werden. Čebyšev zeigte (1863), daß der Satz noch gültig bleibt, wenn nur die Varianzen $\sigma^2(X_n)$ gleichmäßig beschränkt sind, und A. Markoff bewies (1906), daß man nur $(\sigma^2(X_1) + \cdots + \sigma^2(X_n))/n^2 \to 0$ vorauszusetzen braucht. Die Beweise liegen auf der Hand, wenn man die berühmte *Čebyševsche Ungleichung*

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2} \tag{6}$$

und die *Gleichung von Bienaymé* (1859)

$$\sigma^2(S_n) = \sigma^2(X_1) + \cdots + \sigma^2(X_n) \tag{7}$$

verwendet (letztere benutzte er, ohne sie explizit zu formulieren).

Diese beiden Grenzwertsätze spiegeln die „Instrumentierung" des wahrscheinlichkeitstheoretischen Leitmotivs am Ende der klassischen Epoche wider. Die endgültige Gestalt des zentralen Grenzwertproblems wird sichtbar: Für Folgen unabhängiger Zufallsvariablen bestimme man die schwächsten (also notwendigen und hinreichenden) Bedingungen, unter denen das Gesetz der großen Zahlen gilt bzw. die Konvergenz gegen die Normalverteilung stattfindet.

12.2. Befreiung

„Gedulden, Gedulden, Gedulden,
Gedulden unter dem Blau!
Was wir dem Schweigen verschulden,
Macht uns das Reifen genau!"
Paul Valéry[1])

12.2.1. Die siamesischen Drillinge

Das bisher Gesagte bezog sich nahezu ausschließlich auf die mathematische Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, während seit ihrem Entstehen und bis zu ihrer heroischen Periode 1925—1940 die Wahrscheinlichkeitsrechnung von den meisten Wissenschaftlern als „siamesischer Drilling" angesehen wurde: Mathematische Wahrscheinlichkeiten (oder mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung), Statistik, Philosophie der Wahrscheinlichkeit. Daher soll nun, ehe die Entwicklung der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter verfolgt wird, ein kurzer Überblick über die „Elemente" dieser „Dreieinigkeit" gegeben werden.

Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* untersucht *stochastische Schemata* wie das Bernoullische. Es handelt sich um mathematische Schemata in wahrscheinlichkeitstheoretischen oder stochastischen Ausdrücken (das Wort „stochastisch" wird gegenüber „wahrscheinlichkeitstheoretisch" oder „zufällig" häufig bevorzugt, weil es nicht, wie diese, solche vagen und diffusen Assoziationen hervorruft). Ein stochastisches Schema ist in der Regel ein Modell — eine mathematische Idealisierung einer Klasse von Erscheinungen. So wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf derartige Phänomene anwendbar. Tatsächlich existieren gegenwärtig zahlreiche Werke und Zeitschriften, welche ganz oder teilweise der *angewandten* Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet sind, d. h. der Bildung, Untersuchung und Anwendung stochastischer Modelle.

Die *Statistik* ist das zweite Element des Tripels. Es liegt ein stochastisches Modell vor, und es handelt sich darum, mit einer gewissen Approximation die darin auftretenden Parameter zu bestimmen, z. B. die Wahrscheinlichkeit p beim Bernoullischen Schema (vgl. 12.1.2.). Zu diesem Zweck nutzt man bereits gewonnene Kenntnisse, „Erfahrungen" — z. B. die Ergebnisse einer Anzahl durchgeführter Experimente, etwa von wiederholten Versuchen von Kopf und Adler. Derartige Probleme sind Bestandteil der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Lösungen meist ungenügend begründet waren. Die moderne Statistik nimmt an, es handle sich um Spiele mit der Natur, bei denen man nicht gewinnen kann und deren Regeln — die Prinzipien des statistischen Verfahrens — man wählen müsse. So wurde die moderne Statistik zu einer mathematischen Disziplin, nachdem einmal derartige Prinzipien von Neyman, dem sich Wald und viele andere anschlossen, formuliert worden waren; ihre kritische Überprüfung geht weiter. Die heutige mathematische Statistik ist eine mathematische Idealisierung des Erfahrungsbegriffs. Zitieren wir Le Cam [26]: „Die vorhandene Erfahrung wird repräsentiert durch eine Menge Θ,

[1]) Aus: Paul Valéry, Gedichte. Deutsche Übertragung von Rainer Maria Rilke, Insel-Verlag, Zweigstelle Wiesbaden 1949, S. 55. — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

einen Maßraum $(X, \mathscr{S})$ und für jedes $\theta \in \Theta$ eine Wahrscheinlichkeit P_θ auf der Mengenalgebra $\mathscr{S}$. Des weiteren wählt man einen Raum Z möglicher Entscheidungen und eine reellwertige Funktion W auf $\Theta \times Z$ derart, daß $W_\theta(z)$ den Verlust angibt, der auftritt, wenn man sich für z entscheidet."

Die heutigen Statistiker haben diese Vorstellungen bei Laplace und Gauß wiederentdeckt: „Die Bestimmung einer Größe durch eine einem grösseren oder kleineren Fehler unterworfene Beobachtung wird nicht unpassend mit einem Glücksspiel verglichen, in welchem man nur verlieren, aber nicht gewinnen kann, wobei also jeder zu befürchtende Fehler einem Verluste entspricht. Das Risiko eines solchen Spieles wird nach dem wahrscheinlichen Verlust geschätzt, d. h. nach der Summe der Produkte der einzelnenmöglichen Verluste in die zugehörigen Wahrscheinlic[h]-keiten. Welchem Verluste man aber jeden einzelnen Beobachtungsfehler gleichsetzen soll, ist keineswegs an sich klar; hängt doch vielmehr diese Bestimmung zum Theil von unserem Ermessen ab." (C. F. Gauss, Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. Berlin 1887, S. 5—6; [7], Bd. 4, S. 7).

Es handelt sich um die von Legendre und Gauß stammende Methode der kleinsten Quadrate für das Gesetz der Beobachtungsfehler. Sie wählten das Quadrat des Fehlers als Funktion der Verluste und erhielten die Normalverteilung. Laplace nahm den absoluten Betrag des Fehlers, der nicht zur Normalverteilung, sondern zu der sogenannten „(ersten) Laplace-Verteilung" führt. Das Auswahlprinzip war eher vage: „Unter der unendlichen Mannigfaltigkeit derartiger Funktionen ist die *einfachste die vorteilhafteste.*"

Eine andere Erklärung stammt von Bayes (1763, postum): Die zu schätzenden Wahrscheinlichkeiten sind nicht mehr Parameter des Modells, sondern Zufallsvariable. So wäre die Wahrscheinlichkeit p des Bernoullischen Schemas eine Zufallsvariable mit einer a-priori-Verteilung. Unter Benutzung der Bayesschen Formel (Bezeichnung von Laplace), die sich unmittelbar aus den Additions- und Multiplikationsregeln der Wahrscheinlichkeiten ergibt (die aber nirgends von Bayes formuliert wurde), übersetzte Laplace das grundlegende Ergebnis von Bayes folgendermaßen in Symbole: Wenn die a-priori-Verteilung von p auf $[0, 1]$ gleichmäßig ist und wenn bei n wiederholten Versuchen das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, k-mal eintritt, dann wird die bedingte Wahrscheinlichkeit von p durch die Beziehung

$$P(a \leqq p < b \mid A \text{ tritt } k\text{-mal ein}) = \frac{\int_a^b x^k (1-x)^{n-k}\, dx}{\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx}$$

gegeben.

Gegenwärtig gibt es Streit zwischen den Bayes-Anhängern und den Bayes-Gegnern unter den Statistikern. Die Bayes-Anhänger fügen der oben angegebenen Beschreibung von $W_\theta(z)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge Θ, *a-priori-Verteilung* genannt, hinzu. Die Gegner lehnen das auf das heftigste ab.

Es sei hier darauf hingewiesen, daß der Ausdruck „statistisch" in der Physik „stochastisch" bedeutet, so in „statistischer Mechanik" oder „Bose-Einstein-Statistik".

Der dritte der siamesischen Drillinge ist der *Wahrscheinlichkeitsbegriff*. Seine verschiedenen Interpretationen wurden schließlich von dem Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit losgelöst, der mit Kolgomoroff (1933) seine endgültige Fassung erhielt. Seit seiner Herausbildung erfuhr der Terminus „Wahrscheinlichkeit" zwei Deutungen: de re — Eigenschaft von Dingen — und de dicto — Eigenschaft von Aussagen. Die de-dicto-Auffassung führte zum „Grad der Glaubwürdigkeit". Die de-re-Auffassung führte seit Leibniz (1678) zum Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zur Gesamtzahl der möglichen Fälle, wenn alle Fälle „gleichwahrscheinlich" (gleichmöglich) sind. Diese Zirkelschlußdefinition hielt sich bis einschließlich zu E. Borel. Die Gleichwahrscheinlichkeit wurde bei der de-dicto-Deutung damit begründet, daß es keinen ausreichenden Grund für das Gegenteil gebe, bei der de-re-Deutung mit der Stabilität derHäufigkeiten. Für diese beiden Aspekte sind verschiedene Benennungen vorgeschlagen worden. Condorcet führte „Umgänglichkeit" und „Motiv zu glauben" ein, Poisson und Cournot nahmen „Chance" und „Wahrscheinlichkeit", Bertrand Russell entschied sich für „Wahrscheinlichkeit" und „Glaubwürdigkeit" und Carnap schlug „Wahrscheinlichkeit$_1$" und „Wahrscheinlichkeit$_2$" oder „statistische Wahrscheinlichkeit" und „induktive Wahrscheinlichkeit" vor.

Der induktive Aspekt führte zur Entstehung der „induktiven Logik" bei Keynes, Jeffries, Carnap und anderen. De Finetti, Savage und andere formulierten „subjektive" Theorien der Wahrscheinlichkeiten. Keine dieser Interpretationen lassen sich in den Arbeiten von Leibniz, Bernoulli, Laplace und anderen erkennen. Der statistische Aspekt hat Anlaß zu Bemühungen gegeben, die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Basis der Stabilität der Häufigkeiten zu axiomatisieren. Die v. Misessche Theorie der „Kollektive" wurde jüngst von Kolmogoroff und von Martin-Löf modifiziert, die Untersuchungen werden fortgesetzt. Die mathematische Wahrscheinlichkeitsrechnung hat sich jedoch weiterentwickelt und tut das auch fernerhin, ohne Rücksicht auf alle Interpretationen.

12.2.2. *Wahrscheinlichkeit und Maß*

Der Teufelskreis der Definition mittels gleichwahrscheinlicher Fälle, das Auftreten von diskreten Zufallsvariablen mit unendlich vielen möglichen Werten — wie etwa der Poissonschen — und von Zufallsvariablen mit absolut stetigen Verteilungen — z. B. solchen wie der normalverteilten Zufallsvariablen — haben allmählich zu einer mathematischen Idealisierung geführt, die alle diese Möglichkeiten umfaßt.

Noch 1919 schrieb v. Mises, daß „heute die Wahrscheinlichkeitsrechnung keine mathematische Theorie sei", und 1921 bemerkte Keynes zu diesem Thema, daß „die Wissenschaftler hierbei einen Beigeschmack von Astrologie und Alchemie verspüren". Demgegenüber erkannte E. Borel in seiner berühmten Abhandlung über die abzählbar additiven Wahrscheinlichkeiten [7] dem Begriff der Wahrscheinlichkeit die Eigenschaft eines Maßes zu — die endliche Additivität wurde zu einer abzählbaren Additivität. N. Wiener, Paley und Zygmund behandeln die

Wahrscheinlichkeiten wie Maße. Lomnicki und Steinhaus veröffentlichen Abhandlungen über neue Begründungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1923 [34] bzw. über die abzählbar additiven Wahrscheinlichkeiten und ihre Beziehung zur Maßtheorie 1923 [41]. Schließlich erscheint die berühmte Monographie Kolmogoroffs *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (1933).[1]

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ besteht aus dem *sicheren Ereignis* Ω, das als Menge angesehen wird, der *σ-Algebra $\mathcal{A}$ der Ereignisse*, d. h. einem System von Teilmengen von Ω, die auch meßbare Mengen genannt werden, und einer *Wahrscheinlichkeit P* auf $\mathcal{A}$, d. h. einem positiven Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$, für welches $P(\Omega) = 1$ gilt. Man sagt, eine Eigenschaft gelte *fast sicher* auf Ω, wenn die Menge der $\omega \in \Omega$, für die sie gilt, die Wahrscheinlichkeit 1 hat.

Eine *Zufallsvariable* X ist eine meßbare Abbildung aus dem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A})$ in die mit ihrem Borelsystem $\mathcal{S}$ versehene reelle Gerade $\boldsymbol{R}$; für jede Borelmenge $S \in \mathcal{S}$ gilt also $X^{-1}(S) \in \mathcal{A}$. Zwei Zufallsvariable X, X' sind *äquivalent*, wenn fast sicher $X' = X$ gilt.

Das *Verteilungsgesetz* $\mathcal{L}(X)$ oder die *Verteilung* P_X einer Zufallsvariablen X ist eine *Wahrscheinlichkeit auf* $\mathcal{S}$, die durch

$$P_X(S) = P(X^{-1}(S)) \quad \text{für} \quad S \in \mathcal{S} \tag{8}$$

definiert ist. Insbesondere ist $\mathcal{L}(0)$ (die „entartete" Verteilung) die Wahrscheinlichkeit P_0 mit $P_0(S) = 0$ für $0 \notin S$ und $P_0(S) = 1$ für $0 \in S$ („das Diracsche Maß" im Punkt 0). Zwei äquivalente Zufallsvariable haben dieselbe Verteilung.

Bereits im Jahre 1919 haben v. Mises und P. Lévy $\mathcal{L}(X)$ als ein Stieltjes-Maß durch eine auf $\boldsymbol{R}$ definierte monoton wachsende rechtsseitig stetige *Verteilungsfunktion* F_X mit $F_X(x) \to 0$ für $x \to -\infty$ und $F_X(x) \to 1$ für $x \to +\infty$ definiert. Die Beziehung $P_X(]-\infty, x]) = F_X(x)$ für $x \in \boldsymbol{R}$ bestimmt eine eineindeutige Zuordnung zwischen F_X und P_X. Beispielsweise entspricht die *Normalverteilung* $\mathcal{N}(0, 1)$ der auf der rechten Seite von (3) stehenden Verteilungsfunktion (vgl. 12.1.2.).

Seit dieser Epoche tauchte neben den „diskreten" Verteilungen, in denen P_X ein atomares Maß ist, und den „absolut stetigen" Verteilungen, in denen $P_X(S) = \int_S p(x)\,dx$ durch eine Dichte in bezug auf das Lebesguesche Maß (nur diese wurden zunächst betrachtet) definiert ist, ein dritter Typ von Verteilungen, die sogenannten „singulären Verteilungen" auf, bei denen der Träger von P_X eine Borelmenge mit dem Lebesgueschen Maß null ist. Der Zerlegungssatz von Lebesgue zeigte, daß sich jede Verteilung eindeutig in eine Summe von drei anderen zerlegen läßt, von der jeder der Summanden zu einem dieser Typen von Verteilungen gehört. Es ist jedoch, außer bei speziellen Untersuchungen, heute nicht mehr nötig, diese drei Fälle zu unterscheiden.

Wir möchten noch folgendes erwähnen: Ist eine Familie von Verteilungen $(\mathcal{L}_t)_{t \in T}$ mit einer beliebigen Indexmenge T gegeben, so kann man immer einen Wahr-

[1]) Für die Begriffe aus der Maßtheorie vergleiche man Kapitel 11.

scheinlichkeitsraum finden, auf dem Zufallsvariable X_t definiert werden können, für welche $\mathscr{L}(X_t) = \mathscr{L}_t$ für $t \in T$ gilt. Das ist gemeint, wenn gesagt wird, *ein Wahrscheinlichkeitsraum sei nur ein Bezugssystem* und mit keiner speziellen Struktur außerhalb der Menge der Ereignisse und der Wahrscheinlichkeit versehen. Das wird oft nicht besonders betont.

Um den *Erwartungswert* $E(X)$ einer Zufallsvariablen X zu definieren, mußte also das Lebesguesche Integral von anderen Strukturen befreit werden. Dies war dank der von Fréchet stammenden Verallgemeinerung des Radon-Integrals (vgl. 11.4.) möglich; man kam zu folgender Definition:

$$E(X) = \int_\Omega X\,dP = \int_{\boldsymbol{R}} x\,dP_X(x)\,. \tag{9}$$

Dieses Integral existiert also nur, wenn die Funktion X bezüglich P integrierbar ist. Man nennt X *zentriert* in bezug auf seinen Erwartungswert, wenn $E(X) = 0$ ist. Das *Moment* k-ter Ordnung von X ist $E(X^k)$ (wenn dieses Integral einen Sinn hat). Die *Streuung* $\sigma(X)$ ist definiert durch

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2\,, \tag{10}$$

wenn X^2 bezüglich P integrierbar ist.

Man mußte bis zum Jahre 1930 und zur Nikodymschen Verallgemeinerung des Lebesgueschen Zerlegungssatzes (vgl. 11.4.) warten, ehe man eine endgültige Definition des *bedingten* Erwartungswertes und der *bedingten* Wahrscheinlichkeit geben konnte: Existiert $E(X)$ und *ist eine Teil-σ-Algebra $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ von Ereignissen gegeben, so ist der bedingte Erwartungswert $E^{\mathscr{B}}X$* eine auf Ω fast überall durch die Bedingung

$$\int_B E^{\mathscr{B}}X\,dP_{\mathscr{B}} = \int_B X\,dP \qquad \text{für jedes } B \in \mathscr{B} \tag{11}$$

definierte $\mathscr{B}$-meßbare Funktion; dabei ist $P_{\mathscr{B}}$ die Einschränkung von P auf $\mathscr{B}$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $P^{\mathscr{B}}A$ eines Ereignisses A ergibt sich, wenn X in (11) durch I_A, die Indikatorfunktion von A, und $E^{\mathscr{B}}X$ durch $P^{\mathscr{B}}A$ ersetzt wird. Man schreibt dafür auch $E(X \mid \mathscr{B})$ und $P(A \mid \mathscr{B})$. Ist B die kleinste σ-Algebra $\mathscr{B}(X_t, t \in T)$, für die alle Zufallsvariablen X_t einer gegebenen Familie meßbar sind, so ersetzt man in diesen Bezeichnungen $\mathscr{B}$ auch durch X_t, $t \in T$.

Somit ist von 1933 an die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein vollberechtigtes Mitglied der Familie der mathematischen Disziplinen geworden. Viele junge Mathematiker in der Sowjetunion und in den USA stießen in Scharen zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Trotz der bewunderungswürdigen Arbeiten von P. Lévy, die diese jungen Mathematiker tief beeinflußt haben, dauerte es fast zwei Jahrzehnte, bis dies auch in Frankreich der Fall war.

12.3. Das zwanzigste Jahrhundert

„haltet den Sträubenden fest,
wie sehr er auch ringt zu entfliehen!
Denn der Zauberer wird sich in alle Dinge
verwandeln,"
Homer[1])

Die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung entstand während des ersten Jahrzehnts des zwanzigsten Jahrhunderts mit dem Satz von Liapounoff, dem starken Gesetz der großen Zahlen von E. Borel und den „Markoffschen Ketten". Ihre *heroische Periode* jedoch fiel in die Jahre zwischen 1925 und 1940. Das klassische Grenzwertproblem war gelöst, änderte gleichzeitig aber seine Form. Das starke Gesetz der großen Zahlen wurde von Kolmogoroff auf Zufallsvariable erweitert und gleichzeitig auf die von Chintschin eingeführten stationären Folgen (siehe 12.3.2.4.) verallgemeinert, P. Lévy und nach ihm Doob schufen das mächtige Werkzeug der „Martingale". P. Lévy führte die „unbegrenzt teilbaren" Prozesse ein und analysierte sie; einige Jahre später unterwarf er die „Brownsche Bewegung" einer tiefgehenden Untersuchung.

Das ist die große Epoche der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die von dem Vorausblick P. Lévys, von Kolmogoroff und Chintschin, den Begründern der neuen sowjetischen Schule, sowie von Feller und Doob, die den Grundstein für die amerikanische Schule legten, beherrscht wird. Fast zwanzig Jahre lang hatte P. Lévy, dessen Arbeiten diejenigen dieser beiden Schulen tief beeinflußten, in Frankreich nur einige wenige Schüler. Erst in jüngster Zeit wandten sich mit Fortet, P. A. Meyer, Neveu u. a. zahlreiche junge französische Mathematiker der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu, und gegenwärtig ist die französische Schule in vollem Aufschwung begriffen.

Seitdem entwickelte sich die Wahrscheinlichkeitsrechnung in den oben genannten Richtungen ständig weiter, und die erzielten Ergebnisse wurden vertieft, verallgemeinert und nahmen immer abstraktere Formen an. Wir verlassen nun die chronologische Ordnung und beschreiben stattdessen das Auftreten und die Herausbildung der großen Themen der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Zusammenhang mit den „stochastischen Prozessen" und „den stochastischen Strukturen". Diese Gedankenkreise werden in ihrer heutigen Gestalt mit Hinweisen auf ihre historischen Ursprünge geschildert.

12.3.1. *Stochastische Prozesse*

Im folgenden sind, falls nichts anderes gesagt wird, die Indexmengen T Teilmengen der reellen Geraden $\boldsymbol{R}$, die mit ihrer σ-Algebra $\mathscr{S}$ der Borelmengen versehen ist, deren Elemente S indiziert sein können. Die Teil-σ-Algebren, um die es sich hierbei

---

[1]) Aus: Homer, Odyssee. Deutsche Übertragung von Johann Heinrich Voss, Verlag Philipp Reclam jun., Leipzig 1964, S. 48 (Vers IV, 416—417). — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe.*

handelt, sind Teil-σ-Algebren der Menge der Ereignisse eines festen Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Die Elemente B der Teil-σ-Algebren $\mathcal{B}$ von Ereignissen tragen, falls es solche gibt, dieselben Indizes wie die der Teil-σ-Algebren, zu denen sie gehören. Die kleinste Teil-σ-Algebra, welche die σ-Algebren einer Familie $(\mathcal{B}_u)_{u \in U}$ (bzw. die Teil-σ-Algebren $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$) enthält, wird mit $\bigvee_{u \in U} \mathcal{B}_u$ (bzw. $\mathcal{B}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{B}_n$) bezeichnet.

Es sei $\mathcal{B}_T = (\mathcal{B}_t)_{t \in T}$ eine Familie von Teil-σ-Algebren. Phänomenologisch ausgedrückt heißt das, daß $\mathcal{B}_t$ die Gesamtheit von in der Zeit t „beobachtbaren" Ereignissen ist. Jedem *Zeitpunkt* t ordnen wir *seine Vergangenheit* — die σ-Algebra $\underline{\mathcal{B}}_t = \bigvee_{r<t} \mathcal{B}_r$ —und *seine Zukunft* — die σ-Algebra $\overline{\mathcal{B}_t} = \bigvee_{s>t} \mathcal{B}_s$ — zu. Mit den σ-Algebren der „Vergangenheiten "$\underline{\mathcal{B}}_t$ $(t \in T)$ verbinden wir die *zufälligen Zeitmomente* τ, für welche die Menge $[\tau \leqq t]$ der $\omega \in \Omega$ mit $\tau(\omega) \leqq t$ ein Element von $\underline{\mathcal{B}}_t$ ist. Die $t \in T$ sind solche Zeiten (auf Ω konstante Funktionen), die sogenannten in t ausgearteten Zeiten. Die so definierten Zufallszeiten nennen wir $\mathcal{B}_T$-*Zeiten*. Jeder $\mathcal{B}_T$-Zeit τ entspricht eine Teil-σ-Algebra $\mathcal{B}_\tau$, die aus den Ereignissen B_τ besteht, für welche $B_\tau \cap [\tau \leqq t] \in \mathcal{B}_t$ für jedes $t \in T$ gilt. Für je zwei $\mathcal{B}_T$-Zeiten σ, τ gelten, wie man leicht sieht, die folgenden Eigenschaften: τ ist $\mathcal{B}_\tau$-meßbar, aus der Beziehung $\sigma \leqq \tau$ folgt $\mathcal{B}_\sigma \subset \mathcal{B}_\tau$, und $\inf(\sigma, \tau)$ und $\sup(\sigma, \tau)$ sind $\mathcal{B}_T$-Zeiten. Die Zufallszeiten wurden von P. Lévy im Zusammenhang mit den Martingalen eingeführt. Heutzutage findet dieser Begriff in der Wahrscheinlichkeitsrechnung universelle Anwendung.

Wir definieren einen *stochastischen Prozeß* $(X_t, \mathcal{B}_t, t \in T)$ als eine Familie von Zufallsvariablen X_t, die den Teil-σ-Algebren $\mathcal{B}_t$ in folgendem Sinne „angepaßt" sind: Ist $\mathcal{B}(X_t)$ die kleinste σ-Algebra, welche die $X_t^{-1}(S)$ für alle $S \in \mathcal{S}$ enthält, so gilt für jedes $t \in T$

$$\mathcal{B}(X_t) \subset \mathcal{B}_t\,. \tag{12}$$

Wenn die $\mathcal{B}_t$ mit den $\mathcal{B}(X_t)$ zusammenfallen, erwähnt man sie nicht: Für den Prozeß (oder die *zufällige Funktion*, wie man auch sagt) schreibt man $X_T = (X_t, t \in T)$, und die $\mathcal{B}_T$-Zeiten werden X_T-*Zeiten* genannt.

Eine zufällige Funktion X_T kann als Abbildung $\omega \mapsto (X_t(\omega))_{t \in T}$ von Ω in das Produkt $\boldsymbol{R}^T$ von Geraden interpretiert werden. Es sei $\mathcal{S}_T$ das *System der Borelmengen* von $\boldsymbol{R}^T$, d. h. die kleinste σ-Algebra, die alle „Zylinder" $S_n \times \boldsymbol{R}^{T-T_n}$ enthält; dabei ist T_n eine beliebige endliche Teilmenge von T mit n Elementen und S_n eine beliebige Borelsche Teilmenge des endlichen Produkts $\boldsymbol{R}^{T_n}$; in Wirklichkeit sind die Elemente von S_T „Zylinder" $S_U \times \boldsymbol{R}^{T-U}$, wobei U eine abzählbare Teilmenge von T und S_U eine Borelsche Teilmenge von $\boldsymbol{R}^U$ ist. Die *Verteilung* $\mathcal{L}(X_T)$ *des Prozesses* X_T ist eine *Wahrscheinlichkeit* P_{X_T} *auf* $\mathcal{S}_T$, die durch

$$P_{X_T}(S) = P\big(X_T^{-1}(S)\big) \quad \text{für} \quad S \in \mathcal{S}_T \tag{13}$$

definiert ist. Ist X_{T_n} die Abbildung $\omega \mapsto (X_t(\omega))_{t \in T_n}$, so ist $P_{X_{T_n}}(S_n)$ der Wert von P_{X_T} auf einem Zylinder $S_n \times \boldsymbol{R}^{T-T_n}$; demnach ist P_{X_T} durch die $P_{X_{T_n}}$ bestimmt. Die $P_{X_{T_n}}$ sind in folgendem Sinne „verträglich": Eine Wahrscheinlichkeit P_{T_n} auf $\mathcal{S}_{T_n}$ bestimmt eine Wahrscheinlichkeit P_{T_m} auf $\mathcal{S}_{T_m}$ (die sogenannte *Marginal*-

wahrscheinlichkeit von P_{T_n}) für jede Teilmenge $T_m \subset T_n$ mit m Elementen, indem sie jeder Borelmenge $S_m \in \mathcal{S}_{T_m}$ den Wert $P_{T_n}(S_m \times \boldsymbol{R}^{T_n - T_m})$ zuweist. Zwei Wahrscheinlichkeiten auf endlichen Produkten reeller Geraden werden dann *verträglich* genannt, wenn ihre Marginalwahrscheinlichkeiten auf dem gemeinsamen Produktraum übereinstimmen. Der bekannte Satz von Daniell-Kolmogoroff besagt dann, umgekehrt, daß eine Familie $(P_{T_n}, T_n \subset T)$, wenn sie aus verträglichen Wahrscheinlichkeiten besteht, eine Wahrscheinlichkeit P_T auf $\mathcal{S}_T$ definiert. Ist $T_n = (t_1, \ldots, t_n)$, so schreibt man $\mathcal{L}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ für $\mathcal{L}(X_{T_n})$.

Nun können wir die Tatsache präzisieren, daß der Wahrscheinlichkeitsraum nur ein Bezugssystem ist: *Eine Eigenschaft wird genau dann stochastisch genannt, wenn sie sich in Verteilungen ausdrücken läßt.* Mit anderen Worten, eine Eigenschaft eines stochastischen Prozesses ist genau dann stochastisch, wenn sie dieselbe bleibt, falls der Prozeß durch einen anderen mit der gleichen Verteilung ersetzt wird. Somit kann eine endliche oder unendliche *Folge* von Zufallsvariablen durch eine *äquivalente* Folge ersetzt werden, d. h., an die Stelle jeder der Zufallsvariablen kann eine äquivalente Zufallsvariable treten. Im allgemeinen Fall eines stochastischen Prozesses $X_T = (X_t, t \in T)$ kann es jedoch vorkommen, daß seine stochastischen Eigenschaften nicht die gleichen bleiben oder sogar aufhören, stochastisch zu sein, wenn man X_T durch einen äquivalenten Prozeß ersetzt (d. h. jedes X_t durch ein äquivalentes $X_{t'}$, also mit der gleichen Verteilung). Beispielsweise kann $Y = \sup_{t \in T} X_t$ meßbar sein oder auch nicht, je nachdem, welchen der äquivalenten Prozesse man betrachtet. Doob hat 1937 die Grundlagen der allgemeinen Theorie der Prozesse geschaffen, indem er nachwies, daß zu jedem Prozeß X_T äquivalente Prozesse existieren, die durch die Einschränkungen X_U des Prozesses auf abzählbare, in T dichte und passend gewählte Teilmengen U von T definiert werden. Derartige Prozesse werden *separabel* genannt. Damit die betrachteten Eigenschaften stochastischer Natur sind, beschränkt man sich somit auf separable Prozesse.

12.3.2. *Stochastische Strukturen*

Eine „stochastische Struktur" ist eine Eigenschaft von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Die folgenden Strukturen haben sich als hinreichend konkret und trotzdem allgemein genug erwiesen, um zahlreiche tiefliegende Eigenschaften aufzuweisen.

12.3.2.1. Unabhängigkeit

Diejenige stochastische Struktur, die seit der Entstehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in deren Mittelpunkt stand und auch weiterhin stehen wird, ist die der Unabhängigkeit: Die σ-Algebren einer Familie $(\mathcal{B}_t, t \in T)$ sind *unabhängig*, wenn für jede endliche Teilmenge $\{t_1, \ldots, t_n\}$ von T und jede endliche Folge von Ereignissen $B_{t_j} \in \mathcal{B}_{t_j}$ $(1 \leq j \leq n)$ die Beziehung

$$P(B_{t_1} \cap \cdots \cap B_{t_n}) = P(B_{t_1}) \cdots P(B_{t_n}) \tag{14}$$

gilt. Sind die Zufallsgrößen X_t bezüglich $\mathcal{B}_t$ meßbar, so werden die X_t (und der Prozeß $(X_t, t \in T)$) genau dann *unabhängig* genannt, wenn für beliebige $t_1, \ldots, t_n$ aus T und beliebige Borelmengen $S_{t_1}, \ldots, S_{t_n}$ die Beziehung

$$P(X_{t_1}^{-1}(S_{t_1}) \cap \cdots \cap X_{t_n}^{-1}(S_{t_n})) = P(X_{t_1}^{-1}(S_{t_1})) \cdots P(X_{t_n}^{-1}(S_{t_n})) \qquad (15)$$

gilt.

12.3.2.2. Markoff-Abhängigkeit

Bei seinem Bestreben, das Bernoullische Gesetz der großen Zahlen auf abhängige Ereignisse auszudehnen, gelangte Markoff (1906) zur Einführung von „Ketten" von Ereignissen. Dieser Begriff wurde auf Zufallsvariable und dann auf stochastische Prozesse übertragen. Ehe wir aber eine allgemeine Definition geben, führen wir zweckmäßigerweise den Begriff der *bedingten Unabhängigkeit* ein: Es seien $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_3$ Teil-σ-Algebren von Ereignissen. Wir nennen $\mathcal{B}_3$ *bei gegebenem* $\mathcal{B}_2$ *bedingt unabhängig von* $\mathcal{B}_1$, wenn in den Bezeichnungen von 12.2.2. für jedes $B_3 \in \mathcal{B}_3$ *fast sicher*

$$P(B_3 \mid \mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2) = P(B_3 \mid \mathcal{B}_2) \qquad (16)$$

gilt. Phänomenologisch ausgedrückt bedeutet das, wenn $\mathcal{B}_2$ die Gegenwart, $\mathcal{B}_1$ die Vergangenheit und $\mathcal{B}_3$ die Zukunft repräsentieren, daß die Zukunft von der Vergangenheit bedingt unabhängig ist, wenn die Vergangenheit und die Gegenwart bekannt sind.

Eine Familie $(\mathcal{B}_t, t \in T)$ von Teil-σ-Algebren wird *Markoffsch* genannt, wenn ihre Zukunft für jedes gegenwärtige $t \in T$ von ihrer Vergangenheit unabhängig ist, in Zeichen, wenn bei jedem $t \in T$ für jedes $\overline{B}_t \in \overline{\mathcal{B}}_t$

$$P(\overline{B}_t \mid \mathcal{B}_t \vee \underline{\mathcal{B}}_t) = P(\overline{B}_t \mid \mathcal{B}_t) \qquad (17)$$

fast sicher gilt. In einem solchen Fall nennt man den Prozeß $(X_t, \mathcal{B}_t, t \in T)$ (und, wenn $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(X_t)$ für jedes t gilt, den Prozeß $(X_t, t \in T)$) *Markoffsch*. Ist

$$T = \boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

so nennt man die Prozesse *Markoffsche Ketten*. Es läßt sich leicht zeigen, daß man in diesen Definitionen „Vergangenheit" und „Zukunft" miteinander vertauschen, sie also symmetrisch machen kann. Vergangenheit und Zukunft sind bei gegebener Gegenwart bedingt unabhängig.

Der Begriff der bedingten Unabhängigkeit führt zu der folgenden allgemeinen Struktur: Es sei eine Familie $(\mathcal{C}_t, t \in T)$ von Teil-σ-Algebren von Ereignissen gegeben. Eine Familie $(\mathcal{B}_t, t \in T)$ von Teil-σ-Algebren ist $(\mathcal{C}_t, t \in T)$-*unabhängig*, wenn $\underline{\mathcal{B}}_t$ und $\overline{\mathcal{B}}_t$ bei gegebenem $\mathcal{C}_t$ für jedes $t \in T$ bedingt unabhängig sind. Falls $\mathcal{C}_t = \mathcal{B}_t$ für jedes t ist, erhält man die Markoffsche Struktur. Wenn alle $\mathcal{C}_t$ mit ein und derselben Teil-σ-Algebra $\mathcal{C}$ übereinstimmen, sagt man, die $\mathcal{B}_t$ seien $\mathcal{C}$-*unabhängig*. In dem Spezialfall, daß $\mathcal{C}$ zu $\{0, \Omega\}$ ausartet, sind die $\mathcal{B}_t$ unabhängig. Der triviale Fall, in dem jede Familie $(\mathcal{B}_t, t \in T)$ unabhängig ist, tritt ein, wenn $\mathcal{C}$ die σ-Algebra $\mathcal{A}$ aller Ereignisse ist.

Man sagt, ein Prozeß $(X_t, \mathcal{B}_t, t \in T)$ habe eine dieser Strukturen, wenn die $\mathcal{B}_t$ diese Strukturen besitzen. Insbesondere sagt man, ein Prozeß $(X_t, t \in T)$ sei $\mathcal{C}$-

austauschbar, wenn die $\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(X_t)$ $\mathcal{C}$-unabhängig und die X_t bei gegebenem $\mathcal{C}$ *ein und dieselbe* bedingte Verteilung aufweisen. Das ist der von de Finetti für eine Folge $(X_1, X_2, \ldots)$ von Zufallsvariablen eingeführten *Austauschbarkeit* äquivalent, die folgendermaßen definiert ist: Für jede endliche Menge $\{t_1, \ldots, t_n\}$ ganzer Zahlen hängt die Verteilung $\mathcal{L}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ nur von der Zahl n der auftretenden Zufallsvariablen ab.

12.3.2.3. Martingale

Bei dem Versuch, das Gesetz der großen Zahlen und seine starke Variante (siehe 12.3.2.5.) auf Zufallsvariable auszudehnen, stellte P. Lévy fest, daß sowohl die Čebyšev-Markoffsche Methode und die berühmte Kolmogoroffsche Ungleichung (siehe 12.3.2.5., (31)) als auch deren Folgerungen anwendbar bleiben, wenn man die Zufallsgrößen nicht auf ihre Erwartungswerte zentriert (vgl. 12.2.2.), sondern jede auf ihren bedingten Erwartungswert, falls ihre Vorgänger gegeben sind. Das führte zu der folgenden allgemeinen Definition: Ein Prozeß $(X_t, \mathcal{B}_t, t \in T)$, für den die $E(X_t)$ existieren, ist ein *Martingal* (dieser Terminus wurde von Ville eingeführt), wenn für alle $s < t$ aus T

$$X_s = E(X_t \mid \underline{\mathcal{B}}_s \vee \mathcal{B}_s) \tag{18}$$

fast sicher gilt. Für Prozesse $(X_t, t \in T)$ läßt sich dies in der Gestalt

$$X_s = E(X_t \mid X_r, r \leqq s) \tag{19}$$

fast sicher schreiben. Ein Prozeß wird *Submartingal* genannt, wenn statt (19) nur

$$X_s \leqq E(X_t \mid X_r, r \leqq s) \tag{19'}$$

fast sicher bekannt ist. Phänomenologisch besagt dies, daß $(X_t, \mathcal{B}_t, t \in T)$ ein Martingal ist, wenn für $s < t$ jede Zufallsvariable X_s fast sicher der bedingte Erwartungswert von X_t bei gegebener Vergangenheit bis zum Zeitpunkt s einschließlich ist.

12.3.2.4. Stationarität

Während die letzten beiden Strukturen dem Wunsch entsprangen, die Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahlen zu sichern, also einer inneren Motivation der Wahrscheinlichkeitsrechnung, erwuchs der Begriff der „Stationarität" aus Bedürfnissen der Physik, d. h. aus einer äußeren Motivation. Genauer gesagt hat sie ihren Ursprung in dem Liouvilleschen Satz, der ein bezüglich der Zeit invariantes Maß für die Evolution konservativer dynamischer Systeme in ihrem Phasenraum liefert. Somit entspringt dieser Begriff einem Ergodenproblem. Seit der Formulierung der berühmten Ergodensätze von v. Neumann und G. D. Birkhoff (1930, 1931) übertrugen Kolmogoroff und Chintschin das Ganze auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Definition lautet: Ein Prozeß $(X_t, t \in T)$ mit $T = [0, +\infty)$ ist *stationär*, wenn für jede endliche Teilmenge $\{t_1, \ldots, t_n\}$ von T und jedes $s > 0$

$$\mathcal{L}(X_{t_1+s}, \ldots, X_{t_n+s}) = \mathcal{L}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \tag{20}$$

gilt, mit anderen Worten, wenn die Verteilungen $\mathcal{L}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ *gegenüber einer positiven Translation in der Zeit invariant* sind. Fast gleichzeitig führte Chintschin einen schwächeren Begriff ein, bei dem $T = \boldsymbol{R}$ ist, aber nur für Zufallsvariable mit endlichen zweiten Momenten: Ein Prozeß $(X_t, t \in T)$, für den alle Momente $E(X_t^2)$ existieren, ist *stationär von zweiter Ordnung* in T, wenn seine durch

$$\Gamma(s, t) = E\big((X_s - E(X_s))\,(X_t - E(X_t))\big)$$

definierte *Kovarianz* auf $T \times T$ nur von der Differenz $s - t$ ihrer Argumente abhängt.

12.3.2.5. Grenzverteilungen

Es sei $(X_n, n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Sind die $E(X_n)$ definiert, so ist $E(S_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$. Sind die $E(X_n^2)$ definiert, so auch die Varianzen $\sigma_n^2 = \sigma^2(X_n)$ (vgl. 12.2.2.), und die Varianz $s_n^2 = \sigma^2(S_n)$ ist durch $s_n^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$ gegeben. *Im folgenden* sei der triviale Fall, daß alle X_n „zu 0 ausgeartet" sind, also fast sicher $X_n = 0$ gilt, ausgeschlossen. Um ständige Wiederholungen zu vermeiden, seien, sofern nichts anderes gesagt wird, *die Grenzwerte für $n \to \infty$ zu bilden.*

Das *klassische Grenzwertproblem* läßt sich wie folgt formulieren: *Man bestimme die Bedingungen, unter denen*

$$\mathcal{L}\left(\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right) \to \mathcal{L}(0) \quad \textit{und} \quad \mathcal{L}\left(\frac{S_n - E(S_n)}{s_n}\right) \to \mathcal{N}(0, 1)$$

gilt, wobei $\mathcal{N}(0, 1)$ die Normalverteilung mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz 1 ist (vgl. 12.2.2.). Diese Formulierung setzt implizit voraus, daß im ersten Fall die $E(X_n)$ und im zweiten die $E(X_n^2)$ definiert sind und daß, um Trivialitäten zu vermeiden, $s_n \to \infty$ gilt. Zur Vereinfachung der Schreibweise nehmen wir an, *die summierten Zufallsvariablen seien bereits auf ihre Erwartungswerte zentriert,* d. h., alle $E(X_n)$, also auch alle $E(S_n)$ seien null. Die Aussage, eine Folge von Verteilungen $\mathcal{L}(Y_n)$ *konvergiere gegen* $\mathcal{L}(Y)$, bedeutet, daß die Folge der Verteilungsfunktionen F_{Y_n} (vgl. 12.2.2.) in den Stetigkeitsstellen von F_Y gegen F_Y konvergiert oder (was damit äquivalent ist) daß für jede auf $\boldsymbol{R}$ stetige und beschränkte Funktion g die Beziehung

$$\int_{\boldsymbol{R}} g\, dF_{Y_n} \to \int_{\boldsymbol{R}} g\, dF_y$$

besteht.

Die moderne Etappe beginnt um 1900 mit dem Satz von Liapounoff (1900, 1901). Wir führen zugleich eine ähnliche Formulierung des Gesetzes der großen Zahlen an, das die Čebyšev-Markoffsche Fassung geringfügig verbessert. *Gilt*

$$\frac{1}{n^{1+\delta}}\,(E|X_1|^{1+\delta} + \cdots + E|X_n|^{1+\delta}) \to 0 \tag{21}$$

für ein $\delta \in [0, 1]$, so gilt

$$\mathcal{L}(S_n/n) \to \mathcal{L}(0) \quad \text{(Gesetz der großen Zahlen)}\,.$$

Besteht die Beziehung

$$\frac{1}{s_n^{2+\delta}}(E|X_1|^{2+\delta} + \cdots + E|X_n|^{2+\delta}) \to 0 \tag{22}$$

für ein $\delta > 0$, *so gilt*

$$\mathcal{L}(S_n/s_n) \to \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{(Satz von Liapounoff)} .$$

Die erste Beziehung enthält die Čebyšev-Markoffsche für $\delta = 1$, ebenso die von Markoff formulierte Bedingung, daß die $E|X_n|^{1+\delta}$ gleichmäßig beschränkt sind. Entscheidend war aber der Satz von Liapounoff, der 1913 von Markoff mit Hilfe der Momentenmethode bewiesen wurde, nachdem er die Zufallsvariablen gestutzt hatte. Eine in $c > 0$ *gestutzte* Zufallsvariable X ist definiert durch

$$X^{(c)} = \begin{cases} X & \text{für} \quad |X| < c , \\ 0 & \text{für} \quad |X| \geqq c , \end{cases}$$

wobei $X^{(c)}$ für $c \to \infty$ fast sicher gegen X konvergiert. Dieses Verfahren (das übrigens vorher schon von Lebesgue und seinen Schülern in der Integrationstheorie verwendet wurde) hat sich als sehr nützlich erwiesen.

Liapounoff benutzte in seinem Beweis von ihm „charakteristische Funktionen" genannte Funktionen, die nichts anderes sind als Fouriertransformierte; sie waren bereits Fourier, Laplace, Poisson und Cauchy bekannt und von ihnen ohne strenge Begründung benutzt worden.

Im Jahre 1919 wurde P. Lévy, im Alter von 33 Jahren, aber schon ein gut bekannter Mathematiker, eingeladen, an der Ecole Polytechnique drei Vorträge „über die Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Rolle der Gaußschen Verteilung in der Fehlertheorie" zu halten. Er konsultierte die Bücher Bertrands und Poincarés, welche die Arbeiten der russischen Schule nicht kannten, und kam zu dem Schluß, daß mathematisch noch alles zu tun sei. Sogleich führte er, wie Liapounoff, den Begriff der charakteristischen Funktionen ein, also das, was man heute die *Fourier-Stieltjes-Transformierten* eines Maßes nennt:

$$\hat{F}_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\, dF_X(x) \quad \text{für} \quad u \in \boldsymbol{R} . \tag{23}$$

Sie waren unabhängig kurz vorher von Daniell eingeführt worden und sollten wenig später in der harmonischen Analysis eine zentrale Rolle spielen. P. Lévy gab die Umkehrformel an und wies eine eineindeutige Zuordnung zwischen „Zusammensetzung" von Verteilungsfunktionen und der Multiplikation ihrer charakteristischen Funktionen nach: Für unabhängige Zufallsvariablen X und Y gilt

$$F_{X+Y} = F_X * F_Y \Leftrightarrow \hat{F}_{X+Y} = \hat{F}_X \cdot \hat{F}_Y . \tag{24}$$

Darüber hinaus erhielt er Ungleichungen, welche das Verhalten der F_X im Unendlichen mit dem der $\hat{F}_X$ im Ursprung verknüpfen, und bewies seinen „Stetigkeitssatz", der für alle Probleme der Grenzverteilungen grundlegend ist: *Die Verteilungen* $\mathcal{L}(Y_n)$ *streben genau dann gegen eine Verteilung* $\mathcal{L}(Y)$, *wenn die* $\hat{F}_{Y_n}$ *in* $\boldsymbol{R}$ *einfach gegen eine im Ursprung stetige Funktion* f *konvergieren, und dann ist* $f = \hat{F}_Y$ (die

von Bochner (1933) stammende Bedingung der „Stetigkeit im Ursprung“ verbessert die Bedingung der „gleichmäßigen Konvergenz auf einer Umgebung von Null“, die von P. Lévy benutzt wurde).

Dank der Benutzung der charakteristischen Funktionen und der gestutzten Variablen wurde das von Bernoulli und de Moivre erstmals behandelte klassische Grenzwertproblem schließlich nach zwei Jahrhunderten gelöst:

Satz von Kolmogoroff (1928, 1929). *Genau dann gilt* $\mathscr{L}(S_n/n) \to \mathscr{L}(0)$, *wenn die Beziehungen*

$$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| \geqq n) \to 0\,, \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} EX_k^{(n)} \to 0\,, \qquad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma^2(X_k^{(n)}) \to 0 \tag{25}$$

bestehen.

Satz von Lindeberg (1922) *und Feller* (1937): *Genau dann gelten die Beziehungen* $\mathscr{L}(S_n/s_n) \to \mathscr{N}(0, 1)$ *und* $\max\limits_{k \geqq n} \dfrac{\sigma(X_k)}{n} \to 0$, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geqq \varepsilon s_n} x^2\, dF_{X_k}(x) \to 0 \tag{26}$$

gilt.

Daß die Bedingung in (26) hinreichend ist, zeigten Lindeberg unter Benutzung der Stabilität (vgl. 12.3.2.6.) der Normalverteilung und kurze Zeit danach P. Lévy mit Hilfe seiner Methode der charakteristischen Funktionen.

12.3.2.6. Der Übergang zum modernen Grenzwertproblem

Während man auf dem Wege war, das klassische Grenzwertproblem zu lösen, änderte sich seine Form. In seinem ersten umfangreichen Buch von 1925 [27] stellte P. Lévy folgendes Problem für Zufallsvariable, die nicht nur unabhängig sind, sondern sogar dieselbe Verteilung $\mathscr{L}(X)$ besitzen: Man bestimme die Familie *aller* möglichen Grenzverteilungen der Folge $\mathscr{L}\big((S_n/b_n) - a_n\big)$ für passend gewählte a_n, $b_n \to \infty$. Danach bestimme man den „Anziehungsbereich“ jeder dieser Grenzverteilungen, d. h. diejenigen Verteilungen $\mathscr{L}(X)$, welche eine gegebene Grenzverteilung ergeben. Er bewies, daß die Familie dieser Grenzverteilungen diejenige der *stabilen* Verteilungen ist. Dabei werden Verteilungen *stabil* genannt, wenn man zu jedem n solche a_n und $b_n > 0$ finden kann, daß $\mathscr{L}\big((S_n/b_n) - a_n\big) = \mathscr{L}(X)$ ist. Die Normalverteilung und die entartete Verteilung sind stabil, und jede stabile Verteilung gehört zu ihrem Anziehungsbereich. Insbesondere sind die *symmetrischen* stabilen Verteilungen (d. h. solche mit $\mathscr{L}(-X) = \mathscr{L}(X)$) diejenigen, deren charakteristische Funktionen die Gestalt $\exp(-c|u|^\gamma)$ mit $c \geqq 0$ und $0 < \gamma \leqq 2$ hat.

Der Anziehungsbereich der Normalverteilung wurde 1935 von P. Lévy, von Feller und von Chintschin bestimmt. Fünf Jahre später wurden die Anziehungsbereiche der anderen stabilen Verteilungen von Doeblin und von Gnedenko gefunden.

P. Lévy führte auch die *Typen* $T(X)$ von Verteilungen ein: Das sind die Familien von Verteilungen $\mathscr{L}(a + bX)$ für alle Konstanten a und jedes $b > 0$. Es ist zweck-

mäßig, auch den Grenzfall, den *entarteten Typ* $T(0)$, als jedem Typ von Verteilungen zugehörig anzusehen. Dann besagt ein Satz von Chintschin (1937), daß die Konvergenz der Verteilungen mit der Konvergenz ihrer Typen gegen einen Typ, den Typ der Grenzverteilung, übereinstimmt.

In der gleichen Zeit, in der P. Lévy sein Grenzwertproblem löste, änderte das auf Zufallsvariablen anstelle von Indikatorfunktionen von Ereignissen erweiterte Bernoullische Schema (das das Schema für das klassische Grenzwertproblem und das P. Lévysche Grenzwertproblem umfaßt) seine Form. Kolmogoroff dehnte das *Poissonsche Schema* auf Zufallsvariable aus. Dies ist eine Folge von Bernoullischen Schemata, deren n-tes Glied aus n für ein Ereignis A_n mit der Wahrscheinlichkeit p_n wiederholten Versuchen besteht. Die *Poisson-Verteilung* $\mathcal{P}(\lambda)$ einer *Poissonschen Zufallsvariablen* S, die durch

$$P(S = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{27}$$

gegeben ist, ist die Grenzverteilung der S_n (die (zufällige) Zahl der Realisationen von A_n), wenn np_n gegen λ strebt. Sie ergibt sich leicht mittels der Bernoullischen Formel (1) aus 12.1.2. Das *verallgemeinerte Poisson-Schema* besteht aus einer Folge endlicher Folgen $(X_{nk})_{1 \leqq k \leqq k_n}$ unabhängiger Veränderlicher, wobei k_n mit n gegen $+\infty$ strebt. Bei diesem allgemeineren Schema geht das Problem der Grenzverteilungen in das der Konvergenz der Verteilungen $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ über.

12.3.2.7. Die Konvergenz gegen die Normalverteilung

Das Grundproblem der Konvergenz gegen die Normalverteilung besteht in dem Auffinden von Bedingungen, unter denen $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ gegen $\mathcal{N}(0, 1)$ strebt. Die Momente der X_{nk} sind keiner weiteren Bedingung unterworfen. Allerdings besteht eine in dem klassischen und dem Lévyschen Problem implizit enthaltene „natürliche" Bedingung, nämlich, daß die Summanden *infinitesimal* sein sollen; dies bedeutet, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$\max_k P(|X_{nk}| > \varepsilon) \to 0$$

gilt, so daß sich die Grenzverteilung nicht ändert, wenn man endlich viele Summanden abändert. In den Jahren 1934 und 1935 lösen P. Lévy und Feller das Problem der Fehlerverteilung endgültig. Wir geben hier die Lösung von P. Lévy an: *Wenn die Verteilungen $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ konvergieren, so ist die Grenzverteilung genau dann die Normalverteilung, wenn $\mathcal{L}(\max_k |X_{nk}|) \to \mathcal{L}(0)$ gilt.* Diese Bedingung ist bemerkenswert. Sie entspricht beinahe der anschaulichen „Begründung", die Gauß, Laplace und andere für die Normalverteilung von Beobachtungsfehlern angegeben hatten. Doch hatte erst P. Lévy die notwendigen Techniken schaffen können. Tatsächlich gibt es deren zwei: die der charakteristischen Funktionen, die Feller benutzte, und die der *Konzentrationsfunktion*

$$\gamma_X(x) = \max_y P(X \in [y, x + y]) , \tag{28}$$

die Lévy selbst verwendete. In dem Maße, wie sich seine „stochastische Intuition" vertiefte, wurde er mit seiner — rein analytischen — Methode der charakteristischen Funktionen unzufriedener und ersetzte sie schrittweise durch die der Konzentrationsfunktionen. Diese Methode erwies sich in den Händen von Doeblin (1939), Kolmogoroff (1955, 1958, 1963), Esseen (1966), Le Cam (1965) und anderen als ein äußerst mächtiges Werkzeug.

12.3.2.8. Das moderne Grenzwertproblem und die unbegrenzt teilbaren Verteilungen

Die eben behandelte Konvergenz gegen die Normalverteilung ist offensichtlich ein Spezialfall des modernen Grenzwertproblems, das eine Erweiterung des Problems von P. Lévy auf das verallgemeinerte Poisson-Schema ist:

Das moderne Grenzwertproblem. Man bestimme die Familie der Grenzverteilungen der $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$, *bei denen die Summanden* X_{nk} *infinitesimal sind. Dann bestimme man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die* $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ *gegen eine gegebene Grenzverteilung konvergieren.*

Die Bewältigung dieses Problems wurde möglich dank der Entdeckung und Beschreibung der *unbegrenzt teilbaren* Verteilungen: $\mathcal{L}(X)$ ist unbegrenzt teilbar, wenn zu jedem n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ existieren derart, daß $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X_{n1} + \cdots + X_{nn})$ gilt. Diese Verteilungen treten bei de Finetti (1929) auf. Im Jahre 1932 findet Kolmogoroff ihre explizite Form, wenn ihre zweiten Momente endlich sind, und 1935 löst Bawly das moderne Grenzwertproblem für Summanden mit endlichen zweiten Momenten unter einer Bedingung, die zur Folge hat, daß die X_{nk} infinitesimal sind: Wenn die X_{nk} um ihre Erwartungswerte zentriert sind, muß $\max_k \sigma^2(X_{nk}) \to 0$ gelten, und die $\sum_k \sigma^2(X_{nk})$ müssen gleichmäßig beschränkt sein.

Im Jahre 1934 gelang es P. Lévy, die explizite Form der allgemeinen unbegrenzt teilbaren Verteilungen anzugeben, und 1936 zeigte Chintschin, daß die Familie der Grenzverteilungen des modernen Grenzwertproblems die der unbegrenzt teilbaren Verteilungen ist. Im Jahre 1939 fanden Gnedenko und Doeblin die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz gegen eine gegebene unbegrenzt teilbare Verteilung; dabei benutzte Gnedenko die Konzentrationsfunktionen und Doeblin die charakteristischen Funktionen. Wir führen nun den ersten der *vier grundlegenden Sätze* (S1, S2, S3, S4) an, die den Kern der heutigen Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden.

S1. *Lösung des modernen Grenzwertproblems*

P. Lévy: *Die unbegrenzt teilbaren Verteilungen* $\mathcal{L}(X)$ *sind auf folgende Weise durch Tripel* (α, β^2, L) *charakterisiert. Es gilt* $\hat{F}_X = e^{\psi}$ *mit*

$$\psi(u) = i\alpha u - \frac{\beta^2}{2}u^2 + \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}\right)\left(e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}\right) dL(x)\,, \tag{29}$$

wobei α reell und $\beta \geqq 0$ ist und L eine auf $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ definierte und auf beiden Intervallen eine monoton nichtabnehmende Funktion mit den Eigenschaften

$$L(\pm\infty) = 0 \quad \textit{und} \quad \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}\right) x^2\, dL(x) < +\infty$$

ist.

Chintschin: *Die Familie der Grenzverteilungen der $\mathcal{L}(\sum_k X_{nk})$ mit unabhängigen und infinitesimalen Summanden ist die Gesamtheit der unbegrenzt teilbaren Verteilungen.*

Gnedenko, Doeblin: *Für passend gewählte a_n gilt die Konvergenzbeziehung*

$$\mathcal{L}(\sum_k X_{nk} - a_n) \to \mathcal{L}(X)\ ,$$

wobei $\mathcal{L}(X)$ eine durch das Tripel (α, β^2, L) charakterisierte unbegrenzt teilbare Verteilung ist, genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\mathcal{L}(\min_k X_{nk}) \to \mathcal{L}(Y)\ , \qquad \mathcal{L}(\max_k X_{nk}) \to \mathcal{L}(Z)$

mit

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-L(x)} & \textit{für} \quad x < 0\,, \\ 1 & \textit{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

und

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < 0\,, \\ e^{L(x)} & \textit{für} \quad x > 0; \end{cases}$$

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lim\limits_{n \to \infty} \sum_k \sigma^2(X_{nk}^{(\varepsilon)}) = \beta^2\,.$

(Die Bedingung (i) ist der ursprünglichen äquivalent, wenn sie auch anders aussieht. Sie ist so gewählt worden, daß sie sich auf die Lévysche Bedingung für die Konvergenz gegen die Normalverteilung, bei der $L \equiv 0$ ist, reduziert.)

12.3.2.9. Fast sichere Konvergenz

Aus der Konvergenz der Verteilungen $\mathcal{L}(X_n)$ gegen $\mathcal{L}(X)$ im oben definierten Sinne (vgl. 12.3.2.5.) folgt nicht die Konvergenz der $X_n(\omega)$ in jedem $\omega \in \Omega$; sie ist in Wirklichkeit ein rein analytischer Begriff, der mit $\hat{F}_{X_n} \to \hat{F}_X$ äquivalent ist. Die folgenden Konvergenzarten bestimmen den Grenzwert nur bis auf Äquivalenz:

$X_n \to X$ *fast sicher*, d. h. $P(X_n \to X) = 1$;

$X_n \to X$ *in Wahrscheinlichkeit*, d. h., für jedes $\varepsilon > 0$ gilt
$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0;$$

$X_n \xrightarrow{r} X$ *(im Mittel der Ordnung r)*, d. h.,
$$E|X_n - X|^r \to 0 \quad \text{mit endlichem } E|X|^r\,.$$

Die fast sichere Konvergenz erschien in der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der berühmten Borelschen Abhandlung aus dem Jahre 1909. Zwei Jahrhunderte nach

Bernoulli erhielt Borel (für den Fall $p = \frac{1}{2}$, den 1917 Cantelli auf $0 < p < 1$ verallgemeinerte) ein *starkes* Gesetz der großen Zahlen:

Im Bernoullischen Schema konvergiert S_n/n fast sicher gegen p.

In dieser Weise wird aus der „Stabilität der Häufigkeiten" die „fast sichere Konvergenz der Häufigkeiten". Dieser bedeutende Schritt eröffnete eine breite stochastische Thematik, welche schnell die Wahrscheinlichkeitsrechnung durchdrang.

Sehr bald wurde dieses starke Gesetz von Hausdorff (1913) verschärft, anschließend nochmals von Hardy und Littlewood (1914). Die entscheidende Verbesserung kam von Chintschin (1929); es ist das *Gesetz des iterierten Logarithmus*:

Im Bernoullischen Schema (mit $E(S_n) = np$ und $s_n^2 = npq$) gilt

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n - E(S_n)|/(2s_n^2 \log\log s_n^2)^{1/2} = 1 \tag{30}$$

fast sicher.

Im Jahre 1929 erhielt Kolmogoroff dieses Gesetz für das verallgemeinerte Bernoullische Schema unter stark einschränkenden Bedingungen. Seit dieser Zeit kam es ohne Unterbrechung zu neuen Methoden, Verbesserungen und Bedingungen, in Beiträgen von P. Lévy, Feller, Strassen und vielen anderen.

Daneben wurde das starke Gesetz *selbst* Schritt für Schritt verallgemeinert. Kolmogoroff (1925, 1930) begann mit einer Untersuchung der fast sicheren Konvergenz der Reihen $\sum_n X_n$ von unabhängigen Zufallsvariablen, d. h. der fast sicheren Konvergenz von $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ gegen eine Zufallsvariable. Mit Hilfe des Markoffschen Verfahrens der gestutzten Variablen bewies er seine berühmte Ungleichung

$$P(\max_{k\leqq n} |S_k| \geqq \varepsilon) \leqq \sigma^2(S_n)/\varepsilon^2\,, \tag{31}$$

die er oft anwendete. So erhielt er notwendige und hinreichende Bedingungen für diese Konvergenz (den „Kolmogoroffschen Dreireihensatz"). Mit Hilfe eines klassischen Lemmas von Kronecker (wenn eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert und die b_n gegen $+\infty$ streben, konvergiert $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k x_k$ gegen 0) erhielt er eine hinreichende Bedingung dafür, daß $(S_n - E(S_n))/n$ fast sicher gegen 0 konvergiert, und schließlich sein *starkes Gesetz der großen Zahlen*:

Es seien $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt. Ist $E(|X_1|)$ endlich, so gilt $S_n/n \to E(X_1)$ fast sicher. Umgekehrt, wenn S_n/n fast sicher gegen ein endliches c strebt, so ist $E(|X_1|)$ endlich und $E(X_1) = c$.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die erste Aussage auch bei unendlichem $E(|X_1|)$ zutrifft, vorausgesetzt, daß $E(X_1)$ existiert (auch $\pm\infty$ sind zugelassen).

In Wirklichkeit ist dieses Gesetz nur ein Spezialfall des in die Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung übersetzten Ergodensatzes von G. D. Birkhoff (1931). So gelangte man zu einem zweiten fundamentalen Satz. Es seien $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ eine

Folge von Zufallsvariablen, $\mathcal{B}(X_1, X_2, \ldots)$ die kleinste Teil-σ-Algebra von Ereignissen, in bezug auf welche alle X_n meßbar sind, und $\mathcal{T}$ der Durchschnitt aller Teil-σ-Algebren $\mathcal{B}(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots)$ für $m = 1, 2, \ldots$ Dann gilt:

S2. *Stationaritätssatz*

Ist die Folge $X_1, X_2, \ldots$ stationär und existiert $E(X_1)$, so gilt $S_n/n \to E(X_1 \mid \mathcal{T})$ fast sicher. Ist $E(|X_1|^r)$ für ein $r \geqq 1$ endlich, so gilt: $S_n/n \xrightarrow{r} E(X_1 \mid \mathcal{T})$.

Diese Aussage ergibt sich ebenso wie die Kolmogoroffsche Ungleichung (31) und verschiedene Sätze über Konvergenzen von Reihen mit unabhängigen Summanden aus der Theorie der Martingale. Das bedeutendste Ergebnis dieser Theorie ist der dritte grundlegende Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

S3. *Satz über Martingale*

Es sei $X_1, X_2, \ldots$ ein Submartingal. Ist $\sup_n E(X_n^+) < +\infty$, so gilt $X_n \to X$ fast sicher. Sind alle $|X_n|^r$ für ein $r \geqq 1$ integrierbar, so gilt $X_n \xrightarrow{r} X$.

12.3.2.10. Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen

Es sei $X_T = (X_t, t \in T = [0, +\infty))$ ein *Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen*, d. h. ein Prozeß, dessen Zuwächse $X_{st} = X_t - X_s$ auf disjunkten Intervallen $[s, t)$ unabhängig sind. Es sollen die *Trajektorien* des Prozesses, d. h. die Funktionen $t \mapsto X_t(\omega)$ für variierendes $\omega \in \Omega$ untersucht werden. In einer der schönsten wahrscheinlichkeitstheoretischen Arbeiten analysierte P. Lévy 1934 — erschöpfend, wie es seine Art ist — derartige Prozesse. Er zeigte, daß man

$$X_t(\omega) = x_t + X_t^d(\omega) + X_t^c(\omega) \tag{32}$$

schreiben kann, wobei $t \mapsto x_t$ eine von ω unabhängige Normierungsfunktion und X_T^d ein zentrierter Prozeß mit unabhängigen Zuwächsen ist, dessen Unstetigkeitsstellen feste (nicht von ω abhängige) Zeiten sind und dessen „Sprünge" in diesen Zeitpunkten zentrierte Zufallsvariable bilden. Es bleibt ein Prozeß x_T^c mit unabhängigen Zuwächsen, bei dem jede Trajektorie $t \mapsto X_t^c(\omega)$ in von ω abhängigen t-Werten Unstetigkeiten haben kann. Die Natur dieses Prozesses wurde von P. Lévy in einem vierten fundamentalen Satz bestimmt.

S4. *Integraldarstellung von Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen*

Es existiert eine Zerlegung

$$X_t^c = X_0^c + N_t + \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}\right)\left(x d\nu_t(x) - \frac{x}{1 + x^2} dL_t(x)\right), \tag{33}$$

bei der folgendes gilt:

1. *N_t ist eine Brownsche Bewegung* (siehe 12.3.2.11.);

2. *jede Funktion* $x \mapsto L_t(x)$ *ist auf* $(-\infty, 0)$ *und auf* $(0, +\infty)$ *monoton wachsend, mit* $L_t(\pm\infty) = 0$ *und* $\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right) x^2\, dL_t(x) < +\infty$;

3. *setzt man* $\nu_t[x, y) = \nu_t(y) - \nu_t(x)$ *für* $x < y$ *und* $\nu_{st}[x, y) = \nu_t[x, y) - \nu_s[x, y)$ *für* $s < t$, *so ist jedes* $\nu_{st}[x, y)$ („die Anzahl der Sprünge während $[s, t)$, deren Betrag in $[x, y)$ liegt") *eine Poissonsche Zufallsvariable, mit der Verteilung* $\mathcal{P}(L_{st}[x, y))$ (vgl. 12.3.2.6.), *mit* $L_{st}[x, y) = L_t[x, y) - L_s[x, y)$ *für* $s < t$ *und* $L_t[x, y) = L_t(y) - L_t(x)$ *für* $x < y$;

4. *die Verteilungen* $\mathcal{P}(L_{st}[x, y))$ *sind sowohl für disjunkte Intervalle* $[s, t)$ *als auch für disjunkte Intervalle* $[x, y)$ *unabhängig*.

Auf dem eingeschlagenen Weg entdeckte P. Lévy tiefliegende Eigenschaften von Reihen unabhängiger Zufallsvariablen. In dieser Abhandlung findet sich auch die allgemeine Formel (29), welche die unbegrenzt teilbaren Verteilungen charakterisiert. Lévys stochastische Intuition und seine außergewöhnliche Fähigkeit, diejenigen mathematischen Methoden zu schaffen, die seine Intuition verlangte, erreichen in dieser Schrift ihren Höhepunkt. Diese Abhandlung und seine Arbeit über die Brownsche Bewegung (1939) markieren mit ihren grundlegenden Begriffen und Problemen die Entstehung der „Stochastischen Analysis", welche die Analyse der Trajektorien von Prozessen zum Inhalt hat.

12.3.2.11. Die Brownsche Bewegung

Ein auf $T = [0, +\infty)$ fast sicher stetiger Prozeß $(X_t)_{t\in T}$ mit $X_0 = 0$ mit unabhängigen Zuwächsen heißt *normalverteilt*, wenn die Verteilungen $\mathcal{L}(X_t)$ charakteristische Funktionen der Gestalt $u \mapsto \exp(\psi_t(u))$ mit $\psi_t(u) = i\alpha_t u - \beta_t^2(u^2/2)$ haben, wobei die Funktion $t \mapsto \alpha_t$ stetig und die Funktion $t \mapsto \beta_t^2$ stetig und monoton wachsend ist. Bei Zentrierung und passender Wahl einer Einheit des Zeitmaßes kann man sich auf die „reduzierte Form" beschränken, bei der $\psi_t(u) = -t(u^2/2)$ ist. Man nennt dann den Prozeß eine *Brownsche Bewegung*. Er wurde so benannt, weil der Botaniker Brown als erster 1827 die sehr ungeordnete Bewegung eines mikroskopischen Teilchens in einer Flüssigkeit beobachtet und beschrieben hat, die zu diesem Prozeß führt. Sie ist eines der faszinierendsten mathematischen Objekte. In den Augen von Hermite und Poincaré allerdings war sie, wie wir später sehen werden, das „vollkommene Monstrum".

Zu Beginn unseres Jahrhunderts schlugen Bachelier (1900) und nach ihm Einstein und Smoluchovski ein formales mathematisches Modell für die Brownsche Bewegung vor. Aber erst 1923 gelang es N. Wiener, der damals die allgemeinen stochastischen Begriffe noch nicht zur Verfügung hatte, sie für den Spezialfall der Brownschen Bewegung zu schaffen; er machte diese „separabel" (im Sinne von Doob) und beschrieb sie in voller Strenge. Er führte das nach ihm benannte Maß ein — eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der auf T stetigen Funktionen — und bewies, daß fast alle Trajektorien der Brownschen Bewegung stetig sind. Im Jahre 1933 zeigte er, zusammen mit Paley und Zygmund, daß fast alle Trajektorien in allen Punkten nicht differenzierbar sind. Schließlich gelangte

P. Lévy 1939 zu einer erschöpfenden Analyse der Brownschen Bewegung, die späte nur in Details etwas verbessert werden sollte. Alle folgenden Eigenschaften gelte „fast sicher", so daß wir darauf verzichten, dies für jede einzelne zu wiederholen.

P. Lévy begann mit einer Verfeinerung des letzten Resultats von Wiener, indem er zeigte, daß eine Zufallsvariable H existiert, für welche

$$|X_{t+h} - X_t| \leqq c\left(2h \log \frac{1}{h}\right)^{1/2} \quad \text{für} \quad 0 < h \leqq H \tag{34}$$

für $c > 1$, aber nicht für $c < 1$ gilt. Daraus leitete er ein Gesetz des iterierten Logarithmus her. Er bewies, daß die Trajektorien in allen Zeitintervallen, die nicht auf einen Punkt reduziert sind, nicht rektifizierbar sind. Genauer gesagt, er zeigte folgendes: Ist S_n die Summe der Quadrate der Zuwächse des Prozesses für die ersten n (nach steigenden Werten umgeordneten) Glieder einer in $[0, t]$ dichten Folge $(t_1, t_2, \ldots)$, so gilt $S_n \to t$. Daraus folgt, daß die Trajektorien in $[0, t]$ nicht von endlicher Schwankung sind; daher sind sie nicht rektifizierbar.

Es sei $M_t = \max_{s \leqq t} X_s$ und $m_t = \min_{s \leqq t} X_s$. Bachelier hatte — formal — „gezeigt", daß die Zufallsvariablen $|X_t|$, M_t und $X_t - m_t$ identisch verteilt sind. P. Lévy bewies dies streng und zeigte, daß die relativen Extrema von X_T und von $M_T - X_T$ überall dicht sind. Er führte außerdem den durch die „Zeiten des ersten Erreichens" $\tau_s = \inf\{t > 0 \mid M_t > s\}$ definierten Prozeß τ_T als zu M_T inversen Prozeß ein und zeigte, daß dieser unabhängige Zuwächse hat und stabil ist, d. h., τ_s ist als Summe positiver Sprünge darstellbar, wobei die Anzahl der Sprünge bis zur Zeit s, deren Betrag größer als h ist, mit der Verteilung $\mathcal{P}\big(t(2/\pi h)^{1/2}\big)$ Poissonverteilt ist. Das führt Lévy zu seinen tiefliegendsten und folgenreichsten Resultaten:

Die Menge der Minima von X_T und von $M_T - X_T$ entsprechen den zufälligen Mengen Z der Nullstellen einer Brownschen Bewegung. Die Menge Z ist abgeschlossen, nicht abzählbar, ohne isolierte Punkte, vom Lebesgueschen Maß 0, und ihr größtes Element α in $[0, t]$ genügt der berühmten P. Lévyschen „Arc-sinus-Verteilung":

$$P(\alpha < s) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} (s/t)^{1/2} \quad \text{für} \quad s \leqq t\,. \tag{35}$$

Diese Ergebnisse wurden von Taylor und Wendel verbessert.

P. Lévy schuf den Begriff der „lokalen Zeit". Sie mißt, grob gesprochen, die Zeit, die von den Trajektorien in einem Punkt x bis zum Zeitpunkt t verbracht wird. Diese Vorstellung war bei der Untersuchung der Trajektorien von „Diffusionsprozessen" zur Konstruktion von „Zeittransformationen" außerordentlich nützlich. Tatsächlich entstammen die Ideen und Methoden der „Diffusionstheorie" eben dieser Abhandlung von P. Lévy; für die Theorie selbst verweisen wir auf das Buch von Itô und McKean [22].

In der statistischen Physik bewegt sich der „Maxwellsche Dämon" längs der individuellen Trajektorien der Partikeln, die den deterministischen Gesetzen der Mechanik unterworfen sind. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben wir jetzt den „Lévyschen Dämon", der sich längs Trajektorien von Prozessen bewegt und dabei „sukzessiven Eingriffen des Zufalls" unterworfen ist. Seine (zufällige) Uhr

variiert mit den Trajektorien; er stößt auf Effekte zufälliger Erscheinungen, deren Menge meistens nicht abzählbar ist und die in extrem kurzen Zeitintervallen ablaufen. Insofern ist der Maxwellsche Dämon nur eine entartete Form des Lévyschen Dämons.

12.3.2.12. Markoffsche Prozesse

Markov hatte Ketten mit einem Raum von endlich vielen „Zuständen" (vgl. 12.3.2.2.) eingeführt (mögliche Werte von Zufallsvariablen in einer Kette). Er untersuchte sie unter verschiedenen Einschränkungen. Allmählich wurden diese Einschränkungen abgeschwächt oder aufgehoben und die Prozesse verallgemeinert. So ergaben sich wieder neue Verhaltensweisen und Probleme. Unabhängig davon wurden (von Chapman, Fokker, Planck u. a.) Modelle für verschiedene physikalische Phänomene geschaffen, die eine „Markoffsche" Prägung aufwiesen oder dem „stochastischen Prinzip von Huygens" (P. Lévy) unterworfen waren. Die Untersuchung der Markoffschen Prozesse verlief während der heroischen Periode explosionsartig.

In einer grundlegenden Abhandlung (1931) führte Kolmogoroff die Markoffsche Abhängigkeit im „stetigen Fall" $(X_t, t \in T = [0, +\infty))$ in strenger Art und Weise ein. Die *Übergangswahrscheinlichkeiten* sind definiert durch

$$P_{st}(x, S) = P(X_t \in S \mid X_s) \quad \text{fast sicher} \tag{36}$$

für $s < t$ und Borelsches S,

$$P_{ss}(x, S) = I_S(x) \quad \text{für} \quad t = s\,. \tag{37}$$

Sie bestimmen die Entwicklung des Prozesses und genügen der *Chapman-Kolmogoroffschen Gleichung*

$$P_{rt}(X, S) = \int P_{rs}(x, dy)\, P_{st}(y, S) \quad \text{für} \quad 0 \leqq r \leqq s \leqq t\,. \tag{38}$$

Die Vorgabe von Übergangswahrscheinlichkeiten ist äquivalent der Vorgabe von „Übergangsfunktionen" $F_{st}(x, y)$, deren lokales Verhalten Kolmogoroff betrachtete. Er zeigte, daß sie — unter gewissen Einschränkungen, wie der des Satzes von Lindeberg (26) — parabolischen partiellen Differentialgleichungen oder Integrodifferentialgleichungen genügen. (Bei gegebener Vergangenheit braucht die Lindebergsche Voraussetzung nur bedingt angenommen zu werden.) Als solche Voraussetzung kann auch die Stetigkeitsbedingung

$$P(X_{t+h} = X_t) \to 1 \quad \text{für gegen 0 strebendes } h \tag{39}$$

gewählt werden.

Feller setzte diese Richtung in zwei Serien rein analytischer Abhandlungen fort. In der ersten vervollständigte und verallgemeinerte er die Ergebnisse von Kolmogoroff. In der zweiten erweiterte und benutzte er die von Hille und Yosida geschaffene Theorie der Halbgruppen (die diese unmittelbar auf die Markoffsche Evolution angewandt hatten), führte die „stabilen" Markoffschen Prozesse ein, die heute „Fellersche Prozesse" genannt werden, und analysierte sie.

Es sei G der Raum der auf $\boldsymbol{R}$ beschränkten Borelschen Funktionen. Die Beziehung

$$(T_{uv} \cdot g)(x) = \int P_{uv}(x, dy)\, g(y) \quad \text{für} \quad u \leqq v, \qquad g \in G \tag{40}$$

definiert den „*Übergangsoperator*" T_{uv} auf G. Die Chapman-Kolmogoroffsche Gleichung ist der *verallgemeinerten Halbgruppeneigenschaft*

$$T_{rt} = T_{rs} T_{st} \quad \text{für} \quad r \leqq s \leqq t, \tag{41}$$

äquivalent.

Die Untersuchung der Markoffschen Prozesse besteht im wesentlichen in der Untersuchung der *zeitlich homogenen* Prozesse, d. h. solcher Prozesse, bei denen $P_{uv}(x, S)$, also auch T_{uv} nur von $t = v - u$ abhängt. Man schreibt dann $P_t(x, S)$ und T_t. In diesem Fall geht die verallgemeinerte Halbgruppe in eine gewöhnliche Halbgruppe

$$T_{s+t} = T_s T_t \quad \text{für} \quad s, t \geqq 0 \tag{42}$$

über.

In der Zwischenzeit ging Doeblin, der in der Theorie der Ketten tiefliegende klassisch gewordene Ergebnisse erzielt hatte (1937, 1938, 1940), erstmals zur Analyse der Trajektorien zeitlich homogener Markoffscher Prozesse über (1939). Er entdeckte, daß unter einer Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit die Trajektorien stückweise konstante Funktionen sind. Doob (1945) konnte auf das „gleichmäßig" verzichten und entdeckte sehr viel kompliziertere Unstetigkeiten der Trajektorien. Kinney (1953) studierte die Fälle stetiger Trajektorien. Als sich P. Lévy (1951) mit einer Klassifizierung der Ketten beschäftigte, fand er Möglichkeiten, die zu jener Zeit kurios erschienen: Ketten, deren sämtliche Zustände „momentan" sind, Ketten mit „fiktiven" Zuständen und andere.

Allmählich verschmolzen die rein analytischen Methoden und die Stochastische Analysis der Trajektorien. Bereits im Jahre 1943 behandelte Fortet die Stetigkeit der Trajektorien im Zusammenhang mit der Kolmogoroffschen Methode.

Doch erst ab 1955 nimmt die Theorie der Markoffschen Prozesse bei Dynkin nach und nach ihre gegenwärtige Gestalt an. In einer Reihe von grundlegenden Arbeiten erweiterte er die Ergebnisse und Methoden Fellers und setzte die Untersuchung verschiedener Markoffscher Evolutionen fort, indem er die Benutzung von Halbgruppen mit der Stochastischen Analysis der Trajektorien vereinte. Zu diesem Zweck arbeiteten Dynkin und Juškevič den Begriff der „starken" Markoffschen Abhängigkeit heraus und analysierten ihn; er war erstmals von Doob (1945) erwähnt worden und ist für die Behandlung Markoffscher Trajektorien von wesentlicher Bedeutung. G. Hunt eröffnete 1957 mit einigen Abhandlungen eine neue Forschungsrichtung, mit einer analytischen Methode für die Markoffschen Prozesse und einem stochastischen Verfahren für die Potentialtheorie. Wir verweisen dazu auf das schöne Buch von P. A. Meyer [37].

Die moderne Theorie der Markoffschen Prozesse ist überaus reich an Resultaten. Es ist unmöglich, sie in gedrängter Form hier auszuzählen, selbst wenn wir nur die wichtigsten nennen würden. Deshalb müssen wir uns darauf beschränken, auf Dynkins Buch [15] zu verweisen.

12.3.2.13. Stochastische Prozesse zweiter Ordnung

Der Prozeß oder die zufällige Funktion $X_T = (X_t, t \in T)$ wird *von zweiter Ordnung* genannt, wenn die X_t auf Ω quadratisch integrierbar sind. In diesem Fall empfiehlt es sich, die X_t als komplexwertig anzusehen und sie auf ihre Erwartungswerte zu zentrieren, so daß $E(X_t) = E(\operatorname{Re} X_t) + iE(\operatorname{Im} X_t) = 0$ ist. Die *Kovarianz* von X_T ist dann durch

$$\Gamma(s, t) = E(X_s \overline{X}_t) \quad \text{für} \quad (s, t) \in T \times T \tag{43}$$

definiert; die Chintschinsche Stationarität zweiter Ordnung entspricht den *stationären Kovarianzen* der Gestalt

$$\Gamma(s, s + u) = f(u) \quad \text{für} \quad s, s + u \in T\,. \tag{44}$$

Meist ist $T = \boldsymbol{Z}$ oder $T = \boldsymbol{R}$; der Einfachheit halber nehmen wir $T = \boldsymbol{R}$ an.

Es sei daran erinnert, daß eine Funktion $(s, t) \mapsto G(s, t)$ auf $T \times T$ *positiv definit* genannt wird, wenn

$$\sum_{s \in T_n} \sum_{t \in T_n} G(s, t)\, u_s \bar{u}_t \geqq 0 \tag{45}$$

für jede endliche Teilmenge $T_n \subset T$ und beliebige komplexe Zahlen u_t $(t \in T_n)$ gilt. Chintschin hatte festgestellt, daß Γ im Fall stationärer Kovarianzen positiv definit ist. Später hat man entdeckt, daß in Wirklichkeit die Familie der Kovarianzen mit der Familie der positiv definiten Funktionen (die auch „kernreproduzierende Funktionen" genannt werden) voll übereinstimmt, so daß jede positiv definite Funktion eine Integraldarstellung der Gestalt $\int_\Omega X_s \overline{X}_t \, dP$ besitzt, was sich als sehr nützlich erweist.

Durch Anwendung des Satzes von Bochner (1933) auf stetige Funktionen $f(s)$, für welche $f(s - t)$ positiv definit ist, erhielt Chintschin für stetige Kovarianzen zweiter Ordnung die Darstellung

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \, dF(x) \quad \text{für} \quad u \in \boldsymbol{R}; \tag{46}$$

dabei ist F eine beschränkte monoton wachsende Funktion, also f bis auf einen konstanten Faktor eine charakteristische Funktion. Das ist ein Spezialfall der sogenannten *harmonisierbaren* Kovarianzen, d. h. von Kovarianzen der Gestalt

$$\Gamma(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i(ts - t's')\right) d\gamma(s, s')\,, \tag{47}$$

wobei γ eine Kovarianz „endlicher Schwankung" ist (d. h., es existiert auf $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ ein Radonsches Maß derart, daß $\gamma(s, s')$ gerade das Maß von $[0, s) \times [0, s')$ für $s > 0$, $s' > 0$ ist, mit analogen Bedingungen, wenn man das Vorzeichen von s oder s' ändert). Eine solche Kovarianz ist stationär, wenn γ stationär ist.

Die Harmonisierbarkeit und die Untersuchung der Prozesse zweiter Ordnung (1945, 1946) führten zu einer systematischen Untersuchung der „*Wahrscheinlichkeitsrechnung zweiter Ordnung*": Stetigkeit, Differentiation und Integration der X_T — im quadratischen Mittel — und von Eigenschaften, die denen der Kovarianzen γ

entsprechen. Insbesondere ist X_T genau dann harmonisierbar, d. h., es existiert eine Darstellung

$$X_t = \int e^{its\alpha} \, d\xi(s), \tag{48}$$

in der ξ von zweiter Ordnung und mit einer Kovarianz γ endlicher Schwankung auf $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ ist, wenn $\Gamma(s, t)$ harmonisierbar ist. Das verallgemeinert die *harmonische* Darstellung von Prozessen X_T, die in zweiter Ordnung stationär sind, wobei ξ aus orthogonalen Zuwächsen besteht (d. h., daß $E(\xi[s_1, s_2) \, \xi[s_1', s_2')) = 0$ für disjunkte Intervalle $[s_1, s_2)$ und $[s_1', s_2')$ gilt), wenn die Kovarianz f von X_T stetig ist. Diese Darstellung hatte Cramér 1940 angegeben.

Zur gleichen Zeit (1940, 1941) hatte Kolmogoroff die Techniken des Hilbertraumes benutzt, um die Stationarität zweiter Ordnung zu untersuchen, wobei die quadratisch integrierbaren X_t Elemente des Hilbertraumes $L^2(P)$ waren. Der Cramérsche Beweis geht in einen stochastischen Beweis des Satzes von Stone (1932) über unitäre Transformationsgruppen über. Entsprechend kann die Wahrscheinlichkeitsrechnung zweiter Ordnung als eine auf die „Kurven" X_T im Raum $L^2(P)$ angewandte Theorie angesehen werden.

Dadurch verfügt man über stochastische und „geometrische" Methoden für $L^2(P)$. Die inneren Motivationen sind jedoch nicht dieselben. Der stochastische Standpunkt (1945, 1946) zieht das Auftreten von Typen zufälliger Funktionen zweiter Ordnung nach sich, die sich vom stationären Typ unterscheiden, und ermöglicht es, stochastische Modelle für zahlreiche neuartige Erscheinungen zu konstruieren, vgl. [6]. Seit 1941 haben Cramér und später seine Schüler zahlreiche bedeutende Arbeiten über den stationären Fall zweiter Ordnung veröffentlicht; vgl. [8].

12.4. Verzweigungen

Wir stellen in sehr kurzer Form verschiedene Verzweigungen vor, die heute im Gespräch sind.

12.4.1. Zerlegung von Verteilungen

Ist $\mathscr{L}(X) = \mathscr{L}(X_1 + X_2)$ mit unabhängigen X_1, X_2, so wird $\mathscr{L}(X)$ in $\mathscr{L}(X_1)$ und $\mathscr{L}(X_2)$ zerlegbar genannt. Das gilt offenkundig auch für die entsprechenden Verteilungstypen. Im Jahre 1934 kam P. Lévy zu der Überzeugung, daß sich die Normalverteilung nur in Normalverteilungen zerlegen läßt, und zog daraus Schlußfolgerungen. Diese Vermutung wurde zwei Jahre später von Cramér bewiesen, der dabei die Tatsache benutzte, daß eine ganze charakteristische Funktion zweiter Ordnung (d. h. eine charakteristische Funktion f, für welche $|f(z)| \leqq Ae^{B|z|^2}$ mit konstanten A, B gilt) normalverteilt sein muß. Raikov bewies (1938), daß sich eine Poisson-Verteilung nur in Poisson-Verteilungen zerlegen läßt. Unterdessen griff Chintschin die Zerlegung von unbegrenzt teilbaren Verteilungen an. In jüngster Zeit erhielten

Dugué und vor allem Linnik tiefliegende Ergebnisse in dieser Disziplin, der sogenannten *Arithmetik der Verteilungen*; vgl. [32] (russisches Original 1960).

12.4.2. *Grenzverteilungen*

Wir kommen nun zu dem Fall der klassischen Folgen $X_1, X_2, \ldots$ von unabhängigen Zufallsvariablen zurück. Es seien F_n die Verteilungsfunktion von S_n/n und G die Funktion der Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$. Liapounoff hatte eine *Approximation des Fehlers* $|F_n - G|$ angegeben, und danach haben Berry (1941) und Esseen (1944) gezeigt, daß eine Konstante $c > 0$ existiert derart, daß

$$|F_n - G| \leqq \frac{c}{s_n^3} \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^3 \tag{49}$$

gilt, natürlich unter der Voraussetzung, die $E|X_n|^3$ seien endlich. Seither sind zahlreiche Approximationen von sehr vielen Mathematikern gefunden worden, darunter von solchen, die bei den Konzentrationsfunktionen erwähnt wurden. Die Arbeit wird fortgesetzt.

Fragen nach *lokaler* Konvergenz und *lokaler* Approximation ergeben sich für Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte oder solchen, die auf einem Gitter verteilt sind. Die ersten diesbezüglichen Arbeiten stammen von v. Mises und von Bawly (1937). Seither erzielten Cramér und seine Schule, dann Petrov und die sowjetische Schule u. a. zahlreiche Ergebnisse. Die Forschungen gehen weiter. Als Beispiel sei ein elegantes Ergebnis von Gnedenko (1954) angegeben: Angenommen, die $X_1, X_2, \ldots$ seien identisch verteilt, und $S_n/\sigma\sqrt{n}$ habe eine Wahrscheinlichkeitsdichte p_n. Dann gilt

$$\sup_x \left| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right| \to 0 \tag{50}$$

genau dann, wenn ein m existiert derart, daß p_m beschränkt ist.

Das Problem der *großen Abweichungen* war von Chintschin (1929) aufgeworfen worden; Smirnov, P. Lévy und Fréchet haben sich damit beschäftigt. Die ersten allgemeinen Resultate verdankt man jedoch Cramér (1938). Es handelt sich darum, $|F_n(x) - G(x)|$ zu approximieren, wenn beispielsweise $x = o(n)$ ist. Seither befassen sich Cramér und seine Schule, Petrov und seine Schüler sowie andere weiter mit diesen Untersuchungen.

Alle erwähnten Zweige benutzen rein analytische Methoden. Wir verweisen auf das Buch von Petrov [38], das außerdem ein Kapitel über das Gesetz des iterierten Logarithmus enthält.

12.4.3. *Abhängigkeit*

Im Jahre 1927 erweiterte S. Bernstein den Liapounoffschen Satz (22) unter bestimmten Bedingungen auf abhängige Summanden. Doeblin benutzte 1937 diese

Bernsteinschen Ergebnisse bei seinen Untersuchungen über Markoffsche Ketten (und erhielt für diese Ketten ebenfalls ein Gesetz des iterierten Logarithmus). Im Jahre 1945 ermöglichte es eine verfeinerte Bernsteinsche Technik, in einer „asymptotischen Untersuchung von Summen nicht unabhängiger Variablen" den Satz von Lindeberg (26) sowie das starke Gesetz der großen Zahlen unter verschiedenen Bedingungen auf solche Verhältnisse zu erweitern. In einer Arbeit aus dem Jahre 1950 *On sets of probability laws and their limit elements* und in einem Buch (1955) ermöglicht es die 1945 geschaffene Technik der „bedingten charakteristischen Funktionen", das moderne Grenzwertproblem zu übertragen. Seither werden einschlägige Arbeiten fortgeführt; wir nennen insbesondere die von Dvoretzky (1970).

12.4.4. *Irrfahrten*

Bis 1949 und selbst danach erschienen zahlreiche Arbeiten über stochastische Modelle konkreter Probleme, wie „Warteschlangen", die mit Massenerscheinungen zusammenhängen, Talsperren, Erneuerungen, die mit Lagerhaltungsfragen, Versicherungsrisiken, Zirkulation, Teilchenzählern verknüpft sind, und viele weitere. Fast alle diese Arbeiten benutzten schwerfällige Methoden, die von den Details der Modelle überwuchert waren. Erst 1949 schälte sich die allgemeine Theorie heraus, und im Verlauf von 15 Jahren stellten sich dank der Kombinatorik oder der Verfahren der komplexen Analysis fundamentale Ergebnisse ein.

Das allgemeine Schema ist das der *Irrfahrten*, d. h. von Folgen von Summen $S_1, S_2, \ldots$ unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariabler (der Fall nicht identisch verteilter Zufallsvariabler ist lange nicht so weit fortgeschritten). Man untersuchte das globale Verhalten dieser Folgen, vor allem über die „Fluktuationen" dieser Folgen.

Im Jahre 1921 entdeckte Pólya die Eigenschaft der Rekurrenz bei einigen einfachen Irrfahrten auf Gittern in $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^2$ und $\boldsymbol{R}^3$. Dreißig Jahre später zeigten Chung und Fuchs, daß es eine *Dichotomie* der allgemeinen Irrfahrten gibt: Sie sind entweder rekurrent oder nicht rekurrent (sogenanntes Solidaritätstheorem). Ein $x \in \boldsymbol{R}$ wird ein *rekurrenter Zustand* einer Irrfahrt genannt, wenn für jede Umgebung V_x von x die Wahrscheinlichkeit

$$P(S_n \in V_x \text{ unendlich oft}) = 1 \tag{51}$$

ist. Die Dichotomie rührt aus der Tatsache her, daß für eine Irrfahrt alle Zustände rekurrent sind, sobald einer es ist.

Die *Fluktuationen* einer Irrfahrt werden durch verschiedene Zufallsvariable beschrieben, welche Funktionen von $S_1, \ldots, S_n$ sind, wie etwa die Anzahl dieser Summen, die positiv sind, ihr Maximum, die Zeit, in der das Maximum angenommen wird, und andere. Als erster untersuchte sie Andersen (1949, 1950). Seine Methode ist kombinatorischer Natur und recht kompliziert. Im Jahre 1953 vereinfachte und vereinheitlichte Spitzer in einer grundlegenden Abhandlung die kombinatorische Methode und erhielt wichtige Relationen sowie das asymptotische Verhalten verschiedener Fluktuationen. Feller benutzte die von Blackwell eingeführten

„Indizes und Stufenvariablen“ und gelangte zu einer sehr einfachen und elementaren kombinatorischen Methode.

Die analytische Methode, die von Pollaczek seit 1930 angewandt worden ist, war zunächst sehr schwierig. Ihre Arbeiten blieben unbekannt, bis einige ihrer Ergebnisse wiederentdeckt wurden. Ray, Kemperman, Baxter, Wendel u. a. vereinfachten und vereinheitlichten verschiedene Fassungen der analytischen Methode und entdeckten neue Beziehungen.

Die gewonnenen Ergebnisse sind außerordentlich elegant. Wir verweisen auf das Buch von Spitzer [40] (1964, 1976), das voller Ideen und Beispiele steckt, obwohl es sich auf Irrfahrten auf Gittern beschränkt. Für vielfältige Anwendungen möge der Leser das zweibändige Werk Fellers heranziehen [16] (1950, 1957, 1968 und 1966, 1971).

12.4.5. *Grenzwertsätze für stochastische Prozesse*

Das allgemeine Problem, so wie es sich heute stellt, beginnt mit der Konvergenz von Verteilungen $\mathcal{L}(\xi_n)$ eines Prozesses ξ_n gegen die Verteilung $\mathcal{L}(\xi)$ eines Prozesses ξ. Die Trajektorien von ξ_n und von ξ werden als Elemente eines metrischen Raumes angesehen. Ist μ_n (bzw. μ) die Verteilung der ξ_n (bzw. ξ), so ist die Konvergenz der Folge der μ_n gegen μ durch die Bedingung definiert, daß $\int g\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$ für alle auf diesem metrischen Raum stetigen und beschränkten Funktionen g gilt. Sobald diese Konvergenz stattfindet, gibt es die Konvergenz von Verteilungen von verschiedenen zufälligen Funktionalen der ξ_n gegen die des Funktionals von ξ. Um das zu präzisieren, bringen wir einen Satz von Donsker als Beispiel:

Es seien S_1, S_2, ... die aufeinanderfolgenden Summen unabhängiger Zufallsvariabler X_1, X_2, ... mit Erwartungswert 0 und endlicher Varianz $\sigma^2 > 0$. Wir definieren den Prozeß ξ_n durch

$$\xi(t_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} X_{[nt]} + 1 . \tag{52}$$

Unter der Bedingung von Lindeberg (26) *gilt dann*

$$\mathcal{L}(\xi_n) \to \mathcal{L}(\xi) ,$$

wobei ξ eine Brownsche Bewegung ist, die das Wiener-Maß als Verteilung hat. Als Anwendung erhält man, wenn man berücksichtigt, daß

$$\sup_{0 \leqq t \leqq 1} \xi_n(t) = \max_{k \leqq n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_k$$

ist, die Beziehung

$$\mathcal{L}\left(\max_{k \leqq n} \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_k\right) \to \mathcal{L}\,(\sup_{0 \leqq t \leqq 1} \xi_t) . \tag{53}$$

Man kann die Grenzverteilung entweder unmittelbar aus der Brownschen Bewegung berechnen oder indem man eine Folge X_1, X_2, ... wählt, für welche sich die

Verteilungen, die konvergieren, leicht berechnen lassen. Diese Möglichkeit ist unter dem Namen *Invarianzprinzip* bekannt.

Das beschriebene Problem wurde von Kolmogoroff (1931) aufgeworfen und, unabhängig, von Erdös und Kac (1946, 1947) und dann von Donsker (1952) erweitert. Das allgemeine Problem wurde von Prochorov (1953, 1956) und von Skorochod (1956, 1961) behandelt, die der Theorie ihre heutige Gestalt gaben. Le Cam (1957) erweiterte es auf allgemeinere topologische Räume, Billingsley (1956, 1961) auf abhängige Zufallsvariable X_1, X_2, ... Wir verweisen auf das schöne Buch von Billingsley [5].

12.4.6. *Ergodentheorie*

Nachdem die Ergodensätze von v. Neumann und von G. D. Birkhoff in die Wahrscheinlichkeitsrechnung übertragen worden waren, wurden die stochastischen Methoden verfügbar und von Sinaĭ u. a. in der Theorie der dynamischen Systeme benutzt. Vor kurzem haben Ornstein und seine Schüler tiefliegende Ergebnisse erzielt, allerdings sind die Voraussetzungen manchmal nicht stochastischer Natur. So hat die Ergodentheorie ihre unabhängige Entwicklung genommen und scheint sich von den aktuellen Strömen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu lösen.

12.4.7. *Geometrische Wahrscheinlichkeiten*

Dieser Zweig begann mit dem Buffonschen Nadelproblem, das darin besteht, die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, daß eine Nadel gegebener Länge, die zufällig auf eine mit äquidistanten parallelen Linien versehene Ebene geworfen wird, eine dieser Linien trifft. Es wurde von Crofton in mehreren Varianten auf verschiedene geometrische Figuren erweitert. Schon 1896 erkannte E. Cartan, daß es sich darum handelt, die gegenüber den Operationen der Gruppe G invarianten Maße auf einem homogenen Raum G/H einer Lieschen Gruppe G zu finden. Diese Vorstellung wurde von Deltheil 1925 in seinem Buch über die geometrischen Wahrscheinlichkeiten ausgebaut. In dieser Weise verschmolz die Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten mit der sogenannten „Integralgeometrie" und löste sich von den Problemen der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung.

12.4.8. *Abstraktionen*

Wir beschränken uns auf einige wenige Hinweise und verweisen den Leser auf [39].

12.4.8.1. Abstrakte Zufallsvariable

Die Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich leicht auf Zufallsvariable erweitern, deren Werte in einem euklidischen Raum $\boldsymbol{R}^m$ liegen. Wie wir in 12.3.2. gesehen haben, kann ein Prozeß zweiter Ordnung als eine Zufallsvariable mit Werten im Hilbertraum $L^2(P)$ angesehen werden. Das führt auf die Einführung „abstrakter" zufälliger Variabler, welche *meßbare* Abbildungen X von $(\Omega, \mathcal{A})$ in

einen Maßraum $(X, \mathcal{S})$ sind, d. h., für welche $X^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$ gilt. Von diesem Standpunkt aus ist jeder Prozeß $X_T = (X_t, t \in T)$, unabhängig davon, ob die X_t abstrakt sind oder nicht, selbst eine abstrakte Zufallsvariable mit Werten in $(X^T, \mathcal{S}^T)$. Meistens wird das System $\mathcal{S}$ durch eine Topologie auf X bestimmt: Beispielsweise kann $\mathcal{S}$ das System der Borelmengen sein, das von den offenen Mengen erzeugt wird, oder die kleinste σ-Algebra, für welche die Elemente einer Familie gegebener stetiger Funktionen meßbar sind, usw. Die Brownsche Bewegung in einem Zeitintervall, etwa $[0, 1]$, ist eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathcal{C}([0, 1])$, dem Raum der stetigen Funktionen, usw. Ebenso treten Zufallsvariablen mit Werten in einem strukturierten Raum auf, beispielsweise in einem topologischen Vektorraum oder einer kompakten bzw. lokal kompakten Gruppe usw. Stochastische Modelle zufälliger Erscheinungen, die von Differentialgleichungen beherrscht werden, führen zu abstrakten Zufallsvariablen mit Werten in einer Lieschen Gruppe, usw.

Gegenwärtig gruppieren sich die von zahlreichen Forschern untersuchten Probleme um die Bedingungen, unter denen das starke Gesetz der großen Zahlen und die Konvergenz gegen die Normalverteilung für abstrakte Zufallsvariable und insbesondere für solche mit Werten in Banachräumen gelten. Dieser Fall wurde zuerst von Frau Mourier (1953) und Fortet (1954) behandelt und wird auch weiterhin sehr aktiv untersucht. Für Zufallsvariablen in Räumen mit algebraischen Strukturen vergleiche man das Buch von Grenander [19], die Arbeiten von Fürstenberg und die neueren Abhandlungen von Gangolli.

12.4.8.2. Abstrakte Indizes

P. Lévy hat auch für die Brownsche Bewegung, deren Indizes t einen Hilbertraum durchlaufen, überraschende Resultate erzielt.

Gel'fand und Ito haben 1954 und 1955 „zufällige Distributionen" (im Sinne von L. Schwartz) definiert und untersucht, indem sie für T einen der Schwartzschen Räume, insbesondere den Raum $\mathcal{D}$ nahmen. Arbeiten von Urbanik, Dudley und anderen schlossen sich an.

Man kann für T ein System von Borelmengen nehmen, so daß die X_t „zufällige Maße" sind, wie sie in verkleideter Form in den harmonischen und den harmonisierbaren Zerlegungen bei Prozessen zweiter Ordnung auftreten. Bei der Untersuchung von Markoffschen Prozessen, vor allem bei Markoffschen Prozessen Martinscher Ränder (vgl. [15]), treten zufällige Indexmengen auf: Jede Trajektorie $X_T(\omega)$ ist auf $T(\omega)$ definiert. Aus phänomenologischer Sicht sind solche Mengen ganz natürlich, da „Geburt" und „Tod" dem Zufall unterliegen.

12.4.9. Andere Anwendungen

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat nicht nur die Schaffung von Problemen in anderen mathematischen Disziplinen und ihre Untersuchung mit sich gebracht, sondern ihre Methoden und Ergebnisse durchdringen auch mehr und mehr andere

Gebiete. Die Potentialtheorie haben wir bereits erwähnt, nun führen wir einige andere Beispiele an.

Die erste Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Analysis stammt von S. Bernstein (1912). Ausgehend vom Gesetz der großen Zahlen, erhielt er einen rein algebraischen, wesentlich einfacheren Beweis des berühmten Weierstraßschen Satzes über die gleichmäßige Approximation stetiger Funktionen durch Polynome. Auf dem eingeschlagenen Weg fortschreitend, führte er die sogenannten „Bernstein-Polynome" ein, die in der Analysis von großem Nutzen sind (Momentenprobleme, Summationsmethoden, usw.)

Für ein modernes Beispiel zitieren wir seinen Autor Davis (1975): „Die Eigenschaften der Trajektorien einer zweidimensionalen Brownschen Bewegung werden als Grundlage eines Beweises des ‚kleinen' Picardschen Satzes und des analogen Satzes für komplexwertige, auf einer n-dimensionalen einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit definierte Funktionen benutzt, die gewisse Diffusionen auf eine Brownsche Bewegung abbilden." Vorher schon hatte sich Kac der Brownschen Bewegung bedient, um den Satz von Weyl über die Eigenwerte des Laplace-Operators zu beweisen, und schon 1944 hatte Kakutani sie verwendet, um das Dirichletsche Problem und seine „verallgemeinerte Lösung", die N. Wiener angegeben hatte, zu behandeln. (Wiener selbst scheint nicht auf den Gedanken gekommen zu sein, sie zu diesem Zweck zu benutzen.)

Die stochastischen Methoden werden immer mehr auch in anderen Disziplinen verwendet. Wir verweisen auf die Arbeiten von Kubilius und seiner Schule in der Zahlentheorie, von Kahane in der Theorie der Fourierreihen, usw.

12.5. Literatur

[1] L. Bachelier, Théorie de la spéculation, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. *17* (1900), 21—86.

[2] Th. Bayes, An essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances, Phil. Trans. Royal Soc. A *53* (1763).

[3] Jacques Bernoulli, Ars conjectandi, Basel 1718 = Werke, Bd. 3, Birkhäuser, Basel 1975, S. 107—286.

[3][1] Jakob Bernoulli, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi), übersetzt und herausgegeben von R. Haussner, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 107, Engelmann, Leipzig 1899.

[4] M. Bienaymé, Considérations à l'appui de la découverte de Laplace, sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés, C. R. Acad. Sci. Paris *37* (1853), 309.

[5] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, New York 1968.

[6] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Masson, Paris 1953.

[7] E. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Circ. mat. Palermo *27* (1909), 247—270 = Oeuvres, Bd. II, S. 1055 bis 1080.

[8] H. Cramér and M. Leadbetter, Stationary and Related Stochastic Processes, Wiley, New York 1967.

[9] P. Daniell, Stieltjes-Volterra products, Congr. Intern. des Math., Strasbourg (1920), S. 130—136.

[10] F. David, Gambling, Gods and Games, Ch. Griffin, London 1962.

[11] B. Davis, Picard's theorem and Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc. *2/3* (1975), 353—362.

[12] A. de Moivre, Doctrine of Chances, 1718. Nachdruck: Chelsea, New York 1967.

[13] P. de Montmort, Essai d'analyse sur les jeux de hasard, 1708.

[14] J. Doob, Stochastic Processes, Wiley, New York 1953.

[15] E. Dynkin, Markov processes, 2 Bde., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1965 (Russisches Original: Moskau 1963).

[16] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, 2 Bde., Wiley, New York 1950—1966.

[17] C. F. Gauß, Werke, 12 Bde., Göttingen 1870—1927.

[18] I. Gichman and A. Skorochod, The Theory of Stochastic Processes, 3 Bde., übers. von S. Kotz, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1974—1976 (Russisches Original: Moskau 1971—1975).

[19] U. Grenander, Probabilities on Algebraic Structure, Wiley, New York 1963 (Russische Übersetzung: Moskau 1965).

[20] I. Hacking, The Emergence of Probability, Cambridge University Press 1975.

[21] C. Huyghens, Oeuvres complètes, 22 Bde., M. Nijhoff, La Haye 1888—1950.

[22] K. Itô and H. McKean, Diffusion Processes and Their Sample Paths, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1965.

[23] A. Khintchine, Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Fund. Math. *6* (1924), 9—20.

[24] A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin 1933 (3. Aufl. 1973).

[25] P. S. Laplace, Oeuvres, 14 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1878—1912.

[26] L. Le Cam, Asymptotic methods in statistical decision theory, Publ. du Centre de Recherches math., Univ. de Montréal 1974.

[27] P. Lévy, Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, Paris 1925.

[28] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, Paris 1937.

[29] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris 1948, 2. Aufl. 1964.

[30] A. Liapounov, Une proposition générale du calcul des probabilités, C.R. Acad. Sci. Paris *132* (1901), 814—875.

[31] J. Lindeberg, Über das Exponentialgesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Z. *15* (1922), 211—225.

[32] Ju. Linnik, Décomposition des lois de probabilités, Gauthier-Villars, Paris 1962 (Russisches Original: Leningrad 1960).

[33] M. Loève, Probability theory, 3. Aufl., 2 Bde., Van Nostrand, Princeton 1963.

[34] A. Lomnicki, Nouveaux fondements du calcul des probabilités, Fund. Math. *4* (1923), 34—71.

[35] L. Maistrov, Probability Theory, A Historical Sketch, Academic Press, New York 1974. (Russisches Original: Moskau 1967).

[36] A. Markov, Ausgewählte Werke (Russisch), Moskau 1951.

[36][1] A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung, B. G. Teubner, Leipzig 1912.

[37] P. A. Meyer, Probabilités et potentiel, Hermann, Paris 1966.

[38] V. Petrov, Sums of independent random variables, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1975 (Russisches Original: Moskau 1972).

[39] T. Saaty (Hrsg.), Lectures in Modern Mathematics, Bd. 3, Wiley, New York 1965.

[40] F. Spitzer, Principles of Random Walk, Van Nostrand, Princeton 1964.

[41] H. Steinhaus, Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure, Fund. Math. *4* (1923), 286–310.

[42] P. Tschebycheff, Oeuvres, 2 Bde., St. Petersburg 1899–1907.

[43] I. Todhunter, A History of Mathematical Probability, Chelsea, New York (ohne Datum).

[44] N. Wiener, Differential space, J. math. phys. M.I.T. *2* (1923), S. 131–174 = Collected Works, Bd. 1, Cambridge (Mass.) — London 1976, S. 455–495.

Zusatz bei der deutschen Ausgabe:

[45] B. W. Gnedenko, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, insbes. der Abschnitt Kurzer Abriß der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 334 bis 363, 8. Aufl., Akademie-Verlag, Berlin 1980 (Übersetzung aus dem Russischen von H. J. Roßberg).

[46] A. Rényi, Briefe über die Wahrscheinlichkeit, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin/Birkhäuser Verlag Basel 1972 (Übersetzung aus dem Ungarischen von B. Lay, A. Lange und L. Boll).

13. Axiomatik und Logik

von Marcel Guillaume

13.0. Einführung

Gegenstand der Logik ist die Untersuchung der Formen, in denen das Denken als Instrument der Erkenntnis wirkt, sowie die Aufdeckung der Gesetze, die dieses Wirken bedingen. Gegenstand der formalen Logik im engeren Sinne ist das logische Schließen. Die Theorie des Schließens gehört jenem Zweig der Mathematik an, den man seit dem ab Mitte des neunzehnten Jahrhunderts erfolgenden Erscheinen der mathematischen Schriften von G. W. Leibniz ([160]) nach dessen Vorschlag als mathematische Logik bezeichnet.

Die Idee einer „mathesis universalis" (Universalmathematik), d. h. einer Wissenschaft, die über den Wissenschaften von den Zahlen, Größen und Figuren steht, findet sich schon in den *Règles pour la direction de l'esprit* von Descartes.[1]) Ihre tiefere Begründung war eines der Hauptanliegen von Leibniz, der sie unter unterschiedlichen Aspekten betrachtete: als „ars combinatoria", d. h. als Kunst des Kombinierens, worunter Leibniz das Studium jeglicher Arten von Beziehungen verstand, als allgemeine Wissenschaft von der Qualität (Eigenschaften und Relationen) und als „logistica" oder „logica mathematica", d. h. als mathematisierte Logik. Von Leibniz[2]) stammt insbesondere die Idee einer „lingua sive characteristica universalis", d. h. einer universellen formalen Wissenschaftssprache, durch welche die Methoden der Algebra auf das gesamte Gebiet des Denkens ausgedehnt werden sollten, mit dem Zweck, das Denken durch einen „calculus ratiocinator", d. h. ein allgemeines Rechnen mit Begriffen, zu unterstützen.

Die allgemeine Verzögerung, mit der die Leibnizschen Veröffentlichungen nach 1675 herauskamen, hatte zur Folge, daß sich seine Konzeptionen nur in Gestalt einiger sehr allgemeiner und schlecht verstandener Ideen durchsetzten und die von ihm eigentlich vorgesehene und erklärte Entwicklungsrichtung überhaupt nicht zur Geltung kam. Die sporadischen Versuche im achtzehnten Jahrhundert, eine

[1]) Deutsch: *Regeln zur Leitung des Geistes* [65][1] bzw. *Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft* [65][2]. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) Vgl. [162][1], S. 16, 59, 89f., 110f., 451. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

Algebra der Begriffe zu schaffen — der bemerkenswerteste ist der von Lambert —, hatten praktisch keinen Einfluß auf die allgemeine Entwicklung. Erst mit Beginn des neunzehnten Jahrhunderts wuchs der Einfluß der Ideen für eine mathematische Logik wieder an. Die beiden vorangegangenen Jahrhunderte hatten ein breites Spektrum mathematischer Arbeiten hinterlassen und die mathematischen Hilfsmittel bereitgestellt, welche die theoretische Entwicklung, die für den Fortschritt in der Mechanik und in verschiedenen Zweigen der Physik und Chemie unerläßlich war, erst ermöglichen sollten. Die Gesellschaft benötigte nunmehr Ingenieure und infolgedessen auch Lehrkräfte, um sie auszubilden. Hochschulen wurden eröffnet, pädagogische Überlegungen wurden angestellt, der systematische Ideenaustausch wurde organisiert, und die ersten mathematischen Periodika begannen zu erscheinen. Zugleich fingen die Mathematiker damit an, ihre eigene Tätigkeit zum Gegenstand ihrer Untersuchung zu machen und über Methoden und Wesen ihrer Wissenschaft nachzudenken. Die Entwicklung der Geometrie erhielt dadurch einen neuen Impuls und löste ihrerseits eine gründliche Untersuchung der axiomatischen Methode aus. Die Aufmerksamkeit wandte sich von neuem auch den problematischen Begriffen und Bezeichnungen der Analysis und der Algebra zu, und das unter verschiedenen Aspekten. Wohl unbeeinflußt durch die nur auf wenigen Seiten der 1765 erschienenen Schrift [157] von Leibniz anklingende Idee einer „characteristica universalis" bildete sich in dieser Zeit der Begriff der „symbolischen Sprache" heraus, einer *Langue des Calculs* — so der Titel eines 1798 postum erschienenen Werkes von Condillac.[1]) Die Anwendung der axiomatischen Methode auf das, was durch eine solche Sprache an Algebra und dann auch an Arithmetik ausdrückbar ist, führte einerseits zu Formelsprachen, die geeignet waren, die untersuchten mathematischen Formeln übersehbar darzustellen, und sie ermöglichten es andererseits, zwischen den Formeln und ihren unterschiedlichen Interpretationen exakt zu unterscheiden. Beide Entwicklungen überlagerten sich in der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts, und es bildeten sich gegen Ende des Jahrhunderts die nichtformalisierte axiomatische Methode und die moderne Form der mathematischen Logik heraus, wodurch sich der Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts die Untersuchung formalisierter axiomatischer Theorien und ihrer Modelle eröffnete.

13.1. Die Entstehung der axiomatischen Methode im neunzehnten Jahrhundert

Die axiomatische Methode ist eine Art und Weise, exakte Naturwissenschaften lehrmäßig streng darzulegen; das Vorbild hierzu lieferten jahrhundertelang die *Elemente* des Euklid. Damit diese Methode angewendet werden kann, muß das Wissen, das sich aus einem Komplex von Definitionen und Beweisen ergibt, vorher

[1]) Deutsch: *Die Sprache des Rechnens* (zusammen mit *Die Logik oder die Anfänge der Kunst des Denkens*) [54][1]. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

schon bis zu einem gewissen Grade systematisiert sein. So wie die Griechen der Antike die Mathematik auffaßten — und diese Auffassung findet man bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts in allen Werken wieder, in denen die verschiedensten Autoren unterschiedliche Disziplinen axiomatisierten —, schreitet die Darlegung im Prinzip vom bereits Bekannten zu jenem fort, was neu ans Licht gefördert wird. Es gibt aber auch z. B. Ausführungen in Pascals *Pensées* ([206][1], S. 30—33), in denen dieser mit der ihm eigenen Klarheit auseinandersetzt, daß der Geist, wenn er immer wieder Behauptungen in der Weise beweisen will, daß er sie auf schon Bewiesenes zurückführt, notwendigerweise zu einem Ausgangssystem gelangt, das aus Aussagen besteht, die ohne Beweis als richtig angenommen werden müssen und die sich auf Begriffe beziehen, die nicht definierbar sind, also aus Grundprinzipien bzw. Grundbegriffen. An dieser Stelle verwies Pascal, zur Nutzanwendung durch seine Zeitgenossen, auf Werke von Aristoteles ([5][1], [6][1]).

Im Altertum unterschied man zwischen *Axiomen*, die allen Naturwissenschaften gemeinsam sind (Euklid nannte sie „allgemein Eingesehenes"[1]), und *Hypothesen* und *Postulaten*, die von Einzelwissenschaft zu Einzelwissenschaft variieren und sich auf deren speziellen Gegenstand beziehen. Vom dritten Jahrhundert u. Z. an haben allerdings die Kommentatoren der *Elemente* (deren Manuskripte damals nach anderen, häufig nicht peinlich genau abgeschriebenen Vorlagen angefertigt wurden) den Unterschied dieser Bedeutungen aus dem Auge verloren (vgl. [109], Bd. 1, S. 361, bzw. [109a], S. 208), ohne jedoch im allgemeinen aufzuhören, die Grundsätze in Axiome und Postulate aufzuteilen, allerdings willkürlich oder indem sie sich in bezug auf diese Termini ebenso unbestimmten wie sich ändernden Begriffen anpaßten. Heutzutage sind diese Termini zu Synonymen geworden, und zwar am Ende einer Entwicklung, die wir nachzeichnen werden. Seit der Renaissance sah man den Unterschied häufig darin, daß man glaubte, die Wahrheit der Axiome sei denknotwendig und würde die daraus folgenden Aussagen „begründen" — seit Euklid besteht das Prinzip der axiomatischen Methode darin, nichts einzuführen, was nicht aus den verwendeten Axiomen und Definitionen herleitbar ist —, während die Wahrheit der Postulate zwar nicht in Zweifel gezogen, aber nicht als hinreichend begründet angesehen wurde, um ein ausreichendes Fundament zu liefern.

13.1.1. *Das Parallelenproblem*

Aus einem Vergleich zwischen den Werken des Aristoteles, der schon zu seiner Zeit in der Behandlung der Parallelen ([5][1], ii 15.65 a 4) einen Zirkelschluß gesehen hatte, und den einige Jahrzehnte später erschienenen *Elementen* des Euklid schloß der Historiker T. L. Heath ([109], Bd. 1, S. 358, bzw. [109a], S. 197 und 205), daß

---

[1]) Zitiert nach *Die Elemente* von Euklid, 1. Teil. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 235. Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., Leipzig 1933, S. 79. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

das fünfte Postulat der Elemente, das „Parallelenpostulat“[1]), von Euklid vorgeschlagen worden sei, um diese Schwierigkeiten zu überwinden, wofür er jedoch keine einmütige Zustimmung gefunden habe.

Zwischen dem ersten und dem fünften Jahrhundert u. Z. versuchten verschiedene Geometer, von Geminos (um 75 v. u. Z.) bis Proclos Diadochos (410—485), vergeblich, dieses Postulat dadurch aus den anderen Postulaten herzuleiten, daß sie die Parallelität als Äquidistanz definierten (die Forderung, daß zwei Geraden äquidistant sein können, ist dem Parallelenpostulat äquivalent), und noch am Ende des sechzehnten Jahrhunderts unternahm Clavius (1537—1612) einen analogen Versuch.

Nach mehreren Versuchen derselben Art gingen indessen zwischen dem neunten und dem dreizehnten Jahrhundert arabische Mathematiker andere Wege. Namentlich über die aus der Mitte des dreizehnten Jahrhunderts stammenden Werke des Nasīr ad-din aṭ Tūsī (1201—1274)[2]) erhielt man nach der Renaissance in Europa Kenntnis von diesen Schriften, und bei allen Geometern, die im achtzehnten Jahrhundert das Parallelenproblem behandelten, stieß man auf bestimmte ihrer Ideen, so bei G. Saccheri (1667—1733), bei J. H. Lambert (1728—1777) und bei A. M. Legendre (1752—1833).

Etwa um das Jahr 1000 versuchte Ibn al Haitham (= Alhazen, ca. 965—1039) in seiner Schrift *Über die Auflösung der Zweifel im Buche des Euklides über die Elemente* die Negation des Parallelenpostulats ad absurdum zu führen.[3]) Dieser Gedanke, der mit stets wachsenden Anforderungen an Strenge verfolgt wurde, sollte vom achtzehnten Jahrhundert an zur Erarbeitung der nichteuklidischen Geometrien führen und zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts zu der Erkenntnis, daß die Vermutung, das Parallelenpostulat sei aus den anderen Postulaten herleitbar, aufgegeben werden muß.

Schon al Haitham gelangte im elften Jahrhundert zu einigen elementaren Aussagen der nichteuklidischen Geometrie, ohne in ihnen mehr als Kettenglieder eines indirekten Beweises zu sehen, die abzulehnen seien. Saccheri erhielt sogar ganze Abschnitte der nichteuklidischen Geometrie, ohne sie als solche zu erkennen. Im gleichen Geiste bewies Legendre den später nach ihm benannten Satz: Wenn jede Gerade unbegrenzt verlängert werden kann, so kann die Summe der Winkel eines Dreiecks zwei Rechte nicht überschreiten. Lambert, dessen unvollendete, um 1766 entstandenen Untersuchungen erst nach seinem Tode 1786 veröffentlicht wurden, war der erste, der davon absah zu behaupten, er sei zu einem Ergebnis gekommen, nach welchem die dem Parallelenpostulat entgegengesetzte Annahme abgelehnt werden müsse.

---

[1]) (Gefordert soll sein . . .) „Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind“. (Zitiert nach dem in der vorigen Fußnote zitierten Werk, S. 3. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

[2]) Die Schreibweise der arabischen Namen richtet sich hier nach [307][1]. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) Vgl. dazu [307][1], S. 280.

Im Hinblick auf die Methode, unseren hier vornehmlich zu behandelnden Untersuchungsgegenstand, stimmten die Vorstellungen und Entdeckungen der Geometer des achtzehnten und neunzehnten Jahrhunderts im wesentlichen mit der von Lambert überein, der auf analytischem Wege den Flächeninhalt eines Dreiecks als Funktion der Differenz zwischen zwei Rechten und der Winkelsumme darstellte, sowie mit der von J. Bolyai (1802—1860), der im Jahre 1823, nachdem er die Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie wiederentdeckt hatte, vermutete, daß die anderen Axiome Euklids nicht zwischen dem Parallelenpostulat und entgegengesetzten Annahmen zu entscheiden gestatten.[1]) Den entscheidenden Schritt tat N. I. Lobačevskij (1792—1856), der 1827 zu der Überzeugung kam, daß die Grundbegriffe der Geometrie keineswegs klar seien. Seitens der Algebraiker waren es die Ideen und Entdeckungen von G. Peacock (1791—1858), der in den Jahren 1830 und 1833 eine neuartige Konzeption der Algebra vorschlug, wobei er anregte, die Algebra gemäß der axiomatischen Methode als Wissenschaft der Kalküle mit Buchstabenausdrücken aufzufassen und von ihren „interpretativen Wissenschaften" zu unterscheiden, in denen diese Ausdrücke jeweils eine unterschiedliche Bedeutung annehmen können. Besondere Bedeutung hatten ferner die Ideen von A. Cayley (1821—1895), der (1859) Uminterpretationen von derartigen Ausdrücken einführte, und in bestimmten Spezialisierungen dieser Uminterpretationen konnte F. Klein (1849—1925) im Jahre 1871 Realisierungen dessen erkennen, was wir heute als „Modelle" nichteuklidischer Geometrien in einem Modell der Euklidischen Geometrie verstehen.

13.1.2. *Das Auftauchen der nichteuklidischen Geometrien*

Zu einem nicht genau feststehenden Zeitpunkt, jedoch spätestens 1697 verfaßte Saccheri eine *Logica demonstrativa* (Beweislogik),[2]) die einzige Abhandlung aus der klassischen formalen Logik, in welcher behauptet wird, sie gehe streng nach der axiomatischen Methode vor, „nach dieser strengen Methode, welche die Anzahl der Grundsätze möglichst einschränkt und nichts zuläßt, was nicht klar, evident und unzweifelhaft ist".[3]) Ebendort lenkte er die Aufmerksamkeit auf eine Variante der indirekten Beweisführung, die, wie er sagt, eigentlich schon von Euklid, Theodosios (um 100 v. u. Z.), Cardano (1501—1576), Clavius angewandt, wenn auch in den älteren Werken zur Logik nicht erklärt worden sei und die er als erster systematisch benutzte: Wenn aus der Annahme, die zu beweisende Aussage sei falsch, die Wahrheit dieser Aussage folgt, so läßt sich daraus schließen, daß diese Aussage wahr sein muß.[4])

---

[1]) Gauß war zu derselben Ansicht gelangt, hatte sie jedoch niemals öffentlich geäußert.

[2]) Nach F. Engel und P. Stäckel *[69 bis] schon 1692. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) Nach [145], S. 345. (Zitat aus dem Französischen übersetzt. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe*).

[4]) Nach [16], S. 222.

In seiner Schrift *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Der von jedem Makel befreiete Euklid)[1]) aus dem Jahre 1733 betrachtete Saccheri das von arabischen Geometern im dreizehnten Jahrhundert eingeführte gleichschenklige Trapez, und zwar mit dem Ziel, die Negation des Parallelenpostulats ad absurdum zu führen. Dieses Trapez wird konstruiert, indem man in den Endpunkten einer Strecke AB zwei gleichlange Senkrechte AC und BD errichtet. Die inneren Winkel bei C und D sind dann einander gleich. Ist jeder ein Rechter, so folgt daraus das Parallelenpostulat. Saccheri leitete weiter lang und breit Folgerungen aus der Hypothese her, jeder der beiden Winkel sei spitz, und dann Folgerungen aus der Hypothese, jeder der beiden Winkel sei stumpf. Bei dieser Gelegenheit erarbeitete er, ohne sich dessen bewußt zu sein, daß er neue Gebiete erschloß, beachtliche Teile jener Geometrien, die heute nach Bolyai und Lobačevskij bzw. nach Riemann benannt werden. Wenn er schließlich doch zu dem Ergebnis kam, die beiden Hypothesen seien zu verwerfen, so nicht deshalb, weil er auf die erwarteten formalen Widersprüche gestoßen wäre, sondern weil er zu Schlußfolgerungen gelangte, die er nicht für akzeptabel hielt.

Etwa 30 Jahre später befaßte sich Lambert mit den Grundlagen der Geometrie und schrieb zugleich seine 1770 erschienene *Sphärische Trigonometrie*,[2]) welche u. a. auch die Formel für den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks enthält. Bei seinen Untersuchungen zum Parallelenproblem dachte er nun daran, auf analoge Weise den Flächeninhalt eines Dreiecks im Saccherischen Fall des spitzen Winkels zu berechnen, und entdeckte, daß dieser hier der Differenz zwischen zwei Rechten und der Winkelsumme des Dreiecks proportional ist, was ihn auf eine charakteristische Konstante des Raumes führte (die Euklidische Geometrie entspricht dem Fall, daß diese Konstante unendlich wird).

Ab 1792 interessierte sich auch Gauß für das Parallelenproblem und erkannte seine Bedeutung. Nach und nach kam er zu der inneren Überzeugung, daß man, wenn man jene Hypothese akzeptiert, die er „anti-euklidisch" nannte ([86], Bd. 8, S. 175), „auf eine eigene, von der unsrigen (euklidischen) ganz verschiedene Geometrie komme, die in sich selbst durchaus consequent ist", wobei man „jede Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln läßt" ([86], Bd. 8, S. 187).[3]) Jedoch wagte Gauß es nicht, seine Gedanken über diesen Gegenstand zu veröffentlichen, weil — wie er im Jahre 1829 an Bessel schrieb — „ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte" ([86], Bd. 8, S. 200). Und in der Tat widersprachen diese Gedanken der Philosophie Kants, die damals vorherrschte und den euklidischen Raum zu einer reinen Anschauungsform a priori vor jeder Erfahrung machte; der „Fürst der Mathematiker" (wie Gauß seit 1855 genannt

---

[1]) Deutsch in: F. Engel und P. Stäckel *[69 bis]. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) J. H. Lambert, Observations trigonométriques, Berlin 1770; deutsch in *[69 bis]. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) Hier zitiert nach H. Reichardt, *Gauß und die nicht-euklidische Geometrie*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1976, S. 38; vgl. auch *[69 bis]. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

werden wird) wußte, daß innere Überzeugung keinen Beweis bildet, der Ungläubige bekehren könnte.

Farkas (= Wolfgang) Bolyai (1775—1858), der Vater von J. Bolyai, war Studienkollege von Gauß gewesen und mit diesem im Briefwechsel geblieben. Insbesondere hatte Gauß mehrere Beweisversuche von W. Bolyai für das Parallelenpostulat widerlegt. Im Jahre 1833 veröffentlichte W. Bolyai in lateinischer Sprache seine Abhandlung *Tentamen*, eine Einführung in die Elemente der Mathematik. In einem Anhang zum zweiten Band erläuterte J. Bolyai seine eigenen Resultate; der Titel des Anhangs lautet: *Appendix. Scientiam Spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis* XI *Euclidei* (*a priori haud unquam decidenda*) *independentem adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica* (Deutsche Fassung, von J. Bolyai selbst gegenüber der ursprünglichen Fassung geändert: *Raumlehre, unabhängig von der* (*a priori nie entschieden werdenden*) *Wahr- oder Falschheit des berüchtigten XI. Euklid'schen Axioms, für den Fall einer Falschheit desselben geometrische Quadratur des Kreises*).[1])

J. Bolyai nannte das System der Aussagen, zu deren Beweis weder das Parallelenpostulat noch die Saccherische Hypothese des spitzen Winkels benutzt werden müssen (da er die Gerade als unbegrenzt verlängerbar voraussetzte, ist der Fall des stumpfen Winkels ausgeschlossen), die „absolute Wissenschaft des Raumes" („absolute Geometrie"); dementsprechend besteht seine Abhandlung aus drei Teilen: „absolute" Geometrie, nichteuklidische Geometrie (wobei zu den Axiomen der absoluten Geometrie die Hypothese des spitzen Winkels hinzugenommen wird), Euklidische Geometrie (wobei statt dieser Hypothese das Euklidische Parallelenpostulat zu den Axiomen der absoluten Geometrie hinzugenommen wird). Somit sind die Axiome so angeordnet, daß die Tragweite des bewußten einen Axioms deutlich hervortritt. Die beiläufige Bemerkung jedoch, daß die übrigen Axiome nicht zwischen den verschiedenen Hypothesen über die Parallelen zu entscheiden gestatten — eine Überzeugung, zu der J. Bolyai etwa zehn Jahre zuvor gekommen war —, blieb ohne Beweis, und J. Bolyai wurde vom Zweifel darüber zeitlebens geplagt.

N. I. Lobačevskij war von 1822 bis 1848 Inhaber des Lehrstuhls für reine Mathematik der Universität Kasan; er war ihr führender Kopf und seit 1827 ihr Rektor. Von 1826 an legte er seinen Kollegen an der Universität seine Vorstellungen dar; seine 1829 in russischer Sprache veröffentlichten Ideen *über die Anfangsgründe der Geometrie* [171] wurden jedoch in Westeuropa erst ein Jahrzehnt später bekannt.[2]) Er gelangte zur Geometrie des spitzen Winkels nach einer kritischen Überprüfung der Grundbegriffe der Geometrie, die genau unseren heutigen Methoden des Herangehens entspricht.

So schrieb er 1835 in seiner Abhandlung *Neue Anfangsgründe der Geometrie*: „Raum, Ausdehnung, Ort, Körper, Fläche, Linie, Punkt, Richtung, Winkel sind

---

[1]) (Ebenda, S. 63. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe*). Diesen Appendix hat Houël ins Französische übersetzt und 1867 in den *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, Bd. 5, veröffentlicht.

[2]) Deutsche Übersetzungen der Arbeiten Lobačevskijs sind ab 1840 in Berlin und Leipzig erschienen. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

Wörter, mit denen man die Geometrie beginnt, mit denen man aber niemals einen klaren Begriff verbindet ... Es ist nöthig zu bemerken, daß hier die Unklarheit im Begriffe durch die Abstraktheit hervorgerufen wird, die bei der Anwendung auf wirkliche Messungen überflüssig wird ... Andrerseits giebt es in der Natur weder gerade noch krumme Linien, weder Ebenen noch krumme Flächen; wir finden darin nur Körper, so daß alles Uebrige von unsrer Einbildungskraft geschaffen und daher blos in der Theorie vorhanden ist" ([171][1]—[172][1], S. 80, 82 (1835)).[1]) Die Situation, die hier für die Geometrie beschrieben wird, ist analog jener, die man, je nach dem einzelnen Wissensgebiet zeitlich früher oder später, in verschiedenen Zweigen der Physik, der Chemie und z. B. auch in der Differential- und Integralrechnung antrifft, wenn sich nach zahlreichen Versuchen und unter großen Anstrengungen die Grundbegriffe und Grundprinzipien herauskristallisieren, die anfänglich verschwommen und hypothetisch waren, wo es dann aber gelingt, ihnen die Schärfe und Untermauerung zu geben, die unentbehrlich sind, wenn die Theorie liefern soll, was man von ihr erwartet.

In der Geometrie gingen die weiteren Fortschritte mit den Entwicklungen in der Differentialgeometrie einher, welche aus dem Bestreben herrührten, genaue Karten herzustellen. So ist der Name Lamberts mit einem Projektionsverfahren verbunden. Gauß, der im Jahre 1816 beauftragt worden war, eine genaue Karte des Königreichs Hannover anfertigen zu lassen und der von 1821 bis 1826 die zugehörigen Vermessungsarbeiten geleitet hatte, veröffentlichte 1827 aus der Theorie, die er zu diesem Zweck ausarbeitete, seine *Allgemeine Flächentheorie* (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*) ([86], Bd. 4, S. 217, vgl. auch [86][1]), in der er die Begriffe geodätisches Koordinatensystem und innere Geometrie einer Fläche einführte und nachwies, daß für ein unendlich kleines geodätisches Dreieck der Exzeß (Überschuß) bzw. der Defekt der Summe der Winkel gegenüber zwei Rechten sich durch die Totalkrümmung der Fläche ausdrücken läßt (vgl. 9.3.). Daraus folgt, daß die Abstände auf der Fläche, die von auf der Fläche liegenden Kurven eingeschlossenen Winkel, die Flächeninhalte der von solchen Kurven begrenzten Gebiete und schließlich die Eigenschaften von ihnen gebildeter Figuren nur von dem „Element ds^2" der Fläche abhängen und sich nach Formeln berechnen lassen, die davon unabhängig sind, daß die Fläche in den Raum eingebettet ist.

In seinem Habilitationsvortrag aus dem Jahre 1854 „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" ([250], S. 272) verallgemeinerte B. Riemann (1826—1866) den Begriff der Fläche zu dem der „n-dimensionalen Mannigfaltigkeit", legte dar, wie sich die Gaußschen Ergebnisse übertragen lassen, und bemerkte, indem er zu den Flächen zurückging, daß die Existenz einer Bewegungsgruppe nicht daran gebunden ist, daß die Totalkrümmung in jedem Punkt null ist, wie bei der Ebene, sondern daran, daß sie konstant ist. Je nachdem, ob die Totalkrümmung null, negativ oder positiv ist, gelangt man zu der Euklidischen

[1]) Condillac hatte 1780 in seiner *Logique* ([54], S. 381, [54][1], S. 92) bemerkt: „Trotzdem werden immer Ideen übrigbleiben, die man gar nicht oder wenigstens nicht nach jedermanns Meinung bestimmen kann. Da nämlich die Menschen sich nicht darüber einigen konnten, sie alle auf dieselbe Weise zusammenzusetzen, sind sie notwendigerweise unbestimmt."

Geometrie, der Geometrie der Hypothese des spitzen Winkels bzw. der Geometrie der Hypothese des stumpfen Winkels. Diese letztgenannte, die bis dahin nur wenig entwickelt worden war, nannten die Zeitgenossen „Riemannsche Geometrie".

Damit verlor das Parallelenpostulat den Status einer „absoluten Wahrheit", in den es erhoben worden war; es nahm nun den einer möglichen Hypothese unter anderen an. Für die Zeitgenossen von Riemann handelte es sich dabei um Annahmen über den physikalischen Raum, und es war für sie eine Frage des Experiments, zu entscheiden, welche die richtige ist: „... es bleibt nur die Frage zu erörtern, wie, in welchem Grade und in welchem Umfange diese Voraussetzungen durch die Erfahrungen verbürgt werden" ([250], S. 284). Schon 1834 hatte Lobačevskij dazu astronomische Beobachtungen empfohlen. Gauß hatte, als er sich mit seinen geodätischen Arbeiten beschäftigte, ebenfalls die Vorstellung, die Größe der ausgemessenen Dreiecke zu dem Versuch auszunutzen, die Abweichung ihrer Winkelsumme von π abzuschätzen. Da die festgestellte Differenz jedoch unterhalb der Größenordnung der Meßfehler lag, waren keine Schlußfolgerungen möglich. Die Tatsache, daß in jedem der dem Wert der Totalkrümmung entsprechenden Fälle eine mathematische Behandlung möglich war, verlieh der Mathematik eine von der unmittelbaren Erfahrung relativ unabhängige Stellung. Bourbaki ([30][1], S. 26) bemerkt dazu: „Keiner der vorangegangenen Autoren scheint in Zweifel gesetzt zu haben, daß selbst, wenn eine Geometrie nicht mehr der experimentellen Wirklichkeit entspricht, ihre Lehrsätze trotzdem weiterhin mathematische Wahrheiten bleiben." Natürlich war man über unmerkliche Stufen zu diesem Standpunkt gelangt, und im Laufe dieser Entwicklung hatte sich die Anzahl der neu entdeckten Interpretationen der analytischen Kalküle im Rahmen der üblichen Euklidischen Geometrie vervielfacht; wie dem auch sei, die Riemannschen „Mannigfaltigkeiten" sind „lokal euklidisch", und die tatsächlichen Gegebenheiten der im täglichen Leben wahrnehmbaren Erfahrungen können im Vergleich zu den Entfernungen, mit denen es die Astronomen zu tun haben, durchaus als „lokal" angesehen werden.

13.1.3. Der Streit zwischen den Anhängern der „analytischen" und denen der „synthetischen" Methode

Lazare Carnot (1753—1823), „der Organisator des Sieges", hatte 1803 in seiner *Géométrie de Position* [44] das Problem einer Behandlung der von den „Hieroglyphen der Analysis" befreiten Geometrie aufgeworfen.[1]) Zu diesem Zweck entwickelte er eine „Theorie der korrelativen Figuren", mit deren Hilfe es gelingen sollte, für verschiedene spezielle Figuren eine gemeinsame Struktur zu finden, als deren „Spezialfälle" sie anzusehen seien.

Im Anschluß daran hatte sich Poncelet in der Einführung zu seinem *Traité des propriétés projectives des figures* ([239], 1822) das Programm gesetzt, einen Stand der Dinge zu beenden, bei dem nur „die analytische Geometrie allgemeine und einheitliche Methoden anbietet, während sich die übrige Geometrie rein zufällig

---

[1]) Damals hatte Champollion (1790—1832) die ägyptische Schrift noch nicht entziffert. Carnots Stichelei richtete sich gegen den Gebrauch der komplexen Zahlen.

entwickelt". In Deutschland wurde diese von den Anhängern der analytischen Geometrie — J. D. Gergonne (1771—1859), A. F. Möbius (1790—1868), J. Plücker (1801—1868) — bekämpfte Auffassung durch J. Steiner (1796—1863) aufgegriffen und zu einer Unterscheidung zwischen „analytischen" und „synthetischen" Methoden geführt, die heutzutage fast vergessen ist: Letztere „gelangen zu ihrem Ziel, ohne von algebraischen Symbolen irgendwelchen Gebrauch zu machen", wie Gergonne ([3], Bd. 7, S. 358) erklärte. Zwischen den Anhängern jener beiden Methoden hatte es während des ganzen neunzehnten Jahrhunderts Auseinandersetzungen gegeben.

Im Jahre 1847 veröffentlichte der deutsche Geometer Ch. v. Staudt (1798—1867) eine *Geometrie der Lage* ([277]), die in dieser Debatte ein Zeichen setzte. Vor ihm wurden sowohl die unendlich fernen als auch die imaginären Elemente wenigstens durch eine implizite Bezugnahme auf Gleichungen eingeführt; selbst die Unterscheidung zwischen projektiven und metrischen Eigenschaften (deren Behandlung auf algebraische Rechnungen führt) blieb dabei verschwommen, da sich ein Ausdruck, der sich durch Operationen mit Längen von Strecken ergibt, durchaus als projektiv herausstellen kann, wie beispielsweise das Doppelverhältnis von vier Punkten (vgl. 2.4.4.).

Wir werden später (in 13.1.5.) sehen, wie Cayley Klarheit in diese Unterscheidung brachte. Im Erlanger Programm [143][1] zog F. Klein daraus den Schluß, es sei unproduktiv, weiterhin die eine Methode der anderen gegenüberzustellen, es komme vielmehr darauf an, beide nebeneinander zu benutzen, und zwar jeweils die am besten geeignete ([143][1], S. 70). Nichtsdestoweniger blieb die Frage zu klären, wie die projektive Geometrie als isoliertes Teilgebiet des Wissens zu axiomatisieren ist oder — anders betrachtet — wie sich ihre Beziehungen zu den Nachbargebieten gestalten. Aus den Antworten, die in den Werken gegeben wurden, von denen später die Rede sein wird — insbesondere in dem Werk von M. Pasch (vgl. 13.1.6.) (an das sich eine ganze Reihe der Arbeiten von Peano und seiner Schüler (vgl. 13.1.7.) anschließen) und in den Hilbertschen *Grundlagen der Geometrie* (vgl. 13.1.8.) —, kristallisierte sich schließlich die strenge Auffassung der modernen Axiomatik heraus.

Die großartige Leistung Ch. v. Staudts (als solche wurde sie seit dem Erscheinen seines Buches empfunden) bestand darin, die Inkonsequenz des Zurückgreifens auf Maßzahlen dadurch zu überwinden, daß er einen Ersatz dafür fand. In seinem Werk *Der barycentrische Calcul* ([192], Bd. 1, 1827) hatte Möbius gezeigt, wie man, ausgehend von drei paarweise voneinander verschiedenen Punkten einer Geraden, mit alleiniger Hilfe des Lineals den vierten harmonischen Punkt konstruieren kann. Daraus leitete v. Staudt ein geometrisches Verfahren zur Ermittlung der „Koordinaten" eines Punktes auf einer Geraden her, die durch drei so festgelegte „Grundpunkte" gegeben wird (es sind diejenigen, die der homogenen Parameterdarstellung entsprechen, in welcher die Parameter dieser drei Punkte 0, 1 und ∞ sind; ganz sicher entspricht es aber nicht dem Geist der Arbeit v. Staudts, solche Hilfsmittel zu benutzen): Es wird die Konstruktion des vierten harmonischen Punktes zu drei schon erhaltenen Punkten iteriert. Erst 1873, nach der Veröffentlichung von Dedekinds Definition der reellen Zahlen durch „Schnitte", wurde durch F. Klein ([142],

S. 139—140) die Notwendigkeit eines „Stetigkeitsaxioms" erkannt, damit auch den Punkten mit irrationalen Parametern in dieser Weise Koordinaten zugeordnet werden können.

13.1.4. *Die Kritik an dem Axiomensystem Euklids*

Die erwähnten Bemühungen um Kärung der Grundlagen, welche immer sorgfältigere Überlegungen erforderten, waren naturgemäß von entsprechenden Bestrebungen begleitet, die Euklidische Geometrie selbst mit der gleichen Strenge zu behandeln.

Für diejenigen Disziplinen, welche ihre Grundbegriffe und -prinzipien noch nicht gefunden hatten, bildete die Euklidische Geometrie der Sache nach einen Modellfall, den man zu imitieren sich bemühte. Doch wurden diejenigen Geometer, welche verschiedene Teile dieser Geometrie in Frage stellten, immer zahlreicher, eben angesichts des Bildes, das sie sich von ihr machten.

Legendre kritisierte nach Leibniz und unabhängig von ihm[1]) die von Euklid angegebene Definition der geraden Linie, die ihm nicht klar erschien und von „der dieser überdies in seinen Überlegungen keinen Gebrauch machte"; und nachdem er versucht hatte, das Archimedische Postulat „Von allen Linienstücken, die gleiche Endpunkte haben, ist die gerade Linie die kürzeste"[2]) (vgl. *[109a], S. 294) zu einer Definition zu machen, ahnte er die Richtung voraus, welche die späteren Entwicklungen nehmen würde, und gab folgende Definition:[3]) „Die Gerade ist diejenige Linie, welche unbeweglich bleibt, wenn zwei ihrer Punkte fest bleiben."

Es gibt bei Legendre selbstverständlich keine konsequente logische Kritik seiner eigenen Einstellung; insbesondere scheint er nicht über das Konzept des Grundbegriffs nachgedacht zu haben, und ebenso wie die Werke seiner Vorläufer enthalten auch seine Schriften von ihm als „Definitionen" bezeichnete Beschreibungen von Begriffen, welche die Aufgabe haben, die Evidenz der Axiome zu begründen. Man sollte sich über den Sinn der Diskussionen, denen er sich damit aussetzte, nicht täuschen: In diesen „Definitionen" stecken bereits alle die Eigenschaften, aus deren Vorliegen jene Evidenz entspringen sollte und aus denen er seine Schlußfolgerungen zog. Diese Eigenschaften müßten eigentlich unter die Axiome aufgenommen werden, und dann hätte man das Axiomensystem, das von Legendre wirklich benutzt wurde.

Schon im sechzehnten Jahrhundert stellte sich Clavius, ein Herausgeber der *Elemente*, die Frage, ob alle rechten Winkel einander gleich sind, und bemerkte, daß bei Euklid ein Postulat fehle, das die Existenz der vierten Proportionale sichert. Leibniz bemerkte, schon am Anfang der *Elemente* werde ohne nähere Begründung

---

[1]) Leibniz' mathematische Schriften wurden erst ab 1858 von C. I. Gerhardt in Halle herausgegeben.

[2]) Hier zitiert nach Archimedes, *Kugel und Zylinder*, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 202, Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., Leipzig 1922, S. 8. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) Zweite Auflage der *Eléments de Géométrie*, S. VII.

angenommen, daß zwei Kreise, von denen jeder durch den Mittelpunkt des anderen geht, einen Punkt gemein haben. Gauß schrieb am 6. 3. 1832 in einem Brief an W. Bolyai ([86], Bd. 8, S. 222), daß „solche Worte, wie ‚zwischen' auch erst auf klare Begriffe gebracht werden" müssen.[1]) Im Jahre 1856 bemerkt H. Graßmann, man müsse als Axiom formulieren, daß eine Gerade ganz in einer Ebene enthalten ist, wenn zwei ihrer Punkte darin liegen.

Im letzten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts wurden die Benutzung von Bewegungen und der Begriff der Gleichheit von Figuren (Leibniz, dem wir heute darin folgen, sprach lieber von „Kongruenz"), die man lange als selbstverständlich angenommen hatte, einer Kritik unterworfen; so zählte H. Helmholtz (1821—1894) zu den „Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen" die Existenz und „die freie Beweglichkeit" fester (starrer) Körper sowie die Existenz eines Abstandes, der gegenüber den Transformationen invariant ist, welche die freie Beweglichkeit im Raum erhalten: „Congruenz ist ein unabhängig von allen Bewegungen bestehendes Factum" ([111], 1868).

Die erste Darlegung der Geometrie, welche den Maßstäben an Strenge der „synthetischen" Methoden und dieser zeitgenössischen Kritik gerecht wird, stammt von M. Pasch ([207], 1882); auf seine *Vorlesungen über neuere Geometrie* kommen wir in 13.1.6. zurück, nachdem wir untersucht haben, wie im dritten Viertel des neunzehnten Jahrhunderts der Begriff der Interpretation, der zu dieser Zeit erarbeitet wurde, in die Geometrie eindrang.

13.1.5. Von der Cayleyschen Synthese zum Erlanger Programm

Die Übertragung einer vorher für eine einfache Figur bewiesenen Eigenschaft auf eine kompliziertere Figur unter Zuhilfenahme einer passenden Transformation ihrer Elemente, wie sie schon Desargues verwendete, geht notwendigerweise von einfacheren Eigenschaften, die erhalten bleiben, zu komplizierteren invarianten Eigenschaften über. Dadurch gelangt man zu einer neuen, stärker analytischen Art des Verständnisses der Aussagen, die sich an die Methode der Logiker anlehnt. Das heißt aber auch — und dies fing schon mit den Versuchen zur Rationalisierung jenes Vorgehens an, wie sie seit Anfang des neunzehnten Jahrhunderts unternommen wurden (beispielsweise in L. Carnots *Théorie des figures correlatives* [44]) —, daß man mit „Eigenschaften" und mit „Relationen der gegenseitigen Abhängigkeit" zu operieren begann, d. h. mit Dingen, die weder Zahlen noch Figuren sind, und zwar in derselben Weise wie mit den Objekten, die damals als für die Mathematik spezifisch angesehen wurden. Die Einteilung der Eigenschaften in projektive und metrische bildete dabei ein auslösendes Moment für die mathematische Behandlung des Begriffs „Eigenschaft".

Die Untersuchung der Transformation durch reziproke Polaren (vgl. 2.4.4.) hatte Poncelet dazu geführt, folgendes zu schreiben ([3], Bd. 8, S. 210), und zwar noch vor Veröffentlichung seines *Traité des propriétés projectives des figures* [239]: „Es

[1]) Zitiert nach H. Reichardt, *Gauß und die nicht-euklidische Geometrie*, S. 60. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

gibt keine deskriptive[1]) Relation einer in einer Ebene gegebenen Figur, die nicht ihre Entsprechung in einer anderen Figur hätte.“ Er stellte sich in der Folge das Ziel ([3], Bd. 17, S. 266), „die Übersetzung aller ... Eigenschaften, und seien sie noch so wenig allgemein, welche einer gegebenen Figur und ihrer reziproken zukommen, irgendwie auf ein rein mechanisches Verfahren, eine einfache Ersetzung von Namen und Buchstaben, welche für die einen und die anderen geschrieben stehen, zurückzuführen“.

Gergonne schrieb in seinen *Annales* ([3], Bd. 16, S. 210): „In der ebenen Geometrie entspricht jedem Satz notwendigerweise ein anderer, der sich dadurch ergibt, daß man die Wörter Punkte und Geraden vertauscht“, und dann ging er noch weiter, indem er konstantierte: „Es gibt sogar zwischen den Beweisen der beiden Sätze ein und desselben Paares dieselbe Korrespondenz wie zwischen den Sätzen selbst“ (ebenda S. 211). Damit behandelte er faktisch sowohl die Sätze als auch ihre Beweise als Objekte, die dem Begriff der Korrespondenz unterliegen. Und um die Leser zu frappieren — er bemühte sich stets um das pädagogische Element —, legte er die Anfänge der Geometrie in zwei Spalten dar, die so angeordnet sind, daß die einander gegenüberstehenden Sätze und Beweise auseinander hervorgehen, indem man die einander dualen Termini austauscht.[2]) Er sagte auch, wie sich aus Sätzen, die zu einem System von dualen Sätzen der räumlichen Geometrie gehören, duale Sätze der ebenen Geometrie und ihre Analoga in der Geometrie auf der Kugel herleiten lassen (S. 220, 223).

Es hat nicht den Anschein, daß Gergonne jemals den Zusammenhang zwischen diesen Konsequenzen des Dualitätsprinzips, die er so gut herausgearbeitet, und seinen eigenen Bemerkungen, die er zehn Jahre früher über die relative Unabhängigkeit der Deduktion in bezug auf die Bedeutung der Wörter gemacht hatte, klar formuliert hätte: „Man wiederholt unaufhörlich, *daß man nur mit Objekten operieren dürfe, von denen man eine klare Vorstellung hat*;[3]) trotzdem ist nichts falscher. Tatsächlich operiert man mit Wörtern ganz so wie man in der Algebra mit Buchstaben rechnet; und ebenso, wie man eine Rechnung exakt durchführen kann ..., ohne sich über die Bedeutung der Symbole, mit denen man operiert, Gedanken zu machen ..., kann man ... einer Überlegung folgen, ohne die Bedeutung der Termini zu kennen ..., in welchen sie sich vollzieht, oder auch nur daran zu denken, wenn man sie kennt“ ([3], Bd. 7, S. 211).

Dieser Gedankengang wurde von A. Cayley, beginnend mit seiner von 1854 bis 1858 erscheinenden einführenden Reihe *Memoirs on quantics*[4]) ([47], Bd. 2), näher

[1]) d. h. projektive; die Terminologie scheint vor Hilbert nicht festgelegt zu sein. M. Pasch [207] benutzte noch „graphisch“, „deskriptiv“, „projektiv“ und „der Lage“ als Synonyma.

[2]) Diese Art der Darlegung machte Schule und findet sich in bezug auf die Dualität von Konjunktion und Disjunktion ([G—H], S. 112) bei der Behandlung der Booleschen Algebra wieder, so z. B. in E. Schröders *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [259]. Bourbaki ([30][1], S. 35) weist auch auf ihren Einfluß bei der Herausbildung des Isomorphiebegriffs hin.

[3]) Hervorhebungen von Gergonne selbst.

[4]) Cayley nannte „quantics“, was wir heute „Form“ (im Sinne eines homogenen Polynoms) nennen.

ausgeführt. An der Universität Cambridge, an der Cayley zwischen 1838 und 1841 seine Studien vollendete, hatten Überlegungen der Algebraiker, auf die wir in 13.2.2. zurückkommen werden, zwischen 1830 und 1845 zur „symbolischen Algebra" geführt, in welcher nach vereinbarten Regeln kombinierten und umgeformten formalen Ausdrücken die Interpretationen gegenübergestellt werden, deren das aus ihnen bestehende System fähig ist. Das Genie Cayleys kommt unter anderem darin zum Ausdruck, daß er diese Vorstellung auf Wörter ausdehnt, wobei er sich voll darüber im klaren war, daß die Wörter eventuell abweichend vom üblichen Sprachgebrauch gedeutet werden müssen.

Cayley bewunderte die Arbeiten Plückers, der mit Gergonne in intensivem Briefwechsel stand und dem man seit 1828 die analytische Version der Dualität verdankt. Plücker hatte schon damals geschrieben: „Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, dass die Analysis eine Wissenschaft ist, die, unabhängig von jeder Anwendung, selbstständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, so wie von einer anderen Seite die Mechanik, bloss als die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem grossen erhabenen Ganzen erscheint" ([231], Bd. 2, S. IX). Und 1821 schrieb Ch. Babbage in einer unveröffentlichten Abhandlung, über die er aber Peacock berichtete: „Die Zahlen sind zweifellos eines der umfassendsten Gebiete, auf welches die (logische) Analyse angewandt worden ist; die Geometrie kommt erst an zweiter Stelle. Was ihren Wirkungsbereich betrifft, so können beide nicht alle Beziehungen zum Ausdruck bringen, welche durch die Sprache der Zeichen erfaßt werden" (zitiert nach [65 ter])[1]. Eine solche Unterscheidung war Bolzano schon 1817 klar (vgl. 6.1.2.) und ebenso F. J. Servois, der 1814 die Darstellung der komplexen Zahlen durch Argand (vgl. 4.3.) qualifiziert hatte als eine „geometrische Maskierung, die auf analytische Formen angewandt wird, deren unmittelbare Benutzung ... einfacher und schneller scheint" ([3], Bd. 4, S. 229; [4], S. 103).

Im 6. *Memoir on quantics* aus dem Jahre 1859 schrieb Cayley: „1° ... das Wort Punkt kann Punkt bedeuten, das Wort Gerade Gerade; 2° ... das Wort Punkt kann Gerade bedeuten, das Wort Gerade Punkt ... Durch eine solche Erweiterung der Bedeutung der Termini können wir die einander entsprechenden Sätze unter einer gemeinsamen Formulierung zusammenfassen" ([47], Bd. 2, S. 61). „Wir werden in die zweidimensionale Geometrie die Geometrie auf der Kugel einbeziehen; zu diesem Zweck bedeuten die Wörter Ebene, Punkt und Gerade Kugelfläche, Paar von diametral gegenüberliegenden Punkten bzw. Bogen (eines Großkreises) dieser Kugelfläche" (S. 62).

Als einer der Schöpfer der Invariantentheorie (vgl. 3.2.3.) wußte Cayley, daß die Formeln, welche die Maßzahlen liefern, die in den Ausdrücken für die „metrischen" Eigenschaften vorkommen, Invarianten des durch die „Kreispunkte" gebildeten „tangential ausgearteten" Kegelschnittes gegenüber linearen Transformationen der homogenen Koordinaten sind; er hatte ferner die Idee, mit jedem Kegelschnitt durch Benutzung der ihm entsprechenden Invarianten einen Abstand zu verknüpfen. Die hier folgende Erklärung (die von F. Klein [144], S. 148, stammt) soll erläutern, wie dies vor sich geht: Es sei $\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = 0$ die Gleichung, in welche die

[1]) Zitat aus dem Französischen übersetzt. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

„Tangentengleichung“ $\Sigma u_i^2 = 0$ des durch die „Kreispunkte“ gebildeten tangential ausgearteten Kegelschnittes bei einer linearen Transformation der homogenen Koordinaten übergeht; der Ausdruck

$$\operatorname{Arccos} \frac{\Sigma v_i w_i}{\sqrt{\Sigma v_i^2}\sqrt{\Sigma w_i^2}}$$

für den Winkel zwischen zwei Geraden (in durch die v_i bzw. w_k gegebenen Linienkoordinaten) geht dann über in

$$\operatorname{Arccos} \frac{\Sigma \alpha_{ik} v_i w_k}{\sqrt{\Sigma \alpha_{ik} v_i v_k}\sqrt{\Sigma \alpha_{ik} w_i w_k}},$$

und in der Abhandlung wird dieser Ausdruck interpretiert als „Abstand“ dieser beiden Geraden bezüglich einer mit dem (nicht notwendig ausgearteten) Kegelschnitt mit der Tangentengleichung $\Sigma \alpha_{ik} u_i u_k = 0$ verknüpften neuen Metrik. Dieser Kegelschnitt, den Cayley das „Absolutum“ der neuen Metrik nannte, wird an Stelle der Kreispunkte gesetzt in der Rolle, welche diese in der Ponceletschen Geometrie spielen. Faßt man denselben Ausdruck als in „Punktkoordinaten“ geschriegen auf, so erhält man den Abstand zweier Punkte; Cayley zeigte, daß man im Fall eines tangential ausgearteten Absolutums den üblichen Abstand bekommt. Die ganze Abhandlung wurde zunächst nur wegen der nachstehenden Schlußfolgerung geschrieben ([47], Bd. 2, S. 90): „Die metrischen Eigenschaften einer Figur sind nicht die Eigenschaften dieser für sich allein betrachteten Figur . . ., sondern ihre Eigenschaften, wenn man sie im Zusammenhang mit . . . dem Kegelschnitt betrachtet, den wir das Absolutum nennen . . . Die metrische Geometrie ist somit ein Teil der deskriptiven Geometrie,[1]) und die deskriptive Geometrie ist die ganze Geometrie.“

Dabei dachte Cayley keineswegs an die nichteuklidischen Geometrien. Dies sollte erst F. Klein tun [142], der etwa ein Jahrzehnt später zu der Auffassung kommt, daß man bei anderer vernünftiger Wahl des „Absolutums“ (nämlich eines „reellen“ bzw. eines „imaginären“ Kreises) die Metriken der Bolyai-Lobačevskijschen bzw. der Riemannschen Geometrie erhält und damit letzten Endes Uminterpretationen der Grundbegriffe, in bezug auf welche die Axiome dieser Geometrien erfüllt sind. Damit überträgt sich jeder eventuelle Widerspruch von einer nichteuklidischen Geometrie in die Euklidische Geometrie. Vom Standpunkt der Logik aus sind also die nichteuklidischen Geometrien ebenso gut begründet wie die euklidische Geometrie; der ganze Unterschied zwischen diesen Geometrien reduziert sich auf den erkenntnistheoretischen Wert ihrer Hypothesen, und die Termini Axiome, Postulate und Hypothese werden von jetzt an Synonyme.

Wir haben gesehen (vgl. 9.4.3.), wie im Jahre 1868 E. Beltrami (1835–1900) Erkenntnisse von F. Klein vorweggenommen hatte, indem er mehrere Uminterpretationen gegeben hatte, von denen eine die in der euklidischen Ebene üblichen

---

[1]) Auch hier ist nicht die „darstellende“ Geometrie von Monge, sondern die projektive Geometrie gemeint. Vgl. die Fußnote 1 auf S. 760. (Vgl. dazu auch [30][1], S. 157f. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

Überlegungen auf einer Fläche durchzuführen gestattet. Ebenda haben wir auch gesehen, wie Beltrami auf Grund der Arbeiten Mindings vorging, die ihrerseits auf Gaußsche Ideen zurückgehen. Es scheint, daß Beltrami den Habilitationsvortrag Riemanns nicht gekannt hat, der erst im selben Jahr, zwei Jahre nach Riemanns Tode, veröffentlicht wurde. Nach Bourbaki ([30][1], S. 158) kannte Beltrami auch die Arbeiten Cayleys nicht; wie dieser sprach Beltrami jedoch von „Interpretation", in dem Bewußtsein, ein „Wörterbuch" zu benutzen (lies „Geodätische" statt „Gerade").

F. Klein gelang es, aus den Arbeiten seiner Zeit eine neue, einheitliche Vorstellung von der Geometrie zu gewinnen: Das *Erlanger Programm* [143][1], das er 1872 als Antrittsvorlesung an der Universität Erlangen vortrug, bildete dazu das Exposé (vgl. 3.4.3.). Dort beschrieb er den Gegenstand der Geometrie folgendermaßen: „Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie" ([143][1], S. 35).

13.1.6. Das Axiomensystem der Geometrie bei Pasch

Im Vorwort zur ersten Auflage seiner 1882 erschienenen *Vorlesungen über neuere Geometrie* formulierte Pasch sein Ziel: „Wenn man die Geometrie als eine Wissenschaft auffaßt, welche, durch gewisse Naturbeobachtungen hervorgerufen, aus den unmittelbar beobachteten Gesetzen einfacher Erscheinungen ohne jede Zutat und auf rein deduktivem Wege die Gesetze komplizierterer Erscheinungen zu gewinnen sucht, ... beruht die erfolgreiche Anwendung, welche die Geometrie fortwährend in den Naturwissenschaften und im praktischen Leben erfährt, ... nur darauf, daß die geometrischen Begriffe ursprünglich genau den empirischen Objekten entsprachen, wenn sie auch allmählich mit einem Netz von künstlichen Begriffen übersponnen wurden, um die theoretische Entwicklung zu fördern, ... Dabei bleibt der Geometrie der Charakter der Naturwissenschaft erhalten, vor deren anderen Teilen jene sich dadurch auszeichnet, daß sie nur eine geringe Anzahl von Begriffen und Gesetzen unmittelbar aus der Erfahrung zu entnehmen braucht" ([207], S. I).

Wie sich das Programm weiter entfaltet, wird später so beschrieben: „Im Laufe der Entwicklung traten zu den ursprünglich eingeführten geometrischen Begriffen neue hinzu, welche jedoch auf jene zurückzuführen sind. Wir wollen dieselben *abgeleitete Begriffe* nennen, die anderen *Grundbegriffe*. Die abgeleiteten Begriffe wurden *definiert*, wobei allemal die vorhergehenden benutzt wurden, keine anderen; und so oft ein abgeleiteter Begriff zur Anwendung kam, wurde unmittelbar oder mittelbar auf seine Definition Bezug genommen; ohne eine solche Berufung war die betreffende Beweisführung nicht möglich. *Die Grundbegriffe sind nicht definiert worden* ... keine Erklärung ist im Stande, dasjenige Mittel zu ersetzen, welches allein das Verständnis jener einfachen, auf andere nicht zurückführbaren Begriffe erschliesst, nämlich den Hinweis auf geeignete Naturobjecte ...

Die Mathematik stellt Relationen zwischen den mathematischen Begriffen auf, welche den Erfahrungsthatsachen entsprechen sollen, aber weitaus in ihrer Mehrzahl der Erfahrung nicht unmittelbar entlehnt, sondern ‚bewiesen' werden; die (ausser den Definitionen der abgeleiteten Begriffe) zur Beweisführung nothwendigen Erkenntnisse bilden selbst einen Theil der aufzustellenden Relationen. Nach Ausscheidung der auf Beweise gestützten Sätze, der *Lehrsätze*, bleibt eine Gruppe von Sätzen zurück, aus denen alle übrigen sich folgern lassen, die *Grundsätze*; diese sind unmittelbar auf Beobachtungen gegründet, freilich auf Beobachtungen, welche seit undenklichen Zeiten sich unaufhörlich wiederholt haben . . .

Die Grundsätze sollen das von der Mathematik zu verarbeitende empirische Material vollständig umfassen, so daß man nach ihrer Aufstellung auf die Sinneswahrnehmungen nicht mehr zurückzugehen braucht" ([207], S. 16f.).

Bei seinem Versuch, die Begriffe zu definieren, die sich auf die Lage beziehen ([207], S. 74), antizipierte Pasch bereits die Unterscheidung verschiedener „Sprachen", welche ein formales System mit der gewünschten Genauigkeit zu erfassen erlauben (vgl. 13.4.3.). Diese Begriffe mußten zwar, den geometrischen Grundbegriffen gegenüber, „als abgeleitete eingeführt werden; aber wenn man aus ihnen ohne Zuziehung anderer geometrischer Begriffe weitere ableitet[1]) (von denen man ebenfalls sagen wird, daß sie sich auf die Lage beziehen), so kann man innerhalb der auf die Lage bezüglichen Begriffsgruppen jene den übrigen als *Stammbegriffe* voranstellen . . . (vgl. [G—H], S. 259) Punkt, Gerade und Ebene (im allgemeinen Sinne), Aneinanderliegen von Elementen und getrennt liegen von Paaren spielen in der Geometrie der Lage die Rolle von Stammbegriffen, auf welche alle anderen zurückgeführt werden". Auf S. 98 bemerkte er: „Alles, was wir von graphischer Geometrie[2]) herstellen können, besteht in Folgerungen aus den graphischen Sätzen der §§ 7—9; in diesen kann man die Worte Punkt und Ebene durchweg vertauschen; deshalb gelten auch die Folgerungen ungeschmälert weiter, wenn man in ihnen die Worte Punkt und Ebene durchweg vertauscht. Es muß in der That, wenn anders die Geometrie wirklich deductiv sein soll, der Prozess des Folgerns überall unabhängig sein vom *Sinn* der geometrischen Begriffe, wie er unabhängig sein muss von den Figuren; nur die in den benutzten Sätzen, beziehungsweise Definitionen niedergelegten *Beziehungen* zwischen den geometrischen Begriffen dürfen in Betracht kommen.[3]) Während der Deduction ist es zwar statthaft und nützlich, aber keineswegs nöthig, an die Bedeutung der auftretenden geometrischen Begriffe zu denken; so daß geradezu, wenn dies nöthig wird, daraus die Lückenhaftigkeit der Deduction und (wenn sich die Lücke nicht durch Abänderung des Raisonements beseitigen läßt) die Unzulänglichkeit der als Beweismittel vorausgeschickten Sätze

---

[1]) Korrekter sollte es heißen „auf sie durch Definition zurückführt". Da bei Pasch *Punkt, Strecke* und (begrenzte) *ebene Fläche* Grundbegriffe sind, konnte er die Dualität erst behandeln, nachdem er die Gerade (vermittels Aneinanderlegung von Strecken) und die Ebene eingeführt hatte.

[2]) Vgl. Fußnote 1 auf S. 760.

[3]) Diese Auffassung kann durch Gauß beeinflußt sein, auf dessen Ansichten, die 1872 im Band 2 seiner *Werke* [86] veröffentlicht wurden, wir in 13.2.2. eingehen; jedenfalls unterscheidet sie sich nicht wesentlich von ihnen. Die von Pasch ab 1873 in Gießen gehaltenen *Vorlesungen über neuere Geometrie* wurden erst 1882 veröffentlicht.

hervorgeht. Hat man aber ein Theorem aus einer Gruppe von Sätzen — wir wollen sie *Stammsätze* nennen — ... deducirt, so besitzt die Herleitung einen über den ursprünglichen Zweck hinausgehenden Werth. Denn wenn aus den Stammsätzen dadurch, dass man die darin verknüpften geometrischen Begriffe mit gewissen anderen vertauscht, wieder richtige Sätze hervorgehen, so ist in dem Theorem die entsprechende Vertauschung zulässig; man erhält so, ohne die Deduction zu wiederholen, einen (im Allgemeinen) neuen Satz, eine Folgerung aus den veränderten Stammsätzen."

Sein Mißtrauen im Hinblick auf Wörter äußert sich folgendermaßen: „... aber selbst wenn kein sinnliches Bild, nicht einmal die bewußte neuerliche Vorstellung eines solchen, zugelassen wird, so übt der Gebrauch vieler Wörter, mit denen namentlich die einfacheren geometrischen Begriffe bezeichnet werden, an sich schon einen gewissen Einfluss aus" ([207], S. 99). Die Verwendung von Wörtern der Umgangssprache verführte oft dazu, in die wissenschaftlichen Überlegungen Erinnerungen an Relationen hineinzulegen, die üblicherweise, gemäß den Gewohnheiten des umgangssprachlichen Gedankenaustauschs, mit den benutzten Wörtern assoziiert werden, und davon mußte die Wissenschaft noch befreit werden.[1])

Pasch ging in seinen Vorschlägen, sich vom Sinn der Wörter zu befreien, nicht weiter. Es ist nicht ohne Reiz, darauf hinzuweisen, daß bereits 1879 Frege in seiner *Begriffsschrift* [79] vorgeschlagen hatte, Wortbezeichnungen durch Buchstaben zu ersetzen, indem er bemerkte: „Wenn es eine Aufgabe der Philosophie ist, die Herrschaft des Wortes über den menschlichen Geist zu brechen, indem sie die Täuschungen aufdeckt, die durch den Sprachgebrauch über die Beziehungen der Begriffe oft fast unvermeidlich entstehen, indem sie den Gedanken von demjenigen befreit, womit ihn allein die Beschaffenheit des sprachlichen Ausdrucksmittels behaftet, so wird meine Begriffsschrift ... den Philosophen ein brauchbares Werkzeug werden können" ([79]; vgl. *[8 bis], S. 50f.). Ebenso hatte Frege auch vorgeschlagen, diese Begriffsschrift — auf die wir in 13.2.1. zurückkommen werden — auf Geometrie, Mechanik und Physik auszudehnen, und ferner hatte er, soweit es sich um die Arithmetik handelt, zum ersten Mal genau die Beweismittel präzisiert, die er dabei anerkannte (als einzige den *modus ponens* und die *Generalisierungsregel*). Dabei dachte jedoch Frege andererseits keinesfalls daran, von dem wohlbestimmten Sinn abzusehen, den er seinen formalen Ausdrücken zuerkannte!

Zu einem Teil sind die von Pasch aufgestellten Axiome von Hilbert in seine *Grundlagen der Geometrie* [120] übernommen worden. Wir wollen die Axiome von Pasch hier nicht alle aufzählen. Es soll aber festgehalten werden, wie Pasch seine Grundbegriffe und Grundsätze klassifizierte, um nach seinem Arbeitsplan den theoretischen Aufbau in der Weise zu strukturieren, daß zunächst die elementaren Folgerungen für die einfachsten Begriffe gezogen werden, die sich allein auf die in

---

[1]) In seinem *Essai* [4] von 1806 hatte Argand schon geschrieben: „Im allgemeinen sollte man vermeiden, Termini zu benutzen, deren eigentliche Bedeutung den Gedanken, die man ausdrücken möchte, widerspricht, selbst wenn es sich um Vermutungen handelt" (S. 14).

den Grundbegriffen „Punkt", „gerade Strecke" und „Lage eines Punktes innerhalb einer geraden Strecke" formulierten Grundsätze stützen, und erst anschließend das Untersuchungsfeld allmählich auszudehnen.

Das erste Axiom besagt, daß es genau eine gerade Strecke gibt, welche zwei gegebene Punkte verbindet. Die folgenden Axiome sind von der Art: „Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so sind alle Punkte der Strecke AC zugleich Punkte der Strecke AB." Dann werden, ausgehend von den ersten fünf Axiomen, zwei Sätze bewiesen, ehe vier weitere Axiome die Verlängerbarkeit der Strecken sichern („Sind A und B beliebige Punkte, so kann man den Punkt C so wählen, daß B innerhalb der Strecke AC liegt," usw. . . .). Alles, was man daraus über die Gerade herleiten konnte, wurde hieraus gewonnen, ehe er zu den Grundsätzen überging, in denen über die vorhergehenden Begriffe hinaus die Grundbegriffe „ebene Fläche" und „Punkt einer ebenen Fläche" auftauchen (wobei Pasch die Flächen ebenso wie die Strecken als begrenzt auffaßte). Die vier Axiome, die er dafür einführte, sind von der Art: „Wird durch zwei Punkte einer ebenen Fläche eine gerade Strecke gezogen, so existiert eine ebene Fläche, welche alle Punkte der vorigen und auch die Strecke enthält".[1] Das vierte Axiom wird heute Axiom von Pasch genannt und lautet: „Liegen die Punkte A, B, C, D in einer ebenen Fläche, F in der Geraden AB zwischen A und B, so geht die Gerade DF entweder durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC."

Damit war er in der Lage, das „Reziprocitäts-(oder Dualitäts-)gesetz" mit der ganzen Sorgfalt zu behandeln, die es aus dem Grunde erforderte, daß es nur einen *Teil* der eingeführten Begriffe betrifft — wie wir oben gesagt haben, die projektiven Begriffe —, ehe er zehn Axiome hinzufügte, welche zusätzlich zu den vorhergehenden den Begriff „congruente Figuren" ins Spiel bringen, in einer Art und Weise, die es ihm ermöglichte, im weiteren den Cayleyschen „absoluten Kegelschnitt" einzubeziehen und je nach dessen Natur die Euklidische bzw. die nichteuklidische Geometrie zu behandeln. Als Beispiel zitieren wir das Axiom: „Liegt der Punkt c innerhalb der geraden Strecke ab und sind die Figuren abc und $a'b'c'$ congruent, so liegt der Punkt c' innerhalb der geraden Strecke $a'b'$." Die Rolle des „Stetigkeitsaxioms" (vgl. 13.1.3.) wird vom Archimedischen Axiom übernommen: „Liegt der Punkt c_1 innerhalb der geraden Strecke ab und verlängert man die Strecke ac_1 um die congruente Strecke c_1c_2, diese um die congruente Strecke c_2c_3 usf., so gelangt man stets zu einer Strecke c_nc_{n+1}, welche den Punkt b enthält."

13.1.7. *Die Axiomatik im letzten Jahrzehnt des neunzehnten Jahrhunderts*

Im Jahre 1888 definierte Peano in der heute üblichen Weise die reellen Vektorräume, und 1889 leistete er seinen grundlegenden Beitrag zur Ausdehnung der axiomatischen Methode über die Geometrie hinaus auf die Arithmetik.

[1] Der Leser wird bemerkt haben, daß in diesen Zitaten „Elementbeziehung" und „Enthaltenseinsbeziehung" (Inklusion) vermischt werden, auf deren Unterschied erst später aufmerksam gemacht werden sollte.

Schon in seinem ersten Werk [209], in dem u. a. die Begriffe lineare Unabhängigkeit, Dimension, Vektorteilraum und Algebren eingeführt werden, hatte sich Peano auf die Beiträge H. Graßmanns (1809—1877) in seiner *Ausdehnungslehre* [100] (vgl. 3.2.5.) von 1844 gestützt. In einem anderen Buch von H. Graßmann, *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten* ([101], 1861), findet man (S. 300—321) die induktiven Definitionen der Addition und der Multiplikation der ganzen Zahlen und (noch unter impliziter Verwendung des Induktionsprinzips geführte) Beweise ihrer grundlegenden Eigenschaften — Kommutativität, Assoziativität, Distributivität — unter ausschließlicher Benutzung der Nachfolgerbeziehung. Hier manifestiert sich zum ersten Male eine Untersuchungsrichtung in den Grundlagen der Arithmetik, an deren fernem und völlig unerwartetem Ende in den letzten Monaten des Jahres 1930 der Gödelsche Unvollständigkeitssatz (vgl. 13.4.5.) und das Bewußtsein der grundsätzlichen Hindernisse stehen, auf die ein solches Unternehmen stößt. Am Anfang seiner *Arithmetices principia* ([210], 1889) betonte Peano ausdrücklich, daß er auch aus jener Quelle geschöpft habe.

Für den Gebrauch der logischen Zeichen verwies Peano auf C. S. Peirce ([218], [220], aber nicht auf [219], 1881), in der dieser eine Theorie der Arithmetik entwarf, die auf der (totalen, diskreten und unbeschränkten) Ordnung der natürlichen Zahlen und den induktiven Definitionen der Addition und Multiplikation beruht. Peirce stellte sich dort das Ziel, zu zeigen, daß die elementaren arithmetischen Sätze streng syllogistische Folgerungen aus einigen wenigen Primäraussagen sind. Das erste wirkliche Axiomensystem findet sich jedoch erst in Peanos *Principia*.

Die Axiome selbst sind aus dem Büchlein *Was sind und was sollen die Zahlen?* ([62], 1888) von R. Dedekind übernommen, das ihm, wie Peano sagte ([210], S. 2), ebenfalls höchst nützlich gewesen sei. Dort erscheinen sie jedoch als Sätze, die aus grundlegenden Sätzen der Mengenlehre und aus einer Definition des Begriffs der Struktur der natürlichen Zahlen (bzw. einer dazu isomorphen Struktur) gewonnen werden (der eine Vorwegnahme des Begriffs „Modell der von Peano konstruierten formalen Theorie" darstellte). Mit diesem wichtigen Büchlein wurde Dedekind zu einem Mitbegründer der Mengenlehre und, durch eine weitere, für die Zukunft der mathematischen Logik entscheidende Neuerung, auch zu einem Vorläufer der modernen Logik: die Einführung des Prinzips der *Definition* durch Induktion (vgl. 13.4.5.), das durch den Beweis eines Satzes über die eindeutige Existenz gestützt wird.

Wird die Arithmetik im Sinne Dedekinds aufgefaßt, so reduziert sie sich auf die Logik. Schon Frege (1848—1925) hatte als erster Logiker ein vollständiges Programm der modernen mathematischen Logik erarbeitet (vgl. 13.3.3.), das eben zu dem Zweck aufgestellt wurde, eine solche Rückführung im einzelnen zu bewerkstelligen: „Ferner, und darin gehe ich über Euklid hinaus", schrieb er in [83], S. VI, „verlange ich, dass alle Schluß- und Folgerungsweisen, die zur Anwendung kommen, vorher aufgeführt werden." Bereits in seiner *Begriffsschrift* [79] aus dem Jahre 1879 hatte Frege eine formale Sprache (vgl. 13.2.1.) erarbeitet und dargelegt, und unter Benutzung der hierbei verwendeten Bezeichnungen hatte er dort eine Theorie der Folgen entwickelt (in der Absicht, sie später zur Definition der Folge

der natürlichen Zahlen zu benutzen), von der Dedekind im Vorwort einer Nachauflage seines Büchleins *Was sind und was sollen die Zahlen?* aus dem Jahre 1893 einräumte, sie habe „namentlich von § 79 an, doch auch sehr nahe Berührungspunkte mit meiner Schrift, insbesondere mit meiner Erklärung (44)“, d. h. mit der Theorie der Ketten, mit welcher Dedekind die Induktion begründete. Im Jahre 1884 hatte dann Frege in seiner Schrift *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* [81] dargelegt, wie er beabsichtige, nicht nur die Folge der Zahlen als ganzes, sondern auch jede einzelne Zahl zu definieren. Als Beispiel brachte er die Definition von 0 als Klasse der zur leeren Klasse gleichmächtigen Klassen und von 1 als Klasse aller Klassen, die zu der nur aus Null bestehenden Klasse gleichmächtig sind; $n + 1$ ist dann die Klasse aller n-elementigen Klassen. Eine Formalisierung lieferte er dann, zeitlich nach den Peanoschen *Pricipia*, in seinem Werk *Grundgesetze der Arithmetik* [83] aus dem Jahre 1893 (vgl. 13.4.1.). Zehn Jahre später sollte man die Schwierigkeiten entdecken, auf welche dieses Programm stieß; sie bestehen darin, daß die obigen Klassen durch Eigenschaften definiert sind, welche nicht zur Mengenbildung geeignet sind (vgl. 13.4.1.).

Die erste Version des Peanoschen Axiomensystems lautet, in moderne Formulierung übertragen:

1. $1 \in \boldsymbol{N}^*$
2. $a \in \boldsymbol{N}^* \Rightarrow a = a$
3. $a, b \in \boldsymbol{N}^* \Rightarrow (a = b \Rightarrow b = a)$
4. $a, b, c \in \boldsymbol{N}^* \Rightarrow ((a = b \,\&\, b = c) \Rightarrow a = c)$
5. $(a = b \,\&\, b \in \boldsymbol{N}^*) \Rightarrow a \in \boldsymbol{N}^*$
6. $a \in \boldsymbol{N}^* \Rightarrow a + 1 \in \boldsymbol{N}^*$
7. $a, b \in \boldsymbol{N}^* \Rightarrow (a = b \Leftrightarrow a + 1 = b + 1)$
8. $a \in \boldsymbol{N}^* \Rightarrow a + 1 \neq 1$
9. $(k \text{ Klasse} \,\&\, 1 \in k \,\&\, \forall x((x \in \boldsymbol{N}^* \,\&\, x \in k) \Rightarrow x + 1 \in k)) \Rightarrow \boldsymbol{N}^* \subseteqq k)$.

Das letzte Axiom ist das zu diesem ersten Peanoschen Axiomensystem gehörende *Induktionsprinzip*. (Vor Pascal wurde ein solches Prinzip nur selten und nicht expressis verbis verwendet. Jakob Bernoulli scheint der erste gewesen zu sein, der ihm eine etwas allgemeinere Form gegeben hat. Bei Pascal findet man wiederholt die Aufstellung von Hilfssätzen, welche den Ausgangspunkt einer Induktion bilden und die Gültigkeit des entsprechenden Induktionsschrittes zum Ausdruck bringen, was beweist, daß ihm das Prinzip klar war, wenn er es auch als solches nie formuliert hat. Jedenfalls ist sicher, daß im neunzehnten Jahrhundert das Induktionsprinzip Teil des mathematischen Allgemeingutes an bekannten und allgemein praktizierten Beweismethoden war.)

Im Band 2 seines *Formulaire* ([214], 1897—1899) ersetzte Peano die Menge $\boldsymbol{N}^*$ der von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen durch die Menge $\boldsymbol{N}$ aller natürlichen Zahlen (also einschließlich 0) und in den Axiomen die Zahl 1 durch die Zahl 0 und eliminierte die Axiome 2 bis 5 aus dem System der für die Arithmetik typischen

Axiome. Damit gelangte er zu der noch heute gebräuchlichen Gestalt des als *Peanosches Axiomensystem* bekannten Systems von Axiomen für die Arithmetik (zweiter Stufe) (vgl. 13.4.1.).[1])

Peano selbst hatte schon 1891 bewiesen [212], daß dieses System aus voneinander unabhängigen Axiomen besteht, d. h. aus Axiomen, von denen keines eine Folgerung aus den anderen ist. Er gab zu jedem der Axiome eine Interpretation der Grundbegriffe an, in welcher jeweils dieses Axiom nicht, wohl aber die anderen Axiome des Systems erfüllt sind: Das ist die gleiche Methode, mit der es Beltrami und F. Klein nachzuweisen gelang, daß die nichteuklidischen Geometrien ebenso „widerspruchsfrei" sind wie die Euklidische Geometrie.

In der Peanoschen Schule kam in den folgenden Jahren die moderne Konzeption der Axiomatik, wie sie sich am Ende des neunzehnten Jahrhunderts herausgebildet hatte, am besten zum Ausdruck.

Zwischen 1894 und 1899 veröffentlichte M. Pieri eine Reihe von Studien zur Axiomatisierung der projektiven Geometrie ([225]—[229]), in denen er sich — zur gleichen Zeit, als Hilbert in seinen *Grundlagen der Geometrie* dasselbe tat — nicht nur mit Fragen der Unabhängigkeit von Axiomen, sondern auch mit Fragen ihrer Widerspruchsfreiheit beschäftigte, d. h. mit dem Problem, ob man aus ihnen nicht einen Widerspruch herleiten könne; er tat dies, indem er — wie Hilbert — auf die reellen Zahlen zurückging. Dabei wurde die von F. Klein auf die nichteuklidischen Geometrien angewandte Methode (dafür Modelle zu finden) auf die Euklidische Geometrie ausgedehnt; das Bestreben, dies für beliebige Axiomensysteme zu leisten, wurde zur allgemeinen Methode, so daß Hilbert in seinem Vortrag auf dem zweiten Internationalen Mathematikerkongreß darüber berichtete (Paris 1900, [53][1], S. 36—39).

Was Pieri über die axiomatische Methode darlegte, ist ihre Konzeption, die er *hypothetisch-deduktiv* nannte: Sind die Grundprinzipien formuliert — nicht als überlieferte Wahrheiten, sondern als Hypothesen —, so besteht die Theorie in der Untersuchung der Folgerungen aus diesen; der Wert einer Theorie liegt in der Strenge der Beweisketten; die Beweise müssen natürlich der Forderung genügen, daß in ihrem Verlauf den Grundelementen, Grundbegriffen und Grundprinzipien nichts von außen hinzugefügt wird.[2]) In bezug auf den Sinn der Wörter formulierte Pieri ([229], S. 60): „Das wichtigste Charakteristikum der Grunddinge jedes hypothetisch-deduktiven Systems besteht darin, daß sie innerhalb bestimmter Grenzen,

---

[1]) Im sogenannten *Peanoschen Axiomensystem für die Arithmetik erster Stufe* wird das Axiom 9 durch das Axiomenschema

$$(P(0) \wedge \forall x[P(x) \Rightarrow P(x+1)]) \Rightarrow \forall x P(x)$$

(*Induktionsschema*) ersetzt, das für jede in den für die Arithmetik spezifischen Grundsymbolen geschriebene Formel $P(x)$ ein Axiom liefert (was bei Verwendung des Klassenbegriffs nicht der Fall ist); es wird ferner, ohne daß dies in der Schreibweise zum Ausdruck kommt, dahingehend spezifiziert, daß die Variablen natürliche Zahlen darstellen.

[2]) Selbstverständlich liegt der Wert einer Theorie auch in der Vielfalt der Interpretationen, deren sie fähig ist; doch wurde man sich dessen erst später bewußt.

die durch die Grundaussagen gezogen werden, beliebiger Interpretationen fähig sind. ... Mit anderen Worten, die Bedeutung der Wörter oder der Zeichen, die irgendein Grundding bezeichnen, ist eindeutig durch die sich darauf beziehenden Grundaussagen bestimmt, und der Leser hat die Möglichkeit, diesen Wörtern und Zeichen nach Belieben eine Bedeutung beizulegen, vorausgesetzt, sie ist mit den allgemeinen Eigenschaften verträglich, welche diesen Objekten durch die Grundaussagen zugeschrieben werden".[1])

Schon 1891 hatte H. Wiener in einem auf einer Tagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung in Halle[2]) gehaltenen anregenden Vortrag *Grundlagen und Aufbau der Geometrie* [304] den Gebrauch von Wörtern der Umgangssprache in abstrakter Bedeutung vorgeschlagen, um Situationen zu beschreiben, denen man bis dahin noch nicht begegnet sei: „Die Objekte seien Punkte und Geraden, die Operationen das Verbinden und Schneiden; Objekte und Operationen seien nur in endlicher Anzahl vorausgesetzt. Oder, vom geometrischen Gewande losgelöst: es seien Elemente von zweierlei Art[3]) vorausgesetzt, und zweierlei Operationen, indem man annimmt, dass die Verknüpfung je zweier Elemente derselben Art ein Element der anderen Art ergebe ..." (S. 46).

Wenn nun aber die Wörter, welche die Grundbegriffe beschreiben, eine Bedeutung annehmen können, deren Inhalt sich vom Sprachgebrauch entfernt, so scheint es nicht mehr notwendig, gerade diese Wörter zu benutzen. Bekanntlich brachte Hilbert nach dem oben genannten Vortrag diesen Gedanken dadurch scherzhaft zum Ausdruck, daß er sagte: Statt von Punkt, Gerade und Ebene zu reden, könnte man auch von Tisch, Stuhl und Bierseidel sprechen.[4])

Die Bemerkung Hilberts bezieht sich auf die undefinierten Grundbegriffe, deren einzige Begrenzung in der Festlegung der wechselseitigen Beziehungen steckt, welche ihnen durch die Grundsätze auferlegt werden. Eine ähnliche scherzhafte Bemerkung findet sich schon bei d'Alembert, der 1754 im Artikel „Definition" der *Encyclopédie* [2] schrieb: „Man kann den Wörtern einen Sinn geben, den man will... die Elemente der Geometrie exakt (aber lächerlich) streng gestalten, indem man Dreieck nennt, was man üblicherweise Kreis nennt." Sie zielt hier jedoch nur auf die Art und Weise, in der eine Belegung mit einem Namen einem Begriff eine Bedeutung beilegt, indem nur von den vorher bekannten Bedeutungen von Begriffen, die im Definiens (dem Definierenden) vorkommen, ausgegangen wird.

Diese doppelte Verschiebung, durch welche die Wörter von ihrer üblichen Bedeutung und die Bedeutungen von ihren üblichen Beschreibungen befreit werden, macht jedes hypothetisch-deduktive System zu einem autonomen Objekt, das sich von der Wissenschaft, der es entspricht, unterscheidet und damit von einer möglichen theoretischen Weiterentwicklungen Zeugnis gibt.

---

[1]) Zitat aus dem Französischen übersetzt. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) Im Original irrtümlich Berlin. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) Die Mannigfaltigkeiten des *Erlanger Programms* wurden von Wiener nämlich als Zahlenmannigfaltigkeiten aufgefaßt.

[4]) Nach dem von H. Weyl verfaßten Nachruf auf D. Hilbert; Weyl berief sich dabei auf O. Blumenthal. Vgl. C. Reid ([246], S. 264). (Vgl. O. Blumenthal in [127], S. 406. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

„Es kann vorkommen", sagte Padoa in seinem Vortrag auf dem 3. Internationalen Philosophie-Kongreß (Paris 1900; [205]), „daß es mehrere ... Interpretationen des Systems der undefinierten Symbole gibt, welche das System der nicht bewiesenen Aussagen und damit alle Aussagen einer Theorie erfüllen. Das System der undefinierten Symbole kann dann als die sich aus allen diesen Interpretationen ergebende *Abstraktion* angesehen werden, und die *verallgemeinernde Theorie* ... als die analoge *Abstraktion* aus allen *speziellen Theorien,* wobei die letzteren dadurch aus der verallgemeinernden Theorie hervorgehen, daß man die undefinierten Symbole der Reihe nach durch jede der möglichen Interpretationen dieser Theorie ersetzt."

Ein und dieselbe Wissenschaft läßt sich übrigens auf mannigfache Weise als hypothetisch-deduktives System aufbauen: Peano hatte nacheinander eine vielgestaltige Reihe von Axiomensystemen für die Arithmetik angegeben, die sich allerdings nur unwesentlich voneinander unterscheiden. Besonders zahlreiche Axiomensysteme der ebenen Geometrie gelangten seit Pasch zur Blüte; sie gingen von in Art und Anzahl sehr verschiedenen Grundbegriffen aus: bei Pasch von vier spezifischen Grundbegriffen, bei Peano [213] von drei (Punkt, Strecke, Bewegung), bei Pieri [229] von zwei (Punkt, Bewegung) und bei Padoa [204] von zwei (Punkt, Abstand), und man versteht, daß Padoa [205] schrieb: „Es gibt eine gewisse Willkür bei der Wahl des *Systems der undefinierten Symbole* einer deduktiven Theorie (denn man kann fast immer die Rollen von *definierten* und *nicht-definierten* Symbolen für bestimmte spezielle Symbole einer gegebenen Theorie vertauschen) ... wir können die über die undefinierten Symbole gemachten Bemerkungen wiederholen, indem wir die Wörter ‚Symbol', ‚definiert', ‚Begriff' und ‚einfach' durch die Wörter ‚Aussage', ‚bewiesen', ‚Tatsache' bzw. ‚evident' ersetzen."

Etwas später heißt es bei Padoa, und damit wird der im Laufe etwa eines Jahrzehnts zurückgelegte Weg genauer beschrieben: „Offenbar hat eine deduktive Theorie keinerlei *praktische Bedeutung,* wenn ihre undefinierten Symbole und ihre unbewiesenen Aussagen keinerlei *Begriffe* bzw. *Tatsachen* darstellen (oder darstellen können). Somit ist der *psychologische* Ursprung einer deduktiven Theorie *empirisch*; ihr *logischer* Ausgangspunkt kann jedoch als *Sache der Konvention* angesehen werden."

Der wichtigste Beitrag von Padoa [204], der vor allem jenen intellektuellen Kontext rechtfertigen konnte, bei dem einem hypothetisch-deduktiven System die Vielfalt seiner Interpretationen gegenübergestellt wurde, bestand in der Übertragung der Methode, durch welche man bislang die Unabhängigkeit von Axiomen bewiesen hatte, auf das System der Grundbegriffe:

„Nehmen wir an, daß nach Festlegung einer Interpretation des Systems der undefinierten Symbole, der das System der unbewiesenen Aussagen genügt, alle diese Aussagen gültig bleiben, wenn wir nur die Bedeutung eines *einzigen* Symbols x entsprechend ändern. Dann können wir behaupten, da die Bedeutung des Symbols x nicht *individualisiert* wird, wenn wir eine *Interpretation* der *anderen* undefinierten Symbole gewählt haben, daß es unmöglich ist, aus den unbewiesenen Aussagen

eine Beziehung herzuleiten, welche eine Definition von x (mittels der anderen undefinierten Symbole) liefert."

Dies sind die Züge der axiomatischen Methode am Ende des neunzehnten Jahrhunderts. Hilbert kommt nun das Verdienst zu, sie mit größter Meisterschaft und Tiefe in seinen Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie (die in [121] zusammengefaßt wurden) benutzt zu haben, bevor er sie zum Gegenstand einer neuen Wissenschaft machte.

13.1.8. Die Grundlagen der Geometrie bei Hilbert und nach ihm

Hilbert hat mehrere Axiomensysteme für die Geometrie erarbeitet, ganz abgesehen von den verschiedenen Varianten seines berühmtesten Systems, das er in einem Buch *Grundlagen der Geometrie* [121] darlegte, dessen erste Auflage aus dem Jahre 1899 stammt.[1])

Die Untersuchungen, über welche dieses Werk berichtet, entkräfteten gewisse Voreingenommenheiten, wie sie zu dieser Zeit bei Peano, Pieri und Padoa bestanden, denen es zunächst vor allem darum ging, die Anzahl der Grundbegriffe und Grundprinzipien zu vermindern und eine möglichst vernünftige Auswahl unter diesen zu treffen. Hilbert wandte sich nämlich in seinem Werk nun Fragen der folgenden Art zu: Welche von den in den früheren Arbeiten eingeführten Axiomen sind erforderlich, um die Ausarbeitung dieses oder jenes entscheidenden Kapitels der Theorie zu ermöglichen?

In dem schon erwähnten Vortrag [304] aus dem Jahre 1891 (vgl. 13.1.7.), in welchem H. Wiener unerwartete Interpretationen der Projektiven Geometrie aufzeigte, hatte er auch gezeigt, daß der Satz von Desargues über perspektivische Dreiecke[2]) und der Satz von Pascal über Geradenpaare[3]) es ermöglichen, die ganze

[1]) Im Jahre 1902 veröffentlichte Hilbert z.B. in Band 56 der *Mathematische Annalen* eine Abhandlung *Über die Grundlagen der Geometrie* (die in [121] abgedruckt wurde), in der er die Existenz einer abgeschlossenen Gruppe von stetigen Bewegungen und die Existenz unendlich vieler Drehungen um jedes gegebene Zentrum voraussetzte und daraus herleitete, daß man sich in einer Euklidischen oder einer Bolyai-Lobačevskijschen Geometrie befindet, je nachdem, ob die Gruppe der Bewegungen einen (nichttrivialen) Normalteiler hat oder nicht. Diese Arbeit antwortete auf Vorbehalte von v. Helmholtz [111] gegenüber der Charakterisierung des Raumes durch die *freie Beweglichkeit* der starren Körper, die dann von S. Lie übernommen wurden; die Arbeit bildet einen der ersten Beiträge zur modernen Topologie. Die axiomatische Strenge ist darin allerdings weniger ausgeprägt als in dem Buch von 1899 (es werden weder alle Grundbegriffe noch alle Voraussetzungen explizit aufgeführt); diese Abhandlung hat daher, soweit es sich um die Axiomatik am Ende des neunzehnten Jahrhunderts handelt, bei weitem nicht dieselbe historische und methodologische Tragweite wie das Buch.

[2]) Liegen zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ so, daß sich die Geraden AA', BB', CC' in einem Punkt schneiden, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten (AB und $A'B'$, AC und $A'C'$ sowie BC und $B'C'$) auf einer Geraden.

[3]) Liegen in einer Ebene die Punkte A, B, C auf einer Geraden, die Punkte A', B', C' auf einer anderen und sind sie vom eventuellen Schnittpunkt dieser Geraden verschieden, so liegen der Schnittpunkt M von AB' und $A'B$, der Schnittpunkt N von BC' und $B'C$ und der Schnittpunkte P von CA' und $C'A$ auf einer Geraden; auf diesen

projektive Geometrie der Ebene zu entwickeln, ohne auf Stetigkeitsbetrachtungen oder auf unendliche Prozesse von der Art zurückgreifen zu müssen, wie sie Klein dem Werk von v. Staudt [277] (vgl. 13.1.3.) hatte hinzufügen müssen und die dann auch Pasch [207] entgegen seinen ursprünglichen Auffassungen notwendigerweise übernommen hatte. Wiener hatte auch bemerkt, daß der Satz von Desargues es ermöglicht, in der ebenen Geometrie ein System von Aussagen zu erhalten, das die Addition von Strecken umfaßt, daß aber ein Rückgriff auf die Geometrie des Raumes notwendig ist, um den Satz selbst zu beweisen; als sich Wiener dann die Aufgabe stellte, aus dem Desarguesschen Satz den Pascalschen Satz herzuleiten, sah er nicht, wie er das ohne analogen Rückgriff auf die Geometrie des Raumes oder ohne Stetigkeitsbetrachtungen bewerkstelligen könne. Diese Probleme führten zur kritischen Überprüfung der Situation durch Hilbert in den folgenden Jahren.

In seinen *Grundlagen der Geometrie* analysierte Hilbert u. a., auf welche Weise es in der Geometrie der Ebene möglich ist, aus der Gültigkeit eines Spezialfalls des Pascalschen Satzes[1]) die Theorie der Proportionen und die der Flächeninhalte von ebenen Polygonen herzuleiten, ohne Stetigkeitsaxiome heranzuziehen oder anzunehmen, die Ebene sei in den Raum eingebettet. Er zeigte weiter, daß dann, wenn man sich jeden Rückgriff auf Kongruenz- oder Stetigkeitsaxiome versagt, die Gültigkeit eines Spezialfalls des Desarguesschen Satzes[2]) der Möglichkeit äquivalent ist, die Geometrie der Ebene durch eine Geometrie des dreidimensionalen Raumes zu induzieren. Er gibt ein Beispiel einer *nicht-Desarguesschen* ebenen Geometrie an, in welcher weder der Satz von Desargues noch ein gewisses der die Kongruenz beschreibenden Axiome (siehe weiter unten das Axiom III.5) gelten; daher kann man den Desarguesschen Satz nicht ohne dieses Axiom beweisen, es sei denn, man nimmt an, die Geometrie der Ebene sei durch die des Raumes induziert.

„Unsere Untersuchung wird zeigen, daß in dieser Hinsicht der Pascalsche Satz sich völlig anders als der Desarguessche Satz verhält", heißt es schließlich bei Hilbert ($[120]_2$, S. 104). Dazu erinnerte Hilbert zunächst daran, wie dieser Satz aus jenem folgt (es handelt sich jeweils um die genannten Spezialfälle), ohne daß dabei Stetigkeits- oder Kongruenzaxiome herangezogen werden müssen. Durch ein Beispiel zeigte er, daß die Umkehrung nicht gilt: Es gibt *nicht-Pascalsche* Geometrien, in denen der (eingeschränkte) Pascalsche Satz nicht gilt, während der (eingeschränkte) Desarguessche Satz gültig bleibt. Jedoch ist eine Form des Axioms von Archimedes (vgl. 13.1.4.) notwendig (Hilbert zeigte dies, indem er ein Modell benutzt), um den Pascalschen Satz zu beweisen, und das sogar im Raum, und das Archimedische Axiom ist hinreichend, um ihn ohne Berufung auf Kongruenz-

---

sechs genannten Geraden liegen die entgegengesetzten Seiten eines dem aus den beiden erstgenannten Geraden bestehenden „ausgearteten Kegelschnitt" einbeschriebenen Sechsecks.

[1]) Die drei Punkte M, N, P des Pascalschen Satzes liegen hierbei im Unendlichen, so daß die Strecken AB' und $A'B$ sowie $B'C$ und BC' und schließlich $C'A$ und CA' einander parallel sind.

[2]) Sind die Seiten zweier ebenen Dreiecke paarweise parallel, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der Ecken in einem Punkt, oder sie sind parallel.

axiome zu beweisen: Jede *nicht-Pascalsche* Geometrie ist notwendigerweise auch *nicht-Archimedisch.*[1])

Diese Blüte der möglichen Geometrien hatte nichts mehr an sich, was die Zeitgenossen schockierte; während schon F. Klein [142], ohne sich näher darüber auslassen zu können, die Möglichkeit einer nicht-Desarguesschen Geometrie geahnt hatte, waren die nicht-Archimedischen Geometrien 1891 in Arbeiten von Veronese [296] aufgetaucht; 1902 bewies M. Dehn (1878—1952), ein Schüler von Hilbert, die Existenz von Geometrien, in denen zwei Pyramiden gleicher Grundfläche und Höhe nicht notwendigerweise das gleiche Volumen besitzen [64]. Es war jedoch Hilbert, der die gegenseitigen Abhängigkeiten und die sie erklärenden Prinzipien erhellte. Er begründete sie durch Unabhängigkeitsbeweise für die wichtigsten Axiome (III.5, IV, V.1, V.2), die für ihn die Rollen klärten, welche die verschiedenen Axiomengruppen spielen, auf die er bei seiner Klassifikation der Axiome stieß. Hilbert klassifizierte die Axiome gemäß den Grundbegriffen, die sie beherrschen, und brachte sie in eine Anordnung, in der einerseits die früheren Begriffe dazu dienen, die späteren zu begründen, aber andererseits auch gemäß den geometrischen Operationen, welche die verschiedenen Axiomengruppen ermöglichen, und gemäß dem Bereich von Sätzen, die sie herzuleiten gestatten — allein oder bei verschiedenen Kombinationen der Axiomengruppen. Das System dieser Axiome lautet folgendermaßen:[2])

I. *Axiome der Verknüpfung* (sie definieren den Begriff „liegt auf" oder „gehört zu")

a) in der Ebene:

I.1. Zu zwei Punkten A, B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.[3])

I.2. Zu zwei Punkten A, B gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte A, B zusammengehört.

I.3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

b) im Raum:

I.4. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es stets eine Ebene α, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört. Zu jeder Ebene gibt es stets einen mit ihr zusammengehörigen Punkt.

I.5. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es nicht mehr als eine Ebene, die mit jedem der drei Punkte A, B, C zusammengehört.

---

[1]) Die nicht-Archimedischen Geometrien genügen der Negation des Archimedischen Axioms und den anderen Axiomen.

[2]) Der nachstehende Text bis einschließlich Axiom V.2 folgt $[121]_2$. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) Hilbert legte ein für allemal fest, daß er unter „zwei Punkten" stets „zwei verschiedene Punkte" versteht.

I.6. Wenn zwei Punkte A, B einer Geraden a in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von a in der Ebene α.

I.7. Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.

I.8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

II. *Axiome der Anordnung* (sie definieren den Begriff „zwischen")

a) auf der Geraden:

II.1. Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, so sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A.

II.2. Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B auf der Geraden AC, so daß C zwischen A und B liegt.

II.3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es nicht mehr als einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

b) in der Ebene:

II.4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen der Punkte A, B, C trifft: wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiß auch durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.[1])

Auf Grund der Anordnung konnte Hilbert die Geraden in Strecken zerlegen, indem er auf ihnen Punkte herausgreift, und ebenso die Ebene in Gebiete, indem er Geraden heraushebt; er konnte die beiden Halbgeraden (Strahlen) einer Geraden zu beiden Seiten eines auf ihr liegenden Punktes unterscheiden, ebenso die beiden Halbebenen, in die eine Ebene durch eine auf ihr liegende Gerade zerlegt wird; er konnte zwischen dem Inneren und dem Äußeren eines einfachen geschlossenen Streckenzuges unterscheiden; und er konnte schließlich Winkel definieren (als System zweier Strahlen, welche einen Punkt gemeinsam haben und verschiedenen Geraden angehören) und zwischen dem Innern und dem Äußern eines Winkels unterscheiden.

III. *Axiome der Kongruenz* (sie definieren den Begriff „Kongruenz")

a) auf der Geraden:

III.1. Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, so daß die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent oder gleich ist, in Zeichen $AB \equiv A'B'$.

[1]) Das ist das Axiom von Pasch. Das Hilbertsche System verdankt viel — daran sei erinnert — dem System von Pasch, dem es verschiedene Axiome mehr oder weniger wörtlich entlehnt; ein wesentlicher Unterschied, der gewisse Umstellungen bedingte, besteht darin, daß bei Pasch der Begriff der Strecke Grundbegriff ist, während dies bei Hilbert der Begriff der Geraden ist.

III.2. Wenn eine Strecke $A'B'$ und eine Strecke $A''B''$ derselben Strecke AB kongruent sind, so ist auch die Strecke $A'B'$ der Strecke $A''B''$ kongruent; oder kurz: wenn zwei Strecken einer dritten kongruent sind, so sind sie untereinander kongruent.

III.3. Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv$ $\equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.

b) in der Ebene:

III.4. Es sei ein Winkel $\sphericalangle\ (h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α' sowie eine bestimmte Seite von a' in α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der von Punkt O' ausgeht: dann gibt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so daß der Winkel $\sphericalangle\ (h, k)$ kongruent oder gleich dem Winkel $\sphericalangle\ (h', k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\sphericalangle\ (h', k')$ auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen $\sphericalangle\ (h, k) \equiv \sphericalangle\ (h', k')$. Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, d. h., es ist stets $\sphericalangle\ (h, k) \equiv \sphericalangle\ (h, k)$.

III.5. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\sphericalangle\ BAC \equiv \sphericalangle\ B'A'C'$ gelten, so ist auch stets die Kongruenz $\sphericalangle\ ABC = \sphericalangle\ A'B'C'$ erfüllt.

IV. *Axiom der Parallelen*

IV. (Euklidisches Axiom). Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet. (Das Axiom wird bei allen Untersuchungen, bei denen nicht auf die Axiome der Kongruenz zurückgegriffen wird, durch die Forderung verstärkt, daß eine Parallele existiert).

V. *Axiome der Stetigkeit*

V.1. (Axiom des Messens oder Archimedisches Axiom). Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es auf der Geraden AB eine Anzahl von Punkten A_1, $A_2, A_3 \ldots, A_n$, so daß die Strecken $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ der Strecke CD kongruent sind und B zwischen A und A_n liegt.

V.2. (Axiom der linearen Vollständigkeit). Die Punkte einer Geraden bilden ein System, welches bei Aufrechterhaltung der linearen Anordnung, des ersten Kongruenzaxioms und des Archimedischen Axioms (d. h. der Axiome I.1—2, II, III.1, V.1) keiner Erweiterung mehr fähig ist. (Die Hinzunahme dieses letzten Axioms, das in der Originalausgabe von 1899 nicht erhalten war, wurde im Verlauf späterer Untersuchungen als notwendig erkannt.)

Nachdem Hilbert diese Axiome formuliert hatte, wies er darauf hin, daß das ganze System (bis auf Isomorphie) eine einzige Interpretation zuläßt, die er ausgehend vom Körper der reellen Zahlen konstruierte, indem er die Begriffe Punkt,

Gerade, Ebene, Inzidenz eines Punktes mit einer Geraden oder mit einer Ebene, usw. . . . so deutete, wie das in der analytischen Geometrie üblich war. Um eine Interpretation zu erhalten, die alle Axiome mit Ausnahme des Vollständigkeitsaxioms V.2 erfüllt, genügt es, den Körper der reellen Zahlen durch den Teilkörper Ω des Körpers derjenigen algebraischen Zahlen zu ersetzen, „welche hervorgehen, indem man von der Zahl 1 ausgeht und eine endliche Anzahl von Malen die vier Rechnungsoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und die fünfte Operation $\sqrt{1+\omega^2}$ anwendet, wobei ω jedesmal eine Zahl bedeuten kann, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist" ([121], S. 34). In derselben Weise bilden die wichtigsten Axiome den Gegenstand von Unabhängigkeitsbeweisen; es ist interessant zu bemerken, daß Hilbert, um ein Modell der Axiome I bis IV anzugeben, das nicht den Axiomen V genügt, eine analoge Konstruktion benutzte: Er betrachtete[1] „den Bereich $\Omega(t)$ aller derjenigen algebraischen Funktionen von t, welche aus t durch die fünf Rechnungsoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und die Operation $|\sqrt{1+\omega^2}|$ hervorgehen; dabei soll ω irgendeine Funktion bedeuten, die vermöge jener fünf Operationen bereits entstanden ist" ([121], S. 47). „Ferner möge, wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen dieses komplexen Zahlensystems sind, die Zahl a größer oder kleiner als b, in Zeichen $a > b$ oder $a < b$, heißen, je nachdem die Differenz $c = a - b$ als Funktion von t für genügend große positive Werte von t stets positiv oder stets negativ ausfällt" ([121], S. 48). Um die Theorie der Proportionen in Verbindung mit den Untersuchungen von Teilsystemen seines Axiomensystems zu behandeln, die es gestatten, die oben genannten Sätze von Desargues und von Pascal herzuleiten, und um aufzuklären, was diese Sätze selbst gestatten, wurde Hilbert dazu geführt, die Axiome der totalgeordneten reellen Körper zu formulieren und für sie Modelle zu konstruieren; dazu führte er im Rahmen eines kartesischen Koordinatensystems Streckenrechnungen ein, in denen Summen und Produkte mittels einfacher Geradenkonstruktionen erklärt werden. Er erhielt dabei entweder den Körper der reellen Zahlen (wenn alle Axiome I bis IV erfüllt sind) oder einen totalgeordneten reellen archimedischen Körper (wenn eventuell V.2 nicht erfüllt ist) oder einen pythagoreischen Körper[2] (wenn außerdem V.1 nicht erfüllt ist).

Die axiomatische Geometrie hat noch im ersten Drittel des zwanzigsten Jahrhunderts eine Flut an Arbeiten hervorgebracht, unter denen insbesondere die Axiomatik der projektiven Geometrie beliebiger Dimension in dem Werk *Projective geometry* von Veblen und Young [295] und das aus paarweise zueinander dualen Axiomen bestehende Axiomensystem von Kerékjártó ([137 bis], 1944) herausragen. Aber nicht auf diesem Gebiet haben sich die Fortschritte der axiomatischen Methode vollzogen. Nach dem Erscheinen der *Principia Mathematica* von Russell und Whitehead [303] wurde sie im Rahmen der Untersuchung der formalen Systeme betrieben, einem der Objekte der mathematischen Logik.

---

[1]) Die beiden folgenden Hilbert-Zitate wurden hier zusätzlich aus [121] übernommen. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) Ein pythagoreischer Körper ist ein Körper, in dem jede Summe von Quadraten selbst ein Quadrat ist.

13.2. Die Fortschritte in Richtung auf die Formalisierung und das Verständnis ihrer Rolle bis zum Ende des neunzehnten Jahrhunderts

Jedes System mathematischer Zeichen ist ein Teil einer formalen Sprache, und in dem Maße, wie sich in Verbindung mit der Praxis von Rechenverfahren in sich geschlossene Bezeichnungssysteme entwickelten, wurden immer umfangreichere Teilgebiete solcher Sprachen zu Ausdrucksmitteln des mathematischen Denkens. Wir beschränken uns im folgenden auf die Erwähnung einiger markanter Etappen. Dabei interessiert uns hier besonders, daß mit dem Beginn jener Periode, mit der sich dieses Kapitel befaßt, die jeweils benutzten Bezeichnungen selbst den Mathematikern Stoff zum Nachdenken zu liefern begannen und daß in jener Zeit diese Entwicklung mit derjenigen zusammenfließt, welche die Logiker dazu führte, sich des algorithmischen Charakters bestimmter Aspekte ihrer Disziplin und deren wesentlicher Bedeutung für die Mathematik bewußt zu werden und sie als Zweig der Mathematik zu konstruieren, der dann an der allgemeinen Entwicklung zur Formalisierung teilhaben sollte.

13.2.1. *Die grundlegenden Etappen der Entwicklung der mathematischen Bezeichnungen*

Das Zeichen als Symbol für eine allgemeine Einheit und die Figur als Keim der Kartographie eines Ortes bildeten zweifellos die ersten Elemente mathematischer Bezeichnungen. Die Idee, gewisse Elemente einer Figur, wie Punkte, Geraden usw., zu benennen, indem man sie mit Zahlen markierte, geht auf die griechischen Geometer der Antike zurück, wobei zu beachten ist, daß man zu jener Zeit die Zahlen noch durch Buchstaben bezeichnete und auch schon Striche benutzte, wenn nicht genügend viele Buchstaben zur Verfügung standen. Dieser Gebrauch befreite das Denken von den Schranken des Ausdrucks, zu denen es die alleinige Verwendung der Umgangssprache zwingt, wenn es sich darum handelt, eine Figur mit relativ vielen Elementen zu beschreiben. Der Buchstabe (bzw. jedes einem üblichen Alphabet in analoger Rolle hinzugefügte Symbol) wird zu einer Variablen im Sinne der modernen Logik, sobald er (bzw. es) als Darstellung eines allgemeinen nicht näher spezifizierten Elements aufgefaßt wird. Man sieht bei Aristoteles, der als erster von Buchstaben Gebrauch machte, um Aussagen zu bezeichnen (auszudrükken), wie sich der Übergang von der ersten Funktion zur zweiten vollzog:[1]) Aristoteles formulierte Gesetze, und die Allgemeinheit ist genau das, was ein Gesetz charakterisiert (zu denen selbstverständlich die Sätze der Geometrie gehören). Seitdem argumentierte man nicht mehr über einzelne Aussagen, sondern über *Aussageformen*. Durch die Einführung von Aussagenvariablen wurde Aristoteles zum Begründer der *formalen* Logik.

---

[1]) Vgl. beispielsweise [5][1] I,4, 25b, 38–40, und [6][1] II, 16, 98b 5–9.

Die Variable (im Sinne der modernen Logik, wie wir es gerade präzisiert haben) ist das Grundelement jedes formalen Ausdrucks. Man sieht, daß in bezug auf die Zeit der Einführung der Variablen die Logik nicht hinter der übrigen Mathematik zurückblieb. Im Gegenteil: Im Laufe der Jahrhunderte sollte das Fehlen von eigenen Bezeichnungen für die Arithmetik die Entwicklung der Algebra hemmen, obwohl schon im Werk des Diophant ein Buchstabe zur Bezeichnung der ihrem Wesen nach allgemeinen Unbekannten verwendet wurde.

Die Variablen allein gestatteten es jedoch noch nicht, formale Ausdrücke zu bilden, jedenfalls solange man ihren Gebrauch auf Stellen von *Operanden* beschränkte, d. h. zur Darstellung von Objekten, zwischen denen man Beziehungen betrachtet oder mit denen man Rechnungen beginnt. Sobald man dagegen neben den Variablen auch Zeichen benutzte, welche auf Stellen für *Operatoren* stehen konnten, d. h. die zur Bezeichnung von Operationen und Relationen dienten, eröffnete sich ein unbegrenztes Gebiet von Möglichkeiten zur Bildung von Ausdrücken, die zur Beschreibung von Resultaten von komplexen Operationsanweisungen oder von Aussagen geeignet sind, welche solche Resultate betreffen. Durch Nebeneinandersetzen gewisser Zeichen, wenn dieses Nebeneinandersetzen als Symbolisierung einer Zusammenfassung interpretiert wird, erhält man auf diese Weise Darstellungen der ersten natürlichen Zahlen, wie sie schon in vorgeschichtlichen Zeiten benutzt wurden.

Zwar hatten auch die alten Völker schon Symbole, welche Operationen bezeichneten: Die Ägypter hatten z. B. ein Symbol, das gemeinsam mit einem Zahlensymbol dazu diente, dessen reziproken Wert (d. h. einen Stammbruch) zu bezeichnen[1]), und die Griechen hatten bereits eine Bezeichnung für Brüche mit beliebigen Zählern. Jedoch dienten in der frühen Antike diese Symbole nur zur Bezeichnung von konkreten numerischen Ausdrücken. Nach den vorliegenden Quellen ist wahrscheinlich Diophant der erste gewesen, der algebraische Ausdrücke benutzte, die zur Darstellung der Unbekannten eine Abkürzung enthielten, welche ein Symbol darstellte, das die Rolle einer Variablen spielte.[2]) Der Gebrauch von Variablen, d. h. unbestimmten Parametern, auch als Koeffizienten der Potenzen der Unbekannten war schließlich eine Neuerung, die die Einführung eines ersten zusammenhängenden Bezeichnungssystems gestatten sollte, innerhalb dessen die anstehenden algebraischen Probleme im allgemeinen Fall behandelt und ihre Lösungen in allgemeiner Form diskutiert werden konnten. Durch sie gilt F. Viète (1540—1603) mit dem Jahre 1591 als Begründer der modernen Algebra.

Selbstverständlich können wir in dieser kurzen Übersicht nicht auf die Vielzahl von mehr oder weniger grundlegenden Vervollkommnungen, auf den nur zeitwei-

---

[1]) Die alten Ägypter schrieben II für 2 und $\overset{\frown}{\text{II}}$ für $^1/_2$, wobei das Symbol ⊂⊃ den Übergang zum Reziproken bezeichnet ([109], Bd. I, S. 28).

[2]) Diophant benutzte *unterschiedliche* Abkürzungen für die verschiedenen Potenzen der Unbekannten (vgl. [109], Bd. 2, S. 458—459 (bzw. [109][1], S. 477f, oder auch I. G. Bašmakova, *Diophant und diophantische Gleichungen*, Berlin/Basel 1974, S. 19. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe*)), und darin folgte man ihm bis Descartes. Leibniz hat im Zusammenhang mit der Einführung seiner Bezeichnung der Differentiale auf die Unzweckmäßigkeit einer solchen Bezeichnungsweise hingewiesen ([162 bis], S. 595 und 601).

ligen Gebrauch und auf die verschiedenen Versuche zur Verbesserung der Bezeichnungsweise eingehen, die mit den Namen der unterschiedlichsten Autoren verknüpft sind, wie die heute noch gebräuchliche Bezeichnung der Potenzen, die von Descartes stammt, oder die von Leibniz herrührende Festlegung der Handhabung der Klammern usw. Der Einfluß, den ein vernünftiges Bezeichnungssystem dadurch auf den Fortschritt der Erkenntnis ausübt, daß es das Denken erleichtert, kann sicher nicht geleugnet werden; jedoch wurden mit der Entwicklung der Kommunikationstechniken, namentlich nach der Erfindung des Buchdrucks, die Beziehungen zwischen den Gelehrten immer enger, und die Zeit, die zwischen einer grundlegenden Idee und ihrer besten technischen Realisierung verstrich, wurde immer kürzer. Für uns sind hier nur die Idee und der Widerhall, den sie fand, von Bedeutung.

Die folgende Etappe auf dem Wege zur Formalisierung ist die des Übergangs von einem Operatorsymbol, das eine wohlbestimmte spezielle Operation bezeichnet, zu einer *Operatorvariablen*, welche eine *allgemeine* Operation darstellt. Dieser Übergang hat sich in zwei Schritten vollzogen. Der erste Schritt führte zu allgemeinen Darstellungen von Operationen, die durch eine eventuell unendliche Folge von Verknüpfungen von solchen Elementaroperationen erzeugt wurden, wie sie aus der Algebra und der Geometrie bekannt waren: Addition, Subtraktion, usw. Im zweiten Schritt wurden in dieser Darstellung die speziellen Operationen durch sie erzeugende Verknüpfungsgesetze ersetzt, die selbst allgemein waren. Die erste Etappe war abgeschlossen, als 1718 Johann Bernoulli zur Darstellung einer allgemeinen Funktion (die man sich damals als durch einen algebraischen oder analytischen Ausdruck angebbar vorstellte) einen einzigen Term φx benutzte, welcher durch das Aufschreiben eines ein allgemeines Argument symbolisierenden Operanden x im Wirkungsbereich eines ein allgemeines Bildungsgesetz (also in jener Epoche einen algebraischen oder analytischen Ausdruck) symbolisierenden Operators φ die Vorstellung der Zuordnung $x \mapsto \varphi x$ symbolisierte, die aus der einheitlichen Anwendung des Bildungsgesetzes auf einen beliebigen Argumentwert resultiert.[1]) Zwar wurden auch vorher schon allgemeine Funktionen verwendet, jedoch ausschließlich in Positionen von Operanden, d. h. nach Art der geometrischen oder algebraischen Variablen und als deren genaues Analogon für eine weitere Art von Objekten, eben für Funktionen: Es war das ein Bezeichnungsverfahren, das den Mangel aufwies, die Rolle der dargestellten Objekte als Funktionen nicht deutlich werden zu lassen. Das war in der Kinematik der Fall, wo das Argument — die Zeit — als evident angesehen wurde, was jedoch nicht angemessen ist. So verfuhr u. a. Newton, und wenn er die Ableitung von x in der Gestalt $\dot{x}$ schrieb, so meinte er damit das Resultat der Anwendung einer *wohlbestimmten* Operation (nämlich „Bildung der Geschwindigkeit") auf die als „Ab-

[1]) Gegenüber einem allgemeinen Ausdruck der Gestalt $x \mapsto \varphi x$ spielen Ausdrücke der Gestalt $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 + 1, \ldots$, die unter Benutzung von *speziellen* Bildungsgesetzen (x^2, $x^2 + 1, \ldots$) zur Bestimmung der Werte gebildet sind, dieselbe Rolle wie die numerischen Ausdrücke gegenüber jenen speziellen Bildungsgesetzen. (Natürlich sind uns heute die Bezeichnungen mit dem Pfeil $\mapsto$ geläufig, und es sind die Schemata, die allgemein sind wie φx oder speziell wie x^2, $x^2 + 1, \ldots$, die damals diese Rolle spielten.)

szisse" aufgefaßte allgemeine Funktion x, und zwar in derselben Weise, wie $1/n$ das Resultat der Anwendung der Operation „Reziprokenbildung" auf die allgemeine Zahl n ist.

Von dem Augenblick an, als die Operatorvariable eingeführt worden war, stellte sich eigentlich eine spätere Etappe schon als überschritten heraus, nämlich diejenige, in der ein und dieselbe Variable je nach den Umständen sowohl eine Operandenstelle als auch eine Operatorstelle einnehmen konnte (in dem Zeichen $f'(x)$ ist f' der Operator, der selbst ein Ausdruck ist, in dem f Operand und der die Ableitung symbolisierende Strich Operator ist). Es ist hinreichend bekannt, welchen Impuls im achtzehnten Jahrhundert die Analysis durch die theoretischen Entwicklungen erhielt, welche zur Begründung der die grundlegenden Operationen der Infinitesimalrechnung beherrschenden Algorithmen dienten, denen sich bald auch adäquate Darstellungsmethoden hinzugesellten; darunter waren die von uns angegebenen *notwendig*.[1])

Das alles gilt genauso für die Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen (die partiellen Ableitungen wurden seit Anfang des achtzehnten Jahrhunderts verwendet[2])), was aber nicht bedeutet, daß das achtzehnte Jahrhundert bereits zum Begriff der allgemeinen strukturellen Operation vorstieß.[3]) Dazu mußte sich

---

[1]) Untersucht man, wie es in dieser Beziehung mit den Leibnizschen Bezeichnungen steht, wenn man sich, wie wir es soeben getan haben, auf einen streng formalen Standpunkt bezüglich der Analysis stellt (bei dem in den Ausdrücken die Stellen von Operanden und Operatoren mit Variablen oder mit Symbolkombinationen, die deren Rolle spielen, besetzt sind), so stößt man auf keine zusätzliche Schwierigkeiten — es sei denn auf diejenige, daß auch Operatoren von mehr als einem Argument eingeführt werden. Es geht jedoch nicht nur um die Bezeichnungen selbst, sondern vor allem auch um deren *Bedeutung*, und während des achtzehnten und neunzehnten Jahrhunderts, von einem guten Teil des zwanzigsten ganz zu schweigen, vollzog sich der formale Gebrauch der Differentiale und Differentialoperatoren unter einem mystischen Schleier, der an den erinnern würde, der die komplexen Zahlen umgab, hätte sich der Gebrauch der Differentiale nicht auf eine geometrische Anschauung gestützt, an welcher es den komplexen Zahlen lange Zeit gebrach.

Es lohnt zu bemerken, daß der Gebrauch des Differentials dx mit dem Argument x in Zuordnungsvorschriften von Funktionen, in denen Anwendungen des Operators d/dx auftreten, damit man ihn zum Gegenstand theoretischer Untersuchungen machen konnte, zwangsläufig die Einführung einer Bezeichnungsweise der Funktionen nach der von Johann Bernoulli benutzten Art mit sich brachte.

[2]) In dem Symbol f'_x besteht der Operator aus Strich und Index, und der Index ist Operator für den Strich. (Es sei darauf hingewiesen, daß in der deutschsprachigen Literatur meist nur f_x, f_y, f_{xy} usw. geschrieben wird. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

[3]) Insbesondere deshalb nicht, weil es noch nicht den modernen Funktionsbegriff als eine nicht notwendig algebraisch oder analytisch bestimmte funktionale Zuordnung herauszuarbeiten vermochte. Dieser Begriff wird, was Zahlbereiche betrifft, im allgemeinen Lejeune-Dirichlet zugeschrieben, der in [163], Bd. 1, S. 132, das Beispiel einer Funktion angab, die durch die verbale Bedingung definiert ist, nur zwei Werte anzunehmen: den ersten für alle rationalen Argumente, den zweiten für alle irrationalen. (In einer Arbeit aus dem Jahre 1834 hatte Lobačevskij schon eine analoge allgemeine Definition des Funktionsbegriffs für Zahlbereiche angegeben; vgl. *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, Bd. I, 8. Aufl., Berlin 1978, S. 70. — *Zusatz bei der deutschen*

erst die Haltung der Algebraiker gegenüber der Bedeutung der Ausdrücke ändern, die in den entstandenen Kalkülen verwendet wurden. Das sollte erst zwischen 1821 und 1845 von den Schöpfern der *Symbolischen Algebra*, den Algebraikern der Schule von Cambridge, bewerkstelligt werden; wir werden später (in 13.2.2.) zeigen, wie sie dazu geführt wurden, zwischen dem rein formalen abstrakten Kalkül mit Ausdrücken eines widerspruchsfreien Bezeichnungssystems und den vielfältigen Bedeutungen, welche diese Ausdrücke bei den unterschiedlichen Interpretationen dieses Kalküls haben können, zu unterscheiden. Damit ergab sich für die Operationssymbole des Kalküls, die nun selbst als Parameter aufgefaßt wurden und die bei jeder Interpretation zur Darstellung einer wohlbestimmten Operation dienten, eine neue Auffassung von Allgemeinheit, im Hinblick nämlich auf die Allgemeinheit des Bereichs dieser Interpretationen. Damit war dann der Weg geebnet für diejenigen Konzeptionen der Axiomatik, wie sie im letzten Jahrzehnt des neunzehnten Jahrhunderts von den Schülern Peanos (vgl. 13.1.7.) dargeboten wurden. Wir bemerken, daß diese neue Art von Allgemeinheit, wenn man sich auf Interpretationen in einem festen Gebiet beschränkt, die Allgemeinheit der in diesem Gebiet praktizierten Interpretationen umfaßt.

Zuvor findet man bei verschiedenen Autoren *spezielle* Verknüpfungsoperationen, die von denen in der Arithmetik und ihren Erweiterungsbereichen verschieden sind. So führte Gauß im fünften Kapitel seiner *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) eine Verknüpfungsoperation zwischen Äquivalenzklassen von quadratischen Formen ein, die er *additiv* schrieb[1]), und Ruffini definierte in seiner Abhandlung über die Unmöglichkeit der Lösung der Gleichungen fünften Grades in Radikalen (vgl. 2.2.2.) das „Produkt“ zweier Permutationen.

Ebenso bemühten sich auch die Logiker seit Leibniz und während des ganzen achtzehnten Jahrhunderts, eine Analogie auszunutzen, die sie zwischen bestimmten Operationen der Logik und gewissen Operationen der Algebra bemerkt hatten. Sie strebten eine mathematische Behandlung der logischen Operationen an, welche die Übernahme von Symbolen, die bislang nur zur Darstellung algebraischer Operationen benutzt worden waren, in die Logik gestattet, um die als Analoga angesehenen Operationen der Logik zu bezeichnen. So notierte Leibniz die Konjunktion zweier Aussagen manchmal als AB und manchmal als $A + B$ (vgl. [30][1], S. 17), zuweilen bezeichnete er aber mit $A + B$ auch die ausschließende Disjunktion (vgl. [279], S. 65 und 87). Die Bernoullis griffen in ihrem *Parallelismus* [11] von 1685 diese Ideen auf und benutzten analoge Bezeichnungen. Der Mathematikprofessor J. A. v. Segner (1707—1777) bezeichnete in seinem Werk [263] von 1740 die Konjunktion multiplikativ und benutzte das Minuszeichen für die Negation. Der Philosoph G. Ploucquet (1716—1790) verwendete in ver-

Ausgabe.) Wir haben jedoch gesehen (vgl. 1.2.), daß Euler, als er sich 1749 veranlaßt sah, seine „frei gezeichneten Funktionen“ einzuführen, zu einer ersten Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs gelangt war; eine zweite geht auf Fourier ([74], Bd. 1, S. 207 bis 209 und 230—232) zurück. Wieder sind es Frege im Jahre 1879 [79] und, unabhängig von ihm, Dedekind [62], denen das Verdienst zukommt, den Funktionsbegriff von der Einschränkung auf Zahlbereiche befreit zu haben.

[1]) Vgl. [30][1], S. 69.

schiedenen seiner Arbeiten [230] zwischen 1763 und 1766 das Pluszeichen für die Konjunktion und bezeichnete die ausschließende Disjunktion multiplikativ; er polemisierte gegen Lambert, der in seinem Werk *Neues Organon* [155] von 1764 die ausschließende Disjunktion additiv und die Konjunktion multiplikativ symbolisiert hatte. Diese Aufzählung ist nicht vollständig und geht auf weniger wichtige Arbeiten (aus dem achtzehnten Jahrhundert) z. B. von J. G. Darjes (1714 bis 1791), von v. Holland, einem Schüler von Ploucquet, der mit Lambert im Briefwechsel stand, von S. Maimon (1753—1800) und von G. Castillon (1727—1811) nicht ein; der Widerhall auf diese Versuche war jedoch schwach und kann nicht verglichen werden mit dem auf gleichzeitige Arbeiten in der Zahlentheorie oder über die Auflösung von Gleichungen.

Die symbolische Schreibweise von formalen Ausdrücken, welche *Aussageformen* darstellen, d. h. von Schemata zur Analyse von Aussagen hinsichtlich der gegenseitigen Stellung der durch ihre Terme dargestellten Operanden und Operatoren (in der analogen Art, wie z. B. ein Formelausdruck für ein Polynom ein Schema zur Analyse einer Rechenvorschrift darstellt), setzte die Verwendung von Symbolen voraus, welche Relationen[1]) bezeichnen. Die Benutzung von solchen Zeichen und solchen Ausdrücken, zuerst unter dem Namen Gleichungen oder Identitäten, ist ebenso alt wie die Algebra, wobei die Gleichheit (zwischen Zahlen) die erste so behandelte Relation war (1557). Etwas später folgten die Ungleichheitszeichen $<$ und $>$, die zuerst 1631 von Thomas Harriot benutzt wurden.

Die verschiedenen Elemente, von denen wir bisher gesprochen haben und über die man damals verfügte, haben im siebzehnten und achtzehnten Jahrhundert zur Herausbildung einer Systematik in den mathematischen Bezeichnungen geführt, nach der die Ausdrücke gebildet wurden, welche Objekte oder primitive Aussagen (d. h. solche ohne logische Konstanten) darstellen, und die gegen Ende des achtzehnten und zu Anfang des neunzehnten Jahrhunderts die Aufmerksamkeit einiger Mathematiker auf sich zog.

K. F. Hindenburg (1741—1808), dem man die Bezeichnung „Kombinatorische Analysis" verdankt, L. Arbogast (1759—1803), der unter der Bezeichnung *échelles d'opération des fonctions* Differentialoperatoren einführte, und Lagrange, der von den algebraischen Aspekten der Algorithmen der Differentialrechnung fasziniert war, präparierten eine Reihe von formalen Aspekten heraus, in der vergeblichen Hoffnung, damit Prinzipien herauszuarbeiten, welche den Gebrauch dieser Algorithmen rechtfertigen könnten, deren Begründung durch den Rückgriff auf die unendlich kleinen Größen die Kritik und die Angriffe von Mathematikern wie M. Rolle (1652—1718), Philosophen wie B. Nieuwentijt (1654—1718) und des Bischofs G. Berkeley (1685—1753) hervorgerufen hatten.

Aus diesen Arbeiten, welche die vorhandenen Kalküle dadurch zu *beherrschen* suchten, daß sie sie durch gedrängte Formeln darstellten, ist eine Methode des „Loslösens der Symbole der Operation von denen der Größen, auf die sie wirken"

---

[1]) Dieser Terminus wird hier zunächst im naiven Sinne für jede Art von Beziehungen zwischen Dingen verstanden, nicht in einer der technischen Bedeutungen, welche ihm in der Logik oder in der Mengenlehre beigelegt werden. Wir werden später darauf zurückkommen.

hervorgegangen, die von J. F. Français ([3], Bd. 4, S. 244) und F. J. Servois ([3], Bd. 5, S. 93) in den ersten Jahrgängen der *Annales* von Gergonne und von J. Herschel dem Jüngeren in einer Mitteilung an die Royal Society vom 19. Mai 1814 ([224], Jahrgang 1814, S. 441) angewendet wurde. Diese Methode besteht darin, die Wirkung eines Operators dadurch zu berechnen, daß man auf einen Ausdruck für diesen Operator diejenigen Transformationen anwendet, die nach den üblichen Regeln für das Umformen von Ausdrücken, die „Größen" darstellen, gestattet sind; dabei wird vereinbart, daß die Multiplikation die Zusammensetzung von Funktionen bedeutet. So bezeichnete man mit $f, f^2, f^3, \ldots, f^n, \ldots$ die aufeinanderfolgenden *Iterierten* der Operation f und mit f^{-1} ihre Inverse, ohne daß man sich um die Bedingungen kümmerte, unter denen das existiert, was man so bezeichnete, und mit $f^{-2}, \ldots, f^{-n}, \ldots$ bezeichnete man die Iterierten der Umkehrfunktion; dabei stellte man z. B. fest, daß die Operation f^0 die Identität sein müßte, da $f^{m+n}(x) = f^m f^n(x)$ sein sollte.

Um seine Ausführung gedrängt darstellen zu können, begann J. Herschel mit einer Aufstellung der Zeichen und der Regeln zur Bildung von Ausdrücken, so wie es (mit etwas mehr Strenge und Systematik) auch ein moderner Logiker tun würde:

„I. Die Zeichen $\times$, :, (,) werden benutzt, um die Operationssymbole von den Größensymbolen, auf die wirken, zu trennen, also:

$$f(x)\,, \qquad \varphi : \log x\,, \qquad \left(\frac{d}{dx} - 1\right)^n \times \varphi(x)\,.$$

II.1. Die Hintereinanderausführung von zwei Operationen wird dargestellt, indem ihre Symbole in der richtigen Reihenfolge nebeneinandergestellt werden; so wird statt $\varphi(\psi(x))$ einfach $\varphi\psi(x)$ geschrieben.

2. Wenn verschiedene kombinierte Operationen als eine einzige angesehen werden, so werden ihre Zeichen in Klammern gesetzt, beispielsweise

$$f \log \varphi(x) = (f \log \varphi) : x$$

[...]

4. [...] es muß beachtet werden [...], daß $(\varphi\psi)^n$ nicht dasselbe ist wie $\varphi^n\psi^n$, abgesehen von einigen besonderen Fällen.[1])

III. [...] 2. Die echte[2]) Multiplikation von zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ wird ausgedrückt, indem ein Punkt zwischen ihre Zeichen gesetzt wird, beispielsweise

$$\varphi \cdot \psi(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)\,.$$

IV.1. D wird als Zeichen für die Differentiation verwendet. Dies ist genaugenommen ein Zeichen für eine Operation, die nicht auf eine Größe ausgeübt wird, sondern auf das Zeichen, dem sie unmittelbar vorausgeht; dadurch wird die mit diesem

---

[1]) Dies weist auf eine klare Einsicht in die Nichtkommutativität der Zusammensetzung von Operationen hin, selbst wenn darauf nicht ausdrücklich hingewiesen wird.

[2]) d. h. die gewöhnliche Multiplikation; das andere Produkt wird manchmal symbolisches Produkt genannt.

Zeichen symbolisierte Operation abgeändert.[1]) Beispielsweise D sin = cos; D cos = −sin. Es ist aber zu beachten, daß D $\log^{-1} = \log^{-1}$ ist [. . .]".

Die Diskussion über die komplexen Zahlen in den *Annales* von Gergonne, an der sich J. F. Français und F. J. Servois ([3], Bd. 4 und 5) beteiligten, betrifft ein geschlossenes Bezeichnungssystem für diese und die Rechenregeln, nach denen man von irgendwelchen dieser Zahlen zu anderen gelangt. Der Bericht über die Festsitzung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften von Sankt Petersburg anläßlich ihrer Hundertjahrfeier am 29. Dezember 1826 verweist auf zwei Abhandlungen *Grundlinien des typischen Calculs*, in welchen das Akademiemitglied E. Collins „allgemeine Operationszeichen benutzt, die er durch Striche andeutet, und die wie die gewöhnlichen Zeichen der Addition, der Subtraktion usw. . . . zwischen die Buchstaben gesetzt werden. Dieser typische Calcul ist damit nichts anderes als die Syntax des Funktionencalculs" (S. 39). Und in seinen Werken [207 bis] von 1830 und [208] von 1833 unterschied G. Peacock (1791—1858) zwischen einer *arithmetischen Algebra*, welche die Regeln für das Rechnen mit Ausdrücken aufstellt, die natürliche Zahlen darstellen, und einer *symbolischen Algebra*, der er die Aufgabe zuwies, die Regeln des Rechnens mit „Buchstabenausdrücken" zu begründen, d. h. mit jenen Ausdrücken, die in das Bezeichnungssystem für Polynome eingehen.

Diese Entwicklung vollzog sich in Wechselwirkung mit derjenigen, die unter dem Druck der Frage nach der genauen Bedeutung eines formalen Ausdrucks dahin führte, den für ein geschlossenes Bezeichnungssystem relevanten Ausdrükken verschiedene Interpretationen gegenüberzustellen. Man findet hierfür noch ein Vorbild in der Art und Weise, in welcher der durch die Cambridger Schule geformte G. Boole (1815—1864) ab S. 27 seines Werkes *An investigation of the laws of thought* ([21] 1854) die Zeichen aufführte, aus denen er die Ausdrücke des von ihm behandelten Gebietes aufbaute, und zwar so klassifiziert, wie wir es auch heute machen würden:

„1°. Buchstabensymbole, wie x, y, usw. . . ., stellen Dinge dar, die unseren Vorstellungen unterliegen,

2°. Operationszeichen, wie +, −, ×, [...]

3°. Das Gleichheitszeichen, =."

Die Schlußetappe, welche die Konstituierung vollständig formalisierter Sprachen ermöglichen sollte, war die Einführung von Variablen für allgemeine Relationen (Prädikatenvariablen), und zwar als Ergebnis der Analyse von einfachen, d. h. von logischen Konstanten freien Ausdrücken, mit der ausdrücklichen Feststellung, daß sie eine Beziehung (Operator) zwischen Argumenten (Operanden) beschreiben.

Da Leibniz (1646—1716), als Vorläufer der modernen Logik und Mathematik, jene Analyse nicht vollzog, nutzte es ihm wenig, daß er ein Zeichen für eine unbe-

---

[1]) Der Leser wird bemerkt haben, wie J. Herschel den falschen Sprachgebrauch auslegt, nachdem er zunächst sagte, die Differentiation beziehe sich auf ein Zeichen, um nun auszudrücken, daß sie sich auf die Operation bezieht, welche dieses Zeichen darstellt.

stimmte Relation einführte ([55], S. 301) und als ein Meisterstück eines Programms der mathematischen Logik sogar den Plan einer formalisierten Sprache entwarf, seiner „lingua characteristica universalis"; es gelingt ihm dabei nicht, über das Stadium des Entwurfs hinauszukommen.

Aus dem gleichen Grund dienten A. de Morgan (1806—1871), einem Zeitgenossen und Freund von Boole, die von ihm 1860 [194] für unbestimmte Relationen eingeführten Variablen nur dazu, ein Bruchstück desjenigen Kapitels der Mengenalgebra zu behandeln, das sich mit Operationen zwischen den Graphen binärer Relationen beschäftigt. De Morgan schrieb $X .. LY$ für „X ist ein L zu Y" (vielleicht übernahm er hier eine Bezeichnung von Lambert, der $A = N :: B$ für „A ist das N zu B" schrieb [155]). Für de Morgan war dabei X noch Subjekt des Prädikats Y, wobei die sie verbindende Kopula (das Verb „ist" der alten Logik) nun nach der Relation L „moduliert" wurde; er wollte damit die Theorie des Syllogismus so verallgemeinern, daß sie auch Schlußweisen wie „X ist kleiner als Y, Y ist kleiner als Z, also ist X kleiner als Z" ([193], S. 20) umfaßt; im Hinblick auf diese Theorie bemerkte er, daß ihr in der Gestalt „X ist (ein kleineres zu Y), Y ist (ein kleineres zu Z), also X ist (ein kleineres zu Z)" ein Mittelterm fehlt.[1])

Die erste vollständig formalisierte Sprache wurde von G. Frege (1848—1925) in seiner *Begriffsschrift* [79] von 1879 eingeführt, nach J. von Heijenoort [110] dem „vielleicht bedeutendsten Werk, das jemals in der Logik geschrieben wurde", auf das wir nun eingehen wollen. Es ist schwierig, seine einzelnen Beiträge scharf zu trennen. Der wichtigste war sicher die Durchführung jener Analyse von einfachen Ausdrücken mit der Feststellung, daß ihr geistiger Gehalt der Begriff einer Beziehung zwischen Argumenten ist; sie erlaubt es, Regeln zur Bildung von Formeln anzugeben, die einfache Ausdrücke darstellen, in denen Variablen für beliebige Relationen enthalten sind, die man behandeln will. Dieses Verfahren kommt aber erst dann voll zum Tragen, wenn man es so erweitert, daß Formeln gebildet werden können, die die Darstellung jeder Art von Aussagen ermöglichen. Daher mußte man auch Zeichen einführen, um die *Konnektoren* (das sind bei Frege Negation und Implikation, während er Konjunktion und Disjunktion damit definierte) und die *Quantoren* darzustellen, wobei die Quantoren dem neuen Aufbau der Aussage angepaßt werden mußten, d. h. klar vom quantifizierten Ausdruck abgehoben sind und sich auf einen ihrer Operanden beziehen (der traditionelle Aufbau geht davon aus, daß in der Aussage „alle S sind P" die durch das Prädikat P repräsentierte Eigenschaft der durch das Subjekt S dargestellten Eigenschaft übergeordnet ist; für Aristoteles besagte die Aussage „jeder Mensch ist sterblich", daß die Eigenschaft „ist sterblich" der Eigenschaft „ist Mensch" übergeordnet ist, während z. B. die Aussage „einige Menschen sind weiß" bedeutete, daß die Eigenschaft „ist Mensch" die Eigenschaft „ist weiß" nicht ausschließt; somit bezieht sich die traditionelle Eigenschaftslogik auf die Vorstellung, daß eine Definition und etwas, was diese impliziert, behauptet wird, und das berührt nur die interne Struktur des Ausdrucks). In der *Begriffsschrift* erscheinen zum ersten Mal der Allquantor (Gene-

---

[1]) Bemerkungen dieser Art gehen auf die *Logica Hamburgensis* ([137], 1638) von J. Jungius (1587—1657) zurück, die Leibniz kannte und bewunderte.

ralisator), der als Grundbegriff behandelt wird, sowie der definitorisch eingeführte Existenzquantor (Partikularisator)[1]) und der moderne Begriff der Variablen, die ausdrücklich als ein Symbol aufgefaßt und sorgfältig von dem unterschieden wird, was sie bezeichnet.

Aus der traditionellen Syllogistik behielt Frege nur die Transkription eines Modus des Syllogismus (den modus ponens) bei, der bei ihm als Schlußregel diente ([G—H], S. 118) und dem er als zweite Regel eine Einführungsregel für Allquantoren hinzufügte. Außerdem verwendete er stillschweigend eine Substitutionsregel. Ein einfacher Vergleich von Formen gestattet es dann, zu prüfen, ob eine Formel korrekt aus gegebenen Formeln gefolgert ist. In dieser Weise eignen sich bestimmte Formelfolgen zur Darstellung (der Form) eines deduktiven Schlusses.

Freges Anliegen war es dabei, folgende These zu verteidigen: „Indem ich mir nun die Frage vorlegte, zu welcher dieser beiden Arten die arithmetischen Urtheile gehörten, musste ich zunächst versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind. Der Gang war hierbei dieser, dass ich zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindrängen könnte, musste Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlusskette ankommen. Indem ich diese Forderung auf das strengste zu erfüllen trachtete, fand ich ein Hindernis in der Unzulänglichkeit der Sprache, die bei aller entstehenden Schwerfälligkeit des Ausdrucks doch, je verwickelter die Beziehungen wurden, desto weniger die Genauigkeit erreichen liess, welche mein Zweck verlangte. Aus diesem Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden Begriffsschrift hervor" ([79]; vgl. *[8 bis], S. 48—49). Auf der nächsten Seite fügte er diesem Argument einen Hinweis auf die von Leibniz geplante allgemeine „lingua characteristica universalis" hinzu, einer formalen Sprache derselben Art wie die seine, die aber sogar für jeden Begriff ein Symbol enthalten sollte. Dieser Idee war eines der Fragmente gewidmet, das in der Zeit zwischen dem Tode von Leibniz und dem Erscheinen der *Begriffsschrift* mehrmals nachgedruckt worden war ([157], 1765; [158], 1780; [159], 1840).[2])

Die Bedeutung dieses Werkes von Frege stellte sich in der folgenden Zeit erst allmählich heraus, und seine Formelschreibweise wurde von niemandem übernommen.[3]) Das liegt zum einen Teil daran, daß andere Bezeichnungssysteme, welche dieselben Dienste leisten, aufkamen, ehe man sich für das seine interessierte, zum anderen Teil daran, daß dieses nichtlineare Bezeichnungssystem gegen alle schreibtechnischen Gewohnheiten verstieß und man sich erst an Freges Formelschreibung

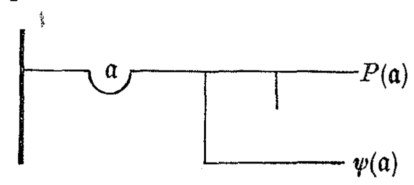
[1]) Wir werden noch sehen, daß die Quantoren unabhängig von Frege auch von C. S. Peirce eingeführt wurden.

[2]) Vgl. dazu auch [162][1]. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) Interessanterweise gibt es eine *unmittelbare* Interpretation dieser Formeln, die jede Formel (soweit sie nur Aussagenvariablen enthält) in ein Schema für einen elektronischen Schaltkreis für die durch sie dargestellte „logische Funktion" überzuführen gestattet.

hätte gewöhnen müssen, vor allem aber wohl daran, daß es (beim Druck) viel Platz beanspruchte.

Als Beispiel betrachten wir die Formel



und analysieren, wie sie gemäß den von Frege gegebenen Erklärungen zu verstehen ist. Frege war der erste der Modernen, der die den Alten wohlbekannte Unterscheidung zwischen dem Inhalt eines Urteils als einer „blossen Vorstellungsverbindung", deren Wahrheit dieses Urteil behauptet, und dem Urteil selbst wieder entdeckt hat; der senkrechte Strich am linken Ende der Formel stellt damit für ihn den Schritt zur Behauptung der Wahrheit des vom Rest der Formel dargestellten Inhalts dar; er nannte ihn den *Urtheilsstrich.* Der waagerechte Strich, der unmittelbar rechts daneben liegt und für verschiedene Anknüpfungen geeignet ist, „verbindet die darauf folgenden Zeichen zu einem Ganzen, und auf dies Ganze bezieht sich die Bejahung, welche durch den senkrechten Strich am linken Ende des wagerechten ausgedrückt wird". Dieses Ganze darf nicht irgend etwas sein, es muß immer „einen beurtheilbaren Inhalt haben", kann also insbesondere kein isolierter Begriff sein. Frege nannte diesen waagerechten Strich den *Inhaltsstrich.* Die anderen waagerechten Striche in der Formel sind ebenfalls Inhaltsstriche, aber sie sind vor ihrer endgültigen Behauptung durch Verknüpfung mit anderen an sie angrenzenden Teilen der Formel kombiniert und modifiziert. So bedeutet der kleine senkrechte Strich vor P, daß *der Inhalt* desjenigen Ausdrucks, welcher dem so markierten Inhaltsstrich folgt, *nicht vorliegt*; Frege nannte ihn den *Verneinungsstrich*: „Der rechts vom Verneinungsstriche befindliche Theil des wagerechten Striches ist der Inhaltsstrich von $P(\mathfrak{a})$, der links vom Verneinungsstriche befindliche Theil dagegen ist der Inhaltsstrich der Verneinung von $P(\mathfrak{a})$."

Der waagerechte Strich, welcher links von $\psi(\mathfrak{a})$ steht, ist der Inhaltsstrich dieses Ausdrucks; der senkrechte Strich, der diesen mit dem Inhaltsstrich der Verneinung von $P(\mathfrak{a})$ verbindet, wird von Frege ein *Bedingungsstrich* genannt. Er sagte: „Wenn A und B beurtheilbare Inhalte bedeuten, so giebt es folgende vier Möglichkeiten:

1) A wird bejaht und B wird bejaht;
2) A wird bejaht und B wird verneint;
3) A wird verneint und B wird bejaht;
4) A wird verneint und B wird verneint".

Im betrachteten Beispiel nimmt $\top\, P(\mathfrak{a})$ die Stelle von A und $\psi(\mathfrak{a})$ die Stelle von B ein. Die Bedeutung des Bedingungsstrichs ist, daß im Augenblick der Behauptung die dritte dieser Möglichkeiten nicht eintritt, sondern eine der drei anderen. Das bedeutet, daß hier beschrieben wird, was C. S. Peirce (1839—1914) in [220] eine

Wahrheitstafel nannte ([G—H, S. 113), und zwar die der materialen Implikation.[1]) Nun müssen noch die Bedeutungen der „Höhlung" und der Frakturbuchstaben erklärt werden. Bei Frege heißt es ([79], vgl. *[8 bis], S. 67—68): „In dem Ausdrucke eines Urtheils kann man die rechts von ⊢ stehende Verbindung von Zeichen immer als Function eines der darin vorkommenden Zeichen ansehen. Setzt man an die Stelle dieses Argumentes einen deutschen Buchstaben, und giebt man dem Inhaltsstriche eine Höhlung, in der dieser selbe Buchstabe steht, ..., so bedeutet dies das Urtheil, dass jene Function eine Thatsache sei, was man auch als ihr Argument ansehen möge ... Sie (die Höhlung) grenzt das Gebiet ab, auf welches sich die durch den Buchstaben bezeichnete Allgemeinheit bezieht": Dieses Gebiet besteht aus allem, was sich dem unmittelbar rechts von der Höhlung gelegenen waagerechten Strich anschließt. „Das Gebiet eines deutschen Buchstaben kann das eines anderen einschliessen ... In diesem Falle müssen sie verschieden gewählt werden." Wir haben also einen modernen Generalisator vor uns, und die obige Formel muß in heutiger Formelschreibweise in $\forall \mathfrak{a}[\psi(\mathfrak{a}) \Rightarrow \neg P(\mathfrak{a})]$ übersetzt werden. Das Zeichen ⊢ wird auch heute noch benutzt, im allgemeinen um darauf hinzuweisen, daß die Formel, von der es steht, einen formalen Beweis (oder eine formale Ableitung aus links von ihm stehenden Voraussetzungen) gestattet.

Obwohl es keine vollständig formalisierte Sprache darstellt, spielte ein anderes Bezeichnungssystem, das kurz nach der *Begriffsschrift* eingeführt wurde, in der Geschichte der Logik bis in die Zeit des ersten Weltkrieges hinein eine wichtige Rolle, und gewisse Elemente dieses Systems existieren noch in heute verwendeten formalisierten Sprachen. Es handelt sich um das System, das, anknüpfend an die aus der Zeit von 1880 bis 1885 stammenden Arbeiten [222] von C. S. Peirce, von Relationentheoretikern und Anhängern von Boole in ihrer mathematischen Behandlung der *Algebra der Logik* und des von de Morgan entworfenen Werkes (vgl. [194]) benutzt wurde.

Peirce ging von der Vorstellung aus, daß eine binäre Relation r über einem Gebiet I durch eine Matrix $(r_{ij})_{i,j} \in I$ mit den Elementen 0 oder 1 dargestellt werden kann, so daß genau dann $r_{ij} = 1$ ist, wenn i in der Relation r zu j steht. Die Matrix der Zusammensetzung zweier binärer Relationen ist gleich dem Produkt der Matrizen ihrer Faktoren, wenn man an die Stelle der üblichen Addition die nicht-ausschließende Disjunktion setzt. Und dann ist $\Pi_i r_{ij} = 1$ bzw. $\Sigma_i r_{ij} = 1$, je nachdem, ob jedes i in der Relation r zu j steht bzw. dies für mindestens ein i der Fall ist, und in dieser Gestalt führte Peirce im Jahre 1885, ohne die Arbeit [79] von Frege zu kennen, die Quantoren ein (auch dieser Terminus stammt von ihm): Nach der Art von Boole sahen seine Nachfolger ihre Ausdrücke als sowohl durch Eigenschaften als auch durch Klassen interpretierbar an (die Entsprechung wird dabei durch den

[1]) Man stellte später fest, daß im vierten Jahrhundert v. u. Z. Philon aus Megara schon die Bedeutung der Implikation in Formulierungen erklärt hatte, die denen Freges analog waren (ohne allerdings Variablen zu benutzen); im Lichte der nachfolgenden Entwicklungen sollte der vergessene Sinn der Philonischen Texte wiederentdeckt werden (vgl. [16], S. 99).

Übergang von einer Eigenschaft zu der Klasse der Objekte, die diese Eigenschaft besitzen, geliefert; vgl. 13.2.2.).[1])

Die Algebra der binären Relationen wird ausführlich im 3. Band der 1895 erschienenen *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [259] von E. Schröder (1841 bis 1902) behandelt (Schröder hat dadurch selbst an ihrer Entwicklung mitgewirkt, daß er verschiedentlich unabhängig von Peirce gewisse von dessen Ergebnissen gefunden hat). Sie nahm bald neben der Algebra der Klassen ihren festen Platz in der „exakten" Logik ein. Bereits in seinem Buch *The principles of mathematics* [254] von 1903 erklärte B. Russell die „Logik der Relationen" zu einem der drei großen Zweige der Logik und paßte ihr Bezeichnungen an, wie sie heute im wesentlichen noch gebräuchlich sind. Der Einfluß der Schröderschen *Vorlesungen* machte sich während des ersten Drittels des zwanzigsten Jahrhunderts in allen Logikschulen bemerkbar. So vollzogen sich die verschiedenen ersten Versionen und Beweise des wichtigen Satzes von L. Löwenheim ([174], 1915) und Th. Skolem ([269], 1920; [272], 1929) noch ganz im Rahmen der Algebra der Relationen, und noch 1931, als er seine Abhandlung *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* [285] schrieb, verwendete A. Tarski ein Bezeichnungssystem, das dem von Schröder entspricht und auf das er explizit verwies.

Die Schöpfung einer anderen formalisierten Sprache (der er den Namen *Pasigraphie* gab) nahm zwischen 1888 und 1908 einen wesentlichen Platz im Schaffen von G. Peano und seinen Mitarbeitern ein. Er wollte auch, als er 1889 seine *Arithmetices principia* (Prinzipien der Arithmetik) ([210]; vgl. 13.1.7.) veröffentlichte, vornehmlich als Logiker wirken: Das Buch beginnt mit einer ausführlichen Präambel, die den *logischen Bezeichnungen* gewidmet ist und die selbst schon ungefähr hundert Definitionen und formalisierte Sätze enthält; die Behandlung der Arithmetik wird dann in dieser formalen Sprache durchgeführt. Peano nannte von denen, die ihn inspiriert hatten, vor allem Boole und Schröder, aber auch Cantor, Graßmann, Jevons, Peirce und McColl; die Arbeiten von Frege berücksichtigt er noch nicht, auf sie sollte er erst im folgenden Jahr aufmerksam werden.

Auch Peano betonte, er wolle „alle Begriffe, die in die Prinzipien der Arithmetik eingehen, so mit Symbolen bezeichnen, daß jede Aussage sich mit Hilfe dieser Zeichen ... ausdrücken läßt. Mit diesen Bezeichnungen erhält jede Aussage die Form und die Präzision, welche die Gleichungen in der Algebra besitzen". Wenn er jedoch behauptete, daß sich „aus den so formulierten Aussagen andere Aussagen herleiten lassen, und zwar tatsächlich nach Verfahren, die denen ähneln, welche man beim Auflösen von Gleichungen benutzt", so charakterisierte er damit ein Programm, das er selbst nicht erfüllt hatte. Denn in keiner Weise gab er die Regeln dieser Verfahren an. Er benutzte sie zwar ständig, wobei er aber in Wirklichkeit auf die intellektuellen Fähigkeiten zurückgriff, über die man für das Operieren mit den verwendeten Begriffen verfügte — im Gegensatz zu Frege, von dem wir weiter oben gesehen haben, daß er seine Schlußregeln ganz genau präzisierte, und der es ablehnte, irgendeine andere Art von Deduktion anzuerkennen.

---

[1]) Der Fall der k-stelligen bzw. einstelligen Relationen (Eigenschaften) wird dabei explizit ins Auge gefaßt, aber nicht behandelt.

Auch im Verlauf der späteren Entwicklungen, die Peano zwischen 1895 und 1908 zur Veröffentlichung der fünf Bände seines Werkes *Formulaire de mathématiques* [214] führten (in denen er die Möglichkeit zeigte, durch sukzessive Erweiterungen schließlich alle mathematischen Gebiete in einer symbolischen Sprache behandeln zu können, die völlig von den Besonderheiten der natürlichen Sprachen[1]) befreit ist), hat er diesen ernsten Mangel seiner formalen Behandlung nicht beseitigt und ebenso wenig auch einen anderen, der in einem nur eingeschränkten Gebrauch der Quantoren besteht. Jedoch waren die Symbole und Bezeichnungen seiner Pasigraphie mit viel Sorgfalt ausgewählt worden, und die Vielzahl der Symbole und Bezeichnungen, die dem praktischen Gebrauch der Mathematiker nahe kamen, ermöglichte es diesen, sich damit vertraut zu machen. Die Bezeichnungen des *Formulaire* fanden schnell weite Verbreitung; wir benutzen heute noch die von Peano vorgeschlagenen Zeichen $\in$, $\cup$, $\cap$ und Schreibweisen wie aB für die Menge aller Produkte von a mit Elementen $b \in B$; bei einigen anderen Bezeichnungen hat sich dagegen inzwischen die Bedeutung oder die Anordnung geändert: Beispielsweise kennzeichnete Peano die Klasse aller x mit $x \in a$ durch $[x \in]\, a$. Zusammen mit den Formeln fanden durch die Benutzung einer vollständig formalisierten Sprache auch die zur mathematischen Logik gehörigen Begriffe eine weite Verbreitung.

B. Russell hat bezeugt, daß die Arbeiten Peanos seit seiner Begegnung mit ihm auf dem 3. Internationalen Philosophiekongreß im Jahre 1900 in Paris seine eigenen Arbeiten unmittelbar beeinflußt haben. Das Programm, alle Gebiete der Mathematik auf die Logik zurückzuführen (die sich damals noch wenig von der Mengenlehre abhob), das sich Russell 1903 in seinen *Principles of Mathematics* [254] stellte, berücksichtigte die Beiträge *aller* bisher erwähnten Werke sowie die Arbeiten von Dedekind und von Cantor; von Frege übernahm er die Idee einer formalen Behandlung, welche auch die Überprüfung der Korrektheit einer Ableitung ermöglichte, aus dem *Formulaire* dessen wichtigste Beiträge, er verarbeitete die Algebra der Logik und die Algebra der Relationen sowie die Arbeiten der Geometer, die zu Hilberts *Grundlagen der Geometrie* geführt hatten. In Zusammenarbeit mit seinem Lehrer A. N. Whitehead (1861—1947) versuchte B. Russell, auf den 2000 Folio-Seiten der drei Bände der *Principia Mathematica* ([303], 1910—1913) dieses Programm zu realisieren. Dieses Werk, das eine der Peanoschen ähnliche, in verschiedenen Punkten verbesserte Sprache benutzt, deren Klarheit aber erhalten bleibt, sollte bis gegen 1935 zum Vorbild und zur Quelle der meisten Arbeiten über formale Systeme werden.

13.2.2. *Die Spielarten in der Einstellung gegenüber dem Sinn und der Tragweite von Kalkülen und der Mathematik*

Die Anfänge des Rechnens, des Messens von Größen und der Tätigkeit des Operierens mit ihnen sind uns nicht bekannt, da sie weit in die Urzeit zurückreichen. Diese Tätigkeit interessiert uns insoweit, als sie — schon in der Zeit vor den ersten

[1]) Peano hat auch viel zur Untersuchung internationaler Kommunikationssprachen beigetragen, großenteils unter dem Einfluß Leibnizscher Ideen.

bekannten Quellen und wie wir dann aus diesen Quellen wissen — von einem Operieren mit repräsentierenden Ausdrücken nach genauen Regeln begleitet wird (und zwar in einer Weise, die im Prinzip Maschinen anvertraut werden könnte) und als damals tatsächlich schon Vorrichtungen (Knotenschnüre, Rechenbretter usw.) existierten, die es erlaubten, mathematische Größen materiell zu realisieren und mit ihnen Operationen durchzuführen. Der Zweck bestand in einem Rechnen mit realen Objekten, die von einer einzigen Art waren, oder auch mit abstrakten Einheiten, welche allgemeine Repräsentanten dieser Objekte darstellten. Diese Realisierungen hatten dabei den Charakter von Kollektionen von solchen Einheiten, während die in den Überlegungen geometrischer Natur verwendeten Zeichen entsprechend Repräsentanten von Punkten und Linien waren und durch Marken und reale Striche dargestellt wurden. Die Zahlen, die Größen und die Figuren bildeten dabei die ersten Objekte der Arithmetik und der Geometrie.

Die Methode des schriftlichen Rechnens, die von den Europäern des Mittelalters nach dem islamischen Mathematiker Muhammad ibn Mūsā al-Ḫwarizmī[1]) (um 780—850), von dessen Schriften man aus dem dreizehnten Jahrhundert stammende Übersetzungen besitzt, *Algorithmus* genannt wurde, ist genau das, was das Dezimalsystem, das sich zu jener Zeit in Europa ausbreitete, so nützlich machte. Es erlaubte, sich vom Gebrauch der sperrigen Rechenbretter zu befreien, die immer noch mit viel Geschick benutzt wurden, und es beschleunigte das Rechnen, indem Zwischenrechnungen durch Zwischenoperationen ersetzt wurden. So entstand unter anderem eine Technik des Operierens mit geschriebenen Zeichen. Dank der Fortschritte in der Metallurgie konnte W. Schickard (1592—1635) im Jahre 1624 eine Maschine entwerfen, die die mit Dezimaldarstellungen der Zahlen praktizierten Operationen automatisch ausführte.[2])

Als Diophant (um 250) mit der Unbekannten die ersten Buchstabenausdrücke in die Arithmetik einführte, trat eine neue Art von formalen Umformungen von Ausdrücken in Erscheinung, Umformungen nämlich, die es gestatteten, von einer Gleichung zu einer oder mehreren anderen Gleichungen überzugehen, welche die Lösungen eines durch die erstere dargestellten Problems lieferten. Da die Unbekannte zur Darstellung einer Zahl verwendet wurde, stützten sich die Überlegungen, durch welche diese Umformungen gerechtfertigt wurden, natürlich auf die *Gesetze*, denen die Operationen mit den Zahlen genügen. Das setzte aber voraus, daß man diese Gesetze herleitete, die dann in ebenso viele Rechenregeln übergingen, und einige solcher Regeln finden sich tatsächlich bei Diophant ([30][1], S. 66).[3])

---

[1]) Es wird hier die in [307][1] benutzte Transkription arabischer Namen verwendet. Im Original findet sich die Schreibweise Al-Khuwarizmi; auch die Schreibweise al-Khwarizmi ist verbreitet. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) Daß diese Maschine nur Additionen und Subtraktionen ausführen konnte, tut hier wenig zur Sache; im Jahre 1673 gelang Leibniz der Entwurf einer ersten Maschine, die auch multiplizieren konnte. In der Zwischenzeit hatte im Jahre 1645 auch B. Pascal eine ähnliche Idee wie Schickard, zweifellos unabhängig von diesem, denn seine Maschine ist weniger gut.

[3]) Die Zahlentafeln, über welche die Babylonier verfügten und die ihnen in bestimmten Fällen die Auflösung einer Gleichung dritten Grades ermöglichen konnten, lassen vermuten, daß sie ebenfalls eine bestimmte Anzahl von Rechenregeln kannten.

Die Handhabung der formalen Ausdrücke, in denen eine Variable vorkommt, machte vor einem bestimmten Stadium des Fortschritts auf dem Gebiet der Umformungen nicht evident, was dann geschah, wenn in den Umformungen zwischendurch Operationen mit Termen unter Bedingungen durchgeführt wurden, unter denen die Rechnungen mit den Werten, die die Terme bei gewissen Variablenwerten annehmen, auf dem Rechenbrett nicht hätten vollzogen werden können. Das konnte sogar bei solchen Werten der Variablen passieren, für die es nicht vorauszusehen war; die Einsetzung der erhaltenen Werte in die Ausgangsgleichung bestätigte, daß das Resultat korrekt war; man wollte jedoch gerne verstehen, was man in den Zwischenstadien gemacht hatte. Auf diese Weise führte das intuitive Hantieren mit Buchstabenausdrücken bei der Auflösung von Gleichungen dazu, daß die „Natur" der Dinge, welche den Gegenstand des mathematischen Wissens ausmachten, zur Diskussion gestellt wurde.

Die Leistung der indischen Mathematiker des hohen Mittelalters, welche die Null als Zahl (und nicht mehr als Zählsymbol) sowie die negativen Zahlen mit einem klaren Verständnis ihrer Bedeutung einführten (beispielsweise als Schuld in einer kaufmännischen Aufgabe ([30][1], S. 68)), bestand in erster Linie darin, Maßgrößen entdeckt zu haben, welche für die Interpretation der neuen mathematischen Ausdrücke brauchbar waren und ihnen einen Sinn gaben. Jedoch ließen sich die Größen, die man vorher kannte, vergleichen, und niemand wagte, daran zu zweifeln, daß es, wenn man neue Größen einführt, eine Methode geben müsse, um auch diese zu vergleichen. Es sollte indes viele Mathematiker der folgenden Jahrhunderte in Verlegenheit bringen, klar zu begreifen, wie sich die so eingeführten neuen „Größen" in dieser Beziehung zueinander und zu den übrigen Größen verhalten.[1])

Es ist bekannt, daß sich ein gleiches geistiges Abenteuer bei den komplexen Zahlen (vgl. Kapitel 4) wiederholte, nachdem die italienischen Algebraiker des sechzehnten Jahrhunderts die Methoden zur Auflösung von Gleichungen dritten und vierten Grades „in Radikalen" entdeckt hatten (und die zu *Formeln* geworden waren, als Viète die unbestimmten Koeffizienten durch Buchstaben kennzeichnete); dieses Mal haftete ihm jedoch der Hauch einer Herausforderung an, den ihm für mehr als zwei Jahrhunderte das Unvermögen verlieh, herauszubekommen, welche Bedeutung man diesen „Zahlen" zuschreiben könnte.

Der Aufschwung, den technischer und wissenschaftlicher Fortschritt und Erkenntnistheorie in der Renaissance mit sich brachten, verlangte nach den Arbeiten Galileis (1564—1642) die Schaffung eines neuen unentbehrlichen mathematischen Werkzeugs, der Infinitesimalrechnung, und ihre Entwicklung während des achtzehnten Jahrhunderts (vgl. Kapitel 1): Die „Indivisiblen" und die unendlich kleinen Größen des Archimedes, des Xenokrates (396—314 v. u. Z.) und des Pseudo-Aristoteles (= al-Fārābī, ca. 870—950), die während des ganzen Mittelalters vergessen worden waren,[2]) wurden wieder hervorgeholt; unendliche Reihen

---

[1]) Wir haben gesehen (vgl. 1.2.), daß Euler die Vorstellung hatte, die negativen Zahlen so anzuordnen, wie wir es heute tun, aber sie dann insgesamt oberhalb der positiven Zahlen anzusiedeln.

[2]) Vgl. in [69] den Artikel „Infinitesimalrechnung".

und Produkte, stetige Funktionen, Ableitungen, Integrale, Differentialgleichungen usw. werden eingeführt, und es werden neue Symbolsysteme und Algorithmen geschaffen, die dem Umgang mit diesen Begriffen angepaßt sind. Das achtzehnte Jahrhundert sollte zu einer völligen Umwandlung der Mathematik führen.

Wir haben oben (in 13.2.1.) schon davon gesprochen, welche Diskussionen dem folgen sollten. Unter den Schöpfern der Analysis im siebzehnten Jahrhundert erlangten die Diskussionen eine breitere Sicht; sie erfaßten die Erkenntnistheorie, die Logik, die Mathematik und die Linguistik.

Schon 1629, mehrere Jahre vor der Veröffentlichung seiner *Géométrie*, wurde Descartes (1596—1650) von M. Mersenne (1588—1648) bezüglich der Idee einer *universellen Sprache* konsultiert. Er hielt sie nicht für realisierbar ([65], S. 702). Trotz dieser Skepsis konnte es Leibniz (1646—1716) zeitlebens nicht lassen, immer wieder neue Projekte einer teilweisen Realisierung zu entwerfen; zwei Jahrhunderte später beteiligte sich Peano, der diese Ideen aufgriff, sogar an der Ausarbeitung künstlicher internationaler Kommunikationssprachen.

Die linguistischen Arbeiten von Leibniz, der mehrere Sprachen beherrschte und sich auch viel mit verschiedenen *Wörterbuchprojekten* befaßte, machen den gesamten Inhalt der Bände V und VI der 1760 von Dutens herausgegebenen *Opera Omnia*[1]) [67] aus. Leibniz hat sein Anliegen in alle Gebiete, die ihn interessierten, hineingetragen. Es gibt kaum ein Bezeichnungssystem, dessen Übersetzung in ein anderes oder dessen Kodierung (im Sinne einer Chiffrierung) er nicht ins Auge gefaßt hätte: Er übersetzte Figuren in Gleichungen ([162], Bd. 7, S. 264), Zahlentabellen in eine musikalische Sprache ([56], S. 277—280), Zusammensetzung von Begriffen in ein Produkt, wobei die Grundbegriffe durch die Primzahlen dargestellt werden ([56], S. 42—49, bzw. [162][1], S. 107—113). Er spürte alle bekannten Ähnlichkeiten zwischen irgendwelchen Arten von Bereichen durch alle Arten von Entsprechungen auf, die er meistens als *Bezeichnung von Bezeichnetem* begriff. Er sagte: „Eine Sache bringt, in meiner Redeweise, eine andere zum Ausdruck, wenn es eine beständige und festgelegte Beziehung zwischen ihnen gibt, die die eine durch die andere auszudrücken gestattet. So drückt eine perspektivische Projektion ihre géométrale aus" ([162], Bd. 2, S. 112). Und an anderer Stelle ([162], Bd. 6, S. 327) schreibt er nochmals: „Die perspektiven Projektionen ... lassen erkennen, daß ein und derselbe Kreis durch eine Ellipse, eine Parabel und eine Hyperbel dargestellt werden kann, und sogar durch einen anderen Kreis, eine gerade Linie und einen Punkt."

Damit erahnte Leibniz wesentliche Züge der modernen Mathematik. Er richtete seine Aufmerksamkeit insbesondere auf die Äquivalenzrelationen, wobei er die Rolle von Symmetrie und Transitivität entdeckte. Seine Auffassung der Gleichheit hat wesentlich unsere heutige Auffassung inspiriert: „Eadem sunt, quorum unum potest substitui salva veritate" („Einander gleich sind diejenigen Dinge, welche füreinander gesetzt werden können, ohne die Wahrheit zu ändern"; [162], Bd. 7, S. 228—235). Leibniz konzipierte die Kombinatorik als Wissenschaft von den Relationen zwischen Objekten irgendwelcher Art, und man verdankt ihm die erste

---

1) Der Titel „Vollständige Werke" ist nicht berechtigt, wie wir bald sehen werden.

Vorstellung von der Determinante usw. Dem Beispiel von Descartes folgend, der die Idee einer „mathesis universalis" formuliert hatte als einer allgemeinen Wissenschaft, „die all das erklären wird, was der Ordnung und dem Maße unterworfen, ohne Anwendung auf eine besondere Materie, als Problem auftreten kann" ([65]², S. 83), stellte Leibniz der „speziellen Mathematik als der allgemeinen Wissenschaft von der Quantität" eine allgemeine Mathematik gegenüber, die er auffaßte als „universelle Mathematik oder allgemeine Wissenschaft von der Qualität", „logica mathematica" ([160], Bd. 7, S. 49—76) oder „calculus ratiocinator" (Kalkül des Schließens), welche den Gebrauch einer „lingua characteristica universalis" (universellen Zeichensprache) erfordern, d. h. einer universellen Sprache, in der nach dem Vorbild der Algebra jeder Begriff durch ein Zeichen dargestellt werden kann.

Als Anreger der Idee, daß jede Operation unseres Geistes ein Kalkül sei, zitierte Leibniz den Philosophen Th. Hobbes. Ferner nannte er den Einfluß der *Ars magna* von Raymundus Lullus (1235—1315), einer Art Kombinationsspiel mit Begriffen; es war dazu bestimmt, die Ungläubigen zu bekehren, und vom Ende des Mittelalters bis ins siebzehnte Jahrhundert ließen sich leichtgläubige Geister dadurch faszinieren. Für Leibniz lieferte diese *Ars magna* die Idee, alle Begriffe in Grundbegriffe aufzulösen, die dann ihrerseits das Alphabet der menschlichen Gedanken bilden sollten ([56], S. 435), und jede Überlegung sollte so etwas wie eine Entschlüsselung und Durchführung von Kombinationen mit den durch die Definitionen erlaubten Begriffen werden.[1]) Leibniz glaubte auch, daß sich die Axiome aus den Definitionen ergeben müßten, und er benutzte Axiome nur in Erwartung ihrer Rechtfertigung. „Man wird niemals", sagte er ([162], Bd. 7, S. 200), „Kontroversen ein Ende setzen können, wenn man nicht von komplizierten Überlegungen auf einige einfache *Kalküle* kommt, und von Worten, die unbestimmte und vage Bedeutung haben, zu wohlbestimmten Charakteren (Zeichen). Denn dann werden Sophismen und Trugschlüsse . . . nichts anderes sein als *Rechenfehler* in der Arithmetik und *Solözismen* und *Barbarismen* der Sprache, die leicht durch eben die Gesetze dieser philosophischen Grammatik zu widerlegen sein werden . . ." ([162]¹, S. 112). Er hoffte so, einen „Ariadnefaden" für das Denken herauslösen zu können, „ein empfindliches und starkes Mittel, das den Geist führt, wie die in der Geomtrie gezogenen Linien und die Formen der Operationen, welche man den Lernenden in der Arithmetik vorschreibt" ([162], Bd. 7, S. 22).

Er glaube, zu den notwendigen Regeln gelangen zu können, welche uns vor Fehlern bewahren ([162], Bd. 4, S. 295), so daß man nur *formale* Schlüsse zu benutzen

---

[1]) Der folgende, von K. Fischer ([73], 5. Aufl., S. 36f.) zitierte Text zeigt, daß Leibniz im Laufe der Zeit seine ursprüngliche naive Konzeption geändert hat: „. . . verfiel ich notwendig auf jene bewunderenswürdige Betrachtung, daß nämlich ein *gewisses Alphabet der menschlichen Gedanken* erfunden werden könnte, und daß aus der Kombination der Buchstaben dieses Alphabets und aus der Analysis der aus ihnen gebildeten Wörter alles sowohl erfunden als auch beurteilt werden könnte. Sobald dieses von meinem Geist erfaßt worden war, jauchzte ich auf, freilich mit einer knabenhaften Freude, denn damals faßte ich die Größe des Gegenstandes nicht genug. Späterhin aber, je größere Fortschritte ich in der Erkenntnis der Dinge machte, desto mehr wurde ich in dem Entschlusse befestigt, einen so großen Gegenstand zu verfolgen." — (Fischer gibt als Quelle an: [162], Bd. 7, S. 185f. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

brauche. Darunter, so sagte er an anderer Stelle ([161], Bd. 4, S. XVII, 4), „verstehe ich nicht nur die scholastische Art[1]) zu schließen, deren man sich in den Kollegien bedient, sondern jedes Schließen, das sich durch die Kraft der Form vollzieht, und bei dem man kein Glied hinzufügen muß, so wie bei einem Sorit, jener ebenfalls Wiederholungen vermeidenden Kette von Syllogismen, selber ein gut ausgebildetes Rechnen, ein algebraischer Kalkül, eine Analyse des Infinitesimalen, die für mich in stärkerem Maße Argumente der Form nach sein werden, weil ihre Schlußform vorher festgelegt sein muß, damit man sicher sein kann, sich dabei nicht zu täuschen". Die Funktion der Charakteristik (Zeichensprache) besteht darin, die Form sichtbar und leicht wiedererkennbar zu machen, denn „die vulgären Sprachen, so nützlich sie zur Argumentation auch sein würden, sind trotzdem unzähligen Zweideutigkeiten ausgesetzt; daher können sie nicht für einen Kalkül geeignet sein, bei dem die Irrtümer der Beweisführung schon durch die Konstruktion und die Bildung der Wörter offenbart werden könnten" ([162], Bd. 7, S. 205).

Von dem Programm, das Leibniz in seinen Schriften entwickelte, hat er selbst nur Bruchstücke realisiert. Dreimal hat er sich an einem Aussagenkalkül versucht, wobei er einige der Resultate von Boole vorwegnahm. Leibniz unterschied klar zwischen dem abstrakten Kalkül und interpretierten Kalkülen, die man aus jenem durch Festlegung einer Bedeutung für dessen Symbole erhält; er schrieb dazu einmal: „Überall dort, wo diese Gesetze beobachtet werden, kann man den vorliegenden Kalkül anwenden" ([162], Bd. 7, S. 245); ein andermal heißt es: „Cum dico A est B, et A et B sunt propositiones, intellego ex A sequi B" („Und sage ich A ist B, und sind A und B Sätze, so meine ich, daß aus A B folgt", [162][1], S. 148); diese einfache Aussage bestätigt, daß schon Leibniz ein und denselben Kalkül manchmal als Klassenkalkül (wobei dann A und B Begriffe darstellen) und manchmal als Aussagenkalkül zu deuten wußte. Die Idee einer Maschine, welche Rechnungen ausführt, war ihm nicht fremd. Er dachte aber auch an „Maschinen, die den Verstand imitieren" ([162], Bd. 3, S. 374—375). In seiner Jugend (1674) hatte er übrigens ebenfalls Pläne für eine Maschine ausgearbeitet, welche Gleichungen lösen sollte.

Nun wurden aber die meisten Leibnizschen Schriften, die diesen Vorstellungen gewidmet waren und sich auf diese Bestrebungen beziehen, erst 1901 [55] und 1903 [56] von L. Couturat veröffentlicht. Die Briefpartner und die unmittelbaren oder mittelbaren Schüler von Leibniz im achtzehnten Jahrhundert (darunter Ploucquet und Lambert) sowie die Leser der von Raspe [157] im Jahre 1765 veröffentlichten Texte, in denen einige Seiten über die lingua characteristica vorkommen, kannten und verstanden daher nur einige sehr allgemeine Begriffe, deren Tragweite sie aber nicht ermessen konnten. Somit mußte das von Leibniz erschlossene Terrain während des achtzehnten und neunzehnten Jahrhunderts von neuem urbar gemacht werden.

Condillac nahm als erster diese Arbeit wieder auf und betonte am Ende seines Lebens die Rolle der Analyse (Zergliederung) eines Begriffs, den ein Ausdruck einer Sprache darstellt. „Analysieren", sagte er in seiner 1780 erschienenen *Logik*,

---

[1]) d. h. durch Syllogismen.

„heißt also nichts anderes als die Eigenschaften eines Objektes in einer sukzessiven Ordnung zu beobachten, um sie im Geiste zu der gleichzeitigen Ordnung zusammenzufügen, in der sie existieren. ... Bei dieser Zusammenstellung und Zerlegung hält man sich an die zwischen den Objekten bestehenden Beziehungen ..." ([54][1], S. 16—17). Er unterstrich dort auch, daß „die Kunst des Schließens (sich) auf eine gut gebildete Sprache reduziert" (S. 61), denn „die Sprachen sind ... analytische Methoden" (S. 74). Um seine Lehre zu veranschaulichen, wendete er sie in seinem (unvollendet gebliebenen und 1798 postum erschienenen) Werk *Langue des Calculs* (Die Sprache des Rechnens) auf die Mathematik an: „eine richtig abgehandelte Wissenschaft, und ihre Sprache ist die Algebra" ([54][1], S. 123). Während der folgenden Jahrzehnte erschien diese Verknüpfung von Algebra und symbolischer Sprache bei verschiedenen Autoren, und sie wurde, wie bei Leibniz, wenn er für seine universelle symbolische Sprache plädierte, häufig von einer Lobrede auf die Vorzüge der Bezeichnungen der Algebra begleitet. Übrigens bestätigen verschiedene Abhandlungen in den *Annales* von Gergonne[1]) [3] und verschiedene Rezensionen im *Bulletin des Sciences* von Férussac [32], daß Bemühungen um eine vernünftige Wahl der Bezeichnungen bei den Mathematikern der damaligen Zeit durchaus verbreitet waren.

So schrieb R. Woodhouse, Professor in Cambridge, ([224], 1801, S. 89) im Jahre 1801: „die Algebra ist ... eine Sprache oder ein System von Symbolen oder Zeichen, das zu dem Zweck erfunden wurde, den Vergleich und die Kombination der Ideen zu erleichtern."[2]) Im Jahre 1821 erwähnte Ch. Babbage (1792—1871) in einem Vortrag ([289], Bd. 2, S. 325) vor der Philosophical Society in Cambridge den „gegenwärtigen Zustand der symbolischen Sprache". Unter den Vorteilen, die er in der Verwendung algebraischer Zeichen erkannte, nannte er insbesondere, daß sie eine Konzentration der Aufmerksamkeit ermöglichen, indem sie dem Verstande nur diejenigen Eigenschaften oder Beziehungen darbieten, welche sie bezeichnen, und alle diejenigen beiseite lassen, ohne sie auszuschließen, die im Augenblick nichts mit dem Problem zu tun haben (Leibniz sprach in einem der 1903 veröffentlichten *Opuscules* ([56], S. 99) davon, „Symbole an die Stelle von Dingen zu setzen, um den Geist freizumachen").

In der *Sprache des Rechnens* hatte Condillac schon bemerkt, „daß die Operationen nur mit Zeichen erfolgen ... wenn man uns eine Gleichung gibt, etwa $x + a - b = c$, formen wir sie um, ohne wissen zu müssen, was die Buchstaben, aus denen sie gebildet ist, bedeuten. Wenn wir es wissen, denken wir nicht daran; und erst nach Durchführung der Operation ersetzen wir die Buchstaben durch ihre Werte. Darum habe ich gesagt, daß alle diese Operationen rein mechanisch sind" ([54][1], S. 241). Und schon vorher (S. 163) hatte er gesagt, daß ein „Bruch ... eine zu vollziehende Division bedeutet". Im Jahre 1821 beschrieb auch Babbage ([289], Bd. 2, S. 336) ganz systematisch die Bedeutung von Buchstabenausdrücken, und zwar in vorgelegten Instruktionen für das Rechnen, die überdies nicht nur für die Anwendung auf Zahlensymbole verstanden werden sollten: „Statt die Gleichung

---

[1]) Gergonne selbst bezieht sich gelegentlich auf Condillac.

[2]) Zitat aus dem Französischen übersetzt. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

$x^2 - bx = -a$ auf Zahlen zu beschränken, kann sie auch als Hinweis aufgefaßt werden, daß x aus a und b in der Weise zusammengesetzt ist, daß sich, wenn sein Wert in diese Gleichung eingesetzt wird, die Glieder gegenseitig aufheben. Diese Bedeutung steckt zwar nicht in dem ursprünglichen Problem, geht aber aus der Gleichung hervor, in welche es übersetzt ist." Und an einer späteren Stelle (S. 343) bemerkte er: „Wenn nur Buchstaben verwendet werden, haben die Funktionszeichen keine andere Bedeutung als diejenige, von der die Kraft der Überlegung abhängt."[1])

Im Jahre 1824 stellte Babbage der Philosophical Society von Cambridge ([289], Bd. 2, S. 217) „eine kleine Maschine (vor), . . . die zur Berechnung einer Tafel mit konstanten zweiten Differenzen mit mechanischen Mitteln konstruiert wurde". Und vom Jahre 1842 an bis zum Ende seines Lebens versuchte er, eine große Maschine zu bauen, die allerdings auf Grund ihrer zu großen mechanischen Komplexität niemals funktionieren konnte, deren Prinzip jedoch wieder aufgegriffen wurde, als eine ausgereiftere Technik zur Verfügung stand: Diese Maschine sollte einen Speicher für tausend fünzigstellige Zahlen enthalten und nach einem Programm arbeiten, das auf einem Lochstreifen aufgezeichnet war, analog den Programmen der Jacquardschen Webstühle. Die modernen Rechenautomaten arbeiten nach diesem allgemeinen Funktionsschema der Maschine von Babbage.[2])

Während des ersten Drittels des neunzehnten Jahrhunderts lieferte das Bemühen um ein Verständnis der Bedeutung der Bezeichnungen für die komplexen Zahlen und der Gründe, welche die Übertragung der Regeln für das Rechnen mit reellen Zahlen auf die komplexen Zahlen rechtfertigen, ein wesentliches Motiv für die Aufmerksamkeit, die man der Algebra und den Buchstabenausdrücken widmete. Das Zurückgreifen auf das *Permanenzprinzip* (1629) von A. Girard (vgl. 4.1.1.) führte bisweilen auch zu offenbar fehlerhaften Resultaten, für welche die Polemik über die Logarithmen negativer Zahlen (vgl. 4.1.2.) zwischen Joh. Bernoulli und Leibniz ein gutes Beispiel bietet. Die 1806 von R. Argand (1768—1822) vorgeschlagene geometrische Darstellung dieser Zahlen ([4]), die Servois lieber als „geometrische Interpretation" ([3], Bd. 4, S. 234), aber auch (worauf wir schon hingewiesen haben, vgl. 13.1.5.) als „geometrische Maskierung" (ebenda, S. 229) bezeichnete, befriedigte nicht alle Zeitgenossen, denen ja die Begriffe Isomorphismus, Struktur und Identifizierung isomorpher Strukturen völlig fremd waren.

Es könnte sehr wohl sein, daß der Begriff der auf alle formalen Ausdrücke eines geschlossenen Bezeichnungssystems (gegebenenfalls: das der komplexen Zahlen) erweiterten Interpretation in diesem Zusammenhang bei Servois entstanden ist:

---

[1]) Die Babbage-Zitate wurden aus dem Französischen übersetzt. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) Ein anderes Prinzip, nach dem sie arbeiten, wurde ebenfalls schon 1827 in einer Rezension im *Bulletin des Sciences* . . . ([32], Bd. 7, S. 347) empfohlen; dort heißt es: „Man verdankt Leibniz den Plan einer binären Arithmetik . . . Sie ist durch ihre Langatmigkeit zwar unbequem, reduziert aber alle Rechenoperationen auf das einfachste Verfahren und macht in dieser Beziehung die Konstruktion von *Rechenmaschinen* leichter als jede andere; sie führt die Multiplikation auf einfache Operationen zurück und macht bei der Division jedes Probieren überflüssig." Da dieser Text mit A. C. unterzeichnet ist, stammt er offenbar von Augustin Cauchy.

Das zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts geläufige Konzept der Interpretation war das der Interpretation der Wurzeln einer Gleichung (oder eines Gleichungssystems), wenn diese im Zusammenhang mit der ursprünglichen Formulierung eines Problems durch dessen *Übersetzung in die algebraische Sprache* — um mit Babbage (1821, vgl. [289], Bd. 2, S. 336) zu sprechen — als unerwartet empfunden wurden.

Die Entwicklung verläuft von hier bis zum präzisen Begriff und zum technischen Gebrauch formaler Sprachen, wie wir ihn bei Peano und seiner Schule gefunden haben (vgl. 13.1.7.), auf verschlungenen Wegen und ist untrennbar verbunden mit einem allmählichen Voranschreiten der Auffassung von der Mathematik in Richtung auf den modernen Standpunkt. Wir haben (in 13.1.5.) schon an die Meinung von Plücker und Babbage erinnert, die in der Geometrie nur eine Interpretation der Analysis sahen. Der bemerkenswerteste dieser Gedankenströme, dem wir zunächst folgen wollen, geht von den Algebraikern in Cambridge aus; zu ihnen gehörten G. Boole, der im Jahre 1847 zur Algebraisierung der traditionellen Logik gelangen sollte, sowie A. N. Whitehead und B. Russell, denen man zu Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts die erste handhabbare Formalisierung der modernen mathematischen Logik verdankte (vgl. 13.4.1.).

In den Jahren 1830 und 1833 unternahm es G. Peacock (1791—1858), ebenfalls Professor in Cambridge, in seinem Werk *A treatise on Algebra* [207 bis] und in einem Bericht für eine Versammlung der British Association for the Advancement of Science [208], die Rechenverfahren der Algebra in einer Weise zu behandeln, wie Euklid die Sätze der Geometrie behandelt hatte; dabei unterschied er eine „symbolische Algebra" oder „Wissenschaft von Symbolen und ihren Kombinationen", mit denen man rechnet, indem man durch Vereinbarung festgelegte Regeln anwendet, von ihren „angewandten Wissenschaften", an erster Stelle von der Arithmetik „oder der arithmetischen Algebra" und dann auch von „allen anderen Naturwissenschaften" (Geometrie, Physik, usw. . . .). Damit die symbolische Algebra auf die Arithmetik angewendet werden konnte, schlug Peacock folgende, von ihm *Permanenzprinzip der äquivalenten Formen*[1]) ([208], S. 198—199) genannte Vereinbarung vor: „Jede zu einer anderen algebraisch äquivalente Form muß, wenn sie in allgemeinen Symbolen ausgedrückt wird, auch weiterhin zu ihr äquivalent sein, was diese Symbole auch bezeichnen mögen", und „jede zu einer anderen äquivalente Form . . . in der . . . Arithmetik . . . ist auch weiterhin zu ihr äquivalent, wenn die Symbole allgemein sind".[2]) (R. Woodhouse hatte schon 1801 behauptet ([224], S. 93): „$(a + b\sqrt{-1}) \times (c + d\sqrt{-1})$ und $ac + ad\sqrt{-1} + cb\sqrt{-1} - bd$ sind zwei einander äquivalente Formen; die Äquivalenz ist zwar nicht bewiesen, doch sind die Formen so aufgestellt, daß die Regeln, welche für den Fall bewiesen wur-

---

[1]) Das Wort „Form" war damals Synonym für „Buchstabenausdruck".

[2]) Peacock hat hier die Schwierigkeit, seine Gedanken unter dem Zwang auszudrücken, daß er dasselbe Symbol (z.B. das Pluszeichen) benutzen muß, um einen nichtinterpretierten Buchstabenausdruck zu bilden (in diesem Fall nennt er es „allgemein") und um das zu bezeichnen, was dieses Symbol bei einer gegebenen Interpretation bedeutet (in diesem Fall nennt er es „spezifisch").

den, daß die Zeichen reelle Größen bedeuten, auf Symbole übertragen werden können, die keine Bedeutung haben.")

Jenem Teil der „symbolischen Sprache", von dem er feststellte, daß er in der Algebra benutzt wird (S. 188), schrieb Peacock eine *allgemeine Bedeutung* zu, zweifach allgemein, was die Variablen betrifft (einmal „in der Darstellung" (S. 195), d. h., was die denkbaren Bereiche der Interpretation angeht, zum anderen „im Wert", d. h., was den Variabilitätsbereich betrifft, der für jeden dieser Bereiche und die Art seiner Objekte spezifisch ist).

Bei der Behandlung der Algebra sollten die Konstituierung der symbolischen Sprache und ihrer formalen Ausdrücke, ferner die Grundannahmen und deren Folgerungen jeglicher eine Bedeutung festlegenden Interpretation vorangehen: „Die Interpretation muß den Operationen der Algebra und ihren Resultaten *folgen* und nicht vorangehen", sagte er an späterer Stelle (S. 195), „eine Reihenfolge, bei der schon eine kurze Prüfung den notwendigen Bedeutungswechsel, den eine Änderung der spezifischen Werte . . . der betreffenden Symbole hervorruft, sehr schnell in Evidenz setzt."

Peacock war sich völlig darüber im klaren, daß Vereinbarungen über Kalküle, die sich von denen unterscheiden, welche sein Permanenzprinzip vorschreibt, zulässig sein könnten, wies aber den Gedanken von sich, „eine bloße Wissenschaft von Symbolen einzuführen, die keinerlei Anwendung fähig ist".

Sein in der Methode einer losgelösten Behandlung von Operationssymbolen (vgl. 13.2.1.) erfahrener Schüler D. Gregory (1813—1844) beschäftigte sich damit, die Operationen nach ihren Eigenschaften zu klassifizieren (beispielsweise nach Kommutativität, Distributivität, wie sie 1814 von F. J. Servois ([3], Bd. 5, S. 83) eingeführt wurden). Er sah in der symbolischen Algebra „die Wissenschaft, welche von den *Kombinationen der Operationen* [Hervorhebung von M. G., um auf die Entwicklung hinzuweisen] handelt, die nicht durch die Natur (der Operationen) festgelegt werden . . . sondern durch die Gesetze der Kombination, denen sie gehorchen" ([103], 1840). Die Platitüde, die der Algebra „Symbole ohne jede Bedeutung" zuschreibt, geht auf de Morgan zurück.

In diesem Zusammenhang wird die Bedeutung der Entdeckung der Quaternionen (vgl. 3.2.4.) durch W. R. Hamilton (1805—1865) im Jahre 1843 verständlich. Sie wurden als neuartige Erweiterung des Zahlbegriffs aufgefaßt und zerstörten den Glauben, in einem „Zahlensystem" müsse es immer eine kommutative Multiplikation geben. Fast gleichzeitig tauchte als etwas allgemeineres Analogon die äußere Multiplikation (vgl. 3.2.5.) in Graßmanns *Ausdehnungslehre* [100] auf. Nullteiler traten mit Hamiltons Biquaternionen in Erscheinung, eine nicht-assoziative Multiplikation mit Cayleys Oktonionen (vgl. 3.2.4.); das Interesse an einem „abstrakten" Kalkül schien nun nicht mehr damit verknüpft zu sein, daß die eine oder andere a priori festgelegte Rechenregel erfüllt ist, damit er diese oder jene Interpretation gestattet. Und diese ganze Evolution mündete in der 1867 von H. Hankel (1814 bis 1889) veröffentlichten *Theorie der complexen Zahlensysteme* [107], in welcher der abstrakte Begriff des Verknüpfungsgesetzes ([30][1], S. 71) eingeführt wurde.[1]

[1]) Addition, Multiplikation, Potenzieren, Subtraktion, Division und Wurzelziehen wurden bereits in der Arbeit *Dissertation sur la langue des Sciences* unter dem Begriff

Im zweiten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts regten diese Arbeiten die Mathematiker, die sich für die Philosophie ihrer Disziplin interessierten, zum Überdenken und zur Änderung ihres Standpunktes an. Wenn sich auch die Auffassung der „Mathematik als Wissenschaft von der Größe" noch in Bolzanos *Größenlehre* ([19]; vgl. 6.4.1.) findet, so stellte sich mindestens Bolzano selbst unter einer „Größe" alles das vor, was als Repräsentant einer bestimmten Art ein Verfahren des Vergleichens mit anderen Repräsentanten dieser Art zuläßt. Es vergingen keine zehn Jahre, bis Graßmann in seiner *Ausdehnungslehre* ([100], S. XXII) dem entgegenhielt: „Der Name Grössenlehre eignet nicht der gesammten Mathematik." Und noch zehn Jahre später wiederholte Boole 1854 in seinen *Laws of thought* ([21], S. 13), die sofort ein breiteres Echo fanden: „Es ist nicht das Wesen der Mathematik, sich mit den Begriffen Zahl und Grösse zu beschäftigen." Als Hankel, der die von Peacock vorgeschlagene axiomatische Konzeption der Algebra aufgriff und ihr Gestalt gab (insbesondere erinnerte er an das Permanenzprinzip der äquivalenten Formen), für „eine von aller Anschauung losgelöste rein intellectuelle Mathematik, eine reine Formenlehre, in welcher nicht Quanta oder ihre Bilder, die Zahlen, verknüpft werden, sondern intellectuelle Objekte, Gedankendinge, denen actuelle Objekte oder Relationen solcher entsprechen können, aber nicht müssen" ([107], S. 10) eintrat, kam er fast zu der nur wenig abweichenden Auffassung von Gauß, welche einige Jahre später durch die Veröffentlichung von dessen Werken bekannt wurde: „Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es blos mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu tun" ([86], Bd. 2, S. 176). Man muß schon auf Leibniz zurückgehen, um eine Auffassung vergleichbarer (aber weniger präziser) Breite anzutreffen, und auch diese sollte erst zu Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts bekannt werden, lange nach dem Tode ihres Autors: „Die mathesis universalis muß eine Methode darlegen um etwas streng durch das zu bestimmen, was unter die Einbildungskraft fällt, oder sozusagen eine Logik der Einbildungskraft" ([162][1], S. 452).

Ganz im Rahmen der symbolischen Algebra von Peacock und als unmittelbare Anwendung derselben erarbeitete und veröffentlichte Boole 1847 sein Werk *The mathematical analysis of logic* [20]. Er hatte dort Erfolg, wo Leibniz mit fast den gleichen Vorstellungen gescheitert war: Als Interpretation der 0 in der Klassenlogik benutzte er die leere Klasse — das *Non-Ens* von Leibniz; er interpretierte wie Leibniz das Produkt als Durchschnitt; was die Summe $x + y$ angeht, so unterschied er sie, wenn x und y disjunkt sind, was er durch $xy = 0$ kennzeichnet, von der Vereinigung — auch Leibniz hatte die disjunkte Summe betrachtet. Nun mußte er noch über eine Einheit verfügen können; das „universe of discourse" (Universum des Vorgetragenen) von de Morgan aus dem vorangehenden Jahre ([289], Bd. 8, S. 379ff.), zu dem es bei Leibniz kein Äquivalent gibt, lieferte sie ihm, und gleichzeitig damit auch das relative Komplement $x - y$ zur Interpretation der Subtraktion. Leibniz ([157], S. 513) war an der Schwierigkeit gescheitert, die Syl-

---

allgemeine *Verknüpfungsoperationen* subsumiert, die 1822 in den *Annales* von Gergonne ([3], Bd. 12) von einem „anonymen Abonnenten" veröffentlicht wurde, der aber schon 1859 als Gergonne selbst identifiziert wurde [280].

logismus-Regel „conversio per accidens" (Konversion mit Einschränkung: Aus „jedes A ist B" folgt „irgendein B ist A") zu beweisen; nach der aristotelischen Tradition kann die Universalaussage (allgemein bejahendes Urteil) „jedes A ist B" nicht gelten, wenn ihr „Subjekt (A) nicht existiert" (notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit der Regel); daß die Klasse A Teilklasse von B ist, entspricht also nicht völlig der Aussage „jedes A ist B".[1]) Indem sich Boole auf das Permanenzprinzip der äquivalenten Formen stützte, wagte er es, sich über diese Schwierigkeit hinwegzusetzen; er bemerkte, daß die Identitäten, denen seine Operationen genügen sollen, mit den Identitäten, die für die arithmetischen Operationen gleichen Namens gelten, bis auf die Beziehung $x^2 = x$ formal übereinstimmen, daß letzteres aber nicht stört: Er hatte dabei den (damals tatsächlich schöpferischen) Gedanken, das rühre daher, daß sich die entsprechende numerische Interpretation nur auf die idempotenten unter den Zahlen beschränkt, d. h. auf die Zahlen 0 und 1. Wir wissen heute (vgl. 13.3.1.), daß der aus zwei Elementen bestehende Körper genau denselben formalen Identitäten genügt; der einzige Fall, in dem die Operationen ein anderes Ergebnis liefern, ist der Fall $1 + 1$, der aber in der Booleschen Algebra der Logik keinen Sinn hat, da 1 nicht zu sich selbst disjunkt ist.

Somit sind seit dem Ende des zweiten Drittels des neunzehnten Jahrhunderts und sogar vor der ersten formalen Sprache, der *Begriffsschrift* von Frege ([79]; vgl. 13.2.1.), die Keime der allgemeinen Begriffe vorhanden, welche die Bestimmungsstücke eines Modells für eine Sprache erster Stufe bilden (vgl. 13.4.1.): de Morgan hatte das „Universum" der betrachteten Objekte eingeführt (das Analogien zu den „Mannigfaltigkeiten" aus Riemanns Habilitationsvortrag [250] und zu den schon 1844 von Graßmann in seiner *Ausdehnungslehre* implizit betrachteten Mannigfaltigkeiten hat), Hankel den abstrakten Begriff des Verknüpfungsgesetzes innerhalb eines solchen Universums und de Morgan schließlich den Begriff der allgemeinen Relation (vgl. 13.2.1. und 13.2.2.). Die ersten speziellen algebraischen Strukturen sollten nicht auf sich warten lassen (dagegen findet sich der allgemeine Begriff einer solchen Struktur zu dieser Zeit noch nicht): Das waren zunächst die von B. Peirce und C. S. Peirce [217] um 1870 betrachteten Algebren,[1]) dann die 1888 von Peano [209] eingeführten reellen Vektorräume; H. Wiener [304] und G. Fano [70] behandelten Geometrien als mit Relationen versehene Systeme von Punkten, d. h. als Struktur, und Hilbert ging in seinen *Grundlagen der Geometrie* [120] in analoger Weise vor. Schließlich behandelte Huntington (1874—1952) im Jahre 1902 in seiner Arbeit [130] „Systeme (k, ∘)".

Anfang 1898 hatte A. N. Whitehead (1861—1947) in seinem Werk *A treatise on universal algebra* [302] das in den bisher in diesem Kapitel genannten Arbeiten erarbeitete Wissen unter einheitlichen Gesichtspunkten dargestellt. Für ihn war die universelle Algebra die Wissenschaft von Kalkülen mit einer kommutativen

---

[1]) Vgl. [128], S. 44. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[1]) Als im Jahre 1854 Cayley ([47], Bd. 2, S. 123) den abstrakten Gruppenbegriff behandelte, legte er einen abstrakten Kalkül im Sinne Peacocks vor, von dem er zeigte (was ein beträchtlicher Fortschritt war), daß er zahlreiche Interpretationen, d. h. *Darstellungen* besitzt.

und assoziativen Addition, für welche es ein neutrales Element 0 gibt, und mit einer bezüglich der Addition beidseitig distributiven Multiplikation.

Die Auffassung von der Axiomatik, mit der das Buch von Whitehead beginnt, bewahrte die Spuren seines Ursprungs in der symbolischen Algebra und bereitete die formalisierte Axiomatik vor ([302], S. vi): „Die Mathematik, im weitesten Sinne, ist die Entwicklung aller Arten von deduktiven und zwingenden formalen Schlußweisen. Die Schlußweisen sind formal in dem Sinne, daß die Bedeutung der Aussagen keinerlei Anteil an den Untersuchungen hat. Die Mathematik befaßt sich nur mit der Herleitung von Aussagen aus Aussagen. Die Begründung der Schlußregeln ... ist Sache der Erfahrung oder der Philosophie. Im gleichen Sinne ist jede mathematische Schlußweise zwingend, weil sie Regeln folgt. Die mathematischen Schlußweisen sind deduktiv in dem Sinne, daß sie sich auf Definitionen stützen, von denen ... nur festgestellt werden muß, daß sie in sich widerspruchsfrei sind."

Der angekündigte zweite Band jenes Werkes ist nicht erschienen. Im Jahre 1903 veröffentlichte B. Russell sein Programm zur völligen Vereinheitlichung der Mathematik durch Rückführung auf die Logik (vgl. 14.4.1.), die *Principles of Mathematics* [254]. Dieses Programm paßte besser zu den Vorstellungen von der Vereinheitlichung der Mathematik, denen Whitehead in seinem *Treatise* vorahnend Ausdruck verliehen hatte, so daß er sich unter Leitung seines Schülers B. Russell der Abfassung ihres gemeinsamen Werkes, den *Principia Mathematica* [303], zuwandte, einem monumentalen Unternehmen, in welchem dieses Programm im einzelnen in die Tat umgesetzt wurde. Ein ähnlich ehrgeiziges Vorhaben, das die Mengenlehre an die Stelle der Logik setzte, war die im Jahre 1938 begonnene Veröffentlichung der *Eléments de Mathématiques* von N. Bourbaki [29].

13.3. Die mathematische Logik im neunzehnten Jahrhundert

Als Begründer der mathematischen Logik sehen verschiedene Autoren Leibniz, Boole oder auch Frege an. Leibniz hat das Programm entworfen; Boole hat die erste mathematische Behandlung der traditionellen Logik realisiert; Frege hat tatsächlich eine neue Disziplin begründet, indem er ihr die Analyse und die wesentlichen Hilfsmittel lieferte. Andererseits läßt eine sich über jeweils zehn Jahre erstreckende Statistik der mathematischen Veröffentlichungen, die sich seit dem Anfang des achtzehnten Jahrhunderts mit Logik befassen, unmittelbar nach dem gleichzeitigen Erscheinen von Booles *Mathematical analysis of logic* [20] und von de Morgans *Formal logic* [193] im Jahre 1847 ein exponentielles Wachstum erkennen ([13], S. 52).

Bis zum Jahre 1854, in dem die *Laws of thought* [21] von Boole erschienen, richteten sich die Bemühungen in der Hauptsache auf die Schaffung einer Symbolik für einen Kalkül, mit dem sich feststellen läßt, welche Modi des Syllogismus schlüssig sind. Einige Autoren gingen nach der traditionellen Zerlegung der Aussage zu Werke und gelangten zu Fragmenten des Aussagenkalküls ([G—H], S. 112),

andere berücksichtigten den Begriffsumfang und tendierten zum Klassenkalkül ([G—H], S. 103). Innerhalb des Formalismus von Boole, der sich sowohl für die eine als auch für die andere dieser Interpretationen eignete, wurden schnell die jeweiligen Teilresultate integriert, wenn schon nicht durch Boole selbst, so doch im Werk des einen oder anderen seiner Nachfolger. Die einzigen bemerkenswerten Ausnahmen bildeten einige Bemerkungen von Gergonne ([3], Bd. 9, 1818) und die Einführung des Begriffs des logischen Folgerns (vgl. 13.4.6.) ([17], 1837) durch Bolzano.[1])

Die meisten bedeutsamen Arbeiten aus der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts befaßten sich mit der „Algebra der Logik"; eine Ausnahme bildeten nur die Arbeiten de Morgans, die noch der traditionellen Logik verhaftet sind, sowie die Arbeiten Freges und Peanos und seiner Mitarbeiter.

13.3.1. Die Algebra der Logik und der Aussagenkalkül

Die reife Form, die Boole seiner „Algebraisierung der Logik" gibt, ist die der *Laws of thought* [21]. Dort erläuterte er klar drei Interpretationen seines Formalismus: Klassenkalkül, Aussagenlogik, Rechnen mit den Zahlen 0 und 1 (vgl. 13.2.2.); eine vierte, auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung von unabhängigen Ereignissen, wurde erst nach seinem Tode veröffentlicht [22].

Der mathematische Inhalt der *Laws of thought* unterscheidet sich nur wenig von dem der *Mathematical analysis of logic* [20]. Boole begann mit der Aufstellung eines Wörterbuches, das die Übersetzung der Ausdrücke der traditionellen Aussageformen in Ausdrücke seines Formalismus sowie die Übersetzung einiger seiner eigenen Ausdrücke, die notwendig sind, um die kalkülmäßige Überprüfung der verschiedenen Figuren des Syllogismus durchzuführen, in traditionelle Aussageformen ermöglichte. Er konnte anhand von Beispielen belegen, daß er eine Lösung bringt, die es durch Übersetzung und Rechnen zu entscheiden gestattet, welches die schlüssigen Figuren sind, und dies sogar bei analogen Problemen, in denen die Anzahl der Terme nicht notwendig auf zwei beschränkt ist. Dann wendete er sich einer allgemeinen Methode zur Lösung von Gleichungen zu. Auf Grund des Permanenzprinzips der äquivalenten Formen wendete er unbekümmert die in der Arithmetik gebräuchlichen Eliminationsmethoden an; die Rechnungen verlangten von ihm den Nachweis, daß sich jede Funktion φ [die mit den Grundoperationen ausdrückbar ist] in der Gestalt $\varphi(x) = \varphi(1)\, x + \varphi(0)\, (1 - x)$ schreiben läßt, eine korrekte, klassisch gebliebene Reduktion, und zu diesem Zweck zögerte er nicht — immer kraft des Permanenzprinzips — zunächst φ in eine Maclaurinsche Reihe zu entwickeln:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\, x + \frac{\varphi''(0)}{1 \cdot 2}\, x^2 + \cdots .$$

---

[1]) Bolzano benutzte den Terminus *Ableitbarkeit*, der in *heutiger* Terminologie das Vorhandensein einer formalen Deduktion (vgl. 13.4.3.) bedeutet, ein Begriff, über den Bolzano noch nicht verfügte. Er wollte damit vielmehr ein Schließen aus Voraussetzungen (Hypothesen) auf Konsequenzen ausdrücken.

Für Boole war das Permanenzprinzip das einzige notwendige Axiom, und er formulierte sogar: „Ebenso wie die Geometrie beruht die Logik auf axiomatischen Wahrheiten." Er hatte jedoch noch nicht das Bedürfnis, einige Identitäten festzulegen, aus denen man alle die Identitäten herleiten kann, die in seinem Kalkül gelten.

Ehe man dahin gelangte, wurden dem Formalismus zwei Ergänzungen hinzugefügt: Zunächst schlug S. Jevons (1835–1882) im Jahre 1864 [134] vor, die Addition in der Weise zu erweitern,[1]) daß sie als nicht-ausschließende Disjunktion interpretierbar wird; er betonte deren Idempotenz ($x + x = x$) und nannte als Argument dafür die Analogie zur Idempotenz der Multiplikation ($x \cdot x = x$). Da nun aber die Addition nicht mehr invertierbar war, mußte eine besondere Bezeichnung für die Negation eingeführt werden. An Jevons haben sich C. S. Peirce,[2]) Schröder und ihre Nachfolger bis Stone angeschlossen. Des weiteren wurden durch Peirce 1870 [222] und Schröder 1877 [258] statt der Gleichheit eine als Inklusion interpretierbare Ordnung als Grundrelation genommen oder zu dieser hinzugenommen. Schon von der ersten Arbeit [222] an werden dieser Relation die Grundeigenschaften Reflexivität, Transitivität und Antisymmetrie ([G–H], S. 53) zugeschrieben,[3]) und das *Dualitätsprinzip* der Booleschen Algebra (und der Theorie der Verbände; vgl. [G–H], S. 111) geht auf die zweite zurück. Die Charakterisierung des Produkts als untere Grenze und die der „nicht-ausschließenden" Summe als obere Grenze erschienen in einer späteren Arbeit von C. S. Peirce ([218], 1880). Die Booleschen Algorithmen für die Lösung „Boolescher Gleichungen" (und von Systemen solcher Gleichungen) sind von Peirce, Schröder und P. Poretskij (1846–1907) noch strenger als durch Boole selbst begründet und verbessert worden.

Das von Schröder in seinen *Vorlesungen über die Algebra der Logik* ([259], Bd. 1, 1890) vorgelegte Axiomensystem der Booleschen Algebra ist das der komplementären distributiven Verbände ([G–H], S. 360). Implizit analysierte Schröder deren Struktur, indem er nacheinander die Ordnung, die Null, die Eins, die Multiplikation und die Addition nach der Art von Peirce einführte und dann die Distributivität und schließlich die Existenz der Komplemente verlangte. Er bemühte sich jedesmal, aus den früheren Voraussetzungen alle möglichen Schlußfolgerungen zu ziehen, bevor er zur nächsten Voraussetzung überging — eine Methode, die er nach Lüroths Nachruf (in [259], Bd. 2, S. VIII) seit ungefähr 1872 anwandte. Schröder bemerkte, daß die Interpretation als Kalkül der Teilmengen eines Gebietes die Widerspruchsfreiheit seiner Annahmen sicherte ([259], Bd. 1, S. 211–216). Bei der Untersuchung des Problems, ob die Distributivität unabhängig ist, hatte Schröder schon früher nichtdistributive Verbände entdeckt; er führte in seinen *Vorlesungen* als Beispiel gewisse Verbände von Untergruppen an. Er gab dort auch die Hasse-Diagramme

[1]) Da Boole die Addition nur für $xy = 0$, d. h. für sich gegenseitig ausschließende x und y als definiert ansah, kann die Boolesche Addition ebensogut als Einschränkung der nicht-ausschließenden wie auch der ausschließenden Disjunktion aufgefaßt werden. Wir werden sehen, daß jeder dieser beiden Standpunkte sich auf seine Weise als fruchtbar erwies.

[2]) Die Arbeit von Peirce scheint davon unabhängig zu sein (vgl. [58], S. 161).

[3]) Leibniz hatte schon die Möglichkeit erkannt, daß eine Relation jede dieser Eigenschaften haben kann, aber jeweils nur isoliert ([162][1], S. 133, 135).

([G—H], S. 411) der Booleschen Verbände mit 2, 4, 8 und 16 Elementen an. Diese Untersuchungen gehören zur Vorgeschichte der Verbandstheorie, die sich daraus entwickelte; Schröder beschrieb allerdings nur Interpretationen; eine Art Struktur herauszupräparieren und sie als *Verband* zu kennzeichnen sollte einige Jahre später durch Dedekind ([63], 1897) geschehen. Die „teilweise geordneten" Mengen erschienen erstmals bei Hausdorff ([108], 1914).[1])

Die „Boolesche Algebra", wie wir sie als Teil der Theorie der Verbände kennen, begann 1904 mit dem „unabhängigen" Axiomensystem von E. V. Huntington. Seine Abhandlung [131] gehört bereits in die Periode, in der man die „abstrakten Kalküle" aufgibt und sich dem Studium spezieller Strukturen zuwendet (vgl. [29], I, Kap. 4), welche diesen oder jenen Axiomen genügen und die am Ende des neunzehnten Jahrhunderts nicht mehr nur zur bloßen Interpretation derartiger Kalküle dienen.

Dieser Axiomatisierung folgten zahlreiche andere im gleichen Geiste.[2]) Die von Huntington benutzten Bezeichnungen werden heute noch in zahlreichen Lehrbüchern für Elektroniker benutzt.

Im Jahre 1934 (vgl. [281]) hat M. H. Stone gezeigt, daß jeder Boolesche Verband einem Unterverband des Verbandes der Teilmengen einer Menge [Version A] wie auch einem Teilverband des Verbandes der sowohl offenen als auch abgeschlossenen Teilmengen eines total unzusammenhängenden kompakten topologischen Raumes [Version B] isomorph ist. Er hat dadurch im Nachhinein die zahlreichen Methoden der Darstellung syllogistischer Schlüsse durch Diagramme begründet, die seit Leibniz (der besonders mit sogenannten Eulerschen Kreisen operierte) über J. Venn (1834—1923) — dem man u. a. auch die Bezeichnung *Symbolische Logik* [297] verdankt — und Lewis Carroll [45] benutzt wurden.

Im Jahre 1928 wendete sich I. Žegalkin (1869—1947) wieder einer arithmetischen Interpretation zu, indem er zeigte [87], daß als Boolesche Addition auch die Addition in einem zweielementigen Körper genommen werden kann, wenn man sie so erweitert, daß sie durch die ausschließende Disjunktion oder die symmetrische Differenz interpretierbar wird. (Unabhängig von Žegalkin hatte sich auch J. Herbrand in seiner Habilitationsarbeit ([113], 1930) der „dualen" Interpretation bedient, in der die Multiplikation der nicht-ausschließenden Disjunktion und die Addition der reziproken Implikation entsprechen.) Stone stellte 1935 fest [282], daß die zur symmetrischen Differenz analoge Operation in einem Booleschen Verband einen idempotenten Ring bestimmt (in dem also $x^2 = x$ ist), den er auch *Booleschen Ring* nannte, und daß umgekehrt jeder solche Ring zu einem Booleschen Verband führt, wenn man die Ordnungsrelation $x \leqq y$ durch $x = xy$ definiert; die Differenz $1 - x = 1 + x$ wird dann, wie bei Boole, als die Negation interpretierbar,

[1]) Der Sprachgebrauch ist nicht einheitlich. Einerseits unterscheidet man zwischen „geordneten" und „teilweise geordneten" oder „halbgeordneten" Mengen, andererseits zwischen „total geordneten" oder „vollständig geordneten" und „geordneten" Mengen. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) Im Jahre 1962 wurde in der zweiten Auflage von R. Sikorskis *Boolean Algebras* ([268], S. 3) auf mehr als dreißig verschiedene Axionensysteme verwiesen.

und die obere Grenze (nicht-ausschließende Disjunktion) wird entsprechend durch den Ausdruck $x + y + xy$ gegeben.

Diese Arbeiten von Stone verbanden sich mit einer Forschungsrichtung, die auf die Bedürfnisse der Quantenmechanik reagierte und die von 1927 an unter dem Einfluß J. v. Neumanns (1903—1957) die Errungenschaften des zwanzigsten Jahrhunderts in Analysis, Algebra, Topologie, Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie, Verbandstheorie, Axiomatik der Geometrie und Logik verwendete. Die Physiker dieser Epoche (Dirac, Heisenberg) charakterisierten die Zustände, die für ein System möglich sind, durch die Punkte eines komplexen Hilbertraumes und jede Observable durch einen — nicht notwendig beschränkten — selbstadjungierten Operator auf diesem Raum, dessen (reelle) Eigenwerte die verschiedenen Meßergebnisse beschreiben, welche für diese Observable auftreten können. Die Hilbertsche Spektraltheorie (vgl. 8.7.), welcher durch v. Neumann zuerst die Gestalt gegeben wurde, in der wir sie heute kennen ([199], 1931), führte die orthogonalen Projektionen auf die von Teilen des Spektrums erzeugten abgeschlossenen Teilräume ein, und das sind Operatoren, über denen die natürlichen Operationen (Zusammensetzung, Differenz zur Identität) einen Booleschen Verband bestimmen, der dem Quotientenverband des Verbandes der Borelschen Teilmengen (vgl. 6.9.3.) des Spektrums nach den Mengen von Maß null isomorph ist. Die oben genannten Sätze von Stone sind im Zusammenhang mit diesen Arbeiten entstanden; sie bildeten ihrerseits in gewisser Weise den Ausgangspunkt für den Begriff der Zariski-Topologie (vgl. [65 ter]).

In den beiden Formen, die sie annehmen kann, als Verbandstheorie oder als Ringtheorie, hat die Boolesche Algebra seit Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts zahlreiche Arbeiten hervorgebracht, die sie immer enger mit der Mengenalgebra, der Topologie und der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie verknüpften.

Die Bezeichnung *algebraische Logik* wurde 1955 von P. Halmos [105] dem Gebiet gegeben, das (seit etwa 1930) die algebraischen Strukturen untersucht, die sich ergeben, wenn man die Methoden, wie sie bei Behandlung des Klassen- und des Aussagenkalküls mit Hilfe der Booleschen Algebra verwendet werden, auf andere Bereiche (insbesondere den Prädikatenkalkül der ersten Stufe) überträgt.[1])

Der „reine" Aussagenkalkül ([G—H], S. 112) unterscheidet sich von der „Algebra der Logik" dadurch, daß man dort logisch äquivalente Ausdrücke nicht identifiziert ([G—H], S. 114). Da in der klassischen Logik und in vielen nichtklassischen Logiken (vgl. 13.4.4.) die Konnektoren (aussagenlogischen Funktoren) ([G—H], S. 112) mit der logischen Äquivalenz verträglich sind, überträgt sich alles, was im Aussagenkalkül behandelt wird, auf die Algebra der Logik und umgekehrt. Tatsächlich haben sich aufgrund der Tatsache, daß die Ideen Freges so wenig bekannt geworden waren, bis sich Russell zu ihrem Propagandisten machte, zahlreiche der heute zum Aussagenkalkül gerechneten Entwicklungen schon vorher in den Arbeiten vollzogen, die der Algebra der Logik gewidmet waren. So stammt die Bezeichnung „Aussagenkalkül" bereits von Schröder ([259], Bd. 1, S. 161),

[1]) Für eine kurze historische Übersicht über diese Entwicklungen, die wir hier aus Platzgründen nicht behandeln können, vergleiche man [148 bis] und [154 bis].

wohl inspiriert durch den Titel *The calculus of equivalent statements and integration limits* einer Reihe von Noten ([179], auch [178]), die ab 1877 von H. McColl (1837—1909) ohne Kenntnis des Booleschen Werkes verfaßt wurden und in denen ein reiner Aussagenkalkül erscheint. Umgekehrt kann das erste Axiomensystem für einen derartigen Kalkül, das Frege in seiner *Begriffsschrift* [79] entwickelte, welche 1879 vor der Schröderschen Arbeit erschien (Schröder nahm sie 1880 zur Kenntnis), auch als Axiomensystem der Algebra der Logik angesehen werden.

Der Aussagenkalkül wurde in [79] zum ersten Mal im Rahmen eines formalen Systems (vgl. 13.4.3.) behandelt, ohne jedoch dort, um ehrlich zu sein, anders herausgearbeitet zu werden als durch eine geordnete Darstellung, die ihn zunächst durch den inneren Zwang des Gegenstandes erscheinen läßt. Es sollte auch in der Folge kein speziell auf diesen Kalkül zielendes Axiomensystem geben, das sich nicht in eine umfassendere Behandlung einfügt. Frege gab in seinen *Grundgesetzen der Arithmetik* ([83], B. 1) von 1893 ein von dem ersten ganz verschiedenes Axiomensystem an. Die nächsten Axiomensysteme stammen von B. Russell zwischen 1906 und 1910 (in [303]), von Nicod [202] 1917, und nach 1928 erschien eine Vielfalt von Axiomensystemen in der Schule um Hilbert und Bernays sowie in Polen.

Nach 1920 sollten andere Systeme, welche gewisse nicht-klassische Logiken formalisieren, eine Vielzahl von Aussagenkalkülen mit sich bringen, wobei die Arbeiten, welche beide Arten von Aussagenkalkülen betreffen, in enger Wechselbeziehung fortgesetzt wurden; wir werden später noch auf die Sätze zurückkommen (Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit usw. ...), die aus den Problemen jener Zeit entstehen. In der *Begriffsschrift* beschränkte sich Frege darauf, eine bestimmte Anzahl von formalen Ableitungen anzugeben, wobei er von folgenden Axiomen ausging:

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
2. $(s \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Rightarrow ((s \Rightarrow p) \Rightarrow (s \Rightarrow q))$
3. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
5. $\neg\neg p \Rightarrow p$
6. $p \Rightarrow \neg\neg p$.

Als Schlußregeln benutzte er ([G—H], S. 118) die *Abtrennungsregel* (den Syllogismus *modus ponens*) und implizit die Einsetzungsregel (der Begriff des *Axiomenschemas*, der es gestattet, auf die Einsetzungsregel zu verzichten, wurde erst 1927 von J. v. Neumann [197] mit der zur Erklärung ihres Inhalts erforderlichen Sorgfalt eingeführt).

Die *Wahrheitstabellen* ([G—H], S. 113) wurden 1885 von C. S. Peirce [220] als systematisches Darstellungsverfahren für Wahrheitsfunktionen (vgl. 13.4.5.) eingeführt (Frege hatte sie für die Negation und die Implikation beschrieben, ohne sie aufzustellen [79]); sie wurden 1921 von J. Łukasiewicz [176], E. L. Post [240] und L. Wittgenstein [306] popularisiert. Vorher dienten Jevons die bei den Booleschen Algorithmen in natürlicher Weise auftretenden widerspruchsfreien Konjunktionen aus Variablen oder negierten Variablen, in denen jede der betrachteten

Variablen genau einmal auftritt,[1]) zur Beschreibung eines automatischen Verfahrens zur Bildung von logischen Funktionen, die mit gegebenen Annahmen vereinbar sind; im Jahre 1870 stellte er der Royal Society sein *logisches Klavier* vor, eine mechanische Maschine, die bei bis zu vier Variablen die Resultate der Berechnung nach Eingabe der Annahmen ausgab ([224], 1870, S. 497—518; vgl. *[146 bis], S. 239).

Durch Systematisierung solcher Verfahren gelangte C. S. Peirce [218] zur Entdeckung des „Peirceschen Gesetzes"

$$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p\,.$$

Diese Verfahren gestatteten es, die Konnektoren ([G—H], S. 112) mit einer gegebenen Anzahl von Argumenten aufzuzählen und zu beschreiben sowie zu untersuchen, wie sich gewisse von ihnen aus anderen definieren lassen. Und schon 1880 schlug Peirce in einem erst 1933 veröffentlichten Fragment [221] einen einzigen Konnektor vor (die Negation der nicht-ausschließenden Disjunktion), mit dem man sämtliche Konnektoren ausdrücken kann. Ein analoges Resultat, das die Negation der Konjunktion zugrundelegt, wurde 1917 von H. Sheffer [264] publiziert, dessen Strich im Jahre 1917 von J. Nicod [202] übernommen wird, der das Axiomensystem des Aussagenkalküls auf das einzige Axiom

$$(a \mid (b \mid c)) \mid \{[d \mid (d \mid d)] \mid [(e \mid b) \mid ((a \mid e) \mid (a \mid e))]\}$$

und die Abtrennungs- und die Einsetzungsregel reduziert.

13.3.2. *Die Theorie der Relationen*

Wir haben bereits die Bedeutung hervorgehoben (vgl. 13.2.2.), die Leibniz der Untersuchung der allgemeinsten Relationen eingeräumt hatte. Um die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts eröffnete A. de Morgan deren systematisches Studium; dies ist, neben dem von Boole, der zweite große Beitrag dieser Zeit zur Entwicklung der Logik. Von seiner *Formal Logic* [193] aus dem Jahre 1847 an versuchte de Morgan, die Theorie des Syllogismus so weit wie möglich auszubauen; neben der Betrachtung von „numerisch charakterisierten" Syllogismen, in denen Subjekt und Prädikat in einer gegebenen Mindestzahl „genommen" werden können,[2]) verdoppelte er die Anzahl der „gewöhnlichen" Aussagen und vervielfachte die Anzahl der Syllogismenfiguren, indem er die „nicht-X" einführte, d. h. die zur Klasse der X komplementäre Klasse „in bezug auf das Universum" der Gegenstände, und das waren bei ihm die unter den allgemeinsten der betrachteten Begriffe fallenden Gegenstände. Im Jahre 1860 führte er in mehreren Fortsetzungen einer Reihe von Beiträgen mit dem Titel *On the syllogism*, die er ab 1850 der Philosophical Society von Cambridge vorlegte, die zu einer Relation komplementäre und die zu ihr konverse (oder reziproke) Relation sowie den Durchschnitt, die Vereini-

---

[1]) Man nennt sie heute *Elementarkonjunktionen* der betrachteten Variablen. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) Beispiel: Einige Dutzend X sind Y. Schon Lambert hatte analoge Untersuchungen angestellt.

gung und das Produkt von Relationen[1]) ein, wie wir es seither tun [194]. Was er hierzu sagte, erhellt vollständig sein Vorgehen und das Niveau, auf dem er sich befand: „In meinem zweiten und dritten Artikel über die Logik habe ich betont, daß der übliche Syllogismus ein Spezialfall und nur ein Spezialfall der Zusammensetzung von Relationen ist. In diesem vierten Artikel gehe ich näher auf das Thema Relation als einen Zweig der Logik ein." Er formulierte und bewies dann Sätze wie

$$(\mathbf{C}R)^{-1} = \mathbf{C}(R^{-1}), \qquad (R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1},$$

„das Reziproke einer transitiven Relation ist eine transitive Relation", und schloß: „Zum ersten Mal in der Geschichte der Erkenntnis werden die Begriffe *Relation* und *Relation von Relationen* symbolisiert ..."[2]) Das Bemühen um Symmetrie, das sich schon in der *Formal Logic* zeigte und das ihn dazu geführt hatte, die heute nach ihm benannten Gesetze

$$\mathbf{C}(A \cup B) = (\mathbf{C}A) \cap (\mathbf{C}B), \qquad \mathbf{C}(A \cap B) = (\mathbf{C}A) \cup (\mathbf{C}B)$$

auszusprechen[3]), veranlaßte ihn, als weitere Operationen die „relative Summe von Relationen" einzuführen, die heute vergessen ist, da sie mittels der anderen Operationen definierbar ist, und zwar als zum Produkt durch Zusammensetzung duale Operation.

Zehn Jahre später unternahm es Peirce, die Algebra der Logik so zu erweitern, daß sie die Relationentheorie umfaßt. Er förderte deren Entwicklung durch manchen Einzelbeitrag und durch große Ideen. Auf die modernen Quantoren und die Matrizenschreibweise haben wir schon hingewiesen (vgl. 13.2.1.); er bewies ferner eine Reihe von Formeln der Art

$$R^{-1} \circ R \not\subset \mathbf{C}(Id), \qquad R \circ S \subset \mathbf{C}(Id) \Leftrightarrow R \subset \mathbf{C}(S^{-1}),$$

und drang ab 1885 ([222]) — bis auf die Sprache — relativ weit in das Gebiet vor, das wir heute Funktionenkalkül oder Prädikatenkalkül nennen ([G—H], S. 603); er führte die pränexen Normalformen[4]) ein, bewies die Gültigkeit der Formel

$$\exists x\, \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y\, \exists x A(x, y), \tag{1}$$

zeigte, daß ihre Umkehrung im allgemeinen falsch, aber in Spezialfällen richtig ist: Wenn beispielsweise y nicht in $A(x)$ und x nicht in $B(y)$ vorkommt, so ist

$$\exists x\, \forall y[A(x) \wedge B(y)] \Leftrightarrow \forall y\, \exists x[A(x) \wedge B(y)]\ (\Leftrightarrow \exists x\, A(x) \wedge \forall y\, B(y)).$$

---

[1]) Sind R und S Relationen von A nach B bzw. von B nach C, so ist ihr „Produkt durch Zusammensetzung" diejenige Relation $S \circ R$ von A nach C, für welche für beliebiges $a \in A$ und $c \in C$

$$a(S \circ R)\, c \Leftrightarrow \exists b \in B(aRb \wedge bSc)$$

gilt.

[2]) Zitate aus dem Französischen übersetzt. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) In verbaler Form gehen diese Gesetze mindestens auf die *Summa logicae* (1323 bis 1329) des William v. Ockham (1300—1349) zurück ([141], S. 20).

[4]) Man sagt, eine Formel sei in pränexer Normalform dargestellt, wenn sie in der Gestalt $Q_1x_1Q_2x_2 \cdots Q_nx_n\varphi$ geschrieben ist, wobei $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ Quantoren sind und der quantorenfreie Kern φ eine konjunktive oder disjunktive Normalform ist.

Zu diesen Ergebnissen gelangte er ganz naturgemäß bei seiner Suche nach Methoden zur Lösung von Gleichungen mit unbekannten Relationen, deren Koeffizienten Relationen sind und die mittels Operationen zwischen Relationen aufgebaut sind, unter denen auch die Quantifizierung *von Relationen* zugelassen ist. Für ihn waren die Relationsquantoren bei der Interpretation durch Relationsgraphen Symbole für eine unendliche Addition bzw. Multiplikation, die denen der Analysis analog sind, und bei der Interpretation durch Aussagen, an die er dachte, waren sie Symbole für die Quantoren der Existenz und der Generalisierung. Die entsprechenden Aussagen sind also von *zweiter Stufe* (vgl. 13.4.1.) — während es schon für die der ersten Stufe keinen allgemeinen Algorithmus gibt (vgl. 13.4.5.) —, und er erhielt daher nur sehr spezielle Ergebnisse. Schließlich führte ihn die Vielfalt der Verhaltensmöglichkeiten der Relationen bei der Lösung einer Gleichung (wie derjenigen, welche die Umkehrung der Formel (1) ausdrückt) dazu, *in den Kalkül* auch Variablen für die individuellen Objekte der universellen Klasse einzuführen, und er stellte nachdrücklich das Problem der Lösbarkeit der Gleichungen entsprechend der Anzahl dieser Objekte; so finden sich, gesondert nach den Ausdrücken des Kalküls, verschiedene „Bereiche" der Interpretation, deren der Kalkül gemäß dem einzigen zulässigen Interpretationsverfahren durch Klassen von Paaren individueller Objekte fähig ist.

Nach Peirce leistete Schröder eine umfangreiche systematische Arbeit, deren Resultate er 1895 auf den 650 Seiten des 3. Bandes seiner *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [259] darlegte; er vermehrte die Beweise für Formeln der obigen Art erheblich, er behandelte eine Vielzahl spezieller Fälle von Gleichungen und entwarf Methoden, um dabei zu hinreichend allgemeinen Fällen zu gelangen, ohne daß er jedoch dem Ziel viel näher kam. Seine „Bereiche" waren „Denkbereiche" nach der Art Dedekinds, und die „Individuen" wurden aus den „reinen Mannigfaltigkeiten" von „Denkmöglichkeiten" genommen. Er zitierte übrigens die *Kettentheorie* von Dedekind [62] als den Hauptbeitrag zur Relationentheorie nach dem schöpferischen Werk von de Morgan und Peirce und widmete seine 9. Vorlesung einer quasi formalisierten Darlegung der Kettentheorie in seinen Bezeichnungen der Relationentheorie. Seine Vertrautheit mit diesem Formalismus ließ ihn Vereinfachungen bemerken, die ihm als ein gutes Omen erschienen.

In den Arbeiten von Frege wird unterschieden zwischen Ausdrücken für Aussagen erster Stufe, die seit der *Begriffsschrift* [79] aus dem Jahre 1879 in einem Kalkül behandelt werden, den man einen „reinen Funktionenkalkül" nennen kann, und Ausdrücken, welche Variablen für Klassen und für Graphen von Relationen enthalten und die 1893 im ersten Band der *Grundgesetze der Arithmetik* [83] eingeführt wurden. In seinen *Principles of mathematics* [254] von 1903 griff B. Russell diese Unterscheidung auf. Er schlug vor, durch xRy die Aussagenfunktion „x steht in der Relation R zu y" auszudrücken und die Theorie der Klassen und die Theorie der (Graphen von) Relationen in einem späteren Kapitel zu behandeln, mit Bezeichnungen allerdings, die aus denen von Frege und Peano abgeleitet sind. Dieses Programm wurde von A. N. Whitehead und B. Russell nach dessen Anpassung an die inzwischen entworfene Typentheorie (vgl. 13.4.1.) in den *Principia Mathematica* ([303], Bd. 1) von 1910 realisiert, die in diesem Punkt weitgehend ähnlich

vollständig sind wie die Schröderschen *Vorlesungen*. Bis auf die strenge Bezugnahme auf die Typentheorie entspricht diese Art des Vorgehens unserer heutigen.

Zu jener Zeit setzten die Schüler Schröders noch dessen Bemühungen fort. Schröder hatte den Begriff der „verdichtbaren" Gleichung eingeführt ([259], Bd. 3, S. 550), d. h. einer Gleichung, zu der es eine äquivalente Gleichung gibt, welche ohne expliziten Quantor geschrieben werden kann, und zwar allein mit Hilfe der anderen Operationen (von denen allerdings das Produkt und die relative Summe die Quantifikationen verschleiert enthalten: Beispielsweise ist $S \subset P \circ Q$ zu lesen als $\forall x\, \forall y[xSy \Rightarrow \exists z(xPz \wedge xQy)]$).[1]) Nun bemerkte jedoch Korselt,[2]) daß eine Gleichung z. B. der Gestalt

$$\exists u\, \exists v\, \exists w\, \exists z(u \neq v \wedge u \neq w \wedge u \neq z \wedge v \neq w \wedge v \neq z \wedge w \neq z),$$

welche besagt, daß der „Bereich" mindestens vier Elemente umfaßt, nicht verdichtbar ist. Man mußte also das Problem auf einem anderen Weg angreifen. Zunächst beschränkte man sich auf „Zählgleichungen", d. h. auf Gleichungen, in denen kein Quantor vorkommt, der sich auf eine Relation bezieht, und testete sie auf „Bereichen", die in der Gestalt $(1, 2, 3, \ldots, n)$ dargestellt wurden, wenn sie endlich waren: Das Problem, eine solche Gleichung zu lösen, läuft praktisch darauf hinaus, Interpretationen der in ihr als Parameter auftretenden Relationen in einem Bereich zu finden, in dem eine sie ausdrückende Formel erster Stufe (vgl. 13.4.1.) erfüllbar ist.

Dazu legte im Jahre 1915 L. Löwenheim (1878 —1948)[3]) in seiner Abhandlung [174] drei Hauptresultate vor. Zwei davon sind hier wichtig: Das eine besagt, daß sich jede Zählgleichung auf eine andere zurückführen läßt, in der nur binäre Relationen vorkommen; das andere sagt aus, daß eine Zählgleichung, in der nur einstellige Relationen vorkommen, eine Identität ist, wenn sie in jedem Bereich mit endlich vielen Elementen erfüllt ist. Das dritte ist die erste Version des Satzes von Löwenheim-Skolem, eines der ganz grundlegenden Sätze der modernen Logik: Jeder Ausdruck erster Stufe, der in einem unendlichen Bereich erfüllbar ist, ist schon in einem abzählbaren Bereich erfüllbar.

Im Jahre 1920 nimmt Th. Skolem (1887—1963) das Problem wieder auf, immer noch in den Bezeichnungen der Algebra der Logik, aber unter Verzicht auf das Relationenprodukt und die relative Summe. Indem er einige Lücken des Löwenheimschen Beweises schließt, beweist er im wesentlichen die definitive Version des Satzes: Jede Menge von Aussagen erster Stufe, die ein unendliches Modell besitzt, besitzt ein abzählbares Modell [269].

Im folgenden Jahrzehnt wurden bei der Behandlung dieser Art von Problemen die Schröderschen Bezeichnungen mehr und mehr durch die der Hilbertschen Schule ersetzt, wobei sich der Problemkreis allmählich zur modernen Semantik entwickelt; wir gehen hierauf in 13.4.6. ein.

---

[1]) Die hier benutzte Reihenfolge entspricht nicht der in Fußnote 1 auf S. 810 gegebenen Definition. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) In einem Brief an Löwenheim, der dies in seiner Abhandlung [174] berichtet.

[3]) Im Original ist — nach einem weit verbreiteten Irrtum — als Sterbejahr von L. Löwenheim 1940 angegeben. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

13.3.3. *Die formalisierte Logik bei Frege und Peano*

Schröder hatte 1880 die *Begriffsschrift* kritisiert, weil dort logische Zeichen eingeführt werden, welche nicht mehr an die Analogien zum inhaltlichen Schließen und an die Algebra erinnern. Ihm antwortete Frege zwei Jahre später ([80]), daß es nicht sein Anliegen gewesen sei, einen einfachen calculus ratiocinator, einen auf die reine Logik beschränkten Kalkül zu schaffen, sondern daß es ihm um eine lingua characteristica im Leibnizschen Sinne gehe, zunächst für die Mathematik oder, wie er im Vorwort zur *Begriffsschrift* ([79]; vgl. *[8 bis], S. 49) sagte, als „ein für bestimmte wissenschaftliche Zwecke ersonnenes Hilfsmittel", das aber auch als erste Näherung für ein so umfangreiches Unternehmen anzusehen ist.[1]) Und für die Logik eröffnete die *Begriffsschrift* trotz der Schwierigkeiten, die sich später ergaben, die Aera der extremen mathematischen Strenge und der Möglichkeiten, welche diese ihr bietet.

Mit dem Vorschlag, $\vdash \Phi(A)$ zu lesen als „A hat die Eigenschaft Φ" (*[8 bis], S. 66) und $\vdash \Psi(A, B)$ als „B steht in der Ψ-Beziehung zu A" (*[8 bis], S. 67) (oder: B steht in der Relation Ψ zu A), verfügte Frege, da es in seiner „Formelsprache" Bezeichnungen für die Generalisierung und für die Gleichheit gibt, über Darstellungsmittel für alle Arten von Gedankenkombinationen, die sich im System der logischen Begriffe ergeben. Jede Variable kann bei ihm quantifiziert werden, gleichgültig, ob sie an der Stelle eines Arguments steht, mit dem operiert wird, oder an der Stelle eines Operators; in dieser Hinsicht verfügt aus Gründen, die wir in 13.4.1. darlegen, keines der späteren Systeme über ähnlich weitgehende Ausdrucksmittel.

Überdies lieferte Frege schon in der *Begriffsschrift* ein in der von ihm verwendeten Symbolik formuliertes Axiomensystem der Logik. Die Art, wie er in dieser Symbolik die Identität und die Quantifizierung behandelte, ist bis auf einige kleinere Änderungen (Präzisierung der Substitutionsregeln, die er implizit benutzte, und eventuelle Eliminierung von Weitschweifigkeiten), im wesentlichen die gleiche, die den meisten der heutigen Arbeiten als Ausgangspunkt dient und die man in fast allen Lehrbüchern wiederfindet. Die von Freges Darstellung abweichende beträchtliche Anzahl von Varianten für die Axiomatik des Aussagenkalküls ist das Resultat einer langen Geschichte (vgl. 13.3.1.) und ergibt sich einzig und allein aus dem praktischen Anliegen, die Aussagenlogik so schnell wie möglich abzuhandeln, um zu interessanteren Gebieten zu gelangen; vom rein theoretischen

---

[1]) Eine im gleichen Jahre entstandene Schrift mit dem Titel *Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift* hatte Frege 1881 nacheinander der *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, den *Mathematischen Annalen* und der *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* sowie vielleicht auch der *Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie* angeboten, deren Publikation aber in allen Fällen abgelehnt wurde, so daß ihr Inhalt erst aus dem 1969 publizierten Nachlaß von Frege allgemein bekannt wurde (vgl. G. Frege, *Schriften zur Logik* — Aus dem Nachlaß. Akademie-Verlag, Berlin 1973, S. 172—226). In ihr setzte sich Frege eingehend mit den Auffassungen von Boole, Jevons, Schröder u. a. im Verhältnis zu seinem eigenen Anliegen auseinander. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

Standpunkt aus leistet die Fregesche Form auch heute noch alles Erforderliche.[1]) Bei Frege werden die Formeln und die Beweise auf mathematische Art behandelt; die Regeln zur Bildung der Formeln werden sehr exakt angegeben, ebenso diejenigen, denen die formalen Beweise zu gehorchen haben (vgl. 13.4.4.), und alle formalen Beweise, welche die *Begriffsschrift* bringt, sind völlig ausgefeilt. Damit werden Formeln und formale Beweise ebenso wohlumrissene Objekte der Mathematik, wie es z. B. die Zahlen sind.

Frege betrachtete jedoch dies alles, was uns so reich an neuen Beiträgen erscheint, nur als Vorbereitungen. „... so möge man immerhin neue Wahrheiten in meiner Schrift vermissen", sagte er im Vorwort seiner *Begriffsschrift* (*[8 bis], S.49). „Ich würde mich darüber mit dem Bewusstsein trösten, daß auch eine Weiterbildung der Methode die Wissenschaft fördert." Tatsächlich aber nehmen, wie Dedekind 1893 in einer Neuauflage von *Was sind und was sollen die Zahlen*? [62] bekannte, die Definition und die Theorie des Begriffs der Folge, die Frege in seinem Werk als Beispiel für eine detaillierte mathematische Anwendung gab, im wesentlichen die Dedekindsche Theorie der Ketten vorweg.

In seinen späteren Arbeiten befaßte sich Frege weiterhin mit äußerst feinen und tiefgehenden Analysen. Er unterschied zwischen der Kombination der Gedanken, die den Gegenstand eines Urteils bildet, und dem Urteil selbst, das sie reflektiert (vgl. 13.2.1.). In der Folge unterschied er zwischen dem Gebrauch und der Nennung eines Ausdrucks: Wenn man sagt „$2 + 2 = 4$", so gebraucht man diesen Ausdruck zur Mitteilung eines Sachverhalts, wobei der Ausdruck selbst nicht Gegenstand der Mitteilung ist; in der Aussage „man schreibt ‚$2 + 2 = 4$' mittels 4 Zeichen" wird dagegen der Ausdruck „$2 + 2 = 4$" zitiert, d. h. ist dieser Ausdruck selbst Gegenstand einer Mitteilung (Frege kennzeichnete das Zitieren eines Ausdrucks in einer Aussage, indem er ihn dort systematisch in Anführungszeichen setzt).[2]) Eine Unterscheidung, der Frege viel Bedeutung beimaß (er widmete ihr mehrere Abhandlungen, wie z. B. [82]), ist die zwischen Sinn und Bedeutung eines Ausdrucks; als Bedeutung bezeichnete er den Gegenstand, den ein Ausdruck oder „Name" bezeichnet; der Sinn besteht dagegen in dem, was der Ausdruck über den bezeichneten Gegenstand selbst oder an Beziehungen dieses Gegenstandes zu anderen Gegenständen aussagt, was an Wissen über den Gegenstand im Ausdruck enthalten ist.[3]) So haben z. B. die Ausdrücke „$2 + 2$" und „2^2" beide dieselbe Bedeutung,

[1]) Die Fregeschen Axiome sind nicht unabhängig; das ist aber auch alles, was man an ihnen bemängeln könnte. Auch wenn die Unabhängigkeit der Axiome ein theoretisches Anliegen einer ganzen Epoche war, so erscheint sie uns heute jedenfalls nicht mehr als absolut unverzichtbar.

[2]) In der Logik des Mittelalters nannte man den Gebrauch eines Ausdrucks in seiner gewöhnlichen Bedeutung „suppositio formalis", während der nennende oder zitierende Gebrauch „suppositio materialis" hieß. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[3]) Bereits Condillac hatte diesen Unterschied erkannt, wenn er auch von dem Grad der Fregeschen Präzision noch weit entfernt war: „*Sechs ist sechs* ist ein zugleich identischer und nichtssagender Satz ... Nicht so ist es mit dem Satz *drei nnd drei ist sechs* ... er ist nicht nichtssagend, weil die Identität hier einzig in den Ideen besteht. Weil man nicht zwischen der Identität in den Worten und der Identität in den Ideen unterschieden hat, hat man angenommen, daß jeder identische Satz nichtssagend ist. ..." schreibt er in *Die Sprache des Rechnens* ([54][1], S. 152).

während der Sinn des ersten die Zahl 4 als Resultat der Addition der Zahl 2 zu sich selbst, der des zweiten die Zahl 4 als Resultat der Erhebung der Zahl 2 in die zweite Potenz ist. Ebenso lenkte Frege im ersten Band seiner *Grundgesetze der Arithmetik* [83] die Aufmerksamkeit auf die Notwendigkeit, zwischen einem Element a und der nur aus a bestehenden Menge, dem „Singleton" (der Einermenge) $\{a\}$, zu unterscheiden.

In diesem Werk begann Frege sein Programm der Rückführung des Begriffs der natürlichen Zahl auf Begriffe der Logik in die Tat umzusetzen. Wir kommen darauf in 13.4.1. und 13.4.2. zurück. Er gab eine Version seiner in verschiedenen Punkten korrigierten Begriffsschrift, die er durch seine inzwischen erarbeiteten Analysen gewonnen hatte; so unterschied er nun zwischen Gegenständen und Funktionen verschiedener Stufen. Eine Funktion war für ihn etwas, das durch einen Ausdruck repräsentiert wird, der „leere Stellen" enthält, die durch Zeichen angedeutet werden und die wir heute „freie Variable" nennen; ein Gegenstand war für ihn etwas, das durch einen Ausdruck ohne Leerstellen repräsentiert wird, durch einen Ausdruck, der vollständig „gesättigt" ist. Er sagte ([83], S. 37): „Wir nennen nun die Functionen, deren Argumente Gegenstände sind, Functionen erster Stufe; ... die Functionen dagegen, deren Argumente Functionen erster Stufe sind, mögen Functionen zweiter Stufe heißen." Etwas später (S. 41) erwähnte er „den Werth einer Function dritter Stufe für ein Argument, das selbst eine Function zweiter Stufe mit einem Argumente zweiter Art" ist. Frege behandelte dort auch die Quantifizierung über Gegenständen und die Quantifizierung über Funktionen erster Stufe getrennt. Eine Aussagenfunktion war für ihn eine Funktion, die als Werte das annimmt, was er die „Wahrheitswerthe" „das Wahre" und „das Falsche" nannte ([G—H], S. 112); ersetzt man in einer Aussagenfunktion die Argumente durch Werte der erforderlichen Stufe, so ist die Aussage, welche dabei aus dem die Funktion repräsentierenden Ausdruck resultiert, der Sinn dieses Ausdrucks (vgl. weiter oben), während der sich dabei als Funktionswert ergebende Wahrheitswert dessen Bedeutung ist. Will man diese Auffassung richtig einschätzen, so muß man zugestehen, daß sie mindestens historischen Wert hat, da sie spätere Arbeiten beeinflußte; sie führte zu der häufig gebrauchten Bezeichnung Funktionenkalkül für das, was andere heute Prädikatenkalkül nennen ([G—H], S. 603). Frege führte auch den Begriff der „rechtmäßigen Bildung" von Ausdrücken ein, die durch Regeln kodifiziert ist. Er unterschied ausdrücklich zwischen dem Ausdruck, der den Sinn der Zahl 0 wiedergibt und den er durch eine durchgestrichene Null abkürzte, und dieser Zahl selbst sowie zwischen dem Ausdruck, der den Sinn der Zahl 1 wiedergibt und den er durch eine durchgestrichene Eins kennzeichnete, und dieser Zahl selbst.

Das Axiomensystem der *Grundgesetze* ist gegenüber dem der *Begriffsschrift* völlig neu formuliert und enthält auch dessen kleine Inkorrektheiten nicht mehr; insbesondere umfaßt es ein höchst ausführliches System von Schlußregeln, die sämtliche erlaubten Ersetzungen präzisieren. Frege sagte ([83], S. VI): „Ferner, und darin gehe ich über Euklid hinaus, verlange ich, dass alle Schluss- und Folgerungsweisen, die zur Anwendung kommen, vorher aufgeführt werden." Auf bestimmte Aspekte dieser Axiomatik, in welchen sowohl die Typentheorie (13.4.1.) als auch die typenfreien axiomatischen Theorien der Mengenlehre (13.4.2.) einen

ihrer Ursprünge haben, werden wir noch zurückkommen. Die Hauptidee des schon 1884 von Frege in seiner Schrift *Die Grundlagen der Arithmetik* [81] vorgelegten mathematischen Programms besteht darin, die Zahl 0 als Klasse der zur leeren Klasse gleichmächtigen Mengen zu definieren, wobei die leere Klasse die Klasse der von sich selbst verschiedenen Gegenstände ist, und die Zahl $n + 1$ als Klasse der Mengen, die zur Menge der Glieder der Zahlenfolge gleichmächtig sind, welche mit 0 beginnt und mit n endet. Der Umweg, der hierbei zu gehen ist, besteht darin, jene Folge durch ein Bildungsprinzip zu definieren; die einzelnen Glieder dieser Folge werden dann individualisiert; eben diesem Zweck diente die schon in der *Begriffsschrift* erarbeitete allgemeine Theorie der Folgen. Wir führen dazu ein Beispiel von historischem Interesse an, das aus dem Jahre 1863 stammt [68]: Der Begriff Vater erzeugt in gewissem Sinne den Begriff der Folge der Vorfahren: Vater, Großvater, Urgroßvater usw. Wir wissen heute (vgl. 13.4.1.), daß es zu einem Widerspruch führt, wenn man die Klasse der zu einer gegebenen Klasse gleichmächtigen Mengen als Menge auffaßt; wir kennen auch verschiedene Mittel, dem abzuhelfen. Die Problemstellung unserer Zeit ist aber eine andere.

Auf die Vorzüge der Peanoschen Pasigraphie gegenüber der Fregeschen Begriffsschrift und auf die Mängel ihres Axiomensystems (eingeschränkter Gebrauch der Quantoren, kein explizites Aufführen derAbleitungsregeln) haben wir schon in 13.2.1. hingewiesen. Peanos Programm ist zugleich bescheidener und umfassender als das Fregesche: Peano wollte für jeden Zweig der Mathematik eine formale Sprache und ein Axiomensystem bereitstellen, ohne sich dabei jedoch in gleichem Maße die Aufgabe zu stellen, sie sämtlich auf die Logik zurückzuführen. Dieses Programm ist im ersten Drittel des zwanzigsten Jahrhunderts von den Mathematikern realisiert worden, und die Arbeiten von Peano und seinen Mitarbeitern am *Formulaire de Mathématiques* [214] haben stark dazu beigetragen, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Logik zu lenken.

13.4. Die großen Ideen des zwanzigsten Jahrhunderts

Kindheit und Jugend der mathematischen Logik erstrecken sich bis ins zwanzigste Jahrhundert, und man würde ein Stück ihrer wirklichen Geschichte abschneiden, würde man sie auf die Zeit des neunzehnten Jahrhunderts beschränken. Im folgenden wollen wir versuchen, über die sich bis 1930 vollendenden Arbeiten, so treu, wie es ihr Niveau ermöglicht, zu berichten, und in einigen Fällen befassen wir uns auch mit richtungweisenden Fortsetzungen über diesen Zeitpunkt hinaus.

13.4.1. Der Logizismus und die Typentheorie

In 6.5. haben wir gesehen, wie in einer Reihe von Arbeiten von Cantor, Dedekind, Méray und Weierstraß, ausgehend von den Begriffen der Arithmetik und der Mengenlehre, Definitionen der reellen, der rationalen und der negativen Zahlen

erarbeitet wurden. Als Poincaré auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris den Stand der Mathematik beschrieb, konnte er folgendes feststellen: „Heute bleiben von der Analysis nur noch die ganzen Zahlen und die endlichen und die unendlichen Systeme von ganzen Zahlen, ... die Mathematik ... ist arithmetisiert ... worden. Wir können sagen ..., daß damit die absolute Strenge erreicht worden ist."

Frege teilte eine solche Meinung nicht; er verlangte vielmehr vom Leser seiner *Grundlagen der Arithmetik* ([81], 1884), ihm zuzugestehen, daß dann, wenn einmal sein Programm (vgl. 13.3.3.) mit aller Strenge, die er dafür bis ins geringste Detail forderte, ausgeführt sei, „die Arithmetik nur eine weiter ausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz, jedoch ein abgeleitetes" sein würde (S. 99) und daß „die negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen nicht geheimnisvoller [erscheinen] als die positiven ganzen Zahlen" (S. 119). Anscheinend unabhängig davon stellte sich Dedekind 1887 in seiner Schrift *Was sind und was sollen die Zahlen?* [62][1] auf einen dem Fregeschen analogen Standpunkt: „Indem ich die Arithmetik (Algebra, Analysis) nur einen Teil der Logik nenne, spreche ich schon aus, daß ich den Zahlbegriff ... für einen unmittelbaren Ausfluß der reinen Denkgesetze halte" (S. III). Er machte ihn aber nicht zur Grundlage einer unmittelbaren theoretischen Ausarbeitung.

Diese Auffassung wird *Logizismus* genannt; B. Russell (1872–1970), ihr hervorragendster Vertreter, hat sie 1903 in seinen *The Principles of Mathematics* ([254], S. 5) treffend so formuliert: „die ganze Mathematik ist symbolische Logik" — „eine der größten Entdeckungen unserer Zeit".

Der heutige Leser sollte beachten, daß inzwischen die Begriffe Umfang oder Extension eines Begriffs, Klasse und (Graph einer) Relation aus der Logik, *zu der sie für die Zeitgenossen von Frege gehörten*, herausgelöst wurden. So kommt es, daß auch im ersten Band von Freges *Grundgesetze der Arithmetik* [83] aus dem Jahre 1893 die erste Axiomatik für eine extensionale Theorie der Begriffe vorgeschlagen wurde, wobei die Begriffsumfänge als *Mengen* aufgefaßt werden, d. h. als Objekte, für welche die Frage nach der Angemessenheit des Begriffs für einen Gegenstand nur mit ja oder nein zu beantworten ist. *Aus dem axiomatischen Kontext*[1]) läßt sie sich auf ein Analogon des Schemas

$$\forall x[R(x) \Leftrightarrow S(x)] \Leftrightarrow \{x \mid R(x)\} = \{x \mid S(x)\}$$

für alle Aussagenfunktionen $R(x)$ und $S(x)$ zurückführen; dieser *Kontext* ermöglicht es nämlich, das *Extensionalitätsaxiom* (Extensionen, welche die gleichen Elemente haben, stimmen überein[2]) — das bringt die Implikation von links nach rechts im

---

[1]) Die hauptsächlichsten Unterschiede zu den heute üblichen Axiomensystemen ergeben sich aus der verwendeten Sprache (sie ist bei Frege im später zu erläuternden Sinne von höherer Stufe) und aus den benutzten Axiomen, die bei Frege so formuliert sind, daß sie die größeren Ausdrucksmöglichkeiten dieser Sprache benutzen: Verwendung der Extension $\{x \mid R(x)\}$ für jede Aussagenfunktion $R(x)$, von über Funktionen (insbesondere Aussagenfunktionen) erstreckten Quantifizierungen, usw.

[2]) Diese Eigenschaft geht auf Boole zurück (der sie in einer noch von syllogistischen Traditionen geprägten Sprache formulierte) und wurde von Dedekind [62] und von Schröder [259] als Axiom genommen, worauf sich Frege bezog.

obigen Schema zum Ausdruck) und das *Komprehensionsschema*

$$\forall x[R(x) \Leftrightarrow x \in \{y \mid R(y)\}]$$

für jede Aussagenfunktion $R(y)$ abzuleiten.

Dem Grundgedanken dieses Schemas, das implizit schon in den *Grundlagen der Arithmetik* [81] enthalten ist, hielt Cantor bereits 1885 in einer Rezension dieses Werkes[1]) entgegen, man habe vielleicht Vorsichtsmaßnahmen zu treffen, ehe man in dieser Weise behaupte, eine Extension $\{y \mid R(y)\}$ könne als Objekt auf derselben Stufe wie die anderen behandelt werden, da im allgemeinen der Umfang eines Begriffs etwas völlig Unbestimmtes sei. In der Einführung der *Grundgesetze* (S. VII) räumte Frege ein, daß um sein „Grundgesetz der Werthverläufe (V)", aus dem er jenes Schema herleitete, „das von den Logikern vielleicht noch nicht eigens ausgesprochen" sei, „ein Streit entbrennen" könne; auf S. XI gab er sogar zu, daß er bewußt seinen „Ansichten ein paradoxes Gepräge aufgedrückt" habe und „das Widerstreben einigermassen abschätzen" könne, „weil ich selbst ein ähnliches erst *in mir überwinden musste*".

Im Jahre 1901 bemerkte B. Russell, daß man aus dem Schema in der Tat den Widerspruch herleiten kann, den man seitdem *das Russellsche Paradoxon* (oder die Russellsche Antinomie) nennt: Nimmt man $x \notin x$ für $R(x)$ und $\{y \mid y \notin y\}$ als x, so erhält man

$$\{y \mid y \notin y\} \notin \{y \mid y \notin y\} \Leftrightarrow \{y \mid y \notin y\} \in \{y \mid y \notin y\}.$$

Die Verbreitung dieses Paradoxons (das übrigens unabhängig von Russell kurz vorher auch von Zermelo gefunden worden sein soll) durch Frege im 1903 erschienenen zweiten Band seiner *Grundgesetze der Arithmetik* (S. 253 ff.) und im gleichen Jahr durch Russell in seinen *Principles of Mathematics* löste eine tiefe und heftige Krise unter den Mathematikern aus. Während Frege seine mathematischen Publikationen einstellte,[2]) weil er kein Mittel fand, den Kern seines Systems zu retten, gruppierten sich die Mathematiker in gegensätzliche, ja feindliche Meinungsrichtungen, zwischen denen es zu scharfen Polemiken kam. Die gegenseitigen Herausforderungen und die aufgewühlten Leidenschaften bildeten einen Faktor schneller und wichtiger Entwicklungen; wir werden darauf noch mehrmals zurückzukommen haben.

---

[1]) [36]; von G. Kreisel in [150], [151], [152] zitiert.

[2]) Im Vorwort zur dritten Auflage von *Was sind und was sollen die Zahlen?* [62] aus dem Jahre 1911 bekannte auch Dedekind: „Als ich vor etwa acht Jahren aufgefordert wurde, die damals schon vergriffene zweite Auflage dieser Schrift durch eine dritte zu ersetzen, trug ich Bedenken darauf einzugehen, weil inzwischen sich Zweifel an der Sicherheit wichtiger Grundlagen meiner Auffassung geltend gemacht hatten. Die Bedeutung und teilweise Berechtigung dieser Zweifel verkenne ich auch heute nicht." Aber Dedekind fuhr fort: „Aber mein Vertrauen in die innere Harmonie unserer Logik ist dadurch nicht erschüttert; ich glaube, daß eine strenge Untersuchung der Schöpferkraft des Geistes, aus bestimmten Elementen ein neues Bestimmtes, ihr System zu erschaffen, das notwendig von jedem dieser Elemente verschieden ist, gewiß dazu führen wird, die Grundlagen meiner Schrift einwandfrei zu gestalten". — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

Eine zunächst etwas geringere Aufmerksamkeit wurde einer von Burali-Forti (1861—1931) entdeckten und 1897 publizierten Antinomie zuteil: Die Menge aller durch die natürliche Ordnung wohlgeordneten Ordnungszahlen ([G—H], S. 101) muß notwendigerweise als Ordnungstypus den eines ihrer eigenen Abschnitte haben, im Widerspruch zu einem Satz von Cantor. Diese Antinomie hatte Cantor selbst im Jahre 1895 entdeckt und sie 1896 Hilbert mitgeteilt. Nach Veröffentlichung der Russellschen Antinomie trieb eine wahre Faszination am Erzeugen von Paradoxien ihre Blüten, ganz zu schweigen von den Kommentaren und Lösungsvorschlägen, die so wucherten, daß im Jahre 1958 A. Fraenkel und Y. Bar-Hillel in ihren *Foundations of set theory* [77] mehr als 250 Publikationen zu diesem Thema aufführen können.

Wegen der Bedeutung, welche dem Nachdenken über die Paradoxien in der Ideengeschichte der Logik zukommt, wollen wir hier noch das *Paradoxon des Lügners* und die Antinomie von Richard erwähnen. Dem von den Philosophen der megarischen Schule den Mitgliedern der Akademie Platons entgegengehaltenen Paradoxon vom Lügner wurde durch Eubulides aus Milet im vierten Jahrhundert v. u. Z. folgende Form gegeben: Wenn ich sage, „die Aussage, die ich gerade äußere, ist falsch", wie kann man feststellen, ob sie falsch oder ob sie wahr ist? Die Antinomie von Richard ([249], 1905) läßt sich folgendermaßen formulieren:[1] Man notiere in lexikographischer Ordnung alle Paare von 28 Zeichen, der 26 Buchstaben des Alphabets plus Komma und Zwischenraum, welche Wörter voneinander trennen können, dann alle Tripel, alle Quadrupel . . . , d. h. insgesamt alle endlichen Folgen. In der so gebildeten Liste kommen alle (in der deutschen Sprache) möglichen Definitionen von reellen Zahlen vor. Aus der Liste streichen wir alle Folgen, die keine Definitionen reeller Zahlen sind. Es sei u_1 die durch die erste verbleibende Definition definierte Zahl, u_2 diejenige, welche die zweite definiert, u_3 diejenige, welche die dritte definiert, usw. . . . Mit u_i^p werde die p-te Dezimalziffer von u_i bezeichnet, für alle ganzen Zahlen i und p. Auf diese Weise erhalten wir, in einer bestimmten Ordnung aufgeschrieben, alle reellen Zahlen, die mit Hilfe endlich vieler Wörter definiert werden können. Es sei nun a die reelle Zahl, welche der folgenden Definition genügt: „Der ganzzahlige Teil der Zahl ist Null, und jede weitere Dezimalstelle ist der unmittelbare Nachfolger der Dezimalstelle gleichen Ranges der Zahl gleichen Ranges in der Folge u, wobei die Ziffer Null als auf die Ziffer Neun folgend angesehen wird" (in Formeln: $a^p \equiv u_p^p + 1 \bmod 10$, für alle $p \geqq 1$). Diese Zahl müßte — da sie durch einen endlichen Text definiert ist — in der Liste vorkommen, kann aber mit keinem ihrer Glieder übereinstimmen (wäre $a = u_p$, so müßte die p-te Dezimalstelle a^p von a gleich u_p^p, aber auch gleich $u_p^p + 1 \bmod 10$ sein).

Diese Argumentation, die stark vom „Diagonalverfahren" beeinflußt ist, mit dem Cantor die Nichtabzählbarkeit der Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 bewiesen hatte und auf das wir in 13.4.2. noch zurückkommen werden, hat die Gemüter sehr erregt. Sie regte Poincaré (1845—1912) zu einer Konzeption an, welche die spätere Entwicklung der Logik entscheidend beeinflußt hat. In einer

[1]) Wir halten uns im wesentlichen an den Richardschen Text, ersetzen aber die von ihm benutzte, inzwischen veraltete Terminologie durch die heutige.

1906 in der *Revue de Métaphysique et de Morale* [235] erschienenen Arbeit glaubte Poincaré den Ursprung der Paradoxien in der Verwendung von *imprädikativen* Definitionen zu erkennen, d. h. von Definitionen, bei denen, wie er 1912 formulierte [238],[1] „das Postulat eine Beziehung zwischen den festzulegenden Gegenständen und allen Einzeldingen der Gattung ausdrückt, der der festzulegende Gegenstand nach Annahme selbst angehört ... oder der wenigstens einzelne Dinge angehören, die selbst nicht ohne Beziehung auf den festzulegenden Gegenstand definiert werden können ...". Die Überlegungen Poincarés sind hierbei folgende: Versuchte man in diesem Fall die Gattung durch fortlaufende Bildung von Repräsentanten zu *konstruieren*, so würde sich einerseits die Einführung des zu definierenden Gegenstandes auf die Vollendung der Konstruktion stützen, während sich andererseits die Konstruktion selbst auf jene Einführung stützte. Die Paradoxien werden hinfällig, wenn man sich davon überzeugt, daß die Gattung auch irgendwie anders erfaßt werden kann. Wir werden in 13.4.5. auf die Arbeiten zurückkommen, welche durch Vertiefung dieser Vorstellung einer fortschreitenden Konstruktion entstanden sind.

Die *Typentheorie* ist die von B. Russell erdachte Behandlung der Logik, um das logizistische Programm durch Abschwächung der von Frege formulierten Prinzipien zu realisieren.

Russell hatte zunächst die Idee, wie er in einem Anhang zu seinen *Principles of Mathematics* auseinandersetzte, die Definitionsbereiche der Aussagenfunktionen, die bei Frege völlig unbeschränkt sind, einzuschränken. Dadurch wurden bestimmte Ausdrücke *sinnlos*, da ihr „Wahrheitswert" nicht definiert ist; wenn man z. B. vorschreibt, daß $r = \{x \mid x \notin x\}$ sich außerhalb des Definitionsbereichs der Aussagenfunktion $x \notin x$ befindet, vermeidet man die Russellsche Antinomie, da dann die Aussage $r \notin r$ weder einen Sinn noch einen Wahrheitswert besitzt. Mit jeder Variablen wird ihr *Typus*, ihr Wertebereich, verknüpft, d. h. der Bereich der Gegenstände, zu deren Darstellung sie geeignet ist; und eine Aussagenfunktion in dieser Variablen muß für alle Werte, die diesen Typus bilden, definiert sein, und für keine anderen.

Die Theorie nahm 1908 ihre erste Gestalt an [256], als B. Russell ihr seine eigene Version der Ablehnung jeder Imprädikativität hinzufügte, indem er sie mit einem *circulus-vitiosus-Prinzip* verknüpfte, das er folgendermaßen formulierte: Wenn die Definition eines Objekts eine gebundene Variable ([G—H], S. 610) enthält, so darf dieses kein möglicher Wert für diese Variable sein, der Typus jenes Objekts muß „höher" sein als der Typus dieser Variablen, und der Quantor darf sich nur auf deren Werte beziehen. Die Typen sind also jetzt mit den betrachteten Darstellungen (Formeln) verknüpft und gemäß folgender Prinzipien in einer Hierarchie geordnet: Der „niedrigste" Typus ist derjenige der Bezeichnungen von Gegenständen, welche *Individuen* genannt werden und die niemals anders denn als Argumente vorkommen können. Die anderen betrachteten Objekte sind Aussagenfunktionen. Jede Darstellung einer solchen Funktion besitzt einen Typus, der

---

[1]) Zitiert nach H. Poincaré, *Letzte Gedanken*, übersetzt von K. Lichteneckert, Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H. Leipzig, 1913, S. 155f. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

durch die Folge der Typen der Darstellungen der Argumente bestimmt ist, die zu dieser Funktion passen, sowie durch seine „Ordnung“ — ein Wort, das Russell *in einer von der heutigen verschiedenen Bedeutung* verwendete. Die Individuenvariablen sind von der Ordnung 0, und die Ordnung einer Darstellung einer Aussagenfunktion ist um 1 größer als das Maximum der Ordnungen ihrer Argumente und ihrer quantifizierten Variablen. Die Variablen sind außerdem von *vornherein* an einen Typus *gebunden*, und eine primitive Formel (die weder Konnektoren noch Quantoren enthält) hat nur einen Sinn, wenn sie so gebildet ist, daß mit den Variablen in Operatorposition Argumente jener Typen verknüpft werden, die mit denen übereinstimmen, welche der Typus dieser Variablen anzeigt.[1]) Damit werden die Darstellungen von individuellen Gegenständen, die von Eigenschaften dieser Gegenstände, die von Eigenschaften von Eigenschaften der Gegenstände usw. in verschiedenen und als „wachsend“ angesehene Typen angeordnet.[2])

Die formale Sprache der *Principia Mathematica* ist, ebenso wie diejenige von Peano, der sie entstammt, und im Gegensatz zu derjenigen von Frege, nicht in einem festen System organisiert, das eine mathematische Beschreibung der Formeln enthält. Sie entspringt vielmehr aus dem, was wir in 13.2.1. eine Systematik der mathematischen Bezeichnungen genannt haben.[3])

Abgesehen von der Klassifizierung nach der Ordnung könnte jeder von einer Individuenvariablen verschiedenen Variablen allein durch die Folge der Typen ihrer Argumente ein bestimmter Typus zugeordnet werden; eben dies geschieht in der sogenannten „einfachen“ Version der Typentheorie, die in einem Vortrag *The foundations of mathematics* [245] von F. P. Ramsey (1903—1930) im Jahre 1925 vorgeschlagen wurde.

Die zusätzliche Klassifizierung nach der „Ordnung“ hat der Theorie der *Principia Mathematica* den Namen „verzweigte Typentheorie“ verschafft. Diese Verzweigung war die Ursache von Besonderheiten und Schwierigkeiten der Theorie (zu deren Überwindung Ramsey ebenfalls eine Abhilfe vorschlug); als nämlich Russell versuchte, die von Frege vorgeschlagene Behandlung der Arithmetik wieder erstehen zu lassen [256], bemerkte er, daß sich die verschiedenen benötigten Begriffe

---

[1]) Ein Beispiel: Wir betrachten die durch den Ausdruck $\exists x r(x, y_1, \ldots, y_k)$ dargestellte Aussagenfunktion, wobei die $y_1, y_2, \ldots, y_k$ paarweise verschiedene Variablen der Typen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ und der „Ordnungen“ $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$ seien und x eine von $y_1, \ldots, y_k$ verschiedene Individuenvariable ist. Der betrachtete Ausdruck hat die Ordnung $\varrho = 1 + \mathrm{Max}\,\{\varrho_1, \ldots, \varrho_k\}$ und den Typus $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k; \varrho)$. Dieser Ausdruck ist nicht primitiv, im Gegensatz evtl. zum Ausdruck $r(x, y_1, y_2, \ldots, y_k)$, der den Typus $(0, \tau_1, \ldots, \tau_k; \varrho)$ hat, was zugleich auch der Typus von r sein muß.

[2]) Allgemein ist das Argument einer Aussagenfunktion in einer Variablen von einem Typus und einer Ordnung, die von denen der Funktion verschieden sind; denn man *setzt* einen Typus τ *nicht* der Folge (τ) *gleich*, deren einziges Glied er ist. Dadurch schließt man die Möglichkeit, daß ein Prädikat r auf sich selbst zutrifft, von vornherein aus den Ausdrucksmitteln der Sprache aus, d. h., man nimmt an, daß kein Ausdruck der Gestalt $r(r)$ (oder $r \in r$) eine sinnvolle Formel der Sprache ist.

[3]) Dort benutzte Bezeichnungsweisen wie $\pi(\hat{x})$ für $x \mapsto \pi(x)$ und $\hat{\pi}(x)$ für $\pi \mapsto \pi(x)$ sowie $\hat{\pi}(\hat{x})$ für $(\pi, x) \mapsto \pi(x)$ hätten lange vor denen, durch welche wir sie hier erklärt haben, und an Stelle dieser heute üblichen Bezeichnungen dieselben begrifflichen und *pädagogischen* Dienste leisten können.

auf verschiedene Ordnungen verteilen und die Beweisführungen dadurch blockiert werden; aus diesem Grunde schlug er *Reduzibilitätsaxiome* vor, die — grob gesagt — folgendes zum Inhalt haben: Zu jeder Aussagenfunktion, die einen Ausdruck einer bestimmten Ordnung besitzt, existiert ein anderer Ausdruck, der von denselben Argumenten abhängt, aber eine passend erniedrigte Ordnung hat. Doch erscheinen der nicht spezifische Charakter dieser Axiome, also ihre Zugehörigkeit zur Logik allein, nicht evident. Dies ist aber offenbar für die These wesentlich, nach welcher die ganze Mathematik sich auf nicht für eine gegebene Disziplin spezifische Begriffe der Logik reduzieren lasse.

Daneben ergab sich noch eine andere Schwierigkeit: Man mußte auch ein *Unendlichkeitsaxiom* hinzunehmen, nach welchem es unendlich viele individuelle Gegenstände gibt (wenn nicht, so muß man unendlich viele Typen betrachten, um zur Gesamtheit der natürlichen Zahlen zu gelangen), sowie eine Form des *Auswahlaxioms* (vgl. 13.4.2.), und bei beiden sind die Meinungen, was ihren ausschließlich nichtspezifischen Charakter betrifft, gleichermaßen geteilt.[1])

Wenn das Werk auch zur Überwindung dieser und anderer Schwierigkeiten zu gewissen Verrenkungen gegenüber dem ursprünglichen Programm gezwungen war, so bleibt doch festzuhalten, daß es dieses Programm erfüllte, da es alle Zweige der Mathematik einer einheitlichen „mengentheoretischen" Behandlung zugänglich machte. Es ist zudem das erste systematische Werk über mathematische Logik, ein Standardwerk, dessen Studium jeder Arbeit auf diesem Gebiet vorangehen sollte. Bis zum Erscheinen von *A survey of symbolic logic* (1918) von C. I. Lewis [168], einem Werk im Umfange eines Lehrbuches, sollte es sogar das einzige bleiben; denn die *Vorlesungen über die Algebra der Logik* [259] von Schröder (die bis zu jener Zeit ihren bedeutenden Einfluß behielten) betreffen nur ein beschränktes und spezielles Gebiet, haben nicht denselben systematischen Charakter und lassen die gegenseitigen Beziehungen der Logik mit anderen Zweigen der Mathematik nicht sichtbar werden.

Während der ganzen Periode zwischen dem Erscheinen des ersten Bandes der *Grundgesetze der Arithmetik* [83] von Frege und dem der *Principia Mathematica* und später auch in Diskussionen mit den Verfechtern des Logizismus vertrat Poincaré einen Standpunkt, der ein Gegenstück zu den logizistischen Thesen ist. Schon 1894 unterstrich er in der *Revue de Métaphysique et de Morale* ([243], Bd. 2)[2]), daß das Prinzip der „Beweisführung durch vollständige Induktion" nicht auf die

---

[1]) So schrieb Hilbert in seiner in [121] nachgedruckten Arbeit *Die Grundlagen der Mathematik* aus dem Jahre 1928: „Die Grundlagentheorie von Russell und Whitehead ist eine allgemeine, großzügig angelegte Untersuchung. Indes beruht die Begründung der Mathematik darin einerseits auf dem Unendlichkeitsaxiom und dann auf dem sogenannten Reduzierbarkeitsaxiom, und diese Axiome sind beide echte . . . Annahmen, deren Allgemeingültigkeit sogar zweifelhaft bleibt . . ." — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

[2]) *Sur la nature du raisonnement mathématique,* S. 371—384. Nach gewissen Änderungen abgedruckt in *La Science et l'Hypothèse* [233]. (Deutsch: *Über die Natur der mathematischen Schlußweisen,* abgedruckt in [233][1], S. 1—14. — *Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

Logik zurückführbar sei und daß diese (für die Arithmetik) spezifische[1]) Regel a priori durch eine unmittelbare elementare Intuition (Anschauung) von der natürlichen Zahl vermittelt werde: „Man könne sich daher der Schlußfolgerung nicht entziehen, daß das Gesetz des rekurrierenden Verfahrens nicht auf das Prinzip des Widerspruchs zurückführbar sei. . . . Dieses Gesetz . . . gibt den eigentlichen Typus des synthetischen Urteils a priori. Und wie die Schlußfolgerung, die sich aus einer ihrer Anwendungen ergibt, die Schlußfolgerungen unendlich vieler Syllogismen, welche ‚wie Kaskaden' aufeinander folgen, zusammenfaßt, setzt jeder Versuch, sie zu begründen, sie voraus: das Induktionsprinzip ist das einzige Werkzeug, welches uns gestattet, von Endlichen zum Unendlichen fortzuschreiten" ([233][1], S. 12).

In seinem bereits genannten Vortrag auf dem 2. Internationalen Mathematikerkongreß (Paris 1900) erinnerte Poincaré an die Notwendigkeit des Rückgriffs auf die Intuition, wobei er durchaus der Logik ihren Platz zuerkennt: „Die Intuition kann uns weder die Strenge noch die Gewißheit geben. . . . Wir wissen, daß es stetige Funktionen gibt, die keine Ableitung besitzen. Es gibt nichts, das die Anschauung mehr schockiert als diese Aussage, die uns von der Logik aufgezwungen wird. . . . Indem sie streng wird, nimmt die mathematische Wissenschaft einen künstlichen . . . Charakter an; sie vergißt ihre historischen Ursprünge; man sieht, wie die Probleme gelöst werden können, man sieht aber nicht mehr, wie und warum sie sich stellen . . . Die reine Analysis . . . eröffnet uns tausend verschiedene Wege, auf denen wir uns mit aller Zuversicht engagieren können . . . Wer sagt uns, welchen wir wählen müssen? Es fehlt uns eine Fähigkeit, die uns das Ziel von weitem . . . erkennen läßt: die Intuition. . . . Logik und Intuition haben beide eine wichtige Rolle zu spielen. Beide sind unentbehrlich. Die Logik, die allein uns Gewißheit geben kann, ist das Werkzeug des Beweises, die Intuition ist das Werkzeug der Erfindung."[2]) An anderer Stelle kann er daher, ohne sich zu widersprechen, zum einen schreiben, daß „das mathematische Denken nur streng wird, wenn die reine Form von jedem Stoff gereinigt worden ist" ([248], Bd. 5), zum anderen, daß „man das mathematische Denken ganz gewiß verstümmelt, wenn man es auf eine reine Form reduziert" ([248], Bd. 13).

Nach den Kongressen von 1904 (dem der Mathematiker und dem der Philosophie, auf dem Itelson, Lalande und Couturat für die im Sinne Peanos und Russells als formalisiertes hypothetisch-deduktives System verstandene Logik die heute etwas außer Gebrauch gekommene Bezeichnung „Logistik" vorschlugen) nahm die Diskussion zwischen Poincaré und Russell (dessen Auffassungen in Frankreich von Couturat vertreten wurden) einen lebhafteren Ton an,[3]) hörte aber nach Poincarés

[1]) Poincaré, der einen aus der Terminologie Kants hergeleiteten Ausdruck benutzte, sagte „synthetisch".

[2]) *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques*, Kongreßbericht, S. 115–130. Überarbeiteter Abdruck in *La Valeur de la Science* [234].

[3]) Bei Poincaré heißt es: „die *wahre* Mathematik, die bei der man nicht im aktual Unendlichen versinkt, wird sich gemäß ihren eigenen Prinzipien weiter entwickeln können . . ." ([248], Bd. 13), bei Russell: „. . . es geht nur um den Leibnizianismus; die echte Mathematik, d. h. die Algebra, die Geometrie und die Mechanik können sich gemäß ihrer eigenen Prinzipien weiter entwickeln" (ebenda), usw.

Tod auf, um dann, in der Zeit zwischen den beiden Weltkriegen, zwischen Intuitionisten und Formalisten sehr viel heftiger wieder aufzuleben (vgl. 13.4.4.). Couturat und Russell räumten gegenüber Poincaré ein, es sei nicht das Ziel der Logistik, „die ‚Intuition' auszuschließen, sondern ihren Gebrauch zu kontrollieren und zu systematisieren und die Irrtümer zu vermeiden, zu denen ihr nicht kontrollierter Gebrauch führe ..." ([248], Bd. 14). Die hartnäckigste Kritik Poincarés bezog sich darauf, daß bei der Konstituierung des Formalismus (Anzahl der Argumente einer Funktion; [248], Bd. 13) und bei der Definition der Ordnungen ([248], Bd. 17) auf den Zahlbegriff zurückgegriffen würde, und das bei einer Theorie, die gerade dazu bestimmt sei, zur Definition der Zahl zu führen.

Verschiedene Arbeiten, die nach der Publikation der *Principia Mathematica* erschienen und das Ziel hatten, das Russellsche System zu verbessern, ermöglichten es 1931 Gödel [94] und Tarski [285], eine stark vereinfachte Version der Typentheorie zu geben, in der nur Individuenvariablen und Variablen für Eigenschaften, d. h. einstellige Relationsvariablen aller endlichen Typen existieren (so daß die Typen dann mit den Ordnungen übereinstimmen), die trotzdem aber nicht weniger ausdrucksfähig ist als die ursprüngliche Version der Typentheorie. Diesem Zweck diente die *Darstellung* eines Paares von Gegenständen gleicher Ordnung als Klasse von Klassen. Man kann dann eine Relation als eine Eigenschaft der Folge ihrer Argumente ansehen.[1]) Die erste Definition dieser Art stammte von N. Wiener (1894—1964) aus dem Jahre 1914 [305]: $(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}$;[2]) das Verfahren, einen Gegenstand x durch die Klasse $\{x\}$ darzustellen, wenn man aufschreiben will, daß x eine Eigenschaft besitzt, die zunächst nur auf Gegenstände einer Ordnung zutrifft, welche höher als die von x ist, geht schon auf die *Principia* zurück; und der gemeinsame Gebrauch von beidem ermöglichte auch die Behandlung von Argumenten, die nicht notwendig vom selben Typus sind. Kurz danach [108] gab F. Hausdorff (1868—1942) eine zweite Definition: $(x, y) = \{\{x, 1\}, \{y, 2\}\}$. Die heute gebräuchliche Definition $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ geht auf Kuratowski ([154], 1921) zurück.

Übrigens hatte, wie wir bereits gesagt haben, schon 1925 Ramsey [245] bewiesen, daß man mit der einfachen Typentheorie auskommen kann. In Weiterentwicklung eines Gedankens von Peano [215], der 1906 geschrieben hatte, das Richardsche Beispiel gehöre nicht der Mathematik, sondern der Linguistik an, teilte Ramsey die Paradoxien in zwei Gruppen: in die Gruppe derjenigen (die später „logische Antinomien" genannt wurden), die nur dem System immanente Begriffe betreffen (wie die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Menge bei den Paradoxien von Russell und von Burali-Forti), und die Gruppe derjenigen (die später „semantische Antinomien"

---

[1]) Liegen z. B. drei Argumente x, y, z vor, so sieht man die Relation als eine Eigenschaft von $((x, y), z)$ an; analog verfährt man, wenn es mehr Argumente sind.

[2]) Hier sind $\{x\}$ und $\emptyset$ vom Typus der Klassen von Gegenständen des Typus von x, und $\{\{x\}, \emptyset\}$ und $\{\{y\}\}$ sind vom Typus der Klassen von Klassen solcher Gegenstände. In der Typentheorie kann man nur Klassen aus Gegenständen von gleichem Typus bilden, daher die Zahl der Klammerpaare. N. Wiener hat daran erinnert, daß die Idee, die zweistelligen Relationen als Eigenschaften von Paaren zu behandeln, bereits auf Peirce und Schröder zurückgeht (vgl. 13.2.1.).

genannt wurden), die außerdem (wie die Richardsche Antinomie und die Antinomie des Lügners) von Begriffen im Bereich der Ausdrucksmittel Gebrauch machen, welche sich auf die verwendete Sprache oder auf die Symbolik (wie z. B. die Definierbarkeit) beziehen. Die Einschränkung der Werte, welche eine Variable annehmen kann, auf einen Typus verbot auf Grund der Art, in der die Hierarchie der Typen konzipiert ist, jene Überlegungen, welche zu den logischen Antinomien führten. Die Schichtung in Ordnungen war demgegenüber konzipiert worden, um die semantischen Antinomien zu verhindern — und sie verhinderte sie tatsächlich; Ramsey jedoch erklärte diese Widersprüche dadurch, daß sie die (implizite) Annahme widerlegen, eine Formel könne ein Gegenstand vom Typus eines Arguments einer Aussagenfunktion sein, welche diese Formel repräsentiert. Allgemeiner weist jede dieser Antinomien auf Grenzen hin, die nicht überschritten werden dürfen, ohne daß man auf Widersprüche stößt, auf Grenzen des Bereichs, innerhalb dessen ein formales System etwas über seine eigenen Ausdrücke aussagen kann; so bewies Tarski ([288], S. 273; [288][1], S. 350) im Jahre 1935, daß ein formales System keine Definition des Begriffs der Erfüllbarkeit seiner eigenen Formeln durch eine seiner Sprache angepaßte Struktur enthalten darf (selbst wenn man auf Parameter zurückgreift, die von dieser Struktur angeboten werden).

Ein „Kalkül zweiter Stufe" scheint zum erstenmal in dem Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* von Hilbert und Ackermann ([128], 1928) erwähnt zu sein, wobei auf die *Principia Mathematica* Bezug genommen wird: Die Verteilung der Typen auf Stufen, im heute geläufigen Sinne, geht auf Carnap ([42], 1929) zurück. Gemäß dieser Terminologie liegt eine *Sprache erster Stufe* vor, wenn es nur einen Bereich von Objekten gibt, den der individuellen Objekte; eine *Sprache zweiter Stufe* enthält außerdem als zweiten Bereich den der Relationen zwischen diesen Objekten, usw. für die höheren Stufen. Eine Sprache erster Stufe umfaßt mithin Individuenvariablen, die quantifiziert werden können, und Variablen, die dazu bestimmt sind, Relationen zwischen Individuen zu bezeichnen, die nicht quantifizierbar sind; letztere werden quantifizierbar durch Übergang zur zweiten Stufe, wobei zugleich Variablen eingeführt werden, die dazu bestimmt sind, Relationen zwischen Objekten erster Stufe zu bezeichnen, die aber nicht quantifizierbar sind, usw. für die folgenden Stufen.[1])

---

[1]) Abgesehen von der Tatsache, daß man im allgemeinen nur die Stufen bis zur zweiten erwähnt, wird das Verständnis dieser Hierarchie heute dadurch verschleiert, daß die Mengenlehre die Elementbeziehung $\in$ als eine Relation erster Stufe behandelt; neben den individuellen Objekten gibt es also Extensionen von Begriffen, die wieder als individuelle Objekte angesehen werden, nämlich die Extensionen der mengenbildenden Eigenschaften ([29], Buch I, Kapitel II, § 1) für die Zugehörigkeit zu einer Menge.

Werden beliebige Extensionen von Eigenschaften erster Stufe betrachtet, so werden sie *Klassen* genannt (vgl. 13.4.2.). In dem von Bernays im Jahre 1936 erarbeiteten Axiomensystem [9] wird die aus den Elementen einer Menge bestehenden Klasse (Extension der Eigenschaft, zu dieser Menge zu gehören) von der Menge selbst unterschieden, und von dieser Menge wird gesagt, sie *repräsentiere* diese Klasse; die Identifizierung einer Menge mit der Klasse, welche sie repräsentiert, wurde erst später vollzogen. (Fortsetzung S. 826)

Verschiedene Varianten der Idee einer Hierarchie von Objekten haben zu anderen, den *Principia* weniger verwandten Systemen geführt, so zur Theorie der „semantischen Kategorien" ([165], 1927) von S. Leśniewski (1886—1939), zu den Systemen von L. Chwistek (1884—1945), in denen Typen und Mathematik nacheinander durch „konstruktive" Verfahren hervorgebracht werden [51], und den Axiomensystemen der Mengenlehre von Quine ([243], 1937, und [244], 1940).[1])

13.4.2. Die Mengenlehre

Wir haben in 6.7. gesehen, wie die Mengenlehre aus den Arbeiten Cantors über die Darstellung von Funktionen einer reellen Variablen als Summen trigonometrischer Reihen und den Untersuchungen Dedekinds über die Definition der Zahl hervorgegangen ist.

Am letzten Märztag 1882 vollendete Cantor die Abhandlung [35], in der er sagte: „Die Mannigfaltigkeitslehre ... umspannt ... die Gebiete der Arithmetik, der Funktionenlehre und der Geometrie, sie faßt sie auf Grund des Mächtigkeitsbegriffs zu einer höheren Einheit zusammen. *Unstetiges* und *Stetiges* findet sich solcherweise von denselben Gesichtspunkten aus betrachtet und mit gemeinschaftlichen Maßen gemessen" ([41], S. 152).

Die abstrakte Theorie nahm etwa im Oktober des gleichen Jahres Gestalt an, als Cantor sich anschickte, die transfiniten Ordnungszahlen als eigenständige Wesen einzuführen und sie nicht mehr als bloßes Hilfsmittel zur Bezeichnung des Ergebnisses einer (evtl. transfiniten) Wiederholung von Operationen zu benutzen. Er nahm dazu zur Folge der natürlichen Zahlen eine Ordnungszahl ω hinzu, der eine andere, $\omega + 1$, folgt, usw. ..., und dasselbe geschieht ebenso jedesmal, wenn man eine vorher erhaltene Folge aufeinander folgender Zahlen ohne größtes Element gebildet hatte; die so eingeführten neuen Zahlen sind die *transfiniten Ordnungszahlen* [37]. Außerhalb des Endlichen teilt sich der Begriff der Zahl in den

---

Die zweite Stufe tritt in der Mengenlehre erst mit der Betrachtung von Relationen erster Stufe auf (seien sie mengenbildend oder nicht) oder mit der Betrachtung von Eigenschaften der Klassen, welche derartige Extensionen sind. Die Situation wird noch dadurch weiter kompliziert, daß gewisse dieser Eigenschaften ihrerseits geeignet sind, bezüglich der Zugehörigkeit zu einer Menge mengenbildend zu sein, so daß ihre Extensionen (die genau genommen Klassen von Klassen sind) ebenfalls durch eine Menge repräsentiert werden können. Die dritte Stufe würde mit Klassen von Klassen von Klassen ins Spiel kommen, die aber oft durch Klassen oder sogar durch Mengen repräsentiert werden können.

Dem „circulus-vitiosus-Prinzip" wird bei einem solchen Aufbau dadurch Genüge geleistet, daß eine nicht repräsentierbare Klasse nicht zu einer Menge gehören darf und durch ähnliche Verbote auf jeder Stufe der Hierarchie. Was das eventuelle Wiederauftauchen von Schwierigkeiten *bei den repräsentierten Klassen* betrifft, so ist das Axiomensystem der Mengenlehre genau mit dem Ziel erdacht worden, sie mit Hilfe der Anwendung eines geeigneten anderen Prinzips zu vermeiden (vgl. 13.4.2.).

[1]) Für weitere Einzelheiten kann beispielsweise auf die Seiten 154 bis 209 des 1973 erschienenen Werkes [78] von A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel und A. Levy verwiesen werden, das für Leser, an die sich das vorliegende Buch wendet, verständlich ist.

(schon 1877 von Cantor [34] eingeführten) Begriff der „von der Ordnung unabhängigen Mächtigkeit" und den der an eine Wohlordnung gebundenen Ordnungszahl ([G—H], S. 54), ein Begriff, den Cantor dort ebenfalls einführte. „Und steige ich wieder herab vom Unendlichen zum Endlichen", sagte er, „so sehe ich ebenso klar und schön, wie die beiden Begriffe wieder ‚Eins' werden und *zusammenfließen* zum Begriffe der endlichen ganzen Zahl" ([41], S. 181).

Von diesem Augenblick an verfügte Cantor über die Arithmetik der Ordnungszahlen, und er wußte, daß in ihr weder Kommutativität noch Distributivität gelten. Die Ordnungstypen als Isomorphieklassen[1]) der totalen Ordnungen wurden von ihm 1884 eingeführt, und die Ordnungs- oder Ordinalzahlen wurden dann als Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen charakterisiert ([38]; [41], S. 379).

Neben seinen systematischen Abhandlungen zur transfiniten Arithmetik [40] veröffentlichte Cantor in den ersten Jahren des letzten Jahrzehnts des neunzehnten Jahrhunderts zwei Ideen, die in den Händen der Logiker und Mathematiker des zwanzigsten Jahrhunderts ein außergewöhnliches Schicksal haben sollten.

Das *Diagonalverfahren* erschien in einer Arbeit [39], deren Ziel es ist, die Verschiedenheit der Mächtigkeit einer Menge und der des Systems ihrer Teilmengen zu beweisen. Es sei (f_r) eine Familie von Funktionen mit gleichem Wertebereich, die auf einer Menge M definiert und durch die Elemente dieser Menge indiziert sind (Teilmengen seien durch ihre charakteristischen Funktionen — Indikatorfunktionen — dargestellt [G—H], S. 107). Wir stellen uns eine Tabelle vor, deren Spalten den Argumenten s der Funktionen f_r und deren Zeilen den Indizes r entsprechen und in der im Schnittpunkt der Spalte s mit der Zeile r der Funktionswert $f_r(s)$ notiert ist. Als *Diagonalfunktion* wird die durch $r \mapsto f_r(r)$ definierte Funktion auf M verstanden. Wenn nun der Wertebereich mindestens zwei Werte umfaßt, ist es immer möglich, eine Funktion g anzugeben, die nicht zur betrachteten Familie gehört, indem man $g(r) \neq f_r(r)$ für jedes r wählt. In der Zeit nach Cantor war die erste Variation zu diesem Thema diejenige, die Richard für seine Antinomie[2]) benutzt hatte (vgl. 13.4.1.); man kann daran auch gewisse Überlegungen zur Antinomie des Lügners und zur Antinomie Russells knüpfen. Schon im Jahre 1874 hatte Cantor (vgl. 6.8.) in analoger, aber weniger klarer Weise (ausgehend von einer angenommenen Abzählung aller reellen Zahlen) eine Intervallschachtelung konstruiert, deren Grenzpunkt in der betrachteten Abzählung nicht vorkommen kann. Ungefähr gleichzeitig hatte P. du Bois-Reymond folgendes bemerkt: Hat eine Folge (f_n) monoton wachsender Funktionen einer reellen Variablen die Eigenschaft, daß die Ordnungen des Unendlichwerdens dieser Funktionen im Unendlichen eine echt monoton wachsende Folge[3]) bilden, so hat jede die Diagonalfunktion interpolierende Funktion[4]) eine höhere Ordnung als alle Glieder dieser Folge [66].

---

[1]) Ein Isomorphismus ist eine wachsende bijektive Abbildung.

[2]) Richard bemerkte selbst, daß die Analogie trügerisch ist. Aber man kann den Überlegungen eine Form geben, welche sowohl denen von Richard als auch denen des Diagonalverfahrens gerecht werden.

[3]) Für zwei monoton wachsende Funktionen f und g ist die Ordnung von g echt größer als die Ordnung von f, wenn $g(x)/f(x)$ für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ strebt.

[4]) Ist beispielsweise $f_n(x) = x^n$ und $g(x) = x^x$, so interpoliert g die Folge der $f_n(n) = n^n$.

Mit der Methode des „Vor- und Zurück" bewies Cantor, daß zwei dichte abzählbare totale Ordnungen ohne erstes und letztes Element den gleichen Ordnungstypus besitzen. Es seien dazu (a_n) und (b_n) die als Folgen geschriebene erste bzw. zweite Menge. Wir ordnen diese Folgen zu neuen Folgen (a'_p) und (b'_p) um. Dabei beginnen wir mit $a'_0 = a_0$ und setzen auch $b'_0 = b_0$. Alsdann setzen wir $b'_1 = b_1$ und nehmen als a'_1 das erste a_k, welches zu a'_0 in derselben Relation steht wie b'_1 zu b'_0; ist beispielsweise $b'_0 < b'_1$, so richten wir es so ein, daß auch $a'_0 < a'_1$ ist; ein solches a_k muß existieren, und die Folgen (a'_0, a'_1) und (b'_0, b'_1) sind isomorph. Dann nehmen wir als a'_2 das erste a_k, das noch nicht in der Folge (a'_0, a'_1) vorkommt, und als b'_2 das erste b_k, welches zu b'_0 und b'_1 in denselben Relationen wie a'_2 zu a'_0 und a'_1 steht; ist beispielsweise $a'_0 < a'_2 < a'_1$, so richten wir es so ein, daß $b'_0 < b'_2 < b'_1$ ist; ein solches b_k muß existieren, da die Ordnungen dicht sind, und die Folgen (a'_0, a'_1, a'_2) und (b'_0, b'_1, b'_2) sind isomorph. Wir setzen dies fort, indem wir als a'_{2n} das erste a_k nehmen, das nicht in der Folge $(a'_0, a'_1, \dots, a'_{2n-1})$ vorkommt, und als b'_{2n} das erste b_k derart, daß die Folgen $(a'_0, a'_1, \dots, a'_{2n})$ und $(b'_0, \dots, b'_{2n})$ isomorph sind; analog nehmen wir als b'_{2n+1} das erste b_k, das nicht in der Folge $(b'_0, \dots, b'_{2n})$ vorkommt, und als a'_{2n+1} das erste a_k derart, daß die Folgen $(a'_0, \dots, a'_{2n+1})$ und $(b'_0, \dots, b'_{2n+1})$ isomorph sind. Das Verfahren führt zu dem gesuchten Isomorphismus $a'_n \mapsto b'_n$. Der moderne Gebrauch dieser Methode benutzt ein Analogon der Dichte, das man Saturiertheit nennt, und dann übertragen sich die Überlegungen auf alle betrachteten primitiven Relationen (oben handelt es sich nur um die Ordnung).

In Cantors *Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* [40], deren erster 1895 erschien, fand Hilbert das Paradies, das Cantor geschaffen hatte und aus dem uns niemand vertreiben sollte,[1]) die transfinite Arithmetik: die Arithmetik der Kardinalzahlen, deren Untersuchung auf den Eigenschaften der Summen, Produkte und Potenzen von Mengen beruht (A^B ist die Menge aller Abbildungen von B in A), und die Arithmetik der Ordinalzahlen ([G—H], S. 101), die sich auf die Theorie der wohlgeordneten Mengen stützt; dabei heißt bei Cantor eine total geordnete Menge E wohlgeordnet, wenn jede Teilmenge, die eine allen ihren Elementen gemeinsame Majorante besitzt, eine kleinste solche Majorante hat; diese Definition ist der heutigen äquivalent, die verlangt, daß in jeder nichtleeren Teilmenge ein erstes Element existiert ([G—H], S. 54). Zwei disjunkte wohlgeordnete Mengen werden addiert, indem man sie unmittelbar „hintereinandersetzt", d. h., man bildet eine neue Ordnung, in der alle Elemente der zweiten Menge allen Elementen der ersten Menge folgen, wobei die innere Ordnung für jede einzelne Menge erhalten bleibt. Um eine wohlgeordnete Menge E mit einer Ordinalzahl α zu multiplizieren, setzt man für jede Ordinalzahl $\beta < \alpha$ eine Kopie der Menge E hinter die andere (formal betrachtet man die „lexikographische" Ordnung der Menge aller Paare (β, x) aus einer Ordinalzahl $\beta < \alpha$ und einem $x \in E$; man setzt $(\beta, x) < (\beta', x')$ genau dann, wenn $\beta < \beta'$ oder wenn $\beta = \beta'$ und $x < x'$ ist). Beim Potenzieren griff Cantor auf die transfinite Induktion zurück, die er sowohl zum Definieren als

---

[1]) Vgl. [126], S. 170; leicht geänderter Text in [121], S. 274.

auch zum Beweisen benutzte.[1]) Er führte die sogenannten „ε-Zahlen" ein, für welche $\omega^\varepsilon = \varepsilon$ ist, und zeigte, daß solche Zahlen existieren; die erste, ε_0, ist der Limes oder die obere Grenze der Folge $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$

Um zeigen zu können, daß zwei Mengen, von denen jede einer Teilmenge der anderen gleichmächtig ist, auch untereinander gleichmächtig sind, mußte Cantor noch die Annahme machen, daß diese beiden Mengen wohlgeordnet sind. Im darauf folgenden Jahr 1898 bewiesen Schröder und F. Bernstein diesen, heute oft nach ihnen benannten[2]) Satz, ohne auf diese Annahme zurückgreifen zu müssen.

Diesen Arbeiten schließt sich im zwanzigsten Jahrhundert eine Vielzahl von Beiträgen an, die in demselben „prä-axiomatischen" Geist geschrieben sind. Wir können hier nur diejenigen erwähnen, die für die uns hier interessierenden Gebiete von grundsätzlicher Bedeutung waren. Die transfinite Arithmetik wurde u. a. von Zermelo, Hessenberg, Hausdorff, Jacobsthal, J. König, Sierpiński und Tarski weiterentwickelt; im Jahre 1911 formulierte Mahlo [186] Grundsätze für die Bildung von transfiniten Zahlen, die sich als zu Mengenbildungsaxiomen äquivalent erwiesen haben, welche erst einige Jahrzehnte später betrachtet wurden.

Wir haben schon erwähnt, daß sich Cantor bereits 1895 darüber im klaren war, daß das „naive" Komprehensionsaxiom zu Paradoxien führt (vgl. 13.4.1.). Zwei Briefe, die er im Sommer 1899 an Dedekind richtete, zeigen, wie er sich mit der Axiomatik beschäftigt hat und damit seinen Nachfolgern den Weg ebnete: „So hat sich nun die Notwendigkeit herausgestellt, zweierlei Vielheiten (ich meine immer *bestimmte* Vielheiten) zu unterscheiden" ([41], S. 443).

„Eine Vielheit kann nämlich so beschaffen sein, daß die Annahme eines ‚Zusammenseins' *aller* ihrer Elemente auf einen Widerspruch führt, so daß es unmöglich ist, diese Vielheit als eine Einheit, als ‚ein fertiges Ding' aufzufassen. Solche Vielheiten nenne ich *absolut unendliche* oder *inkonsistente* Vielheiten ... Wenn hingegen die Gesamtheit der Elemente einer Vielheit ohne Widerspruch als ‚zusammenseiend' gedacht werden kann, so daß ihr ‚Zusammengefaßtwerden zu einem Ding' möglich ist, nenne ich sie eine *konsistente Vielheit* oder eine ‚Menge' ...[3])

---

[1]) Was Cantor wirklich *machte*, läuft in heutiger Terminologie auf folgendes hinaus: (a) Es wird eine Funktion f auf den Ordinalzahlen als definiert angesehen, wenn für jede Ordinalzahl α der Wert $f(\alpha)$ durch die Gesamtheit ihrer Werte $f(\beta)$ für die Ordinalzahlen $\beta < \alpha$ festgelegt ist, wobei es jeweils auch nur eine einzige solche Funktion gibt; (b) ist $\mathbf{p}$ eine Eigenschaft von Ordinalzahlen und folgt für jede Ordinalzahl α aus der Gültigkeit von $\mathbf{p}(\beta)$ für jede Ordinalzahl $\beta < \alpha$ die Gültigkeit von $\mathbf{p}(\alpha)$, so kann man behaupten, daß alle Ordinalzahlen diese Eigenschaft besitzen.

Benutzt man „Induktionsschritte" in der Art des „Übergangs von α zu $\alpha + 1$", so muß man noch eine zweite Art von „Induktionsschritten" hinzunehmen, um die „Limeszahlen" (d. h. obere Grenzen von Mengen von Ordinalzahlen ohne größtes Element) zu erreichen, gemäß Schemata der obigen Typen (a) und (b). So setzt man z. B. $\alpha^0 = 1$, $\alpha^{\beta+1} = \alpha(\alpha^\beta)$, und für eine Limeszahl λ setzt man $\alpha^\lambda = \lim_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma =_{\text{def}} \sup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma$.

[2]) Allerdings nicht von allen Autoren; andere nennen ihn den Satz von Cantor und Bernstein. In Dedekinds Nachlaß wurde ein Beweis aus dem Jahre 1887 gefunden.

[3]) [41], S. 443. Cantor hatte diese Auffassungen sicherlich auch bei anderen Gelegenheiten geäußert, da Hilbert sie schon am 12. Oktober 1899 erwähnte ([122]; [121], S. 245–246).

Zwei äquivalente (= gleichmächtige) Vielheiten sind entweder beide ‚Mengen' oder beide inkonsistent."

„Jede Teilvielheit einer Menge ist eine Menge."

„Jede Menge von Mengen ist, wenn man letztere in ihre Elemente auflöst, auch eine Menge" (28. Juli 1899). [Russell, der im Jahre 1905 über diese Idee nachdachte ([255], S. 43f.), nannte sie "theory of limitation of size", Theorie der Umfangsbegrenzung.]

„Die Tatsache der ‚Konsistenz' endlicher Vielheiten ist eine einfache unbeweisbare Wahrheit, es ist ‚Das *Axiom* der Arithmetik' (im alten Sinn des Wortes). Und ebenso ist die ‚Konsistenz' der Vielheiten, denen ich die Alefs als Kardinalzahlen zuspreche, das Axiom der erweiterten transfiniten Arithmetik" (geschrieben am 28. August 1899, [41], S. 447f.).

Das erste Axiomensystem, das speziell für die Mengenlehre aufgestellt wurde, stammt von E. Zermelo (1871–1956); es findet sich in seinen *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* I [312] von 1908. Die Darstellung in der Art Hilberts (wie in den *Grundlagen der Geometrie* [120]), in die er es kleidete, ist höchst bemerkenswert: „Die Mengenlehre hat zu tun mit einem ‚Bereich' $\mathfrak{B}$ von Objekten, die wir einfach als ‚Dinge' bezeichnen wollen, unter denen ‚die Mengen' einen Teil bilden ... Von einem Dinge a sagen wir, es ‚existiere', wenn es dem Bereiche $\mathfrak{B}$ angehört; ebenso sagen wir von einer Klasse $\mathfrak{K}$ von Dingen, ‚es gebe Dinge der Klasse $\mathfrak{K}$', wenn $\mathfrak{B}$ mindestens ein Individuum dieser Klasse enthält."

Die von Zermelo herauspräparierten Axiome sind: das *Extensionalitätsaxiom*[1]) (zwei Mengen, welche dieselben Elemente enthalten, sind identisch); das Axiom der Elementarmengen, das die Existenz der *leeren* Menge (bei Zermelo Nullmenge) und für alle Objekte a, b die der einelementigen Menge $\{a\}$ und des (*nicht geordneten*) Paares $\{a, b\}$ fordert; das Axiom der *Aussonderung*[2]) (ist die Klassenaussage $\mathfrak{E}(x)$ definit für alle Elemente einer Menge M, so besitzt M immer eine Untermenge $M_{\mathfrak{E}}$, welche alle diejenigen Elemente x von M, für welche $\mathfrak{P}(x)$ wahr ist, und nur solche als Element enthält);[3]) das Axiom der *Potenzmenge* (jeder Menge T entspricht eine zweite Menge $\mathfrak{U}T$ (die „Potenzmenge" von T), welche alle Untermengen von T und nur diese als Elemente enthält); das Axiom der *Vereinigung* (jeder Menge T entspricht eine Menge $\mathfrak{S}T$ (die Vereinigungsmenge von T), welche alle Elemente der Elemente von T und nur diese als Elemente enthält); das Axiom der *Auswahl* (ist T eine Menge, deren sämtliche Elemente von $\varnothing$ verschiedene Mengen und untereinander elementenfremd sind, so enthält ihre Vereinigung $\mathfrak{S}T$ mindestens eine Untermenge S_1, welche mit jedem Element von T ein und nur ein Element gemein hat); das Axiom des *Unendlichen* (der Bereich enthält mindestens eine Menge Z,

---

[1]) Zermelo nannte es *Axiom der Bestimmtheit* (einer Menge durch ihre Elemente).

[2]) Von einigen Autoren „Axiom der Auswahl" genannt (dieser Terminus ist unzweckmäßig, da er zu Verwechslungen mit den vom Auswahlaxiom geforderten Selektoren führen kann).

[3]) Lebesgue [104] schrieb 1905: „... wenn man mit Herrn Cantor zugibt, daß eine Menge M definieren heißt, eine Eigenschaft P zu nennen, welche gewissen Elementen einer vorher definierten Menge N zukommt und definitionsgemäß die Elemente von M charakterisiert."

welche die Nullmenge als Element enthält und so beschaffen ist, daß sie mit jedem ihrer Elemente a,... auch die entsprechende Menge $\{a\}$ als Element enthält).

Zermelo räumte ein, daß er die „Widerspruchslosigkeit" seiner Axiome (vgl. 13.1.6.) „noch nicht streng" habe „beweisen können", er stellte fest, daß die Menge Z_0, welche die Elemente $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$ usw. enthält, als „Zahlenreihe" bezeichnet werden könne, und wies darauf hin, wie er die Theorie der Cantorschen Kardinalzahlen herleiten kann. Hinsichtlich des Axiomensystems stellte er fest, daß „man die Prinzipien einmal eng genug einschränkt, um alle Widersprüche auszuschließen, gleichzeitig aber auch weit genug ausdehnt, um alles Wertvolle dieser Lehre beizubehalten". Mit der Wohlordnung hatte er sich schon in seiner früheren Arbeit *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann* ([310], 1904) beschäftigt, in welcher er das „Prinzip" einführte, „daß es auch für eine unendliche Gesamtheit von Mengen immer Zuordnungen gibt, bei denen jeder Menge eines ihrer Elemente entspricht, oder formal ausgedrückt, daß das Produkt einer unendlichen Gesamtheit von Mengen, deren jede mindestens ein Element enthält, selbst von Null verschieden ist". Die Bezeichnung „Auswahlaxiom" für dieses Prinzip stammt von Zermelo selbst (in seinem Axiomensystem von 1908), während Russell es „multiplikatives Axiom" nannte [254]. Dieser erste *Beweis* ist ein Auszug aus einem Brief an Hilbert.

Das erste „Hilbertsche Problem" aus dem Jahre 1900 bestand darin, Beweise für zwei Behauptungen Cantors zu finden, die dieser nicht erbringen konnte: Die erste Behauptung ist als *Kontinuumhypothese* bekannt. Für die Mathematiker der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts war das Kontinuum $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen die mathematische Darstellung einer physikalischen Größe, die ohne Unstetigkeit (Unterbrechung) den ganzen möglichen Raum zwischen zweien ihrer Werte einnimmt. Als Cantor im Jahre 1878 seine Abhandlung *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* [34] schrieb, hatte er behauptet, es gäbe nur zwei Klassen von unendlichen Punktmengen auf der Geraden, nämlich die Klasse derjenigen Mengen, deren Mächtigkeit gleich der Mächtigkeit von $\boldsymbol{N}$ ist (später bezeichnete er diese Mächtigkeit mit $\aleph_0$ [38]) und die Klasse derjenigen Mengen, deren Mächtigkeit gleich der Mächtigkeit von $\boldsymbol{R}$ ist (die mit der Mächtigkeit der Menge der unendlichen Dualbrüche übereinstimmt und mit $2^{\aleph_0}$ bezeichnet wird); den Beweis „durch ein Induktionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen ..." ([41], S. 132) konnte er jedoch nicht liefern. Die Suche nach diesem Beweis bildete den Kern der späteren Arbeiten Cantors (und die wiederholten Fehlschläge dabei waren eine Quelle seiner zeitweisen Depressionen, die er niemals völlig überwinden konnte).

Im Jahre 1883 hatte Cantor auch geschrieben, „daß es immer möglich ist jede *wohldefinierte*[1]) Menge in die Form einer *wohlgeordneten* Menge zu bringen, auf dieses ... durch seine Allgemeingültigkeit besonders merkwürdige Denkgesetz werde ich in einer späteren Abhandlung zurückkommen". Er tat es nicht, und es war Hilbert, der vorschlug, dies nachzuholen.

Zermelo dankte E. Schmidt (1876–1959) für den Vorschlag, zu diesem Beweis das Auswahlaxiom heranzuziehen, von dem anscheinend nur bei zwei früheren

---

[1]) Hervorhebungen von Cantor.

Gelegenheiten explizit die Rede war: bei Peano [211] im Jahre 1890, der es zum Nachweis der Existenz von Lösungen gewisser Systeme von Differentialgleichungen ausdrücklich ablehnte, und 1902 bei B. Levi (1875—1961), der es für notwendig hielt, um beweisen zu können, daß eine Summe von Null verschiedener Kardinalzahlen mindestens gleich der Kardinalzahl der Menge der Summanden ist ([166]). Allerdings wurde es während des neunzehnten Jahrhunderts mehrfach benutzt, ohne daß man sich dessen bewußt war. Nach A. Fraenkel und Mitarbeitern ([78], S. 57) bestätigte F. Bernstein, daß B. Levi im Jahre 1901 dieses Prinzip formulierte und es Cantor und ihm vorgeschlagen habe, als sie eine bijektive Abbildung zwischen $\boldsymbol{R}$ und der Menge der abzählbaren Ordinalzahlen konstruieren wollten (die die Mächtigkeit $\aleph_1$ repräsentiert, welche unmittelbar auf $\aleph_0$ folgt, so daß die Kontinuumhypothese auch in der Gestalt $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ geschrieben werden kann).[1])

Die Ideen Cantors verbreiteten sich schnell — schon 1874 benutzte Weierstraß in seinem Briefwechsel den Satz über die Abzählbarkeit der Menge der algebraischen Zahlen —, riefen aber bald auch die erklärte Gegnerschaft von Kronecker und ein gewisses Mißtrauen von Weierstraß hervor. Eine Gruppe junger französischer Mathematiker, die sich um Hermite scharte, hatte sie dagegen zustimmend aufgenommen; Cavaillès berichtete ([46], S. 180), daß Poincaré einen Teil der 1883 im Band II der *Acta Mathematica* erschienenen französischen Übersetzung angefertigt hat. Im Jahre 1884 wendete Poincaré sie bei der Untersuchung des Existenzbereichs automorpher Funktionen an ([232], vgl. 7.1.16.), und E. Borel (1871—1956) benutzte sie 1898 in seinen *Leçons sur la théorie des fonctions* [24], allerdings schon mit einigen Vorbehalten.

Das Auftauchen der Paradoxien (vgl. 13.4.1.) bewirkte bei Poincaré eine Änderung seiner Einstellung, die sich von 1905 an in seinen Arbeiten in der *Revue de Métaphysique et de Morale* in Angriffen gegen die Zulassung des aktual Unendlichen[2]) äußert, das er als Ursache imprädikativer Definitionen (vgl. 13.4.1.) ansah. Die Zermelosche Arbeit [310] übte auf seine französischen Kollegen eine ähnliche Wirkung aus und führte in den *Mathematische Annalen* und im *Bulletin de la Société Mathématique de France* von 1905 zu heftigen Reaktionen und Polemiken. Borel analysierte den Zermeloschen Beweis und bemerkte, daß in diesem eine nach dem (oben genannten) „Prinzip" als existent angesehene (auswählende) Zuordnung dazu benutzt wird, um in jeder nichtleeren Teilmenge einer wohlzuordnenden Menge ein bestimmtes Element „auszuzeichnen"; er unterstrich, daß Zermelo ebenso gut hätte vorschlagen können, für die Wohlordnung zunächst ein beliebiges erstes Element, dann unter den übrigbleibenden Elementen ein zweites Element und so weiter bis ins Unendliche *auszuwählen*. Borel lehnte sodann jede Überlegung ab, „bei der überabzählbar unendlich oft eine *willkürliche Auswahl* getroffen wird; solche Überlegungen haben nichts mehr mit Mathematik zu tun" ([25], S. 195), und bestritt, daß jenes Axiom gültig bleibt, wenn man es auf überabzählbare Mengenfamilien anwenden muß. J. Hadamard (1865—1963), R. Baire (1874 bis

---

[1]) Das zwanzigste Jahrhundert ist in besonderem Maße das Zeitalter der Seminare und der periodischen Arbeitsberatungen!

[2]) d. h. die Existenz auch von solchen Mengen als etwas fertig Vollendetes, bei denen die Anzahl der Elemente jede natürliche Zahl übertrifft.

1932), H. Lebesgue (1875—1941) stimmten darin überein, daß sie nicht einsehen, warum die von Borel hervorgehobenen Probleme nicht schon ebenso bei einer abzählbaren Familie vorhanden sind [104]. Nach Baire müßte sich alles auf das Endliche zurückführen lassen, und sogar dann, wenn eine Menge gegeben sei, sei es *falsch, auch alle Teilmengen dieser Menge als gegeben anzusehen.* Hadamard dagegen lehnte die Überlegungen Borels ab und beantwortete die Frage, ob man die Existenz eines mathematischen Objekts beweisen kann, ohne es zu bestimmen, mit ja. Für Lebesgue schließlich war das eine Sache der Konvention, jedoch könne man nur dann solide weiterbauen, *wenn man die Existenz eines Objekts dadurch beweise, daß man es bestimme,* und *bestimmen* hieß für ihn, eine *charakteristische Eigenschaft des Definierten* anzugeben („endlich viele Worte auszusprechen, die sich auf das Definierte beziehen und nur auf dieses", schrieb er an anderer Stelle [156]). Seine Position in dieser Diskussion wird oft als die eines „Nominalisten" bezeichnet (die Standpunkte von Chwistek und Leśniewski (vgl. 13.4.1.) sind ähnlich), die Auffassung Borels (die u. a. auch von N. Lusin geteilt wurde) nennt man „empiristisch", diejenige von Hadamard „idealistisch".[1] Auf Kritiken, die ein geringeres Echo fanden, darunter die von Peano, gehen wir hier nicht ein.

Zermelo konnte jedoch überzeugend nachweisen, daß das Auswahlaxiom auch außerhalb der transfiniten Arithmetik unentbehrlich ist, um — beispielsweise — zu zeigen, daß eine Menge, die keiner ihrer echten Teilmengen gleichmächtig ist, eine Ordnung ermöglicht, für welche jede nichtleere Teilmenge ein erstes und ein letztes Element besitzt, und er konnte auf die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ sowie die Hamelbasen (von $\boldsymbol{R}$ als Vektorraum über $\boldsymbol{Q}$ [106]) und viele andere Beispiele hinweisen; trotzdem wurde es üblich, so wenig wie möglich und so spät wie möglich auf dieses Axiom zurückzugreifen und seine Anwendungen und deren Konsequenzen explizit anzugeben. Das Auswahlaxiom ist nach dem Parallelenpostulat das meist diskutierte Axiom ([78], S. 56). Selbst E. Steinitz (1871—1928) schrieb im Jahre 1910 in seiner Arbeit [278], in der er die abstrakte Körperstruktur einführte (vgl. 3.5.) und die Gemüter dadurch erregte, daß er dort herausarbeitete, wie das Auswahlaxiom unbedingt benötigt wird, um die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung zu beweisen: „Dagegen erscheint es im Interesse der Reinheit der Methode zweckmäßig, das genannte Prinzip soweit zu vermeiden, als die Natur der Frage seine Anwendung nicht erfordert" ([278], S. 8). Das Problem des epistemologischen Status dieses Axioms wurde ständig gestellt und führte zu einer Folge von Arbeiten, die sich auch mit der Kontinuumhypothese befassen, auf die wir am Schluß dieses Kapitels eingehen werden (vgl. 13.4.7.).

Poincaré selbst sagte noch im Jahre 1906, man sei „vielfach geneigt, das Zermelosche Axiom anzuerkennen" ([235]), jedoch beschloß er die Kommentare, die er 1909 zu dem Zermeloschen Axiomensystem gab [237] und die jedenfalls deutlich machen, daß für ihren Autor der Mengenbegriff einen anschaulichen Inhalt hat, mit folgenden Empfehlungen ([236][1], S. 278):

---

[1]) Der Sinn, der diesen Termini in diesem Zusammenhang zukommt, entspricht nur sehr entfernt dem, den sie in der allgemeinen Philosophie haben.

„1. Nur solche Dinge zu betrachten, die sich durch eine endliche Anzahl von Worten definieren lassen.
2. Niemals unbeachtet zu lassen, daß jede Aussage über das Unendliche nichts anderes sein kann, als die abgekürzte Wiedergabe einer Reihe von Aussagen über das Endliche.
3. Stets die nicht-prädikativen ... Klassifikationen und Definitionen vermeiden."

Er kritisierte auch die Erklärung, die Zermelo für den Begriff der „definiten" Aussagenfunktion gab (nämlich: „Eine Frage oder Aussage $\mathfrak{E}$, über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt ‚definit'" [312]), als unpräzise und das Feld dem Nichtprädikativen überlassend.

Im Jahre 1922 verspürten auch A. Fraenkel (1891—1965) und Skolem das Bedürfnis nach einer genaueren Definition dieses Begriffs, und jeder von ihnen schlug eine solche vor ([76], [270]). Beide Definitionen lassen sich aufeinander zurückführen, aber man entschloß sich in der Folgezeit, die Skolemsche anzunehmen, nämlich die Theorie in einer formalen Sprache auszudrücken und „definit" als „durch eine Formel ausdrückbar" zu verstehen; H. Weyl [299] hatte diesen Gedanken schon 1910 vorweggenommen.

Fast in unmittelbarem Anschluß daran erkannten beide, unabhängig voneinander, und Lennes [164] die Notwendigkeit, das Schema der Aussonderung zu einem umfassenderen Schema, dem Schema der *Ersetzung* (oder der *Substitution*) zu erweitern, um z. B. auch die Menge $\{\boldsymbol{N}, \mathfrak{P}(\boldsymbol{N}), \mathfrak{P}\mathfrak{P}(\boldsymbol{N}), \ldots\}$ zu erhalten. (Mirimanoff [190] hatte in vager Form und aus anderen Gründen diese Erweiterung schon 1917 für wünschenswert gehalten.) Dieses Schema der Ersetzung besagt folgendes: Zu jeder in x funktionalen Formel $\varphi(x, y)$ (d. h. für welche $\forall y\, \exists x \varphi(x, y)$ und $\forall y\, \forall x\, \forall x' [\varphi(x, y) \wedge \varphi(x', y) \Rightarrow x = x']$ gilt) und jeder nicht in φ vorkommenden Variablen b fordert man als Axiom

$$\forall a\, \exists b\, \forall x (x \in b \Leftrightarrow \exists y [y \in a \wedge \varphi(x, y)]) .$$

Heutzutage versteht man unter „Zermelo-Fraenkelscher Mengenlehre" — abgekürzt (ZFC); daß dabei Skolem nicht genannt wird, ist nicht gerechtfertigt — diejenige Theorie, deren Axiome die oben genannten Axiome von Zermelo sind, abgesehen von dem Aussonderungsschema, das durch das Substitutionsschema ersetzt ist, aus dem sich jenes herleiten läßt, sowie einem abgewandelten Unendlichkeitsaxiom, das aus dem Zermeloschen dadurch entsteht, daß man die Bildung der „Einermengen" durch die Bildung $a \cup \{a\}$ ersetzt; zu diesen Axiomen kommt noch ein Fundierungsaxiom, von dem noch die Rede sein wird. Etwa die Hälfte der mengentheoretischen Arbeiten bis zu denen von P. Cohen (vgl. 13.4.7.) aus dem Jahre 1963 und die überwiegende Mehrzahl der Arbeiten seither bewegen sich im Rahmen dieser Theorie oder einer ihrer zahlreichen Varianten (zu denen wir auch diejenigen zählen, welche sich aus ihr durch Hinzufügen verschiedener Axiome ergeben) oder untersuchten Modelle dieser Theorie.

In den anderen Disziplinen der Mathematik akzeptieren die weitaus meisten Autoren mehr oder weniger implizit ZFC als „mengentheoretische" Grundlage der von ihnen untersuchten mathematischen Theorien.

Selbst wenn wir in derselben Weise verschiedene Varianten um eine Hauptform gruppieren würden, wäre es uns nicht möglich, eine erschöpfende Liste der Ideen anzugeben, auf welchen die anderen Typen von Axiomensystemen beruhen. In diesem Zusammenhang müßten beispielsweise von dem Augenblick an, da man übereinkam, $x \in \pi$ für $\pi(x)$ zu schreiben, alle Varianten der nach Gödel oder nach Tarski (vgl. 13.4.1.) vereinfachten Typentheorie aufgeführt werden — insbesondere auch die Systeme ML [244] und NF [243] von Quine. Wir begnügen uns hier mit einigen Bemerkungen über Systeme mit Klassen, von denen das erste von v. Neumann [196] stammt (1925), aus dem sich das von P. Bernays ([9], [10]) herleitete (dessen Publikation 1937 begann) und an das sich das System von Gödel anschloß, dem dieser 1940 seine axiomatische Form gab [99], unter der es seither als „v. Neumann-Bernays-Gödelsches System" bekannt ist.

Die Idee v. Neumanns bestand darin, in einer formalen Behandlung der Mengenlehre auch „inkonsistente Mannigfaltigkeiten" zuzulassen, wobei er ausschließlich auf diese die von Russell vorgeschlagene Art, mit ihnen umzugehen, anwendete, d. h. indem er jeden Ausdruck, in dem sie als Elemente von etwas vorkommen, als sinnlos ansah. Es würde zuviel Platz beanspruchen, würden wir seine Axiome hier aufschreiben; sein System weist folgende Besonderheiten auf:

— Wie bei Frege sind die Wahrheitswerte und der Funktionsbegriff Grundbegriffe, und die Elementbeziehung wird definiert (er schrieb $p(x) =$ Wahr statt $x \in p$).
— Es gibt Objekte, die Argumente sind, und Objekte, die Funktionen sind; die meisten haben beide Eigenschaften, manche aber auch nur eine von beiden: Beispielsweise sind die Wahrheitswerte keine Funktionen; die universelle Klasse (deren Wahrheitswert ständig das Wahre ist) ist kein Argument; eine Klasse ist eine Funktion, deren sämtliche Werte Wahrheitswerte sind; eine Menge ist eine Klasse, die als Argument auftreten kann (insbesondere eine Klasse, die Element sein kann).
— Der funktionale Charakter einer Klasse von Paaren läßt sich mit den zugelassenen Mitteln ausdrücken. Man kann also von (den Graphen von) eineindeutigen Abbildungen zwischen zwei Klassen sprechen; die als Mengen zugelassenen Klassen sind diejenigen, die „nicht zu umfangreich sind", d. h. für die es keine Bijektion auf die universelle Klasse gibt (zur universellen Klasse gehören alle Objekte, die Argumente sind). Daraus leitete er das Ersetzungsschema für Mengen und die Existenz einer Wohlordnung über der universellen Klasse her (denn die Burali-Fortische Antinomie, die man erhielte, wenn die Klasse On der Ordinalzahlen eine Menge wäre, hat zur Folge, daß On keine Menge ist, und eine eineindeutige Abbildung der Klasse On auf die universelle Klasse überträgt die natürliche Wohlordnung von On auf die universelle Klasse ...).

Der Rückgriff auf den Funktionsbegriff macht für diesen spezielle Axiome notwendig, von denen Schönfinkel [257] im Jahre 1920 gezeigt hatte, daß man mit ihrer Hilfe bis zur Behandlung des Prädikatenkalküls kommen kann, sofern

Axiome für gewisse passend gewählte Grundfunktionen darunter sind, von denen ausgehend sich die Grundbegriffe dieses Kalküls definieren lassen. Die Aussagenfunktion $\forall x[p(x) \mid q(x)]$ (wobei | der Sheffersche Strich ist; vgl. 13.5.1.) erscheint dabei z. B. als eine Funktion U der Aussagenfunktionen p und q und wird in der Gestalt $(U_p)_q$ geschrieben, so daß die Individuenvariable x verschwindet; durch Iteration von Reduktionen dieser Art führt man alle Formeln der Theorie der Funktionen (also der Mengenlehre) auf eine Kombination von Anwendungen relativ weniger Operatoren aufeinander zurück. Den nach 1930 aus der Weiterentwicklung dieser Art von Ideen entstandenen sehr technischen Zweig der Logik nennt man *kombinatorische Logik*; die interessierten Leser seien auf die Werke [59] und [60] von H. B. Curry verwiesen, der die wichtigsten Beiträge hierzu geliefert hat.

In seinen Abhandlungen [9] übertrug Bernays die wesentlichen Gedanken des v. Neumannschen Systems in eine vertrautere Sprache, indem er auf eine Axiomatik zurückging, die der des ZFC-Systems näher steht: So verzichtete er insbesondere auf den Funktionsbegriff als Grundbegriff, ebenso auf die Charakterisierung der Mengen unter den Klassen durch die Eigenschaft, daß sie der universellen Klasse nicht gleichmächtig sind; jedoch behielt er die Unterscheidung zwischen Mengen und Klassen bei: Wie wir schon in 13.4. angedeutet haben, führte er zwei Grundbegriffe des Elementseins ein, das Elementsein ε einer Menge in einer Menge und das Elementsein η einer Menge in einer Klasse, und er sagte von einer Klasse, sie *repräsentiere* eine Menge, wenn beide dieselben Elemente haben; er fügte einem Axiomensystem für Klassen (das im wesentlichen die Inklusion von Klassen in Klassen regelt) ein Axiomensystem hinzu, das die Repräsentierbarkeit von Klassen durch Mengen sichert und welches notwendig ist, damit sich die Mengen analog wie im ZFC-System verhalten.

Als im Jahre 1940 Gödel [99] seinen berühmten Satz über das Auswahlaxiom und die Kontinuumhypothese (vgl. 13.4.7.) veröffentlichte, brauchte er nur die Mengen mit den Klassen, welche sie repräsentieren, zu identifizieren, um zur Auffassung einer Menge als einer Klasse zu gelangen, welche als Element einer Klasse auftreten kann, und aus den daraus folgenden Vereinfachungen Nutzen zu ziehen. Gödel ordnete seine Axiome in fünf Gruppen an: C, D, E sind das Unendlichkeitsaxiom, das Auswahlaxiom („es gibt eine Klasse, welche in jeder nichtleeren Klasse eine Element auszeichnet") bzw. das Fundierungsaxiom; die Axiome der Gruppe B regeln die Existenz von Klassen und die Operationen mit ihnen, die Axiome der Gruppe A die Existenz der leeren Menge und die Übertragung des Mengencharakters auf Paare, Vereinigungen und Klassen von Teilmengen einer Menge. Dieses System war das zweite, auf dessen Varianten sich das Interesse der Forscher konzentrierte, wobei in diesem System benutzte Bezeichnungen allmählich auch in das ZFC-System übertragen wurden, dem es im wesentlichen äquivalent ist: Im Jahre 1951 hat I. Novak [203] bewiesen, daß in beiden Systemen dieselben Sätze beweisbar sind, welche ausschließlich Mengen betreffen.[1])

---

[1]) Man kann also im gewissen Sinne sagen, daß die v. Neumann-Bernays-Gödel-Mengenlehre aus der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre durch Hinzunahme von Klassen entsteht, die keine Mengen sind (sie werden manchmal „Unmengen" genannt), während

Frege wollte ausdrücklich die Zahlen als die Äquivalenzklassen modulo der Gleichmächtigkeit definieren [81]; leider führt die Auffassung dieser Äquivalenzklassen als Mengen, außer im trivalen Fall der leeren Menge, immer zu einem Widerspruch. Cantor erklärte die Mächtigkeit als den Allgemeinbegriff, der den Repräsentanten jener Äquivalenzklassen zukomme ([41], S. 387), und analog den Ordnungstypus (einer total geordneten Menge) als den Allgemeinbegriff, der den Repräsentanten der Äquivalenzklasse (dieser Menge) modulo der durch die monoton wachsenden eineindeutigen Abbildungen vermittelten Isomorphismen zukommt [38]; jedoch sind dies dort keine Nominaldefinitionen, welche diese Begriffe auf mathematische Begriffe unserer Zeit zurückführen. Zermelo [312] hatte sich damit begnügt, die Begriffe „M und N sind gleichmächtig" und „M ist von (echt) kleinerer Mächtigkeit als N" zu definieren. Im Jahre 1923 bot v. Neumann [195] eine neue Lösung an: Jede Klasse von Wohlordnungen modulo der Isomorphie besitzt einen eindeutig bestimmten transitiven (d. h. die Vereinigung ihrer Elemente enthaltenden) und durch die (auf ihre Elemente eingeschränkte) Inklusion wohlgeordneten Repräsentanten, und diese Repräsentanten können als die Ordinalzahlen angesehen werden (sie werden manchmal v. Neumannsche Ordinalzahlen genannt). Bernays [9] teilte mit, daß Zermelo dies schon 1915 wußte und damit im Besitz einer solchen Definition war. Im Rahmen der Axiomensysteme, welche Klassen enthalten, bilden die Ordinalzahlen eine echte (d. h. keine Menge repräsentierende) transitive und durch die Inklusion wohlgeordnete Klasse On. Die strikte Ordnung, welche dieser umfassendsten Ordnung entspricht, stimmt mit der Einschränkung der Elementbeziehung überein: Jede Ordinalzahl ist gleich der Menge aller Ordinalzahlen, welche ihr strikt vorhergehen; jedes Element der Klasse On stimmt mit dem Abschnitt überein, den es in On bestimmt. Die erste Ordinalzahl (das erste Element in jeder Ordinalzahl) ist $\emptyset$, und jede Ordinalzahl α hat als Nachfolger (in jeder Ordinalzahl, zu der sie gehört) die Ordinalzahl $\alpha \cup \{\alpha\}$; eine Limeszahl (die obere Grenze) einer Menge von Ordnungszahlen ist ihre Vereinigung [195]. Im gleichen Zusammenhang schlug v. Neumann (im Rahmen eines Systems, in dem das Auswahlaxiom gilt) vor, als Kardinalzahlen jene Ordinalzahlen zu verstehen, welche die Anfangszahlen (ersten Elemente) ihrer Gleichmächtigkeitsklassen innerhalb On sind.

Bis zu dem Axiomensystem Fraenkels [76] blieben die betrachteten Axiomensysteme hinsichtlich der Existenz individueller Objekte, welche keine Mengen sind (und die von Zermelo *Urelemente* genannt wurden) neutral; während der folgenden Periode wurden solche Objekte als „außermathematisch" angesehen, und die Untersuchungen beschränkten sich auf die „reine" Mengenlehre, in der das einzige Objekt ohne Element die leere Menge ist. Die Arithmetik (die Wissenschaft von den endlichen Ordinalzahlen) und die Analysis (die Wissenschaft von den unendlichen Dualzahlentwicklungen) wurden auf der Grundlage der Mengen behandelt, welche, ausgehend von der leeren Menge, durch (transfinite) Iterationen derjenigen Konstruktionen erzeugt werden, die nach den Axiomen der Paarbildung,

---

alle Mengen Klassen (bzw. durch solche repräsentierbar) sind. Der grundsätzliche Unterschied zwischen dem Ansatz von Bernays und dem von Gödel besteht darin, daß bei Bernays Klassen nicht quantifiziert werden dürfen, während bei Gödel dies erlaubt ist. — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

der Vereinigung und der Teilmengenbildung zulässig sind; die Rückführung der Mathematik auf die Mengenlehre erforderte nur die so erhaltenen Mengen. Nun bemerkte aber zwischen 1917 und 1920 D. Mirimanoff (1861—1925) in [190], [191], daß die Zermeloschen Axiome nicht ausschließen, daß auch „außergewöhnliche Mengen" existieren können, die außerhalb dieses Erzeugungsverfahrens liegen, z. B. eine Menge s, zu welcher eine unendliche periodische oder auch nichtperiodische Folge mit $\ldots \in s_{k+1} \in s_k \in \ldots \in s_2 \in s_1 \in s$ existiert, wobei im Extremfall $s = \{s\}$ sein könnte.

Mirimanoff schlug vor [190], die Unmöglichkeit einer solchen Situation zu postulieren. Skolem ([270], 1923) skizzierte alsbald einen Beweis, daß ein solches Axiom, das Zermelo ([313], 1930) Fundierungsaxiom nannte, mit den anderen Axiomen verträglich ist, und dieser Beweis wurde 1929 durch v. Neumann [198] im einzelnen erbracht. Das Fundierungsaxiom fordert: Jede (rückschreitende) Kette von Elementen, in welcher jedes Glied Element des vorangehenden ist, bricht nach endlich vielen Schritten bei einem Urelement ab. Zermelo und v. Neumann formulierten es (unabhängig voneinander, wie Bernays [9] sagte) in der Gestalt

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists u(u \in A \wedge u \cap A = \emptyset),$$

wobei A gegebenenfalls eine Klasse sein kann. Beide bewiesen, daß das Axiom auf die Forderung hinausläuft, jede Menge sei *wohlfundiert*, d. h. Element eines der Glieder der Hierarchie der Mengen $R(\alpha)$, die sich aus der leeren Menge durch Iteration des Übergangs zur Menge der Teilmengen ergeben (mit anderen Worten, man definierte $R(\alpha)$ so, daß $R(0) = \emptyset$, $R(\alpha + 1) = \mathfrak{P}(R(\alpha))$ für jede Ordnungszahl α und $R(\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} R(\beta)$ für jede Limeszahl λ gilt).[1]) Zermelo betrachtete den allgemeineren Fall, daß man von einer Menge C_0 von Urelementen ausgeht und die C_α so gebildet werden, daß $C_{\alpha+1} = C_\alpha \cup \mathfrak{P}(C_\alpha)$ und $C_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} C_\beta$ für Limeszahlen λ gelten; für gewisse Werte von λ, deren Existenz durch zusätzliche spezielle Axiome gesichert werden muß, erhält man Modelle der Mengenlehre.[2])

13.4.3. *Das Hilbertsche Programm*

Schon im Jahre 1899 stellte Hilbert in seiner Arbeit *Über den Zahlbegriff* [122] die genetische Methode, mit der man z. B. durch sukzessive Erweiterungen vom einfachsten Zahlbegriff zum allgemeinsten Begriff der Zahl aufsteigt, der *axiomatischen Methode* gegenüber — die er für zweckmäßiger hielt —, bei welcher die

[1]) Erst 1955 hat D. Scott darauf aufmerksam gemacht [262], daß dieses ermöglicht, das ursprüngliche Programm von Frege zur Definition der Zahl wieder aufzugreifen, indem man jede Äquivalenzklasse nach der Gleichmächtigkeit durch ihre Spur auf der ersten Menge $R(\alpha)$ ersetzt, zu der sie nicht disjunkt ist — ohne daß dabei auf das Auswahlaxiom zurückgegriffen werden müßte.

[2]) G. Kreisel [153] bemerkte, daß dies so vor sich geht, als modifiziere man das Verfahren zur Erzeugung der Typen (von einstelligen Prädikaten) so, daß man zu jedem Typus die Objekte der ihm vorangehenden Typen hinzufügt; auf diese Weise werden die Typen *kumulativ*.

Zahlen insgesamt als Elemente einer Menge eingeführt werden, innerhalb derer sie miteinander in bestimmten wechselseitigen Beziehungen stehen, die durch ein System von Axiomen vollständig beschrieben werden, welche es ermöglichen, jede weitere Eigenschaft durch eine endliche Folge von Schlüssen daraus herzuleiten. Mit diesen Axiomen ist das Problem verknüpft, ihre Widerspruchsfreiheit zu beweisen — das *zweite Hilbertsche Problem* aus dem Jahre 1900 ([53], [53][1]): Die Methode, mit welcher die Widerspruchsfreiheit der Axiome der Geometrie auf die der Axiome des Körpers der reellen Zahlen zurückgeführt worden war und die darin bestand, ein geeignetes numerisches Modell zu konstruieren, ist nun nicht mehr anwendbar.

Hilbert widmete seinen Vortrag auf dem 3. Internationalen Mathematikerkongreß, der 1904 in Heidelberg stattfand, ganz der Erklärung, welchen anderen Weg er dabei zu beschreiten beabsichtige. Er räumte ein, daß man bei dem Bestreben, die Arithmetik auf die Logik zurückzuführen, sich klar darüber sein muß, daß man bei Behandlung der Logik die Begriffe Menge und Zahl benutzt, und schlug vor, Logik und Arithmetik gleichzeitig aufzubauen. Er verwendete hierbei noch etwas vage Begriffe, faßte manchmal mehrere Begriffe, die sich erst in der Folgezeit klar voneinander abheben sollten, zu einem einzigen Begriff zusammen und stellte aber fest, daß nur wenige Begriffe ins Spiel kommen — darunter die logischen wie Konjunktion usw. —, daß jeder dieser Begriffe durch ein Zeichen dargestellt werden kann, daß sich Axiome und Sätze durch bestimmte endliche Zeichenfolgen darstellen lassen und daß sich dann jeder Schritt eines Beweises durch Transformation von Ausdrücken in Ausdrücke nach wohldefinierten „mechanischen" Regeln vollzieht. (Eine solche Behandlung arithmetischer Überlegungen hatten schon in der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts die deutschen formalistischen Mathematiker (Heine, Thomae) angestrebt; sie wurden 1903 von Frege ([83], Bd. II) heftig angegriffen, weil sie behaupteten, den begrifflichen Gehalt der arithmetischen Überlegungen auf diese Regeln reduzieren zu können, ohne die Arithmetik von der Theorie dieser Regeln zu unterscheiden.) Da die formalisierten Beweise somit als mathematische Objekte angesehen werden konnten, glaubte Hilbert den Begriff der Ableitbarkeit aus einem Axiomensystem durch eine Art rekursiven Verfahrens definieren zu können. Er schlug vor — und das läßt sich in den sehr vereinfachten Fällen, die er zur Erläuterung seines Gedankenganges als Beispiele anführte, sehr wohl machen —, ein Modell der Axiome mit Hilfe der Ausdrücke zu bilden, indem er sie nach einem fortschreitenden Verfahren in wahre und falsche einteilte, bei dem sich auf jeder Stufe die Quantifikationen nur auf die vorher betrachteten Ausdrücke beziehen — was zugestandenermaßen jeweils von Etappe zu Etappe geprüft werden muß —, und er betonte, daß es dabei nur notwendig sei, auf jeder Etappe nur endlich viele Dinge zu betrachten.

Schon im folgenden Jahr hielt ihm Poincaré — wenn er ihm (gleichsam als Echo auf Meinungen, die von Borel, Hadamard, Baire und Lebesgue in der Diskussion um das Auswahlaxiom ([104], vgl. 13.4.2.) geäußert wurden) auch zugestand, daß in der Mathematik das Wort „existieren" durchaus den Sinn „es erscheint frei von Widersprüchen" haben könne — nichtsdestoweniger entgegen, er sei doch immer gezwungen, den Zahlbegriff zu benutzen, ehe er ihn definiert habe

(beispielsweise bei der Bildung von beliebigen Ausdrücken), ebenso wie eine Vielzahl von Induktionsüberlegungen (z. B. bezüglich der Länge der Beweise) schon bei einem Beweis der Widerspruchsfreiheit für ein Fragment einer formalen Theorie der Gleichheit erforderlich ist. Und in der Einleitung zu *Wissenschaft und Methode* [236][1] lehnte er es ab, auf die genetische Methode, die in seinen Augen der axiomatischen Methode komplementär ist, zu verzichten.

Im Jahre 1907 formulierte L. E. J. Brouwer (1881—1966) in seiner Habilitationsschrift *Over de grondslagen der wiskunde* (Über die Grundlagen der Mathematik) ([31], S. 11) die Doktrin des modernen mathematischen „Intuitionismus" (vgl. 13.4.4.). In seinen Augen mußte die Existenz eines mathematischen Objekts bewiesen werden, und das konnte nur geschehen durch Aufzeigen eines Verfahrens zur „Konstruktion" dieses Objekts; die zeitlichen Aufeinanderfolgen von unterschiedlichen Anregungen des Denkens durch seine Gegenstände bilden einen fundamentalen mathematischen Mechanismus des Intellektes, der diesem die Intuition liefert, welche dem Verfahren zur Konstruktion der gesamten Folge der ganzen Zahlen „zugrunde liegt", ein Konstruktionsakt, in welchem auch die vollständige Induktion enthalten ist. Eine der Konsequenzen hiervon ist, daß eine Eigenschaft nicht immer die Klasse der Objekte bestimmt, denen sie zukommt, denn man hat nicht immer die Mittel, diese Klasse wirklich zu bilden; und so lange sie nicht fertig gebildet wurde, kann man sich nicht das Problem stellen, mit ihr eine andere Klasse zu bilden, deren Element sie ist oder nicht ist; so vermeidet man die Paradoxien. Ebenso ist der Beweis einer Widerspruchsfreiheit, der nicht die Konstruktion eines Modells beschreibt, nicht schlüssig. Damit verwarf Brouwer die Arbeiten von Cantor, Russell und Hilbert, wobei er die Kritik Poincarés durch seine eigene erweiterte. Er unterschied verschiedene Stufen der mathematischen Praxis: das intuitive Niveau; die mathematische Untersuchung des Ausdrucks jenes ersten Niveaus als Gebiet der Logik; die mathematische Untersuchung formaler Sprachen, welche sich aus dem vorigen ergibt, indem von der Bedeutung der Wörter abgesehen wird (Peanos Standpunkt); und er erkannte schließlich Hilbert das Verdienst zu, durch Iteration dieses Übergangs den Begriff des formalen Folgerns definiert zu haben. Im folgenden Jahr kam Brouwer, ausgehend von den Prinzipien seiner Habilitationsschrift zu dem Schluß, das Tertium non datur abzulehnen ([31], S. 107).[1] Dies sollte ihn dazu führen, die gesamte Entwicklung der Mathematik noch einmal nachzuvollziehen und eine „intuitionistische Mathematik" mit eigenen Zügen aufzubauen (vgl. 13.4.4.).

Während des folgenden Jahrzehnts fand die Auffassung Brouwers Anhänger und brachte schließlich sogar H. Weyl, einen der eigentlichen Schüler Hilberts, ins Wanken, während andererseits die Skizze [123] aus dem Jahre 1904 gerade einen ersten Beitrag zur Beweistheorie[2]) im postumen Werk [148] von J. König (1849 bis 1913) lieferte und die Begriffe formale Darstellung und formales System auftauchten und von C. I. Lewis ([168], 1918) und E. L. Post ([240], 1921) beschrieben wurden. Im Jahre 1917 nahm Hilbert in Zusammenarbeit mit P. Bernays, dem

[1]) Der Literaturhinweis bezieht sich auf eine englische Übersetzung. Diese Arbeit ist Lesern des vorliegenden Werkes durchaus verständlich.

[2]) Nach E. W. Beth ([13], S. 70).

sich später auch W. Ackermann, J. v. Neumann und J. Herbrand (1908—1931) anschlossen, sein Programm wieder auf und vertiefte es. Er formulierte u. a. das *Entscheidungsproblem* [124]: Gesucht ist ein Verfahren, das es gestattet, in endlich vielen Schritten durch Umformen von endlich vielen Ausdrücken zu prüfen, ob ein formaler Ausdruck sich aus einem gegebenen Axiomensystem ableiten läßt (wie das z. B. für den Aussagenkalkül der Fall ist); wenn man über ein solches Verfahren verfügt, so könnte man, ohne eine vollständige Induktion durchführen zu müssen, die Widerspruchsfreiheit des betrachteten Axiomensystems beweisen. Im Jahre 1922 schwebte ihm vor [125] „eine höhere Stufe der Betrachtung . . ., von der aus die Axiome, Formeln und Beweise der mathematischen Theorie selbst Gegenstand einer inhaltlichen Untersuchung sind . . . Dazu müssen aber zunächst die üblichen inhaltlichen Überlegungen der mathematischen Theorie durch Formeln und Regeln ersetzt bzw. durch Formalismen nachgebildet werden, d. h., es muß eine strenge Formalisierung der ganzen mathematischen Theorien einschließlich ihrer Beweise durchgeführt werden, so daß die mathematischen Schlüsse und Begriffsbildungen — nach dem Muster des Logikkalküls — in das Gebäude der Mathematik als formale Bestandteile einbezogen sind (S. 165) . . . Um unsere Ziele zu erreichen, müssen wir die Beweise als solche zum Gegenstande unserer Untersuchung machen; wir werden so zu einer Art *Beweistheorie* gedrängt, die von dem Operieren mit den Beweisen selbst handelt . . . (S. 169). Zu dieser eigentlichen Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, hinzu, die zur Sicherung jener dient, indem sie sie vor dem Terror der unnötigen Verbote sowie der Not der Paradoxien schützt. In dieser Metamathematik kommt — im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik — das inhaltliche Schließen zur Anwendung, und zwar zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome" (S. 174). Hilbert beabsichtigte, die Intuitionisten zur Anerkennung der Gültigkeit der seither im Gegensatz zur intuitionistischen Mathematik als „klassisch" bezeichneten Mathematik zu zwingen. Er verlangte dazu, daß das in der Metamathematik anzunehmende Inhaltliche „finit" sein müsse, d. h., daß dort weder Überlegungen noch Konstruktionen zugelassen würden, die nicht im Endlichen enden oder unendlich viele Objekte voraussetzen.[1])

Die von Hilbert und seinen Mitarbeitern untersuchten formalen Systeme waren bis zu dem Zeitpunkt, da der Gödelsche Unvollständigkeitssatz (vgl. 13.4.5.) dazu zwang, auf neue Grundlagen zurückzugehen, Teilsysteme der Peanoschen Arithmetik erster Stufe (vgl. 13.1.7.). Ihre logischen Axiome sind durch die der *Principia Mathematica* [303] inspiriert, und die Arithmetischen Axiome sind denjenigen Peanos angepaßt (vgl. 13.1.7.). Diese Arbeiten bilden auch den Gegenstand des Werkes *Grundlagen der Mathematik* (1934 bzw. 1939) von Hilbert und Bernays [129]. Etwas früher, 1928, hatten Hilbert und Ackermann wesentliche Elemente in ihrem Buch *Grundzüge der theoretischen Logik* [128] dargelegt, dem ersten Lehrbuch, in dem die mathematische Logik im Rahmen eines entsprechend der Hilbertschen

---

[1]) Die tiefgründigste Abhandlung hierzu trägt den Titel *Über das Unendliche* und stammt aus dem Jahre 1925 [126]. Im Jahre 1904 ging es Hilbert nur darum, auf die Einwände Kroneckers zu reagieren (vgl. 13.4.4.).

Konzeption klar abgegrenzten formalen Systems dargestellt wurde. In eben diesem Buch wird auch der Begriff des Prädikatenkalküls der ersten Stufe erstmalig erklärt.

Die bis gegen 1930 von Hilberts Schülern erzielten Ergebnisse sind im Zusammenhang mit anderen unter verschiedenen Gesichtspunkten zu betrachten, auf die wir noch zurückkommen werden. In der gewünschten Richtung lieferten sie den Beweis der Widerspruchsfreiheit der aus der Peanoschen Arithmetik dadurch gewonnenen Theorie, daß im Induktionsschema (vgl. 13.1.7.) ausschließlich solche Eigenschaften $P(n)$ berücksichtigt werden, bei denen n nicht im Wirkungsbereich eines Quantors vorkommt; dies ist eine beträchtlich schwächere Theorie (siehe [197]; der erste Beweis stammt jedoch von Ackermann).

Am 23. Oktober 1930 setzte eine Mitteilung von Gödel [93] den Hoffnungen Hilberts ein Ende. Aus ihr ergab sich nämlich, daß ein die Arithmetik umfassendes formales System nicht widerspruchsfrei sein kann, wenn die bis zu diesem Zeitpunkt als finit angesehenen Hilfsmittel es ermöglichen sollten, die Widerspruchsfreiheit dieses Systems zu beweisen. Das bedeutet allerdings weder ein Ende der Betrachtung formaler Systeme, über die man schon viel gelernt hatte, noch der Metamathematik, die seitdem als die Wissenschaft von diesen Systemen verstanden wird, noch der Beweistheorie, die durch die intuitionistische und konstruktivistische Praxis nach der von A. Heyting [117] im Jahre 1930 gegebenen Formalisierung der formalen Aspekte des intuitionistischen Schließens neu belebt wurde. Bei Gentzen [88] erscheinen die Anfänge einer Beweistheorie, die sich in der Folge zu einer eigenständigen Disziplin herausbildete: Operationen mit Beweisen führten u. a. zu Ergebnissen, nach denen für die Theoreme Beweise mit guten mathematischen Eigenschaften existieren.

Nachdem im Jahre 1932 Gödel [95] eine Reinterpretation der „klassischen" Arithmetik erster Stufe in der intuitionistischen Arithmetik (vgl. 13.4.4.) entdeckt hatte, sahen sich Hilbert und Bernays veranlaßt, im Vorwort des ersten Bandes der *Grundlagen der Mathematik* [129] eine Anpassung des ursprünglichen Programms vorzuschlagen, indem sie für die Metamathematik die strengen finitistischen Forderungen soweit abschwächten, daß auch allgemeinere Überlegungen möglich wurden, die von den Intuitionisten akzeptiert werden konnten. Im Jahre 1936 lieferte G. Gentzen (1909—1945) einen direkten Beweis für die Widerspruchsfreiheit der vollen Arithmetik erster Stufe [89], indem er sich über die streng finiten Verfahren hinaus auf die transfinite Induktion (vgl. 13.4.2.) bis zur Ordinalzahl ε_0 (vgl. 13.4.2.) stützte, die weit davon entfernt ist, sich auf alles zu berufen, was die intuitionistische Auffassung erlaubt, und die er auf Ordinalzahlen anwandte, welche die „Kompliziertheit" von geeignet „normalisierten" formalen Beweisen messen. Man erhoffte sich damals eine schnelle Übertragung dieses Resultats auf die Analysis. Es dauerte aber bis 1962, ehe C. Spector [276] einen Beweis der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems für einen Teil der klassischen Analysis (der es gestattet, Funktionen reeller Variablen, jedoch keine unendlichen Familien solcher Funktionen zu behandeln) in einem System für den entsprechenden Teil der intuitionistischen Analysis erbrachte.

Der moderne Gebrauch des Wortes „Syntax" zur Bezeichnung desjenigen Teils der Metamathematik, der die formalen Systeme untersucht, ohne dafür auf die Bedeutung der betreffenden Begriffe zurückzugreifen, geht auf das Werk von R. Carnap (1891—1971) *Logische Syntax der Sprache* [43] aus dem Jahre 1934 zurück.[1]) Ohne Zweifel drängte sich dieser Gebrauch von selbst auf, wir haben ja gesehen, daß Collins schon mehr ein Jahrhundert vorher denselben Terminus benutzt hatte (vgl. 13.2.1.).

Die verschiedenen seit 1920 betrachteten Arten formaler Systeme zu beschreiben liegt außerhalb unserer Aufgabe: In der englischen Ausgabe des Carnapschen Buches aus dem Jahre 1937 nimmt dies mehr als 120 Seiten in Anspruch. Die Konstitutierung eines solchen Systems umfaßt oft fünf Etappen (es gibt aber Varianten):

— zuerst die Beschreibung der „formalen Sprache", d. h. der verwendeten Zeichen und ihre Verteilung auf verschiedene Kategorien wie Variablen, Konstanten, logische Zeichen — Konnektoren und Quantoren — und eventuell Interpunktionszeichen (allgemein hat man unter der „Sprache einer Theorie" das System ihrer Grundbegriffe zu verstehen, auf das sich die in der Theorie definierbaren Begriffe zurückführen lassen; man erwartet, daß durch die Zeichen die Grundbegriffe repräsentiert werden oder sie diese Rolle in den Ausdrucksmechanismen des Denkens spielen);

— dann die Formulierung von Regeln zur Bildung von „Termen" (die unter bestimmten Bedingungen für bestimmte Variablen eingesetzt werden können; man erwartet im allgemeinen, daß sie Rechenergebnisse repräsentieren), von „Formeln" (von ihnen erwartet man im allgemeinen, daß sie Aussagen repräsentieren), und von „Axiomen", die unter den Formeln ausgewählt werden (oft faßt man die Terme und die Formeln unter der Bezeichnung „Ausdrücke" zusammen);

— schließlich die Formulierung von Ableitungsregeln: Jede solche Regel gibt an, wie man aus ihren „Prämissen", das sind Formeln, welche bestimmten Bedingungen genügen, ihre „Konklusionen" erhalten kann, das sind andere Formeln, die die unmittelbaren deduktiven Folgerungen aus den Prämissen bilden (ein Beispiel dafür ist die *modus ponens* genannte Regel ([G—H], S. 118), die den Syllogismus gleichen Namens formalisiert).

Hiermit gelangt man zum Begriff der deduktiven Folgerung aus einem System von Formeln (Annahmen): Das sind alle Formeln, die man erhält, wenn man von den Annahmen zunächst zu ihren unmittelbaren deduktiven Folgerungen übergeht, sodann von diesen und den Annahmen zu deren unmittelbaren Folgerungen usw., schließlich zu allen denjenigen Formeln, die man durch beliebige endliche Iteration dieses Verfahrens erhalten kann; diese „Ableitungen" werden begleitet von der Bildung von Formelfiguren (im einfachsten Fall von Folgen von Formeln), die jenen Ableitungsprozeß gemäß der Ableitungsregeln auszudrücken gestatten und welche die formalen Ableitungen heißen. Im Jahre 1951 legte H. B. Curry eine Auffassung der Mathematik als „Wissenschaft der formalen Systeme" [57] dar.

---

[1]) Die Philosophie dieses Werkes wurde viel diskutiert, doch gehen wir darauf hier nicht ein.

Eine Reihe von Aussagen und Begriffen der Syntax geht bereits auf die Pioniere der Algebra der Logik des neunzehnten Jahrhunderts zurück, so die Begriffe Normalform (vgl. 13.3.1.) und pränexe Normalform (vgl. 13.3.2.). Der Begriff der formalen Ableitung und der Begriff der Widerspruchsfreiheit (Konsistenz) in dem Sinne, daß eine Formel nicht zugleich mit ihrer Negation ableitbar ist, gehen auf Hilbert zurück (der seit 1904 [123] den Terminus Konsistenz in dem Sinne übernommen zu haben scheint, in welchem Cantor im Anschluß an Schröder ([259], Bd. 1, S. 213)[1]) von konsistenten Mannigfaltigkeiten sprach). Die große Zeit der Entwicklung der Syntax liegt jedoch besonders in dem Jahrzehnt, das auf den ersten Weltkrieg folgt, als die ersten echten formalen Systeme untersucht wurden. Łukasiewicz führte gegen 1920 die sogenannte „polnische" Notation ein, welche das Funktionszeichen vor die Argumente setzt und die letzteren ohne Klammern und Kommata hintereinander schreibt: Sie hat den Vorteil, daß sie Klammern spart (man könnte natürlich auch die Anordnung umkehren). Diese Verfahren finden heute Anwendung in verschiedenen „Programmiersprachen" und im Befehlssystem großer elektronischer Rechenmaschinen; aus dieser Zeit stammt auch die bereits zitierte Abhandlung von Post [240]. Der Begriff der vollständigen Theorie ist ebenfalls vorhanden, wenn auch zum Teil unter anderer Bezeichnung; die Benennung „vollständig" für ein (Axiomen-)System, dessen deduktive Folgerungen für jede Formel A ohne freie Variable entweder A oder $\neg A$ umfassen, erschien in einer Abhandlung von Tarski [284] aus dem Jahre 1928.

In seiner Habilitationsschrift ([113], 1930) formulierte und bewies Herbrand einen Satz, der heute seinen Namen trägt und eine Bildungsregel beschreibt, die jeder Formel des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, welche Quantoren enthält, eine abzählbar unendliche Familie von Formeln ohne Quantoren zuordnet derart, daß die ursprüngliche Formel genau dann ableitbar ist (aus einem Axiomensystem des Prädikatenkalküls), wenn ein Glied dieser Familie ableitbar ist (was für jede dieser Formeln ein Problem des Aussagenkalküls ist und für welches ein Entscheidungsalgorithmus existiert). Zahlreiche Arbeiten derselben Richtung (Hertz [115], Jaśkowski [132], Gentzen [88], [89], [90]) sind aus Anregungen von Łukasiewicz in seinem Seminar aus dem Jahre 1926 hervorgegangen; Gentzen hat speziell seine formalen Systeme in einer solchen Weise konzipiert, daß der Prozeß der formalen Ableitung mit den Etappen eines schrittweisen Abbaus der Formeln vermischt wird, der nach genauen formalen Regeln mit anschaulichem Inhalt vollzogen wird, und in diesem Rahmen ist er zu den oben zitierten Sätzen gelangt.

Diese Arbeiten waren die Quelle eines neuen Aufschwungs der Beweistheorie seit dem Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts, und sie bildet seither diejenige Disziplin, welche das wesentliche Erbe der Ergebnisse der Syntax aufgenommen hat.

13.4.4. *Der Intuitionismus und andere nichtklassische Auffassungen*

Die Einstellung Brouwers (vgl. 13.4.3.) gegenüber der Mathematik, wie sie sich zur Zeit seiner Habilitationsschrift ([31], S. 11) zeigte, war natürlich auch schon

[1]) Schröder (ebenda, Bd. 2, S. 61) sagte, er habe die Bezeichnung „Inkonsistenz" für einen logisch falschen Ausdruck von Christine Ladd-Franklin [154ter] übernommen.

früher vorhanden gewesen, insbesondere bei Kronecker (1823—1891), der sich um 1880 mit den von Cantor, ebenso wie von Dedekind und Weierstraß eingeführten Begriffen beschäftigt und deren Definitionen als rein verbal qualifiziert hatte. Schon Kronecker wollte das aktual Unendliche aus der Mathematik verbannen, und was Hilbert beim Entwerfen seines Programms von 1904 versucht hatte, war eine Erwiderung darauf. Wir haben auch bereits von den analogen, mehr oder weniger akzentuierten Positionen von Poincaré (vgl. 13.4.1. und 13.4.3.), von Borel, Baire und Lebesgue (vgl. 13.4.2.) gesprochen. Brouwer ging von einer mathematischen Aktivität a priori aus, die er als unabhängig von der Erfahrung annahm und deren Unabhängigkeit von der Erfahrung er postulierte. Da sie selbst dem Gebrauch der Sprache vorausgeht, die nur grob geeignet ist, sie zum Ausdruck zu bringen, kommt diese Aktivität nach seiner Meinung in der grundlegenden Intuition von der Folge der natürlichen Zahlen zum Ausdruck und liefert die Begründung für deren Rolle und insbesondere dafür, daß diese dem Induktionsprinzip gehorcht. Darüber hinaus sollte die Mathematik eine Existenz nur dem zubilligen, was sie dadurch rechtfertigt, daß sie es selbst konstruiert. Die Logik ist für Brouwer nur eine Anwendung der Mathematik als Ganzes auf einen ihrer Teile, auf die Sprache der Beweisführung; die mathematische Aktivität ist davon unabhängig. Was die Mengenlehre angeht, so gibt es bei ihm keinen Einwand gegen die Einführung von ω als neue Ordinalzahl, auch keine dagegen, daß man weiterzählt

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, 2\omega, 2\omega + 1, \dots, m\omega + n, \dots,$$

doch wird damit nicht zugegeben, daß man hieraus eine Gesamtheit bilden könne, die einer Vollendung fähig ist. Auf dem Niveau der „abzählbar unvollendeten" Gesamtheiten gilt z. B. der Satz von Cantor-Bernstein nicht mehr, weil man nicht beschreiben kann, wie die Paare des Graphen der gesuchten bijektiven Abbildung zu konstruieren wären, wenn man nichts weiter kennt als eine abzählbare Unendlichkeit von Elementen, die in jeder der Gesamtheiten einander zugeordnet werden. Sieht man von den philosophischen Voraussetzungen einmal ab, so läge hier eine vollständig fixierte Haltung gegenüber dem vor, was in der Mathematik zulässig ist, wenn es nicht so wäre, daß eine erschöpfende Liste der Konstruktionsverfahren, die geeignet sind, von der Intuition geliefert zu werden, niemals angegeben werden kann.

Im Jahr darauf gelangte Brouwer — im Grunde vermöge derselben Überlegung, die ihn zum Verzicht auf den Satz von Cantor-Bernstein geführt hatte — zur Ablehnung des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten (des Tertium non datur) ([31], S. 107). Dieses Prinzip würde verlangen, daß wir, wenn wir beispielsweise eine injektive Abbildung eines unendlichen Gebietes in ein anderes suchten, am Ende einer bestimmten Zeitspanne entweder eine solche konstruiert hätten oder aber zu jeder konstruierbaren partiellen injektiven Abbildung über eine Konstruktion einer Sperre für ihre Fortsetzung verfügen würden; jedoch bleibt nach Ablauf einer vorgegebenen Zeit — und insbesondere derjenigen, die wir diesem Problem widmen können — immer die Möglichkeit, daß wir weder die eine noch alle die anderen dieser Konstruktionen (für alle partiellen injektiven Abbildungen) erfaßt hätten, die wir hätten betrachten müssen; die „klassische" Beweisführung ist nur

deshalb nicht widersprüchlich, weil sie von der Zeitbegrenzung absieht. Wir können also im allgemeinen, d. h., wenn wir von den Besonderheiten der Situation absehen, die „intuitionistische" Existenz der gesuchten injektiven Abbildung weder bejahen noch verneinen. Noch allgemeiner, wir können von einer gegebenen Aussage, ohne ihre Besonderheiten zu berücksichtigen, a priori nicht behaupten, daß wir in der Lage seien, sie entweder zu beweisen oder zu widerlegen.

Im weiteren Verlauf der Geschichte wurde diese Art des Herangehens, trotz aller ihrer Konsequenzen, strikt beibehalten: Es wurden weite Teile der „klassischen" Mathematik in Zweifel gezogen und als rein verbal („sinnlos") angesehen; einige Fragmente wurden neu aufgebaut, indem die „klassischen" Beweise durch Beweise ersetzt wurden, welche Beschreibungen von Konstruktionsverfahren enthielten; schließlich wurden neue Gebiete der Untersuchung bei solchen Begriffen erschlossen, für welche unterschiedliche Definitionen existieren, die man zwar in der klassischen Logik als äquivalent nachweisen kann, die aber im intuitionistischen Sinne nicht äquivalent sind; andere Bereiche wurden dadurch erschlossen, daß der intuitionistische Sinn zahlreicher Begriffe (insbesondere der Logik) von ihrem „klassischen" Sinn abweicht (so ist es möglich, daß Widersprüche im „klassischen" Sinne vom intuitionistischen Standpunkt aus nicht entkräftet werden können; es gibt beispielsweise Formeln der Gestalt $\forall x[A(x) \vee \neg A(x)]$, wobei $A(x)$ zur Sprache der Zahlentheorie ([140], 1952, S. 513) gehört, welche der intuitionistischen Theorie widerspruchsfrei als Axiome hinzugefügt werden können).

Das folgende Beispiel, das im wesentlichen von Brouwer stammt ([31], S. 276), ist ganz und gar typisch für das intuitionistische Herangehen an die Mathematik und für das Ausmaß, in welchem die Ablehnung des Tertium non datur die Mathematik beeinflußt: Man definiert $\varrho = 0{,}333\ldots$, wobei man bei der n-ten Dezimalstelle aufhört, wenn $n > 2$ die erste natürliche Zahl ist, für welche eine nichttriviale ganzzahlige Lösung der Fermatschen Gleichung $x^n + y^n = z^n$ existiert, wenn es ein solches n gebe sollte, und $\varrho = 0{,}\overline{3}$, wenn es kein solches n geben sollte. Ein Intuitionist kann nun zwar erschließen, daß ϱ nicht irrational ist (durch Nachprüfen der beiden Fälle der Definition leitet er in jedem von beiden einen Widerspruch zu Nicht-Rationalität von ϱ her), doch kann er nicht erschließen, daß ϱ rational ist (da er keinen mit ϱ übereinstimmenden Bruch angeben kann, weil er nicht sagen kann — es sei denn unter Benutzung des Tertium non datur — ob die Dezimalbruchentwicklung abbricht oder nicht). Daher stammt auch das Phänomen, das Brouwer als „intuitionistische Auflösung der mathematischen Begriffe" bezeichnet: So kann man nicht behaupten, daß zwei nicht übereinstimmende reelle Zahlen (d. h. Zahlen, bei denen die Annahme, sie seien einander gleich, zu einem Widerspruch führt) „von einander entfernt" sind (d. h. einen Abstand haben, der größer ist als eine von null verschiedene rationale Zahl ([31], S. 191, 1919)). Daß dieser Begriff — entfernt sein von — eingeführt werden mußte, ergibt sich aus der Tatsache, daß man nur dann sagen kann, eine reelle Zahl besitze eine Reziproke, wenn sie von null entfernt ist, und nicht, wenn sie nur schlechthin von null verschieden ist; und um über die intuitionistischen Strukturen einer Gruppe, eines Ringes und eines Körpers verfügen zu können, mußte Heyting 1941 [118] dort das Vorliegen einer Relation „entfernt sein" postulieren. Ebenso haben die Begriffe, in welche

sich der Begriff der Konvergenz einer Reihe ([31], S. 273, 1923) aufspaltet, Arbeiten von Belinfante (1896—1942?) inspiriert, dem es zwischen 1929 und 1939 gelang, einen großen Teil der Theorien der analytischen Funktionen komplexer Veränderlicher im intuitionistischen Sinne neu aufzubauen. Brouwer und de Loor ([31], S. 291) hatten 1924 einen „intuitionistischen" Beweis des Satzes von d'Alembert (des Fundamentalsatzes der Algebra) erbringen können.

Im Jahre 1918 hatte H. Weyl (1885—1955) in seinem Buch *Das Kontinuum* einen halb-intuitionistischen Aufbau der Analysis unternommen, der aus dieser die imprädikativen Definitionen (vgl. 13.4.1.) eliminierte; jedoch war es ihm dabei nicht gelungen, die Existenz einer oberen Grenze für jede beschränkte Menge reeller Zahlen zu beweisen. Wie Brouwer 1923 ([31], S. 268) nachweisen sollte, zieht der Verzicht auf das Tertium non datur nach sich, daß die Sätze von Bolzano-Weierstraß und von Heine-Borel sowie die ganze Lebesguesche Maß- und Integraltheorie nicht mehr gelten. Nachdem H. Weyl zunächst die Ansichten von Brouwer übernommen hatte, wandte er sich nach 1926 wieder davon ab, großenteils deshalb, weil die intuitionistische Mathematik der Physik nur geringe Dienste leisten konnte ([141], S. 206). Trotzdem wurde sie auch weiterhin gepflegt und auch weiter entwickelt, von nicht sehr vielen, aber begeisterten und hervorragenden Anhängern; sie hat ferner eine größere Anzahl von Untersuchungen angeregt, die in einem „klassischen" Geiste unternommen wurde, der sich von dem der vorhergehenden Arbeiten unterschied, und zwar durch Forscher, die deren Anschauungen nicht teilten; ihnen lag meistens ein Interesse zugrunde, das durch den einen oder anderen intuitionistischen Begriff, die eine oder andere intuitionistische Struktur oder Theorie geweckt worden war.

Die intuitionistische Theorie der Mengen (die Brouwer nach 1954 in „spreads" (sich Ausbreitendes) umtaufte ([31], S. 529)) — einschließlich der Anfangsgründe der ebenen Topologie und einer intuitionistischen Theorie des Maßes in der Ebene — wurde von Brouwer in seinen ersten, in den Jahren 1918 und 1919 entstandenen Abhandlungen ([31], S. 150 und 191) begonnen; ihre grundlegenden Sätze hat er 1925 formuliert ([31], S. 286). Die Rolle der Elemente wird von sogenannten „Wahl"folgen (zwischen den Möglichkeiten, welche in jeder Etappe von den betrachteten Konstruktionsgesetzen angeboten werden) übernommen, die der Klassen von den „Spezies", d. h. den Eigenschaften, welche mathematische Dinge haben können. Die Eigenschaften der spreads und der Spezies, die nur auf einem Teil der Gesetze der Aristotelischen Logik beruhen (nämlich denjenigen, welche die intuitionistische Logik anerkennt), erfassen nur teilweise diejenigen der „klassischen" Mengen und Klassen (und dasselbe passiert in allen Zweigen der Mathematik, von denen man eine „intuitionistische Rekonstruktion" einiger Breite besitzt). Nach diesen ersten Arbeiten haben sich intuitionistische Theorien auf verschiedenen Gebieten herausgebildet: in der Topologie (Freudenthal [84], 1935), in der Theorie der Hilberträume (Heyting [119], 1950), in der Maß- und Integrationstheorie (van Rootselaar [251], 1954), usw.

Im Zusammenhang mit dem Erscheinen der modalen und der mehrwertigen Logiken gegen Ende des ersten Weltkrieges, auf die wir später zurückkommen werden, führte das Heraussuchen der von den Intuitionisten akzeptierten Gesetze

der „klassischen Logik" zur Konzeption einer intuitionistischen Logik und von 1925 an zur Problematik ihrer Beziehungen zur klassischen Logik sowie auch der Beziehungen zwischen der intuitionistischen und der klassischen Mathematik. Der prinzipielle Schritt, der die Klärung dieser Problematik ermöglichte, war die Konstituierung eines formalen Systems durch Heyting im Jahre 1930 [117], das den wesentlichen Inhalt der intuitionistischen Logik widerspiegelte; obgleich seither viel damit gearbeitet wurde, brauchte es nicht modifiziert zu werden.[1])

Für den Intuitionismus hat die Negation $\neg p$ einer Aussage p die Bedeutung, daß ausgehend von p eine Ableitung eines Widerspruchs angegeben wird; die Implikation $p \Rightarrow q$ bedeutet, daß ausgehend von p eine Ableitung von q angegeben wird, und entsprechend für die anderen Konnektoren. Der Existenzquantor wird so verstanden, daß $\exists x p(x)$ bedeutet, daß ein Wert x_0 von x und ein Beweis von $p(x_0)$ angegeben werden; der Allquantor in $\forall x p(x)$ bedeutet, daß ein allgemeines Beweisschema angegeben wird, das sich für jedes x zu einem Beweis von $p(x)$ spezialisieren läßt [117]. Alle diese als vollzogen angenommenen Angaben können durch die effektive Bildung eines Verfahrens ersetzt werden, das ihre Konstruktion ermöglicht, vorausgesetzt, daß gleichzeitig ein Beweis erzeugt wird, daß diese Konstruktion auch sicher funktioniert [149].

Die von Heyting [117] für den Aussagenkalkül vorgeschlagenen Axiome sind die folgenden:

1. $p \Rightarrow p \wedge p$
2. $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$
4. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
5. $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
6. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
7. $p \Rightarrow p \vee q$
8. $p \vee q \Rightarrow q \vee p$
9. $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$
10. $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
11. $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p$.

Die Schlußregeln und die für den Prädikatenkalkül spezifischen Axiome sind dieselben wie die eines klassischen Systems, in welchem beide Quantoren als primitiv angesehen werden. Die Äquivalenzen

$$\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x) \quad \text{und} \quad \forall x A(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg A(x),$$

die es in der klassischen Logik ermöglichen, einen der beiden Quantoren mit Hilfe des anderen zu definieren, *sind nämlich in der intuitionistischen Logik nicht gültig.*

---

[1]) Es sei in diesem Zusammenhang betont, daß die orthodoxen Intuitionisten eine Formalisierung der von ihnen sanktionierten Logik grundsätzlich ablehnten, da kein statisches System der Logik das dynamische mathematische Denken genau auszudrücken vermag. Für sie war das System von Heyting bestenfalls eine angenäherte Nachbildung der konstruktiven mathematischen Tätigkeit. Heyting selbst schreibt dazu in *Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie* *[119 bis], Berlin 1934, S. 67: „In der intuitionistischen Mathematik, wird nämlich nicht nach festen Normen, die sich in einer Logik zusammenfassen lassen, geschlossen, sondern jeder einzelne Schluß wird unmittelbar auf seine Evidenz geprüft. Auch liegt der Kern einer mathematischen Beweisführung nicht in den logischen Schlüssen." — *Anm. bei der deutschen Ausgabe.*

Fügt man zu den Axiomen von Heyting das Prinzip des Tertium non datur, $p \vee \neg p$, oder das Axiom $\neg\neg p \Rightarrow p$ hinzu, *die beide in der intuitionistischen Logik nicht gelten*, so erhält man ein Axiomensystem für die klassische Logik.

Wie 1936 Johansson, dessen Minimalkalkül [135] sich aus dem oben genannten System dadurch ergibt, daß man auf das Axiom 10 verzichtet, hatte schon 1925 Kolmogoroff dieses Axiom abgelehnt [146]; er hatte bereits vor Heyting die Vorstellung (deren Realisierung er allerdings nur skizzierte) von einer formalisierten Axiomatik der intuitionistischen Logik und zu diesem Zweck ein partielles Axiomensystem desselben Minimalkalküls angegeben (partiell in dem Sinne, daß es sich nur auf Negation und Implikation stützte).

Im Jahre 1923 hatte Brouwer bemerkt ([31], S. 277), daß in der intuitionistischen Logik „drei Negationen einer einzigen äquivalent sind". Schon vor der Publikation des Systems von Heyting konnte V. Glivenko (1897—1940) auf Anregung Kolmogoroffs [146] zeigen, daß jede Ableitung des klassischen Aussagenkalküls in eine in der intuitionistischen Logik akzeptierte Ableitung übergeht, wenn vor jede Formel zwei Negationszeichen gesetzt werden. Er hatte daraus gefolgert [91], daß beide Logiken dieselben negierten Formeln desselben Kalküls anerkennen. Damit verfügte man über eine Interpretation eines Teils der klassischen Logik in der intuitionistischen Logik und über die (schon von Kolmogoroff gemachte) Bemerkung, daß dieser Teil der klassischen Logik in der intuitionistischen Logik „steckt" — vorausgesetzt, daß man die Interpretation ändert. Im Jahre 1932 hat dann Gödel [243] unter Verwendung einer *anderen* Interpretation gezeigt, daß sich auch die klassische Arithmetik in der intuitionistischen Arithmetik interpretieren läßt und daß sie demnach beide dasselbe Vertrauen verdienen.

Kurz nach seiner Veröffentlichung wurde das Heytingsche System sofort zum Gegenstand der Forschung. So hat Gödel 1932 [95] bewiesen, daß darin eine Disjunktion genau dann einen formalen Beweis besitzt, wenn mindestens eines ihrer Glieder einen solchen besitzt (was in der klassischen Logik für sehr viele Formeln, die ein Tertium non datur zum Ausdruck bringen, d. h. die Gestalt $p \vee \neg p$ haben, nicht der Fall ist). Jaśkowski hat 1936 die Entscheidbarkeit (vgl. 13.4.5.) des intuitionistischen Aussagenkalküls gezeigt [133]. Im Jahre 1939 hat McKinsey die Unabhängigkeit der Konnektoren dieses Kalküls bewiesen (von den klassischen Konnektoren lassen sich bekanntlich jeweils einige durch die anderen definieren). Wir werden an späterer Stelle (vgl. 13.4.6.) auf neuere Arbeiten zurückkommen.

Aus internen Untersuchungen der intuitionistischen Mathematik, der ihrer Beziehungen zur klassischen Mathematik (insbesondere auf dem Niveau der Logik und der Analysis) sowie aus der Übertragung von Methoden eines Gebietes auf ein anderes, sind — besonders seit dem Ende des zweiten Weltkrieges — weite Gebiete der Entwicklung der Logik hervorgegangen. Diese letzte Periode lehrt, daß in dieser Hinsicht einige andere Arten der Auffassung der Logik, die seit Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts untersucht worden waren und zu denen wir jetzt noch etwas sagen wollen, wieder in das Bewußtsein getreten sind.

Die Untersuchung der *Modalitäten* der Wahrheit (notwendig, zufällig, möglich, unmöglich) geht bereits auf Aristoteles zurück, der auch hierfür eine Syllogistik

entworfen hat; die traditionelle Logik scheint nicht darüber hinaus gegangen zu sein.

An der Wende vom neunzehnten zum zwanzigsten Jahrhundert hat McColl [180] eine Algebra der Logik skizziert, die auf dem Gedanken beruht, die Aussagen in *sichere* (stets wahre, etwa $2 = 2$), *unmögliche* (stets falsche, etwa $3 = 2$) und *variable* (manchmal wahre, manchmal falsche, wie etwa $x = 2$) einzuteilen. Er schlug vor, diese Modalitäten als „Wahrheitswerte" zu behandeln (d. h. die zusammengesetzten Aussagen nach den Bewertungen ihrer Bestandteile zu bewerten), und versuchte, seine Aussagenlogik auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden [178], wo dies aber auf Schwierigkeiten stößt.

C. I. Lewis, den der Gedanke schockierte, daß eine falsche Aussage jede andere Aussage impliziert, versuchte, die Idee der als *Konnektoren* aufgefaßten Modalitäten zu benutzen, um eine „strikte" Implikation zu definieren. So schlug er vor, „A impliziert strikt B" als „A und non-B ist nicht möglich" zu verstehen, und lieferte hierfür 1918 in seinem Buch *A survey of symbolic logic* [168] eine formale Behandlung im Geiste der *Principia Mathematica* [303]. Er griff dieses Problem wieder auf, als er mit H. Langford die erste Auflage des Buches *Symbolic logic* [169] vorbereitete, die 1932 erschien. Die Autoren stellten dort fünf Systeme vor, die sie mit S1 bis S5 bezeichnen und von denen sie erklärten, daß es ihnen ihre Intuition nicht gestattet, eine Auswahl zu treffen.

Diese Vielfalt von unterschiedlichen formalen Systemen, die in einem Augenblick auftauchten, in dem sich die Aufmerksamkeit auf diese neue Art von mathematischen Gegenständen richtete, ließ alsbald alle Arten von Untersuchungen entstehen, welche unendliche Hierarchien von denkbaren Zwischensystemen auf ihre Existenz prüften. Diese Arbeiten haben viel dazu beigetragen, die Logiker daran zu gewöhnen, formale Systeme zu handhaben und sie unter allen möglichen Gesichtspunkten zu untersuchen. Ihre Ergebnisse konnten jedoch niemals in ein sehr breites Einverständnis über die „gute" Art (oder die wenigen „guten" Arten) einmünden, in der die Modalitäten zu behandeln seien: Der Begriff „möglich" ist zu vage, und man kann sich davon ebenso viele Vorstellungen machen, wie es Kombinationen zwischen „Erreichbarkeit" und „Nachbarschaft" gibt.

Es sollte sich, obwohl die ursprünglichen Axiomensysteme es nicht erkennen ließen, schließlich herausstellen, daß die Modalität „möglich" gemäß S4 eine aussagenlogische Umschreibung der topologischen Abschließung ist ([G—H], S. 421)[1]) und die Möglichkeit gemäß S5 die der Sättigung für eine Äquivalenzrelation ([29], Buch I, Kap. II, § 6.)[2]) Als Wegbereiter hatte Gödel ([96], 1933) bereits gezeigt, daß sich der intuitionistische Aussagenkalkül in S4 interpretieren läßt; Stone [283] und Tarski [286] haben bewiesen, daß die offenen Mengen eines topologischen Raumes den Axiomen des intuitionistischen Aussagenkalküls genügen, wenn die Negation durch das Innere der Komplementärmenge interpretiert wird und die Implikation durch die Komplementärmenge der Abschließung der Differenz (relatives Komplement).

---

[1]) Tsao-Tchen-Tang [290], McKinsey [183], H. Weyl [301], fast gleichzeitig, dann McKinsey und Tarski [184].

[2]) McKinsey und Tarski ([184], [185]).

Fälle, in denen die „Wahrheitswerte", deren eine Aussage fähig ist, sich auf eine Menge verteilen, die umfassender ist als die aus den beiden Werten Wahr und Falsch, sind ebenfalls schon von Aristoteles genannt worden, und zwar im Zusammenhang mit „ungewisser Zukunft" (welchen „Wahrheitswert" soll man am Vorabend der Aussage „Morgen wird es eine Seeschlacht geben" zuerkennen?). Diese Vorstellung rief auch während des Mittelalters im mittleren Osten und vor allem in Europa zahlreiche Diskussionen hervor: Kann man der Allwissenheit Gottes Unkenntnis zukünftiger Ereignisse zuschreiben? Immerhin läßt im vierzehnten Jahrhundert William v. Ockham neben wahren Aussagen und falschen Aussagen auch *neutrale* Aussagen zu.

Im Jahre 1902 faßte C. S. Peirce in einem Essai, der erst 1933 mit der Herausgabe seiner Werke [222] veröffentlicht wurde, unter dem Einfluß der Arbeiten von McColl (mit dem er in Briefwechsel stand) sowie des Textes von Aristoteles eine auf einer „dreiwertigen Logik" beruhende „trichotomische Mathematik" ins Auge und untersuchte zahlreiche ternäre Konnektoren.

Man findet kühnere Ideen noch bei N. A. Vasil'ev (1880—1940), der im Jahre 1912 [293] eine imaginäre Welt annimmt, in der bestimmte Objekte gleichzeitig A und nicht-A sein können (aus dem Zutreffen der Eigenschaft nicht-A folgt darin nicht, daß die Eigenschaft A nicht zutrifft, so daß das Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch, „ein und dasselbe Urteil kann nicht gleichzeitig wahr und falsch sein", nicht beachtet zu werden braucht, ein Gesetz, das Vasil'ev auf einem „metalogischen" Niveau ansiedelt). Eine Aussage kann bei ihm bejahend, verneinend oder indifferent (neutral) sein (letzteres ist der Fall, wenn sie die Gestalt „p ist A und nicht-A" besitzt), und er formulierte ein Gesetz des ausgeschlossenen Vierten.

Łukasiewicz war der erste, der 1920 ein (nichtformalisiertes) dreiwertiges System in einer der mathematischen Behandlung fähigen Form vorlegte [175]. Er verwendete die Wahrheitswerte 0 (das Falsche), 1/2 („das Mögliche") und 1 (das Wahre) und legte die Negation bzw. die Implikation durch die „Wahrheitstabellen"

p	1	$\frac{1}{2}$	0
$\neg p$	0	$\frac{1}{2}$	1

p	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
q	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$p \Rightarrow q$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1

fest; ferner definierte er $p \vee q$ durch $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ sowie $p \wedge q$ und $p \Leftrightarrow q$ wie im „klassischen" Fall.

Ein Ziel von Łukasiewicz bestand darin, den Text des Aristoteles über die ungewisse Zukunft zu deuten: Er führte dazu den Möglichkeitsoperator (M) und den Notwendigkeitsoperator (N) durch die Tabellen

p	1	$\frac{1}{2}$	0
Mp	1	1	0

p	1	$\frac{1}{2}$	0
Np	1	0	0

ein. Damit haben die Operatoren die stets gewünschten Eigenschaften, daß $p \Rightarrow \mathrm{M}p$ und $\mathrm{N}p \Rightarrow p$ identisch wahr sind, nicht aber ihre (unerwünschten) Umkehrungen. Eine der ersten Bemerkungen von Tarski, damals Schüler von Łukasiewicz, war, daß $\mathrm{M}p$ als $\neg p \Rightarrow p$ definiert werden kann.

Wie Z. Jordan [136] bezeugte, war Łukasiewicz schon 1922 im Besitz ähnlicher Systeme mit beliebig vielen, ja sogar abzählbar unendlich vielen Werten zwischen dem Wahren und dem Falschen. Er begann sie 1930 zu veröffentlichen [177].

Im Jahre 1931 gelang es M. Wajsberg (1905—1941), das dreiwertige System mit Hilfe der Axiome

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ 2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

3. $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ 4. $[(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow p] \Rightarrow p$

zu axiomatisieren [298].

Die von Lewis und Langford in ihrem Buch *Symbolic logic* im darauffolgenden Jahr diesem System gewidmeten Seiten gaben den Arbeiten über die „mehrwertigen“ Logiken den gleichen Impuls wie den Arbeiten über die „modalen“ Logiken (eine vollständige Bibliographie von N. Rescher [247] über die Jahre 1932 bis 1965 umfaßt 45 Seiten).

Die Schwierigkeit, der im allgemeinen die Versuche begegnen, mehrwertige Logiken durch Rückgriff auf Beiträge zur Theorie der Verbände oder indirekt auf Beiträge zum Verständnis formaler Systeme und ihrer Modelle (wie im Fall der modalen Logiken) zu entwickeln, besteht in einer signifikanten Interpretation der Bedeutung der Konnektoren. Wenn verschiedene Negationen oder mehrere Äquivalenzen möglich sind, nach welchen Kriterien ist dann die richtige auszuwählen?

Trotzdem hat sich die Untersuchung der mehrwertigen Systeme und aus analogen Gründen auch die der modalen Logiken als nutzbringend für die Logik erwiesen, indem sie ihr Elemente eines Vergleichs zwischen Systemen angeboten hat. So genügen z. B. die mehrwertigen Negationen im allgemeinen nicht dem Tertium non datur. Dies führte Heyting zu der Frage, ob die intuitionistische Logik nicht vielleicht eine dreiwertige Logik sei; er schnitt das Problem 1930 an, indem er neben seinem System ein System der dreiwertigen Logik vorstellte, mit dem er sein System verglich, ohne es darauf zurückführen zu können [117]. Im Jahre 1932 bewies Gödel [95], daß sich keine endliche Matrix (d. h. hier: kein System von Wahrheitstabellen mit endlich vielen Werten) zur Definition der Konnektoren der intuitionistischen Logik eignet, und im Jahre 1936 konnte Jaśkowski [133] beweisen, daß der intuitionistische Aussagenkalkül mit einem bestimmten System mit abzählbar unendlich vielen Werten übereinstimmt.

13.4.5. Die rekursiven Funktionen

In der seiner Note vom Oktober 1930 folgenden ausführlichen Abhandlung [94] bewies Gödel, daß die formalisierte Peanosche Arithmetik erster Stufe (vgl. 13.1.7.) keine vollständige Theorie ist (vgl. 13.4.3.), daß man ihre Widerspruchsfreiheit

nur durch in dieser Theorie selbst nicht formalisierte Schlußweisen nachweisen kann und daß dasselbe für jede formalisierte Theorie gilt, die mehr Axiome als diese umfaßt. Alles geht so vor sich, als ob er Hilbert antwortet (der zwischen der formalisierten Induktion und der metamathematischen Induktion unterscheidet, wenn er die Formeln als Objekte nimmt (vgl. 13.4.3.)), daß sich die Beweistheorie im System der Arithmetik umschreiben läßt und man dort folglich die Quelle aller Paradoxien und Diagonalschlüsse wiederfindet (vgl. 13.4.2.): „Die Formeln eines formalen Systems . . . sind . . . endliche Reihen der Grundzeichen (Variable, logische Konstante und Klammern bzw. Trennungspunkte) und man kann leicht genau präzisieren, *welche* Reihen von Grundzeichen sinnvolle Formeln sind und welche nicht . . . Analog sind Beweise vom formalen Standpunkt nichts anderes als endliche Reihen von Formeln (mit bestimmten angebbaren Eigenschaften). Für metamathematische Betrachtungen ist es natürlich gleichgültig, welche Gegenstände man als Grundzeichen nimmt, und wir entschließen uns dazu, natürliche Zahlen als solche zu verwenden. Dementsprechend ist dann eine Formel eine endliche Folge natürlicher Zahlen und eine Beweisfigur eine endliche Folge von endlichen Folgen natürlicher Zahlen. Die metamathematischen Begriffe (Sätze) werden dadurch zu Begriffen (Sätzen) über natürliche Zahlen bzw. Folgen von solchen und daher (wenigstens teilweise) in den Symbolen des Systems . . . selbst ausdrückbar. Insbesondere kann man zeigen, daß die Begriffe ‚Formel', ‚Beweisfigur', ‚beweisbare Formel' innerhalb des Systems . . . definierbar sind . . . Das oben beschriebene Verfahren liefert ein isomorphes Bild des Systems . . . im Bereich der Arithmetik und man kann alle metamathematischen Überlegungen ebenso gut an diesem isomorphen Bild vornehmen . . .; unter ‚Formel', ‚Satz', ‚Variable' etc. sind immer die entsprechenden Gegenstände des isomorphen Bildes zu verstehen." Indem er eine Numerierung $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ der Formeln mit einer freien Variablen einführte (welche Gödel durch ein Beispiel erklärte), betrachtete er die Klasse K der natürlichen Zahlen n, für welche $\neg\mathrm{Bew}\,(F_n(n))$ beweisbar ist, wobei Bew (F) die „Formel" des Systems ist, welche ausdrückt, daß die „Formel" F beweisbar ist: „Da die Begriffe, welche im Definiens vorkommen, sämtlich (in dem System . . .) definierbar sind, so auch der daraus zusammengesetzte Begriff K," d. h., es gibt eine natürliche Zahl p derart, daß $F_p(n)$ ausdrückt, daß $n \in K$ gilt: „Die Analogie dieses Schlusses mit der Antinomie Richard springt in die Augen und auch mit dem ‚Lügner' besteht eine nahe Verwandtschaft, denn der . . . Satz $[R(q); q]$ (hier $F_p(p)$, *d. Ü.*) besagt ja, daß . . . $[R(q); q]$ $(F_p(p))$ nicht beweisbar ist." Es ergäbe sich daher ein Widerspruch, wenn man annimmt, daß $F_p(p)$ beweisbar ist. Wir halten also intuitiv fest: *Wenn es in der Theorie keinen Widerspruch gibt,* muß diese Formel *wahr,* aber *nicht beweisbar* sein. Würde dagegen die Formel $\neg F_p(p)$ einen Beweis besitzen, so wäre sie wahr; es wäre also $p \notin K$. Daher würde $\neg\mathrm{Bew}\,(F_p(p))$ keinen Beweis besitzen, d. h., $F_p(p)$ würde einen Beweis besitzen; Widerspruch (Gödel ging bei seiner informellen Darlegung über eine Schwierigkeit hinweg, die ihn zwang, mehr als die Widerspruchsfreiheit vorauszusetzen, nämlich die sogenannte ω-Widerspruchsfreiheit, nach der man aus der Ableitbarkeit von $F(0)$, $F(1)$, $F(2), \dots, F(n), \dots$ auf die Unableitbarkeit von $\neg\forall k F(k)$ schließen kann; J. B. Rosser hat 1936 gezeigt [252], wie dies zu umgehen ist). Also: *Wenn es in der*

Theorie keinen Widerspruch gibt, so ist $F_p(p)$ nicht entscheidbar, und das System besitzt nichtisomorphe Modelle, von denen die einen $F_p(p)$ erfüllen und die anderen nicht (auf Grund des Vollständigkeitssatzes (vgl. 13.4.6.), den Gödel sechs Monate zuvor bewiesen hatte [92]). Der bewiesene (Meta-)Satz bleibt gültig, wenn man $F_p(p)$ zu den Axiomen hinzufügt: Man erhält so eine neue, kompliziertere Formel, die inhaltlich wahr, aber nicht entscheidbar ist.

Eine solche Darlegung, die von technischen Längen gereinigt ist, verbirgt allerdings den Grund, warum die Begriffe Formel, formaler Beweis usw. „arithmetische Begriffe" sind: Ihre Bildungsregeln entsprechen Definitionen durch Induktion. Gödel ordnete dazu jeder Folge $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ die Zahl $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ zu, wobei $2, 3, \ldots, p_k, \ldots$ die Folge der Primzahlen ist.[1]) Die Bildungsregeln z. B. für die Formeln lassen sich dann durch ein in der Sprache der Arithmetik ausdrückbares Rekursionsverfahren wiedergeben, welches genau die ganzen Zahlen liefert, welche Formeln entsprechen.

Die Behandlung im einzelnen erforderte eine Untersuchung der Funktionen, die durch die verschiedenen Typen von vorkommenden Rekursionen definiert werden. Die Funktionen, die man zur Zeit Gödels „rekursiv" nannte, heißen heute „primitiv rekursiv". Gödel beschrieb die Bildungsregeln für formale Ausdrücke (Terme), die diese Funktionen darstellen. Als Ausgangsfunktionen nimmt man die Konstanten, die Identität und die „Nachfolger"funktion ($x \mapsto x + 1$); setzt man in einem Ausdruck $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ für eine rekursive Funktion für eine der Variablen (z. B. für x_i) den Ausdruck $\psi(y_1, \ldots, y_m)$ für eine andere derartige Funktion ein, d. h. bildet man

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, \psi(y_1, \ldots, y_m), x_{i+1}, \ldots, x_n) ,$$

so erhält man wieder einen Ausdruck für eine rekursive Funktion; wird schließlich φ durch das Rekursionsschema

$$\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n) ,$$
$$\varphi(k + 1, x_2, \ldots, x_n) = \theta(k, \varphi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$$

definiert, in welchem ψ und θ rekursiv sind, so ist auch φ rekursiv.

Man erkennt hierin Dedekinds Gedanken aus *Was sind und was sollen die Zahlen?* [62] wieder; dort ist eine Passage dem Beweis gewidmet, daß zu einem gegebenen Rekursionsschema dieses Typs genau eine Funktion existiert, die ihm genügt. (Die Entdeckung der sogenannten v. Neumannschen Ordinalzahlen (vgl. 13.4.2.) hat ihren Ursprung in einer Überlegung G. Hessenbergs [116] zum Dedekindschen Beweis.)

Parallel dazu wurde die (vage) Borelsche Vorstellung einer effektiv aufzählbaren Menge ([104], [24]) im Jahre 1936 von Kleene mit dem (mathematisch präzisen) Begriff der rekursiv aufzählbaren Menge identifiziert, nämlich als Bild einer (überall definierten) rekursiven Funktion, wobei Rosser [252] bewiesen hat, daß man

---

[1]) In dieser Vorstellung ist weniger enthalten als in der von Leibniz ([162][1], S. 143f.) vorgeschlagenen Benutzung der Primfaktorenzerlegung, da Leibniz außerdem auf diese Weise eine Kombination von durch Primzahlen dargestellten Begriffen beschreiben wollte. Immerhin muß man Leibniz zugestehen, daß er den Gedanken, die Ausdrücke einer Sprache durch ganze Zahlen darzustellen, vorweggenommen hatte.

sie als primitiv rekursiv annehmen kann. In der Periode, die etwa mit dem zweiten Weltkrieg beginnt, wurden die grundlegenden Sätze der Theorie der rekursiven Funktionen und der rekursiv aufzählbaren Mengen gefunden.

Im Jahre 1936 hat dann Church im Laufe von Untersuchungen, die auf diesem Gebiet von ihm und Kleene im Hinblick auf den Umkreis der Axiomensysteme durchgeführt wurden, auf welche sich der Satz von Gödel übertragen läßt, den nach ihm genannten Satz bewiesen [49] (den fast gleichzeitig und unabhängig davon auch Turing [291] erhalten hat): Es gibt keinen Entscheidungsalgorithmus für den Prädikatenkalkül der ersten Stufe. (Dies bedeutet genauer folgendes: Für jedes algorithmische (also rekursive) Verfahren, das nach jeweils endlich vielen Schritten von einer Formel feststellt, ob sie wahr ist oder nicht, existieren Formeln, für welche dieses Verfahren unbegrenzt fortgesetzt werden kann, ohne daß sich ein identifizierbares Entwicklungsgesetz erkennen läßt. Die Tableaus von Beth [12] bilden ein Beispiel für ein solches Verfahren, das von analogen Tabellen Gentzens inspiriert wurde ([88], [89]).)

Skolem [271] hatte 1923 untersucht, wie weit man in der Arithmetik gelangt, wenn man nur mit Formeln arbeitet, in denen keine Quantifizierung über eine unendliche Klasse von Zahlen vorkommt. In diesem Zusammenhang befaßte er sich auch damit, das Gebiet der Definitionen durch (primitive) Rekursion zu untersuchen, und er konnte zeigen, daß man zu keiner umfassenderen Menge von Funktionen gelangt, wenn man das Rekursionsschema der „schwachen" (gewöhnlichen) Rekursion durch das der „starken" Rekursion (Bourbaki [29], I, Kap. III, S. 68) ersetzt. Diese Arbeit hat Hilbert und Bernays sehr interessiert, und zwar deshalb, weil jene Theorie (die man jetzt primitiv rekursive Arithmetik nennt) ihnen ein Beispiel für eine nichttriviale Theorie lieferte, deren Entscheidbarkeit sich mittels finiter Verfahren beweisen läßt. Skolem arbeitete darin die beschränkte Quantifizierung[1]) aus und zeigte, daß ihre Benutzung zugelassen werden kann, ohne daß dadurch die Entscheidbarkeit beeinflußt wird.

Im Jahre 1925 schlug Hilbert in seiner Arbeit *Über das Unendliche* [126] vor, die Kontinuumhypothese (vgl. 13.4.2.) dadurch zu beweisen, daß man eine transfinite Erweiterung (vgl. 13.4.2.) des Rekursionsschemas benutzt, die scheinbar allgemeiner ist als das Gödelsche (R. Péter [223] hat 1934 die Äquivalenz beider bewiesen). Das war für ihn auch die Gelegenheit, eine von Ackermann entdeckte nicht primitiv rekursive Funktion vorzustellen. In dem Beweis, den Ackermann 1928 dafür veröffentlichte,[2]) führte dieser zunächst die Hilfsfunktionen $\alpha(a, n)$ ein, die durch $\alpha(a, 0) = 0$, $\alpha(a, 1) = 1$, $\alpha(a, n) = a$ für $n > 1$ gegeben werden; die Funktion φ wird sodann nach dem folgenden Schema der *simultanen* Rekursion über ihre letzten beiden Variablen definiert:

$$\begin{aligned}
&\varphi(a, b, 0) = a + b\,,\\
&\varphi(a, 0, n + 1) = \alpha(a, n)\,,\\
&\varphi(a, b + 1, n + 1) = \varphi(a, \varphi(a, b, n + 1), n)\,.
\end{aligned}$$

[1]) $(\exists x \leqq a)$ [...] und $(\forall x \leqq a)$ [...].

[2]) Das hier angegebene Schema zur Definition von φ ist etwas von dem von Ackermann benutzten verschieden; es ist aber bewiesen, daß φ dem hier angegebenen Schema genügt.

Die gesuchte Funktion ist schließlich $\varphi(a, a, a)$, von der Ackermann zeigte, daß sie schneller wächst als jede primitiv rekursive Funktion. Gleichzeitig zeigte er damit, daß eine durch eine simultane Rekursion definierte Funktion nicht primitiv rekursiv zu sein braucht.

Als Nachfolger in der Tradition von E. Borel, von dem die effektive Definition und die effektive Aufzählung ([104], [27]) sowie die wohldefinierte berechenbare Funktion stammen [26], führte Herbrand in seiner letzten Abhandlung [114] den Begriff der effektiv berechenbaren Funktion ein; er verfolgte dabei das Ziel, einen klaren Beweis der Widerspruchsfreiheit des schon von Ackermann (vgl. 13.4.3.) betrachteten Teils der Arithmetik zu geben; diese Funktionen umfassen die oben genannten Typen von rekursiven Funktionen. In einem Brief an Gödel aus jener Zeit (1931)[1]) formulierte er eine Definition dieses Begriffs, aus dem Gödel durch geringfügige Einschränkung den Begriff gewann, den er in einer Vorlesung in Princeton 1934 allgemein rekursive Funktion[2]) nannte [97].

Church und Kleene untersuchten ab 1932 eine andere Klasse von Funktionen, die der „λ-definierbaren" Funktionen,[3]) und kamen zu der Einsicht, daß auch diese berechenbar sind. Im Jahre 1936 bewiesen Church [49] und Kleene [138], daß sich dieser Begriff mit dem der allgemein rekursiven Funktion deckt, und Church formulierte die heute als „Churchsche These" bekannte Hypothese, nach der jede effektiv berechenbare Funktion (dies ist ein intuitiver Begriff) durch den formalen Ausdruck einer allgemein rekursiven Funktion (dieser Begriff ist Objekt einer mathematisch präzisen Definition) darstellbar ist.

Zur gleichen Zeit schlug Turing (1912—1954) in einer völlig unabhängig davon verfaßten Abhandlung [291] und unter Verwendung einer ganz anderen Definition einen Begriff der berechenbaren Funktionen vor und macht dieselbe Annahme, daß seine Definition dem intuitiven Begriff der Berechenbarkeit adäquat sei; etwas später bewies er [292]. daß dieser Begriff mit dem der λ-definierbaren Funktion, also dem der allgemein rekursiven Funktion übereinstimmt. Für Turing war eine Funktion berechenbar, wenn sie auf einer theoretischen Maschine eines von ihm beschriebenen Typs berechenbar ist, für den sich die Bezeichnung „Turing-Maschine" eingebürgert hat: Diese Maschine umfaßt einen Speicher, der aus

---

[1]) Wie Gödel in [110], S. 619, mitteilte.

[2]) Diese Definition läuft darauf hinaus [140], daß außer den Verfahren zur Bildung primitiv rekursiver Funktionen auch der Übergang von φ zu ψ zugelassen wird, wobei $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ das kleinste y mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ ist; dabei beschränkt man sich auf solche Funktionen φ, für welche für jedes $(x_1, \ldots, x_n)$ ein derartiges y existiert. Spätere Untersuchungen von Kleene ([139], 1938) haben gezeigt, daß es sich lohnt, auch partiell definierte rekursive Funktionen zuzulassen (dabei werden dieselben Berechnungsverfahren auch auf Werte angewandt, bei denen sie nicht nach einer endlichen Etappe abbrechen); diese Funktionen sind die im Sinne von Turing durch „Programme" berechenbaren Funktionen, bei denen es ebenfalls vorkommen kann, daß sie unendliche Zyklen enthalten, was dann zu Werten führt, für welche diese Funktionen nicht definiert sind.

[3]) Um den Leser nicht völlig im Unklaren zu lassen, merken wir an, daß Church mit $\lambda x \varphi(x, y)$ die (vom Parameter y abhängende) Funktion $x \mapsto \varphi(x, y)$ bezeichnete, usw. Über die Geschichte jener Epoche berichtete Kleene in [141].

einem unendlichen linearen Band von „Feldern" besteht, die leer oder besetzt sein können; ihr anderer Teil ist insgesamt ein endlicher „Automat", der endlich vieler „Zustände" fähig ist; in jeder Etappe fragt dieser Automat ein bestimmtes Feld des Speichers ab, und nach einem vorher fixierten Programm, das Instruktionen für jeden Zustand des Automaten und jeden Inhalt des abgefragten Feldes enthält, führt sie eine Folge von drei Operationen aus; die erste betrifft den Inhalt des Feldes (gemäß der Instruktion bleibt dieser entweder unverändert, oder sein Inhalt wird in bestimmter Weise abgeändert), die zweite betrifft die Position des Bandes (je nach der Instruktion richtet sich die in der nächsten Etappe vorgesehene Befragung an das Feld unmittelbar vor oder unmittelbar nach demjenigen, das zuvor befragt wurde), die dritte bewirkt (gemäß der Instruktion) den Übergang des Automaten in einen (eventuell) anderen Zustand. Ein moderner Computer könnte in dieser Weise konstruiert sein; eine solche Turing-Maschine unterscheidet sich von einem solchen nur durch die unbeschränkte Kapazität ihres Speichers und ihr störungsfreies Funktionieren. Die „These von Church" hat seither zahlreiche andere Bestätigungen erhalten, indem der intuitive Begriff der Berechenbarkeit auf andere — zum Begriff der rekursiven Funktion äquivalente — Begriffe zurückgeführt wurde. Sehr häufig verwendete Begriffe sind die Normalsysteme von Post ([241], 1936, und [242], 1943; sie gehen auf Untersuchungen zurück, welche bereits aus der Zeit von 1920 bis 1922 stammen) und der Begriff des Markovschen Algorithmus ([187], 1951).

Ohne die Schärfe, welche die mathematische Behandlung der primitiv rekursiven Funktionen und die detaillierte Beschreibung der formalen Systeme, auf die sich sein Satz anwenden läßt, den Überlegungen Gödels verleihen, war sein Ergebnis, daß unter den Aussagen der nach den Vorstellungen Hilberts ([123], [126]; vgl. 13.4.3.) als vollständig formalisiert aufgefaßten Mathematik eine unentscheidbare Aussage vorkommt, d. h. eine Aussage mit der Eigenschaft, daß weder sie noch ihre Negation einen formalen Beweis besitzen, schon gegen Ende 1925 von P. Finsler [72] vorweggenommen worden. Seine Überlegung war intuitiv und nicht formal, nach Art der Richardschen ([249]; vgl. 13.4.1.), die sie inspiriert hatte, und dies, obwohl sie auf formale Objekte angewandt wurde. Finsler betrachtete die unendlichen binären Folgen (aus den Ziffern 0 oder 1) und die formalen Beweise entweder der Tatsache, daß eine solche Folge unendlich viele Nullen enthält, oder der Tatsache, daß sie nicht unendlich viele Nullen enthält. Man kann jene Beweise aufzählen und diese Aufzählung auf die Folgen übertragen, die sie betreffen; sodann kann man die zugehörige Diagonalfolge und die entsprechende „Antidiagonalfolge" bilden (welche man aus der Diagonalfolge erhält, indem man den entgegengesetzten Wert jedes Gliedes nimmt). Die Antidiagonalfolge kann nicht zur Aufzählung gehören, also auch nicht von einem der betrachteten Beweise erfaßt werden; die Aussage, die besagt, daß sie nicht unendlich viele Nullen enthält, ist also „formal unentscheidbar". Man kann jedoch formale Beweise einer Länge, die jede vorgegebene Größe übertrifft, dafür finden, daß die Folge, deren sämtliche Glieder 1 sind, nicht unendlich viele Nullen enthält; diese Folge wird also in der Aufzählung unendlich oft wiederholt; die Antidiagonalfolge enthält daher unendlich viele

Nullen, und die betrachtete Aussage ist, obwohl es dafür keinen formalen Beweis gibt, trotzdem intuitiv falsch.

Im Jahre 1937 schlug Turing [292] vor, als Kriterium für die Definition des Begriffs eines formalen Systems lediglich den rekursiven Charakter der bei der Konstituierung des Kalküls verwendeten Regeln zur Bildung von Zeichenfolgen (Ausdrücken usw.), Folgen von Zeichenfolgen (formalen Beweisen usw.), ... beizubehalten,[1]) und die Logiker der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts bemerkten, daß die rekursiven Funktionen auf ähnlichen Umwegen in allen Zweigen der Logik von grundlegender Bedeutung sind. Dasselbe ist auch in der Arithmetik der Fall, in der die Untersuchung der rekursiven Funktionen tatsächlich ein Kapitel darstellt. Darüber ist man sich deutlich klar geworden im Anschluß an den Satz, mit dem Matijasevič 1970 das 10. Hilbertsche Problem gelöst hat [188] und der besagt, daß die Lösungsmengen diophantischer Gleichungen (die man erhält, indem man Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten gleich null setzt) mit den rekursiv aufzählbaren Mengen übereinstimmen (vgl. 5.9.6.).

13.4.6. *Die Anfänge der Modelltheorie*

Die Unterscheidung zwischen einer formalen Sprache und den Formen, deren Betrachtung sie ermöglicht und die sie zum Gegenstand ihrer Untersuchungen macht, sind nicht zu trennen von einer neuen Art des Herangehens an deren Bedeutungen und einer parallel verlaufenden Unterscheidung und Untersuchung ihrer Interpretationen. Es scheint, daß man v. Neumann [196] die Einführung des sehr zweckmäßigen Terminus *Modell* in die Logik zur Bezeichnung einer Struktur zu verdanken hat, deren Untersuchung eine formale Sprache zum Inhalt haben kann. In der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts hat sich für die Untersuchung von Interpretationen formaler Sprachen und ihrer Beziehungen zu den Theorien, deren Modelle sie beschreiben, die Bezeichnung Modelltheorie eingebürgert. In den zwanzig Jahren davor, als die Terminologie noch nicht definitiv festgelegt war, hatte man die Untersuchung der Art und Weise, in der man formalen Sprachen und ihren Ausdrücken einen Inhalt zuerkennen kann, *Semantik* genannt. Die vorangehenden Ausführungen zeigen, daß die Mathematiker, um sich solchen Unter-

---

[1]) Diesem Standpunkt hat sich ebenfalls Gödel ([110], S. 616) angeschlossen. Auch bei der Art, die Grundzeichen zu numerieren und die Zeichenfolgen zu „kodieren", kommt es nur darauf an, daß die „Kodierung" primitiv rekursiv ist, damit nämlich in den „Kodes" der beim Beweis benutzten metamathematischen Begriffe ihr rekursiver, also definierbarer Charakter erhalten bleibt. Der oben als „Kode" der Folge $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ angegebene Ausdruck $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ hat also nur beispielhaften Charakter. Man könnte ebensogut annehmen, $n_1, \ldots, n_k$ seien als Strichfolgen gegeben, und dann $[n_1, \ldots, n_k]$ als eine im Zahlsystem zur Basis 4 geschriebene Zahl ansehen (mit dem Strich, dem Komma und den beiden eckigen Klammern als Chiffrezeichen).

Die von Cantor entdeckte bijektive Abbildung $(x, y) \mapsto (x + y)(x + y + 1)/2 + y$ von $\boldsymbol{N}^2$ auf $\boldsymbol{N}$ (vgl. 6.8.1.) ist auch deshalb wichtig, weil sie primitiv rekursiv ist und solche Kodierungen ermöglicht.

suchungen zu widmen, nicht die Schaffung eines Begriffs abgewartet hatten, unter den diese Untersuchungen fallen.

Die Axiomatik, wie sie aus dem neunzehnten in das zwanzigste Jahrhundert übernommen wurde (vgl. 13.1.7.), bringt die Situation, die wir soeben beschrieben haben, zum Ausdruck: Das System der Grundbegriffe einer hypothetisch-deduktiven Theorie spielte die Rolle der formalen Sprache, und die verschiedenen Interpretationen, deren eine solche Theorie fähig ist, bildeten ihre Modelle. Bekanntlich kann ein Axiomensystem unerwartete Modelle haben: Beispielsweise besitzt die absolute Geometrie nichteuklidische Modelle. Aber auch die Axiomatisierung der absoluten Geometrie war ein Problem, mit dem sich Hilbert zwischen der ersten und der zweiten Auflage seiner *Grundlagen der Geometrie* [120] konfrontiert sah (vgl. 13.1.7.). Im Jahre 1904 hatte O. Veblen [294] die Bezeichnung ***kategorisch*** für ein Axiomensystem geprägt, das im wesentlichen — d. h. bis auf Isomorphie — nur ein einziges Modell besitzt. Die damals einhellige Meinung, daß es nur eine einzige absolute geometrische Realität gebe, von der die geometrischen Axiome Zeugnis ablegen müßten, wurde durch die Forderung nach einem kategorischen Axiomensystem zum Ausdruck gebracht. Zu diesem Zweck ergänzte Hilbert das System der *Grundlagen* um das Axiom der Vollständigkeit, das ein Axiom zweiter Stufe ist (vgl. 13.4.1.), damit nämlich dieses System die gewünschte Kategorizität besitzt. Mirimanoff ([190], [191]) bemerkte (vgl. 13.4.2.), daß das Zermelosche Axiomensystem nicht kategorisch ist, was im Jahre 1921 Fraenkel [75] dazu veranlaßte, ein ***Begrenzungsaxiom*** vorzuschlagen (das aber nicht beibehalten wurde), um die Uferlosigkeit der Klasse der Mengen zu reduzieren, und Tarski konzipierte einen Begriff der absoluten Wahrheit in seiner Abhandlung aus dem Jahre 1931 *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* [285].

Das Erbe der Schröderschen Algebra der Relationen (vgl. 13.3.2.) stellt gewissermaßen die umgekehrte Situation dar. Die meisten Modelle, die man um den Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts herum vorlegte, waren Strukturen (vgl. 13.2.2). Andererseits begannen sich die Theorien spezieller Strukturen zu entwickeln: die Körpertheorie (Steinitz [278]), die Verbandstheorie (Dedekind [63]; vgl. 13.3.3.), die Arithmetik der natürlichen (Dedekind [62], Peano [210]; vgl. 13.1.7.) und der reellen Zahlen (Dedekind [61]; vgl. 6.5.), die Theorie der Algebren (B. und C. S. Peirce [217]) und die Gruppentheorie (Cayley [47]; vgl. 13.2.2.). Die Algebra der Relationen ist gewissermaßen die Theorie der maximalen Strukturen, die Theorie aller Relationen der ganzen Skala von Typen über einem Bereich. Die Problematik dieser Disziplin führt, wenn die Relationen isoliert werden, die in einer Gleichung vorkommen, zur Untersuchung der durch diese Relationen bestimmten Strukturen. Als Hilbert am Ende des ersten Weltkrieges Bernays als Mitarbeiter gewann und damit begann, eine Arbeitsgruppe zu bilden, um die Realisierung seines Programms (vgl. 13.4.3.) in Angriff zu nehmen, schufen sie sich zunächst eine formale Sprache nach dem Vorbild der *Principia Mathematica* [303] von Whitehead und Russell; sie waren sich bewußt, über dieses Werk hinaus das Vermächtnis der Algebra der Relationen anzutreten. In seiner schon zitierten Abhandlung [285] aus dem Jahre 1931 bemerkte Tarski hierzu: „In den Forschungen, die gegenwärtig auf dem Gebiete der Methodologie der deduktiven Wissenschaften betrieben werden (insbe-

sondere in den Arbeiten der Göttinger Schule, die sich um Hilbert gruppiert), spielt eine viel bedeutendere Rolle als der Begriff der Wahrheit, von dem bisher die Rede war, ein anderer Begriff von relativem Charakter, welcher jenen als Sonderfall umfaßt, nämlich der Begriff *der in einem Individuenbereich a richtigen oder wahren Aussage*" (*[8 bis], S. 492). Diese Terminologie ist noch die der Schröderschen Schule; die Termini „Erfüllung", „Gültigkeitsbereich" und „Allgemeingültigkeit" finden sich schon in der Schröderschen *Algebra der Logik* ([260], 1890—1910). Sie verstehen sich dort von selbst und werden dort ganz intuitiv gehandhabt als das, was einem „Ausdruck" (von der Art eines Polynoms, dessen Operationen aber geeignet sind, als Konnektoren oder Quantoren gelesen zu werden) zukommt, der gleich 1 (der universellen Relation) gesetzt wird; diese Auffassung hat den Mangel, daß sie die Formel nicht von ihrer Interpretation unterscheidet. Eine derartige Vermischung gab es im Kreise Hilberts nicht mehr: Die Ausdrücke waren hier rein formaler Natur, aber man entsagte sich noch einer exakten Darstellung ihrer Interpretation, die intuitive Verwendung der oben genannten Termini wurde zunächst beibehalten. Erst Tarski entwickelte auch für die Interpretation eine sorgfältig ausgearbeitete Theorie: Bei der Definition dafür, daß eine Formel durch eine Belegung der Variablen mit Elementen einer Struktur (die geeignet ist, ihre Interpretation zu ermöglichen) erfüllt wird, ging Tarski induktiv vor, wobei er dem induktiven Aufbau der Formeln folgte (beispielsweise wird $\neg A$ genau dann als erfüllt angesehen, wenn A nicht erfüllt ist); im Anfangsschritt muß die Folge der Elemente, mit denen die Argumente eines primitiven formalen Ausdrucks (der weder Konnektoren noch Quantoren enthält) belegt werden, zum Graphen der Relation gehören, durch welche die Relationsvariable dieses Ausdrucks interpretiert wird. Eine Formel heißt in einer Struktur erfüllbar, wenn sie durch mindestens eine Belegung der Variablen mit Werten aus dem Bereich dieser Struktur erfüllt wird; eine Formel ist in einer Struktur gültig, wenn sie durch jede Belegung mit Werten des Bereiches erfüllt wird; sie ist allgemeingültig, wenn sie in allen Strukturen (die geeignet sind, ihre Interpretation zu ermöglichen) gültig ist.

In späterer Zeit nannte man eine Struktur ein Modell einer Formel, wenn diese Formel in der Struktur gültig ist. Eine Formel heißt eine semantische Folgerung (oder logische Folgerung) aus einer Menge von Annahmen, wenn jedes Modell dieser Annahmen ein Modell jener Formel ist; so hatte schon Bolzano [17] die „Ableitbarkeit" aufgefaßt.

Es gibt auf diese Weise jetzt zwei Folgerungsbegriffe: den der deduktiven Folgerung (vgl. 13.4.3.) und den der semantischen Folgerung. Jede deduktive Folgerung ist trivialerweise eine semantische Folgerung, da jedes Modell der Prämissen einer Schlußregel ein Modell ihrer Konklusio ist. Die Umkehrung wirft ein Problem auf: das Problem der semantischen *Vollständigkeit* des Systems. Der Gebrauch des Terminus Vollständigkeit in diesem Sinne scheint auf die Formulierung jenes Problems für den Prädikatenkalkül der ersten Stufe in der ersten Auflage (1928) der *Grundzüge der theoretischen Logik* [128] von Hilbert und Ackermann zurückzugehen. Die Lösung dieses Problems bildete der Anfang 1930 von Gödel in seiner Habilitationsschrift [92] bewiesene Vollständigkeitssatz. Die Vollständigkeit des Aussagenkalküls war schon 1921 von Post bewiesen worden [240], die der Prädika-

tenkalküle höherer Stufe wurde im Jahre 1950 von L. Henkin [112] bewiesen. Benutzt man jedoch nur solche Modelle, in denen die Ausdrücke, welche die in der höheren Stufe intendierte Bedeutung haben, wie wir sie in 13.4.1. erklärt haben, so gilt ein solcher Vollständigkeitssatz nicht mehr (es gibt dann Formeln, die in allen diesen Modellen inhaltlich wahr sind, aber keine deduktiven Folgerungen aus Axiomen sind). Um seinen Satz zu erhalten, mußte Henkin Modelle berücksichtigen, die sich von den intendierten Modellen durch unerwartete Züge unterscheiden (z. B. die erwähnten Formeln nicht befriedigen). Solche Modelle werden heute „Nicht-Standardmodelle" genannt.

Die erste präzise Beschreibung eines Nicht-Standardmodells geht auf Skolem ([273], 1934) zurück. Es handelt sich dabei um ein explizit konstruiertes Modell der Peanoschen Axiome erster Stufe (vgl. 13.1.7.), in welchem ein außerhalb eines zu $\boldsymbol{N}$ isomorphen Abschnitts liegendes Element existiert. Es gibt dann natürlich unendlich viele solcher Elemente, und es kann unter diesen kein erstes geben (denn da es nicht 0 ist, muß es einen unmittelbaren Vorgänger haben): Die Ordnung dieses Modells ist also keine „wirkliche Wohlordnung". Diese anscheinend paradoxe Situation erklärt sich dadurch, daß es in der Sprache der Arithmetik erster Stufe keine Formel gibt, die geeignet wäre, den zu $\boldsymbol{N}$ isomorphen Abschnitt zu definieren, und auch keine andere, die den komplementären Rest der „unendlich großen ganzen Zahlen" des Modells definiert; man kann folglich nicht aufschreiben, daß dieser Rest leer ist oder ein erstes Element haben müßte.

Daß eine solche Situation theoretisch möglich und wie sie zu erklären ist, war von v. Neumann schon 1925 in der oben zitierten Arbeit [196] vorhergesehen worden. Er gab dort einen Beweis des Theorems von Löwenheim-Skolem (vgl. 13.3.2.), der darin besteht, daß aus einem Modell der betrachteten Axiome ein abzählbares Untermodell extrahiert wird: „Im System Σ' liegen eine Reihe von Mengen und von Abbildungen vor. Diese genügen den formalen Anforderungen der Mengenlehre. Die Mengen haben alle möglichen Mächtigkeiten. Aber alle diese Mächtigkeiten sind scheinbar, sind nur Mächtigkeiten relativ zur Gruppe der Abbildungen des Systems. Denn das alte System Σ' umfaßt (trotz seiner formalen Vollständigkeit) noch lange nicht alle denkbaren Abbildungen. Ein ‚höheres' System P muß bereits neue Abbildungen enthalten, so z. B. solche, die alle (unendlichen) Mengen in Σ' auf einander abbilden" (S. 51). Einige Seiten später kam er darauf zurück (S. 55f.): „Es ist aber vielleicht sogar auch mit der Endlichkeit so. Die Definition der Endlichkeit ist jedenfalls infolge des Auftretens des Begriffes ‚alle' und ‚es gibt' in bezug auf das ganze System (Σ_1 bzw. Σ_2) derartig, daß man nichts Bestimmtes sagen kann. Ebenso steht es mit der Wohlordnung ... und es ist nicht ausgeschlossen, ... daß eine Menge a im System Σ_1 wohlgeordnet (bzw. endlich) zu sein scheint und sich im ‚feineren' Systeme Σ_2 als nicht wohlgeordnet (bzw. unendlich) herausstellt, bloß weil ein Teil b von ihm, der kein erstes Element hat, im Systeme Σ_1 keine Menge war, also dort nicht bemerkt wurde, es aber im Systeme Σ_2 ist. (Analog bei der Endlichkeit). ... Außerdem sind auch hier *die Hilbertschen Ansätze machtlos*: denn dieser Einwand betrifft nicht die Widerspruchsfreiheit, sondern die Eindeutigkeit (Kategorizität) der Mengenlehre."

Eines der von Tarski in seiner Abhandlung *Über den Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* [285] erzielten Ergebnisse besagt, daß keine (widerspruchsfreie) Definition des Wahrheitsbegriffs für eine formale Sprache existieren kann, die sich mit Hilfe der Ausdrucksmittel dieser Sprache formulieren läßt.

Die weitere Entwicklung der Theorie, deren präzise Grundlagen damit errichtet waren, vollzieht sich fast ganz in der jüngsten Vergangenheit, die wir hier nicht mehr behandeln, und sie ist reich an grundlegenden und wichtigen Sätzen. Tarski selbst hat dazu viele Beiträge geleistet und darüber hinaus eine große Schar von Mitarbeitern angeregt.

Der oben beschriebene Modellbegriff, bei dem der Mengenlehre eine besondere Rolle als Basis bei der Konstruktion von Interpretationen zukommt, ist auf verschiedene Art erweitert worden. Ein Beispiel einer Interpretation, das ganz deutlich seine Subsumtion unter einen breiteren Begriff erkennen läßt, ist das Ackermannsche Modell für die Mengenlehre ZFC ohne Unendlichkeitsaxiom ([1], 1937). In ihm wird $p \in q$ durch „die p-te Ziffer in der Dualdarstellung von q ist Eins" interpretiert, und es ermöglicht es, die Unabhängigkeit des Unendlichkeitsaxioms von den anderen Axiomen von ZFC leicht zu beweisen.

13.4.7. Die Lösung des ersten Hilbertschen Problems

Wir haben bereits die vom Auswahlaxiom (vgl. 13.4.2.) hervorgerufenen Diskussionen erwähnt. Sie schlugen bald in Versuche für Beweise dafür um, daß dieses Axiom den übrigen Axiomen widerspreche bzw. daß es davon unabhängig sei. Ein erstes Ergebnis in Richtung Unabhängigkeit wurde 1922 von A. Fraenkel [75] erzielt, doch bezog es sich nur auf das System *ohne Fundierungsaxiom* (vgl. 13.4.2.), da die Menge von Paaren ohne Auswahlfunktion, welche es darbot, aus Paaren von Urelementen bestand. In bezug auf die zur Hierarchie der $R(\alpha)$ (vgl. 13.4.2) gehörenden Mengen, die allein aus der leeren Menge durch Iteration des Übergangs zur Potenzmenge hervorgehen, gab es zu dieser Zeit keine Beiträge; ebensowenig kam bezüglich dieser Mengen etwas hinzu, bis zwischen 1955 und 1957 Shoenfield [265], Mendelson [189] und Specker [275] unabhängig voneinander auf den Gedanken kamen, die Urelemente durch „außergewöhnliche Mengen" (vgl. 13.4.2.) zu ersetzen, was es ermöglichte, den Unabhängigkeitsbeweis auf die üblichen Axiome auszudehnen (die in einer Gestalt formuliert wurden, welche die Nicht-Existenz von Urelementen impliziert: Das einzige Objekt ohne Element ist dann die leere Menge).

Inzwischen hatte sich die Gewohnheit eingebürgert, diejenigen Teile eines Beweises abzutrennen, die man nur behandeln konnte, indem man auf das Auswahlaxiom zurückgriff, und es wurden immer mehr Eigenschaften bekannt, die sich als dem Auswahlaxiom bei dieser Betrachtungsweise äquivalent erweisen. Im Jahre 1963 wurde eine Liste der Eigenschaften (und ihrer Beweise) zusammengestellt, die man damals kannte; sie umfaßt ein kleines Buch von 130 Seiten [253].

Die Kontinuumhypothese hatte ein ähnliches Schicksal: Jeder Beweis, der sie benutzte, ließ sich als Teil eines eventuellen späteren indirekten Beweises auf-

fassen und jeder Schluß, der auf sie führte, als Rückführung auf einen eventuellen Beweis der Voraussetzungen dieses Schlusses.

Die einzige Information über die Kardinalzahl $2^{\aleph_0}$,[1]) die man aus den von Zermelo formulierten Prinzipien jemals erhielt, war ein 1905 von J. König erzieltes Ergebnis [147]: Die Kardinalzahl $2^{\aleph_0}$ ist keine obere Grenze einer abzählbaren Folge von echt kleineren Kardinalzahlen. Schon 1923 fragte sich Skolem, ob die Kontinuumhypothese nicht von den anderen Axiomen unabhängig sei [270], und bald sah man unter der Feder von N. Lusin [266] eine konkurrierende Hypothese entstehen: $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ („es gibt ebenso viele Teilmengen von $\boldsymbol{N}$ wie von $\boldsymbol{R}$").

Es ist schwer zu sagen, wo und wann in den Seminaren, in denen man sich damals mit Mengenlehre befaßte, die Idee geboren wurde, die Kontinuumhypothese der verallgemeinerten Kontinuumhypothese $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ zu subsummieren (für jede Ordinalzahl α ist $\aleph_\alpha$ die α-te transfinite Kardinalzahl, und $2^{\aleph_\alpha}$ ist die Kardinalzahl der Menge aller Teilmengen einer Menge der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$; nach dieser Hypothese wäre $2^{\aleph_\alpha}$ stets die unmittelbar auf $\aleph_\alpha$ folgende Kardinalzahl). Nimmt man das Fundierungsaxiom hinzu, so folgt aus dieser Hypothese das Auswahlaxiom; diese Tatsache hat Sierpiński [267] im Jahre 1947 bewiesen. Sie war aber (im wesentlichen) schon 1926 von Lindenbaum (1904—1941) und Tarski [170] ausgesprochen worden.

Das war noch der Stand, als Gödel 1938 die Entdeckung eines Beweises dafür anzeigte, daß Auswahlaxiom und verallgemeinerte Kontinuumhypothese mit den anderen Axiomen der Mengenlehre verträglich sind [98]; das war der erste Fortschritt in der Richtung, das Problem nach einem von Hilbert am Schluß seines Vortrages *Über das Unendliche* [125] vorgelegten Plan anzugreifen. Grob vereinfacht bestand die Idee von Hilbert darin, den Nachweis zu versuchen, daß alle Folgen ganzer Zahlen sich durch ein auf das abzählbar Unendliche ausgedehntes Einsetzungsschema und ein entsprechend verallgemeinertes Rekursionsschema definieren lassen (die Folgen bilden eine Menge der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, die betrachteten Definitionen bilden eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$ der Menge der abzählbaren Ordinalzahlen), und er legte ein Analogon für alle unendlichen Kardinalzahlen nahe. Gödel gelang es zu zeigen, daß die so definierbaren Folgen als Material für ein *Modell* der Kontinuumhypothese geeignet sind.

Im Jahre 1929 hatte v. Neumann auf Grund einer von Skolem 1923 gemachten Bemerkung [270] bewiesen, daß das Fundierungsaxiom mit den anderen Axiomen verträglich ist, indem er den Begriff der Menge durch den der wohlfundierten Menge interpretierte (vgl. 13.4.2.), und zwar in der Art des neunzehnten Jahrhunderts, aber formalisiert: Der Beweis besteht in der Beschreibung eines einheitlichen Übersetzungsverfahrens von interpretierten Formeln durch interpretierende Formeln, wobei die ersteren als verifiziert angesehen werden, wenn die letzteren Sätze sind. Da das v. Neumannsche Axiomensystem Klassen zuläßt (vgl. 13.4.2.), hätte er auch direkt sagen können, daß die Klasse der wohlfundierten Menge ein Modell der Mengenlehre und des Fundierungsaxioms bildet. Dies bewies er, indem

[1]) Nach Cantor bezeichnet $\aleph_0$ die Kardinalzahl des Abzählbaren, d. h. die von $\boldsymbol{N}$, und $2^{\aleph_0}$ die Kardinalzahl des Systems der Teilmengen einer abzählbaren Menge.

er zuließ, daß die universelle Klasse ein Modell der Mengenlehre sein kann, in dem das Fundierungsaxiom nicht gilt. Gödel gab ein analoges Modell an, das der von ihm als *konstruierbar* bezeichneten Mengen, die man durch transfinite Iteration der verschiedenen in den Axiomen fixierten Bildungsverfahren erhält, aber mit Maßgabe, daß der Begriff der Teilmenge durch den Begriff der *definierbaren* Teilmenge interpretiert werden muß. Das sind die Mengen, die zu den Gliedern der durch

$$M_0 = \emptyset\,, \qquad M_{\alpha+1} = D(M_\alpha)\,, \qquad M_\lambda = \bigcap_{\beta<\lambda} M_\beta \quad (\lambda \text{ Limeszahl})$$

definierten Hierarchie gehören, wobei $D(E)$ die Menge der Teilmengen von E bedeutet, welche durch eine charakteristische Eigenschaft ihrer Elemente definierbar sind, die sich durch eine Formel der Mengenlehre ausdrücken läßt (und wobei der Gebrauch von in E zu wählenden Parametern gestattet ist). In der Besprechung, die Bernays von Gödels Arbeit für das *Journal of Symbolic Logic* (Bd. 5, S. 117) anfertigte, wird daran erinnert, daß diese Vorstellung mit derjenigen übereinstimmt, die Whitehead und Russell ([303], [256]) von den Eigenschaften von Objekten eines Typus E (vgl. 13.4.1.) in ihrer Typentheorie hatten (wo allerdings noch nicht deutlich zwischen Eigenschaften und sie definierenden Formeln unterschieden wird): Die Klasse der konstruierbaren Mengen bildet ein Modell der Theorie, und der Satz, der gewährleistet, daß das auch ein Modell der verallgemeinerten Kontinuumhypothese ist (sowie des Auswahlaxioms, wenn dieses nicht zu der Theorie hinzugenommen worden ist), bringt eine Form des Reduzibilitätsaxioms (vgl. 13.4.1.) zum Ausdruck.

Die Beziehungen zwischen dem Auswahlaxiom, der Kontinuumhypothese und den anderen Axiomen (der Zermelo-Fraenkelschen Theorie) wurden 1963 von P. Cohen [52] vollständig aufgeklärt. Cohen führte eine neue Methode („forcing") der Hinzunahme weiterer Mengen zu einem gegebenen Modell (der anderen Axiome) ein, verbunden mit der Konstruktion einer *Erweiterung* dieses Modells, d. h. eines Modells, für die das ursprüngliche Modell ein Untermodell ist (gerade die von v. Neumann vorausgesehene Situation!; vgl. 13.4.6.) — eine Methode, die den Verfahren der schrittweisen Konstruktion von Objekten der intuitionistischen Mathematik nahe verwandt ist (vgl. 13.4.4.). Ausgehend von einem Modell des Auswahlaxioms und der verallgemeinerten Kontinuumhypothese ist Cohen in der Lage, einerseits Modelle des Auswahlaxioms zu konstruieren, die der Kontinuumhypothese widersprechen und für deren Mengen sich eine beliebige der durch den Satz von König (siehe oben) nicht verbotenen Möglichkeiten für den Wert von $2^{\aleph_0}$ realisieren läßt (dieser Satz ist „der bestmögliche"), und andererseits erhält er ein Modell, das dem Auswahlaxiom widerspricht (insbesondere dem für eine abzählbare Familie von nichtleeren Mengen) und in dem eine abzählbare Menge existiert, die keiner ihrer echten Teilmengen gleichmächtig ist. Ein Modell der zuletzt genannten Art wird dadurch erhalten, daß man zu den zum Ausgangsmodell gehörenden Teilmengen von $\boldsymbol{N}$ abzählbar viele neue Teilmengen hinzufügt, die im Verhältnis zu denen des Ausgangsmodells sämtlich „generisch" (d. h. grob vereinfacht gesagt, jeder Charakterisierung mit Hilfe von Parametern des Ausgangsmodells unzugänglich) sind und indem man von diesen neuen Teilmengen ausgehend dieselben

Schlüsse durchführt, wie sie Fraenkel ausgehend von seinen Urelementen durchgeführt hatte.

In den Händen der Mengentheoretiker führte die Methode von Cohen sehr schnell zu einer Flut außerordentlicher Resultate, von denen wir hier nur einige Beispiele nennen können: Es gibt

— ein Modell des Auswahlaxioms, für das keine Wohlordung definierbar ist (S. Feferman [71]);
— ein Modell des abzählbaren Auswahlaxioms (das aussagt, daß für jede abzählbare Familie nichtleerer Mengen eine Auswahlfunktion (vgl. 13.4.2.) existiert), in dem jede Menge reeller Zahlen Lebesgue-meßbar (vgl. Kapitel 11) ist (R. Solovay [274]);
— ein Modell, das Erweiterung eines anderen Modells ist und in dem eine bijektive Abbildung zwischen je zwei verschiedenen (unendlichen) Kardinalzahlen des Ausgangsmodells existiert (A. Levy [167]); usw. . . .

Somit ist die v. Neumannsche Vision (vgl. 13.4.6.) prophetisch gewesen: Man kennt heute Beispiele für alle Situationen, deren Möglichkeiten er vermutet hatte, und nachdem man entdeckt hatte, daß zahlreiche Hypothesen voneinander unabhängig sind, hat sich die Mengenlehre in eine Vielfalt möglicher Theorien aufgespalten.

13.5. Literatur

[1] W. Ackermann, Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre, Math. Ann. 114, S. 305—315 (1937).

[2] J. d'Alembert, Encyclopédie, Paris 1751—1765.

[3] Annales de Mathématiques Pures et Appliquées (Annales de Gergonne), 22 Bde., 1810—1832.

[4] R. Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris 1806 (anonym), Neudruck, mit Namen des Autors, in einem Werk gleichen Titels, Albert Blanchard, Paris 1971.

[5] Aristote, Premiers Analytiques, neue Übersetzung von J. Tricot, Bd. 3, Vrin, Paris 1936.

[5][1] Aristoteles, Erste Analytiken, Meiner, Leipzig ab 1918.

[6] Aristote, Seconds Analytiques, neue Übersetzung von J. Tricot, Bd. 4, Vrin, Paris 1938.

[6][1] Aristoteles, Zweite Analytiken, Meiner, Leipzig ab 1918.

[7] H. Bachmann, Transfinite Zahlen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[8] P. Benacerraf und H. Putnam, Philosophy of Mathematics, Selected Readings, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1964.

[8* bis] K. Berka, L. Kreiser (Hrsg.), Logik-Texte, Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, Akademie-Verlag, Berlin 1971.

[9] P. Bernays, A system of axiomatic set theory, Journal of Symbolic Logic 2, S. 65—77 (1937); 6, S. 1—17 (1941); 7, S. 65—89, 133—145 (1942); 8, S. 89—106 (1943); 13, S. 65—79 (1948); 19, S. 81—96 (1954). (Der Text bezieht sich in der Hauptsache auf die ersten beiden Arbeiten.)

[10] P. Bernays and A. Fraenkel, Axiomatic Set Theory, North-Holland, Amsterdam 1958.

[11] Jacques und Jean Bernoulli, Parallelismus ratiocinii logici et algebraici, quem, una cum thesibus miscellaneis, defendendem suscepit par fratrum Jacobus & Joannes Bernoulli, ille praesidis, hic respondentis vices agens, Basel 1685. (Wiederabdruck in Jacobi Bernoulli Basileensis, Opera, Bd. 1, Genf 1744.)

[12] E. W. Beth, On Padoa's method in the theory of definition, Koninklijke Nederlandse Akad. van Wetenschappen, Proceedings of the section of sciences 56, series A, Math. sci., S. 330—339, auch Indagationes mathematicae 15, S. 330 bis 339 (1953).

[13] E. W. Beth, The Foundations of Mathematics, North-Holland, Amsterdam 1965.

[14] G. Birkhoff, Combinatorial relations in projective geometries, Annals of Mathematics 36, S. 743—748 (1935).

[15] G. Birkhoff, Lattice Theory, A.M.S. Colloquium Publications, 2. Aufl., Providence, Rhode Islands 1960.

[16] R. Blanché, La logique et son histoire, d'Aristote à Russell, Armand Colin, Paris 1970.

[17] B. Bolzano, Wissenschaftslehre, Sulzbach 1873, 4 Bde., 2. Aufl., Meiner, Leipzig 1929—1931. Auszug in [8 bis].

[18] B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, Reclam, Leipzig 1951, Neue Ausgabe: Meiner, Leipzig 1920.
Englische Übersetzung von D. A. Steele, Yale Univ. Press, New Haven 1950.

[19] B. Bolzano, Functionenlehre, Schriften, Bd. 1, Kön. Böhm. Gesellsch. Wiss., Prag 1930.

[20] G. Boole, The mathematical analysis of logic, being an essay toward a calculus of deductive reasoning, London-Cambridge 1847. Deutscher Auszug in [8 bis].

[21] G. Boole, An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities, London 1854. Nachdruck: The open Court Publ. Comp., La Salle, Illinois 1952.

[22] G. Boole, On propositions numerically definite (Vortrag 16. 3. 1868), Transactions of the Cambridge Philosophical Society 11, S. 396—411 (1871).

[23] G. Boole, Collected logical works, 2 Bde., hrsg. P. Jourdain, Chicago-London 1916.

[24] E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, 1. Aufl., Gauthier-Villars, Paris 1898.

[25] E. Borel, Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles, Math. Ann. 60, S. 194—195 (1904) = [28], S. 1251—1252.

[26] E. Borel, La théorie des ensembles et les nombres décimaux, C. R. Acad. Sci., 168, S. 1148—1150 (1914) = [28], S. 1329—1331.

[27] E. Borel, Sur les ensembles effectivement énumérables et sur les définitions effectives, R. C. Acad. Lincei 28, S. 163—165 (1919) = [28], S. 1361—1363.

[28] E. Borel, Oeuvres, Bd. 3, hrsg. C.N.R.S., Paris 1972.

[29] N. Bourbaki, Eléments de Mathématiques, Hermann, Paris 1939—1976.

[30] N. Bourbaki, Eléments d'Histoire des Mathématiques, 2. Aufl. Hermann, Paris 1974.

[30][1] N. Bourbaki, Elemente der Mathematikgeschichte, deutsche Übersetzung der ersten Auflage, von Anneliese Overschelp, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen und Zürich 1971.

[31] L. E. J. Brouwer, Collected Works, hrsg. A. Heyting, Bd. 1, North-Holland, Amsterdam 1975.

[32] Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, Paris, 16 Bde., 1824—1831.

[33] C. Burali-Forti, Una questione sui numeri transfiniti, Rend. del Circolo Mat. di Palermo 11, S. 154—164 (1894). Sulle classe ben ordinate, ebenda, S. 260 (1897); in [110], S. 104—112.

[34] G. Cantor, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J. für die reine und angew. Math. 84, S. 242—258 (1877); in [41], S. 119—133.

[35] G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten 3, Math. Ann. 20, S. 113—121 (1882); in [41], S. 149—157.

[36] G. Cantor, Die Grundlagen der Arithmetik, Rezension der Schrift von G. Frege, „Die Grundlagen der Arithmetik", Breslau 1884, Deutsche Literaturzeitung 6, S. 728—729 (1885), in [41], S. 440—441.

[37] G. Cantor, Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten 4, Math. Ann. 21, S. 51—58; (1883); in [41], S. 157—164; Über ...5, in [41], S. 165—209.

[38] G. Cantor, Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Zeitschr. für Philos. und philos. Kritik 91, S. 81—125; 92, S. 240—265 (1887, 1888); in [41], S. 378—439.

[39] G. Cantor, Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre, Jahresber. der deutsch. Math. Verein. 1, S. 75—78 (1892); in [41], S. 278—281.

[40] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann. 46, S. 481—512 (1895), in [41], S. 240—265; 49, S. 207—246 (1897), in [41], S. 312—356.

[41] G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, hrsg. E. Zermelo, Springer, Berlin 1932; Nachdruck: Olms, Hildesheim 1962.

[42] R. Carnap, Abriß der Logistik, mit besonderer Berücksichtigung der Relationstheorie und ihrer Anwendungen, Wien 1929.

[43] R. Carnap, Logische Syntax der Sprache, Wien 1934.

[44] L. Carnot, Géométrie de Position, Duprat, Paris 1803.

[45] L. Carroll, The game of logic, Macmillan, London 1887.

[46] J. Cavaillès, Philosophie mathématique, Hermann, Paris 1962.

[47] A. Cayley, Collected Mathematical Papers, 13 Bde., Cambridge University Press, Cambridge 1889—1898.

[48] A. Church, A set of postulates for the foundation of logic, Annals of Math. 33, S. 346—366 (1932); 34, S. 839—864 (1933).

[49] A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. Math. 58, S. 345—363 (1936).

[50] A. Church, Introduction to mathematical logic, University Press Princeton 1956 (reich an historischen Informationen, die hier vielfach benutzt wurden). (Russische Übersetzung Moskau 1960). (Als Bd. 1 gekennzeichnet — *Anmerkung bei der deutschen Ausgabe*).

[51] L. Chwistek, Granice Nauki, Lwow und Warschau 1935. Englische Übersetzung: The Limits of Science, London and New York 1948).

[52] P. Cohen, The independence of the continuum hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50, S. 1143—1148 (1963); 51, S. 105—110 (1964).

[53] Compte Rendu du 2e Congrès International des Mathématiciens (Paris 1900), Paris 1902.

*[53][1] D. Hilbert, Die Hilbertschen Probleme, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 252, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1971.

[54] E. Condillac, Oeuvres philosophiques, hrsg. G. Le Roy, Corpus général des Philosophes français, Auteurs modernes, Bd. XXXIII, 2, Presses Univ. de France, Paris 1948.

[54][1] E. Condillac, Die Logik — Die Sprache des Rechnens, Übersetzt von E. Salewski, hrsg. G. Klaus, Akademie-Verlag, Berlin 1959.

[55] L. Couturat, La logique de Leibniz d'après des documents inédits, Alcan, Paris 1901.

[56] L. Couturat, Opuscules et fragments inédits de Leibniz, extraits des manuscrits de la Bibliothèque royals de Hanovre, Alcan, Paris 1903.

[57] H. B. Curry, Outlines of a formalist philosophy of mathematics, North-Holland, Amsterdam 1951.

[58] H. B. Curry, Foundations of Mathematical Logic, McGraw-Hill, New York 1963 (Russische Übersetzung: Moskau 1969).

[59] H. B. Curry, R. Feys, Combinatory Logic, Bd. 1, North-Holland, Amsterdam 1968.

[60] H. B. Curry, J. R. Hindley, J. P. Seldin, Combinatory Logic, Bd. 2, North-Holland, Amsterdam 1971.

[61] R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, in: Gesammelte mathematische Werke, Bd. 3, S. 315—334, Vieweg, Braunschweig 1932.

[62] R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? in: Ges. math. Werke, Bd. 3, S. 335—391, Vieweg, Braunschweig 1932.

[62][1] Nachdruck von [61] und [62], 8. bzw. 11. Aufl., VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1967 bzw. Vieweg, Braunschweig 1967.

[63] R. Dedekind, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler, Festschrift Techn. Hochschule Braunschweig, 1897 = Ges. math. Werke, Bd. 2, S. 103—148, Vieweg, Braunschweig.

[64] M. Dehn, Über raumgleiche Polyeder, Göttinger Nachr. 1900, S. 345—354; Über den Rauminhalt, Math. Ann. 55, S. 465—478 (1902).

[65] R. Descartes, Oeuvres et lettres, hrsg. A. Bridoux, Gallimard, Paris 1949.

[65][1] R. Descartes, Regeln zur Leitung des Geistes, übersetzt von Artur Buchenau, Reclams Universalbibliothek, Leipzig 1980.

[65][2] R. Descartes, Regeln zur Ausrichtung der Erkenntniskraft, Übersetzt und herausgegeben von Lüder Gäbe, Akademie-Verlag, Berlin 1972.

[65 bis] J. Dieudonné, Cours de Géométrie algébrique, Bd. 2, Coll. SUP, Presses Univ. de France, Paris 1974.

[65 ter] J. M. Dubbey, Babbage, Peacock and modern algebra, Hist. Mat. 4, S. 295 bis 302 (1977).

[66] R. du Bois-Reymond, Über asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösungen von Gleichungen, Math. Ann. 8, S. 363—414 (1847).

[67] L. Dutens, Gothofridi Leibnitii Opera Omnia, 6 Bde., Genevae 1760.

[68] R. L. Ellis, Notes on Boole's Laws of thought, The mathematical and other writings of Robert Leslie Ellis, hrsg. William Walton, Cambridge 1863, S. 391 bis 394.

[69] Encyclopaedia Universalis, Paris 1968—1975.

*[69 bis] F. Engel, P. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien, B. G. Teubner, Leipzig 1895.

[70] G. Fano, Sui postulati fundamentali della geometria proiettiva . . . Giornale di Matematica 30, S. 106—132 (1892).

[71] S. Feferman, Some applications of the notions of forcing and generic sets, Fund. Math. 55, S. 325—345 (1965).

[72] P. Finsler, Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, Math. Z. 25, S. 676—682 (1926). (Nachdruck in [8 bis], S. 314—319.) (Engl. Übersetzung in [110], S. 438 bis 445.)

[73] K. Fischer, Gottfried Wilhelm Leibniz, Leben, Werke und Lehre, Heidelberg 1902.

[74] J. Fourier, Oeuvres, 2 Bde., Gauthier-Villars, Paris 1888—1890.

[75] A. Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, Math. Ann. 86, S. 230—237 (1922).

[76] A. Fraenkel, Der Begriff "definit" und die Abhängigkeit des Auswahlaxioms, Sitzungsberichte der Preuss. Akad. der Wiss., Phys. Math. Klasse 1922, S. 253—257. (Engl. Übers. in [110], S. 284—289).

[77] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, Foundations of set theory, 1. Aufl., North-Holland, Amsterdam 1958 (Russische Übersetzung: Moskau 1966). Diese Auflage enthält historische Angaben, die nicht sämtlich in der nachstehend aufgeführten 2. Aufl. enthalten sind.)

[78] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, Foundations of set theory, 2. Aufl. von 77, North-Holland, Amsterdam 1973.

[79] G. Frege, Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Neber, Halle 1879. (Engl. Übers. in [110], S. 1—82.) Wiederabdruck in [8 bis].

[80] G. Frege, Über den Zweck der Begriffsschrift, Sitzungsber. der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwiss. für das Jahr 1882, S. 1—10 (1883).

[81] G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau 1884. Nachdruck Breslau 1934.

[82] G. Frege, Über Sinn und Bedeutung, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, n. S. 100, S. 25—50 (1892).

*[82 bis] G. Frege, Schriften zur Logik, Aus dem Nachlaß, Akademie-Verlag, Berlin 1973. (Mit ausführlichen Literaturangaben, auch über Nachdrucke).

[83] G. Frege, Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet, Bd. 1 Jena 1893, Nachdruck Olms, Hildesheim 1963; Bd. 2, Pohle, Jena 1903, Nachdruck Olms, Hildesheim 1968.

[84] H. Freudenthal, Zum intuitionistischen Raumbegriff, Compositio Math. 4, S. 82—111 (1936).

[85] H. Freudenthal, Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, Nieuw Archief v. Wiskunde, 3. s. 5, S. 107—142 (1957).

[86] C. F. Gauß, Werke, 12 Bde., Göttingen 1870—1927.

*[86][1] C. F. Gauß, Allgemeine Flächentheorie, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 5, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1921.

[87] I. I. Žegalkin, Arithmetisierung der symbolischen Logik (russisch), Mat. Sb. 35, S. 205—232 (1928), 36, S. 311—369 (1929). (Französische Résumées S. 332—336 bzw. S. 369—377)

*[88] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Math. Z. 39, S. 176 bis 210, 405—431 (Nachdruck in [8 bis]). Französische Übersetzung, von J. Ladrière,

mit Anmerkungen von R. Feys und J. Ladrière, Recherches sur la déduction logique, P. U. F., Paris 1955.

[89] G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheitsbeweise der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. 112, S. 493—595 (1936).

[90] G. Gentzen, Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie, Forschungen zur Logik und zur Grundl. der exacten Wiss., N. S. 4, S. 19—44 (1938).

[91] V. Glivenko, Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, Acad. R. de Belgique, Bull. Classe des Sci. 14, S. 225—228 (1929).

[92] K. Gödel, Über die Vollständigkeit des Logikkalküls, Habilitationsschrift, Universität Wien, 1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Math. und Phys., 37, S. 349—360 (1930); engl. Übersetzung in [110], S. 582—591.

[93] K. Gödel, Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit, Anzeiger der Ak. der Wiss. in Wien, Math.-naturwiss. Kl. 67, S. 214—215 (1930); englische Übersetzung in [110], S. 595—596, Wiederabdruck in [8 bis].

[94] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatshefte für Math. und Phys., 38, S. 173—198 (1931); englische Übersetzung in [110], S. 596—616, teilweiser Wiederabdruck in [8 bis].

[95] K. Gödel, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Anzeiger der Ak. der Wiss. in Wien, Math.-naturwiss. Kl., 69 (1932).

[96] K. Gödel, Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls, Ergebnisse eines math. Kolloquiums, 4, S. 34—40 (1933).

[97] K. Gödel, On undecidable propositions of formal mathematical systems. Notes de S. C. Kleene et J. B. Rosser, Institute for Advanced Study, Princeton 1934. Abdruck in M. Davis, The undecidable, basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems, and computable functions, Raven Press, Hewlett, New York 1965.

[98] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 24, S. 556—557 (1938). Consistency proof for the generalized continuum hypothesis, ebenda, 25, S. 220—224 (1939).

[99] K. Gödel, The Consistency of the Continuum Hypothesis, University Press, Princeton, N.J., 1940; 2. Aufl. 1951; 3. Aufl. 1953.

[100] H. Grassmann, Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik (1844); in [102]. Band 1, S. 1—319; 2., im Text unveränderte Auflage 1878.

[101] H. Grassmann, Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten, Berlin 1861; in [102], Band 2, S. 295—344.

[102] H. Grassmann, Gesammelte Werke, 3 Bände, Teubner, Leipzig 1894.

[103] D. Gregory, On the real nature of symbolical algebra, Trans. of the R. Soc. of Edinburgh 14, 1840.

[104] J. Hadamard, R. Baire, H. Lebesgue und E. Borel, Cinq lettres sur la théorie des ensembles, Bull. Soc. Math. Fr., 33, S. 261—273 (1905); Wiederabdruck in [28], S. 1253—1265.

[105] P. R. Halmos, Polyadic boolean algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 40, S. 296 bis 301 (1954).

[106] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$, Math. Ann. 60, S. 459—462 (1905).

[107] H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Voss, Leipzig 1876.

[108] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Veit, Leipzig 1914; Nachdruck Chelsea, New York 1949.

[109] T. L. Heath, A History of Greek Mathematics, University Press Oxford, 2 Bde 1921.

*[109a] T. L. Heath, A Manual of Greek Mathematics, University Press, Oxford 1931.

[110] J. van Heijenoort, From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1897–1931, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967, 660 S.

[111] H. Helmholtz, Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen, Göttinger Nachrichten 1868; = Wissenschaftliche Abhandlungen II, Leipzig 1883, S. 618–639.

[112] L. Henkin, Completeness in the theory of types, J. Symb. Logic, 15, S. 81–91 (1950).

[113] J. Herbrand, Recherches sur la théorie de la démonstration, Habilitationsschrift, Univ. Paris, 1930; Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III, sci. math. et phys., Nr. 33, 128 S., 1930.

[114] J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'arithmétique, J. für die reine und angew. Math., 166, S. 1–8 (1931); in [110], S. 618–628.

[115] P. Hertz, Über die Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme, Math. Ann., 101, S. 457–514 (1929).

[116] G. Hessenberg, Grundbegriffe der Mengenlehre. Abh. der Friesschen Schule, Neue Serie 1, Heft 4, Göttingen 1906.

[117] A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wiss. Phys. Math. Kl., 1930, S. 42–56. Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik, ebenda, S. 57–71, 158–169.

[118] A. Heyting, Untersuchungen über intuitionistische Algebra, Verhandelingen der Ned. Akad. van Wetensch., Afd. Natuurkunde 1, Section 18, Nr. 2, 36 S. (1941).

[119] A. Heyting, Espace de Hilbert et intuitionnisme, Les Méthodes Formelles en Axiomatique, Colloq. Intern. du CNRS, Nr. 26 (1950), S. 59–64; CNRS, Paris, 1953.

*[119 bis] A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung, Intuitionismus, Beweistheorie, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, Berlin 1934.

[120] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 1. Auflage, Leipzig 1899, 2. Auflage, Teubner, Leipzig 1903.

[121] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Auflage, Teubner, Leipzig-Berlin 1930.

[122] D. Hilbert, Über den Zahlbegriff, Jahresbericht der Deutsch. Math. Verein. 8, S. 180–194 (1900); = [121], S. 241–246.

[123] D. Hilbert, Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, Verhandlungen des Dritten Intern. Math. Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904, Teubner, Leipzig 1905; = [121], S. 247–261; englische Übersetzung in [110], S. 129–138.

[124] D. Hilbert, Axiomatisches Denken, Math. Ann. 78, S. 405–415 (1918); = [127], S. 146–156.

[125] D. Hilbert, Neubegründung der Mathematik (Erste Mitteilung), Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Univ. 1, S. 157–177 (1922); = [127], S. 157–177.

[126] D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Ann. 95, S. 161–190 (1926); englische Übersetzung in [110], S. 367–392.

[127] D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, Springer, Berlin, Band 3, 1935.

[128] D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, Berlin, VIII + 120 S., 1928.

[129] D. Hilbert und P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, Springer, Berlin, Band I, 471 S., 1934; Band II, 498 S., 1939.

[130] E. V. Huntington, A complete set of postulates for the theory of the absolute continuous magnitude, Trans. Amer. Math. Soc. 3, S. 264—279 (1902).

[131] E. V. Huntington, Set of independent postulates for the algebra of logic, Trans. Amer. Math. Soc. 5, S. 288—309 (1904).

[132] S. Jaśkowski, On the Rules of Suppositions in 'Formal Logic', Studia Logica 1, Warszawa, 32 S., 1934.

[133] S. Jaśkowski, Recherches sur le système de la logique intuitionniste, Actes du Congrès Inter. de Philosophie Scientifique, VI. Philosophie des Mathématiques, Act. Sci. Ind. 393, Hermann, Paris, S. 58—61 (1936).

[134] W. S. Jevons, Pure logic, or the logic of quality apart from quantity: with remarks on Boole's system and on the relation of logic and mathematics, London 1864, 87 S.; = Pure Logic and other minor works, by W. Stanley Jevons, Hrsg. Robert Adamson und Harriet A. Jevons, London und New York, S. 1—77, 1890.

[135] I. Johansson, Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus, Compositio Math. 4, S. 119—136 (1936).

[136] Z. A. Jordan, The developments of mathematical logic and of logical positivism in Poland between the two Wars, Polish Science and Learning 6, London 1945.

[137] J. Jungius, Institutiones Logicae, Lateinischer Text mit deutscher Übersetzung von R. Meyer, Augustin, Hamburg 1957.

[137 bis] B. Kerékjártó, A Geometria alapjaviól, Band 2, Projetiv Geometria, Budapest 1944; französische Übersetzung: Les Fondements de la Géométrie, Band 2, Géométrie projective, Gauthier-Villars, Paris 1965.

[138] S. C. Kleene, General recursive functions of natural numbers, Math. Ann. 112, S. 236—253 (1936).

[139] S. C. Kleene, On notation for ordinal number, J. Symbolic Logic 3, S. 150—155 (1938).

[140] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, North-Holland, Amsterdam 1952.

[141] S. C. Kleene, Mathematical logic, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney 1967. Französische Übersetzung: Armand Colin, Paris 1971.

[142] F. Klein, Über die sogenannte Nicht-euklidische Geometrie, Math. Ann. 6, S. 112—145 (1873); = Ges. Math. Abh., Bd. 1, S. 311—343.

[143] F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Programm zum Eintritt in die Philosophische Fakultät und den Senat der k. Friedrich-Alexander-Universität zu Erlangen, Oktober 1872), Deichert, Erlangen, 1872; in überarbeiteter Form in F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 1, Hrsg. von R. Fricke und A. Ostrowski, S. 460—497, Springer, Berlin 1921; französische Übersetzung Le programme d'Erlangen, considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes, Coll. Discours de la Méthode, Gauthier-Villars, Paris 1974.

[143][1] F. Klein, Das Erlanger Programm, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 253, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1974.

[144] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, I, Springer, Berlin 1926.

[145] W. und M. Kneale, The Development of Logic, 2. Auflage, Clarendon Press, Oxford 1962.

[146] A. Kolmogoroff, Sur le principe du *Tertium non datur* (russ.), *Mat. Sbornik*. 32, S. 646—667 (1925); englische Übersetzung in [110], S. 414—437.

*[146 bis] N. I. Kondakow, Wörterbuch der Logik, Übersetzung aus dem Russischen; Hrsg. der deutschen Ausgabe: E. Albrecht und G. Asser, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig 1978; 2., neubearbeitete Auflage 1983.

[147] J. König, Zum Kontinuumproblem, Math. Ann. 60, S. 177—180 (1905); Berichtigung dazu, ebenda, S. 462.

[148] J. König, Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre, hrsg. D. König, Leipzig 1914.

[148 bis] M. Krasner, Les algèbres cylindriques, Bull. Soc. math. Fr. 86, S. 315—319 (1958).

[149] G. Kreisel, Foundations of intuitionistic logic, Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proc. of the 1960 intern. congr. Stanford, Calif., Univ. Press, Stanford, S. 198—210, 1962.

[150] G. Kreisel, Bertrand Arthur William Russell, earl Russell, 1872—1970, Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society, Band 19, S. 582—620, 1973.

[151] G. Kreisel, What have we learnt from Hilbert's second problem? In: Mathematical developments arising from Hilbert problems. Proc. of Symposia in pure math., XXVIII, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, S. 93—130, 1976.

[152] G. Kreisel, Revue de [31]. Bull. Amer. Math. Soc. 93, S. 86—93 (1977).

[153] G. Kreisel et J. L. Krivine, Eléments de logique mathématique. Théorie des modèles, Dunod, Paris 1967, 213 S.

[154] K. Kuratowski, Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles, Fund. Math. 2, S. 161—171 (1921).

[154 bis] M. L'Abbé, Structures algébriques suggérées par la logique mathématique, Bull. Soc. math. Fr. 86, S. 299—314 (1958).

[154 ter] C. Ladd-Franklin, On the algebra of logic, Studies in logic by members of the Johns Hopkins University, S. 17—71, Boston 1883.

[155] J. H. Lambert, Neues Organon, 2 Bände, Leipzig 1764.

[156] H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement, Journal de Mathématiques pures et appliquées, Serie 6, 1, S. 139—216 (1905).

[157] G. W. von Leibniz, Oeuvres philosophiques latines et françaises de feu M. de Leibniz, tirées de ses manucsrits qui se conservent dans la Bibliothèque royale de Hanovre, Hrsg. R. E. Raspe, 1765.

[158] G. W. von Leibniz, Philosophische Werke nach Raspens Sammlung, Hrsg. J. H. F. Ulrich, Halle 1780.

[159] G. W. von Leibniz, God. Guil. Leibnitii opera philosophica quae extant latina gallica germanica omnia, Hrsg. J. E. Erdmann, Band 1, Berlin 1840.

[160] G. W. von Leibniz, Mathematische Schriften, 7 Bände, Hrsg. C. I. Gerhardt, Ascher-Schmidt, Berlin-Halle 1849—1863.

[161] G. W. Leibniz, Nouveaux essais sur l'entendement humain, Neuausgabe Paris 1866.

[162] G. W. Leibniz, Philosophische Schriften, 7 Bände, Hrsg. C. I. Gerhardt, Berlin 1840—1890.

*[162][1] G. W. Leibniz, Fragmente zur Logik, Ausgewählt, übersetzt und erläutert von Franz Schmidt. Akademie-Verlag, Berlin 1960.

[162 bis] Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern, Band I, hrsg. von C. I. Gerhardt, Meyer u. Müller, Berlin 1899.

[163] P. J. Lejeune-Dirichlet, Werke, 2 Bände, Reimer, Berlin 1889—1897.

[164] N. J. Lennes, On the foundations of the theory of sets, Bull. Amer. Math. Soc. 28, S. 300, Zusammenfassung (1922).

[165] S. Lesniewski, 1. O podstawach matematyki (Über die Grundlagen der Mathematik), Przegl. fil 30, 1927—1934, 1931 passim; 2. Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, Fund. Math. 14, S. 1—81 (1929).

[166] B. Levi, Intorno alla teoria degli aggregati, Reale Istituto lombardo di scienze e lettere, Rendiconti, Serie 2, 35, S. 863—868 (1902).

[167] A. Lévy, Independence results in set theory by Cohen's methods, I, II, III, IV, Amer. Math. Soc. Notices 10, S. 592—593 (1963).

[168] C. I. Lewis, A survey of symbolic logic, Berkeley, Calif., VI + 406 S., 1918.

[169] C. I. Lewis and C. H. Langford, Symbolic logic, New York, XI + 506 S., 1932.

[170] A. Lindenbaum et A. Tarski, Communication sur les recherches de la théorie des ensembles, C. R. de la Soc. des Sci. et lettres de Varsovie Kl. III, 19, S. 299 bis 330 (1926).

[171] N. Lobatchevski, O. Načalah Geometrij (Elemente der Geometrie), Kazanskij Véstnik', S. 178—283 (1829); S. 571—636 (1830); = Polnoe Sobranie Sočinenij (Gesammelte Werke) unter der Redaktion von V. G. Kagan, Gosudarstvennoe Izdatel'stvo tekhniko-teoreticeskoj Literatury, Moskva-Leningrad, Band 1, S. 185—261, 1946.

*[171][1] N. J. Lobatschevskij, Über die Anfangsgründe der Geometrie zusammen mit

*[172][1] Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien: in F. Engel NIL, Zwei geometrische Abhandlungen, BG Teubner Leipzig 1898.

[172] N. Lobatschevski, Novye Načalah Geometrij s polnoj teorej paralel'nyh (Neue Elemente der Geometrie, mit einer vollständigen Theorie der Parallelen), Učenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, Nr. III, S. 3—48 (1835); Nr. II, S. 3—98, Nr. III, S. 3—50 (1836); Nr. I, S. 3—97 (1837); Nr. I, S. 3—124, Nr. III, S. 3—65 (1838); = Polnoe Sobranie Socienij (Gesammelte Werke), unter Redaktion von V. F. Kagan, Gosudarstvennoe Izdatel'stvo tekhniko-teoretičeskoj Literatury, Moskva-Leningrad, Band 2, S. 147—454 (1949); = Nouveaux Principes de la Géometrie, Französ. Übersetzung F. Mallieux, Mém. Soc. Roy. Sci. Liège 2, Nr. 5, 101 und 3, Br. 2, 32 (1901).

[173] E. O. Lovett, Mathematics at the International Congress of Philosophy, Paris 1900, Bull. Amer. Math. Soc., 7, S. 157—183 (cf. S. 166—168) (1900—1901).

[174] L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Ann. 76, S. 447 bis 470 (1915); englische Übersetzung in [110], S. 228—251.

[175] J. Łukasiewicz, O logice trojwartosciowej (Über die 3-wertige Logik), Ruch. filoz. 5, S. 169—171 (1920).

[176] J. Łukasiewicz, Logika dwuwartosciowa (2-wertige Logik), Przegl. fil. 23, S. 189 bis 205 (1921).

[177] J. Łukasiewicz, Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, C. R. de la Soc. des Sci. et lettres de Varsovie, Kl. III, 23, S. 51—77 (1930).

[178] H. McColl, Symbolical or abbreviated language, with an application to mathematical probability, Mathematical questions, with their solutions, from the "Educational Times", London 28, S. 20—23 und 100 (1877).

[179] H. McColl, The calculus of equivalent statements and integration limits, Proc. Lond. Math. Soc. 9, S. 9—20 (1877—1878); 10, S. 16—18 (1878—1879); 11, S. 113—121 (1879—1880).

[180] H. McColl, Symbolic reasoning, Mind, 6, S. 493—510 (1897).

[181] H. McColl, A report on McColl's 3-valued logic (invariably true, invariably false, and variable), in [173], S. 157—183.

[182] J. C. C. McKinsey, Postulates for the calculus of binary relative, J. Symb. Logic 5, S. 85—95 (1940).

[183] J. C. C. McKinsey, A solution of the decision problem for the Lewis systems S2 and S4 with an application to topology, J. Symb. Logic 6, S. 117—134 (1941).

[184] J. C. C. McKinsey and A. Tarski, The algebra of topology, Ann. of Math. 45, S. 141—191 (1944); On closed elements in closure algebras, ebenda 47, S. 122 bis 162 (1946).

[185] J. C. C. McKinsey and A. Tarski, Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting, J. Symb. Logic 13, S. 1—15 (1948).

[186] P. Mahlo, Über lineare transfinite Mengen, Berichte über die Verhandl. der kgl. Sächs. Akad. der Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. 63, S. 187—225 (1911) (cf. S. 319—347); Zur Theorie und Anwendung der ϱ_0-Zahlen, ebenda I: 64, S. 108—112 (1912); II: 65, S. 208—282 (1913).

[187] A. A. Markov, Teorija algorifmov, Moskau 1954; englische Übersetzung: The theory of algorithms, Jerusalem 1961.

[188] Y. V. Matijasevič, Enumerable sets are diophantine (russ.), Dokl. Ak. Nauk, SSSR, 191, S. 279—282 (1970); verbesserte englische Übersetzung, Soviet. Math. Dokl. 11, S. 354—357 (1970) .

[189] Y. V. Matijasevič, Diophantine representation of recursively enumerable predicates, Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice, 1970, Band I, S. 235—238.

[189 bis] E. Mendelson, The independence of a weak axiom of choice. J. Symb. Logic 21, S. 350—356 (1956).

[190] D. Mirimanoff, Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles, L'Ens. Math. 19, S. 37—52 (1917).

[191] D. Mirimanoff, Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantorienne, L'Ens. Math. 19, S. 209—217 (1917); 21, S. 29—52 (1920).

[192] A. F. Möbius, Gesammelte Werke, 4 Bände, Hirzel, Leipzig 1885—1887.

[193] A. de Morgan, Formal logic: or, the calculus of inference, necessary and probable, London 1847.

[194] A. de Morgan, On the syllogism, Nr. IV, and on the logic of relations (vorgetragen 23. April 1860), Trans. Cambridge Phil. Soc. 10, S. 331—358 (1864).

[195] J. von Neumann, Zur Einführung der transfiniten Zahlen, Acta litt. ac. sci. Univ. Szeged. 1, S. 199—208 (1923); = [200], S. 24—33; englische Übersetzung in [110], S. 346—354.

[196] J. von Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, J. für die reine und angew. Math. 154, S. 199—240 (1925); Berichtigung ebenda 155, S. 128; = [200], S. 34—56; englische Übersetzung in [110], S. 393—413.

[197] J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Z. 26, S. 1—46 (1927); = [200], S. 320—338.

[198] J. von Neumann, Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre, J. für die reine und angew. Math. 160, S. 227—241 (1929); = [200], S. 494—508.

[199] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin 1931.

[200] J. von Neumann, Collected Works, Band 1, Pergamon, New York 1961.

[201] J. von Neumann and G. Birkhoff, The logic of quantum mechanics, Ann. of Math. 37, S. 823—843 (1936).

[202] J. Nicod, A reduction in the number of primitive propositions of logic (eingegangen am 30. Okt. 1916), Proc. Cambridge Phil. Soc. 19, S. 32—41 (1917 bis 1920).

[203] I. L. Novak, A construction for models of consistent systems, Fund. Math. 37, S. 87—110 (1951).

[204] A. Padoa, Riassunta delle conferenze su l'algebra e la geometria quali teori deduttive, tenute nella R. Universit à Rom l'anno 1900, Teil I, 1900, 60 S.

[205] A. Padoa, Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique à une théorie dêductive quelconque, Bibl. du Congrès Intern. de Philos., Paris 1900, A, Colin, Paris, Band 3, S. 309—365 (1900); englische Übersetzung in [110]. S. 118—123.

[206] B. Pascal, Pensées et opuscules, ed. L. Brunschvicg, 10. Auflage, Hachette, Paris 1922.

*[206][1] B. Pascal, Gedanken, mit den Anmerkungen Voltaires, aus dem Französischen von H. Hesse, Verlag von Philipp Reclam jun., Leipzig 1948, S. 29—33.

[207] M. Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie, 1. Aufl. Leipzig 1882, 2. Aufl. Teubner, Leipzig 1912.

[207 bis] G. Peacock, A Treatise on Algebra, I. Arithmetical Algebra, II. Symbolic Algebra, Cambridge University Press 1830, 1842 bzw. 1845.

[208] G. Peacock, Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis, in: Report of the third meeting of the British Association for the Advancement of Science, held at Cambridge in 1833, London 1834.

[209] G. Peano, Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva, Turin, X + 170 S., 1886; = [216], Band 2, S. 3—19.

[210] G. Peano, Arithmetices principia, nova methodo exposita, Turin, XVI + 20 S., 1889; = [216], Band 2, S. 20—25; teilweise englische Übersetzung in [110], S. 83—97.

[211] G. Peano, Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Math. Ann. 37, S. 182—228 (1890); = [216], Band 1, S. 119—170.

[212] G. Peano, Sui concetto di numero, Riv. di mat. 1, S. 87—102 und 256—257 (1891) = [216], Band 3, S. 80—109.

[213] G. Peano, Sui fondamenti della geometria, Riv. di mat. 4, S. 51—90 (1894).

[214] G. Peano, Formulaire de mathématiques, 5 Bände, Turin, 1895—1908.

[215] G. Peano, Additione, Revista de mathematica 8, S. 143—157 (1906); = [216], Band 1, S. 344—358.

[216] G. Peano, Opere scelte, 3 Bde., Cremonese, Rom 1957—1959.

[217] B. Peirce, Linear associative algebra, Amer. J. Math. 4, S. 97—221 (1891). C. S. Peirce, On the relative forms of the algebras, ebenda S. 221—225.

[218] C. S. Peirce, On the algebra of logic, Amer. J. Math. 3, 15—57 (1880); = [222], S. 104—157.

[219] C. S. Peirce, On the logic of number, Amer. J. Math. 4, S. 85—95 (1881); mit Verbesserungen in [222], S. 158—170.

[220] C. S. Peirce, On the algebra of logic; a contribution to the philosophy of notation, Amer. J. Math. 7, S. 180—202 (1885); = [222], S. 210—238.

[221] C. S. Peirce, A Boolean algebra with one constant, [222], Bd. 4, S. 13—18.

[222] C. S. Peirce, Collected papers of Charles Saunders Peirce, hrsg. C. Hartshorne und P. Weiss, Harvard University Press, Cambridge, Mass., Band 3, 1933; 2. Auflage 1960.

[223] R. Péter, Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion, Math. Ann. 110, S. 612—632 (1934).

[224] Philosophical Transactions of the Royal Society of London.

[225] M. Pieri, Sui principi che reggono la Geometria dia positione, Atti della Reale Accad. delle Sci. di Torino, classe di Sc. Fis., Mat. e Nat. 30, S. 607—641 (1894); 31, S. 381—399 und 457—470 (1895).

[226] M. Pieri, Sugli enti primitivi della Geometria Projettiva astratta, ebenda 32, S. 231—239 (1896).

[227] M. Pieri, Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazi, Riv. di. mat. 6, S. 9—16 (1896—1899).

[228] M. Pieri, Nuovo modo si svolgere deduttivamente la geometria projettiva, Rend. del R. Instituto lombardo 31, S. 780—798 (1898).

[229] M. Pieri, I. Principii della Geometria di posizione compositi in sistema logico deduttivo, Mem. della R. Accad. delle Sci. di Torino, Serie 2a, 48, S. 1—62 (1899).

[230] G. Ploucquet, Sammlung der Schriften, welche den logischen Calcul des Herrn Professor Ploucquet betreffen, mit neuen Zusätzen herausgegeben von Pr. August Bök, Frankfurt-Leipzig 1766.

[231] J. Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Band 1, Essen 1828, Band 2, Essen 1831.

[232] H. Poincaré, Mémoire sur les groupes kleinéens, Acta Math. 3, S. 49—82 (1883); = Werke, Band 2, S. 258—299, Gauthier-Villars, Paris 1916.

[233] H. Poincaré, La Science et l'hypothèse, Flammarion, Paris 1902.

[233][1] H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, übersetzt von F. und L. Lindemann, 2., verbess. Aufl., B. G. Teubner, Leipzig 1906.

[234] H. Poincaré, La valeur de la Science, Flammarion, Paris 1905.

[235] H. Poincaré, Les mathématiques et la logique, Rev. de Métaph. et de Morale 13, S. 815—835 (1905); 14, S. 17—34 (1906); geändert und gekürzt in [236]. Kap. III und IV.

[236] H. Poincaré, Science et méthode, Flammarion, Paris 1908.

[236][1] H. Poincaré, Wissenschaft und Methode, übersetzt von F. und L. Lindemann, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1914.

[237] H. Poincaré, La logique de l'infini, Rev. de Métaph. et de Morale, 17, S. 461 bis 482 (1909); = H. Poincaré, Dernières pensées, Flammarion, Paris 1913, Kap. 4.

[237][1] H. Poincaré, Letzte Gedanken, Deutsch von K. Lichtenecker, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1913.

[238] H. Poincaré, La logique de l'infini, Scientia, 12, S. 1—11 (1912); = H. Poincaré, Dernières pensées, Flammarion, Paris 1913, Kap. 5, unter dem Titel: Mathematik und Logik.

[239] V. Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, 1. Auflage, Paris 1822, 2. Auflage, Paris 1866.

[240] E. L. Post, Introduction to a general theory of elementary propositions, Amer. J. Math. 43, S. 163—185 (1921); = [110], S. 264—183.

[241] E. L. Post, Finite combinatory processes, formulation I, J. Symb. Logic 1, S. 103—105 (1936).

[242] E. L. Post, Formal reduction of the general combinatorial decision problem, Amer. J. Math. 65, S. 197—215 (1943).

[243] W. V. O. Quine, New foundations for mathematical logic, Amer. Math. Monthly 44, S. 70—80 (1937); Übersicht und Kommentar, ebenda 53, S. 80—101 (1946).

[244] W. V. O. Quine, Mathematical logic, 2. überarbeitete Auflage, Cambridge, Mass. 1951; 1. Auflage 1940.

[245] P. F. Ramsey, The foundations of mathematics, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 25, S. 338—384 (vorgetragen am 12. Nov. 1925); = P. F. Ramsey, The foundations of mathematics and other logical essays, Routledge and Kegan Paul, London 1931; 3. Auflage, S. 1—61, 1954.

[246] C. Reid, Hilbert, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[247] N. Rescher, Many-valued logics, McGraw-Hill, New York 1969.

[248] Revue de Métaphysique et de Morale (verschiedene Arbeiten von H. Poincaré).

[249] J. Richard, Les principes des mathématiques et le problème des ensembles, Rev. Gén. des Sci. 16, S. 541 (1905); = Acta Math. 30, S. 295—296 (1906).

[250] B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke, 2. Auflage, Teubner, Leipzig 1892.

[251] B. van Rootselaar, Generalization of the Brouwer integral, Habilitationsschrift. Universität Amsterdam 1954; = Indag. Math. 18, S. 579—580 (1956).

[252] J. B. Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church, J. of Symb. Logic 1, S. 87—91 (1936).

[253] H. Rubin and J. E. Rubin, Equivalents of the axiom of choice, North-Holland, Amsterdam 1963.

[254] B. Russell, The principles of mathematics, Bd. 1, University Press, Cambridge, 1903; 2. Auflage Norton, Boston-New York, s. d.

[255] B. Russell, On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 4, S. 29—53 (1907).

[256] B. Russell, Mathematical logic as based on the theory of types, Amer. J. Math. 30, S. 222—262 (1908); = [110], S. 150—182.

[257] M. Schönfinkel, Über die Bausteine der mathematischen Logik, Math. Ann. 92, S. 305—316 (1924); englische Übersetzung in [110], S. 355—366.

[258] E. Schröder, Der Operationskreis des Logikkalkuls, Leipzig 1877.

[259] E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik), Leipzig, Bd. 1, 1890; Bd. 2, 1. Teil 1891; Bd. 3, 1. Teil 1895; Band 2, 2. Teil 1905; Nachdruck in [261].

[260] E. Schröder, Abriß der Algebra der Logik, hrsg. E. Müller, Teubner, Leipzig-Berlin, 1909—1910, Nachdruck in [261], Band 3.

[261] E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik); Chelsea, New York, 1966; Nachdruck von [259] und [260], 3 Bde.

[262] D. Scott, Definitions by abstraction in axiomatic set theory (Zusammenfassung), Bull. Amer. Math. Soc. 61, S. 442 (1955).

[263] J. Segner, Specimen logicae universaliter demonstrata, Jena 1740.

[264] H. M. Sheffer, A set of five independent postulates for Boolean algebras, with applications to logical constants, Trans. Amer. Math. Soc. 14, S. 481—488 (1913).

[265] J. R. Shoenfield, The independence of the axiom of choice (Zusammenfassung), J. Symb. Logic 20, S. 202 (1955).

[266] W. Sierpiński, Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$), Fund. Math. 5, S. 177 bis 187 (1924).

[267] W. Sierpiński, L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix, Fund. Math. 34, S. 1—5 (1947).

[268] R. Sikorski, Boolean algebras, 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1964 (russische Übers.: Moskau 1969).

[269] T. Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, Videnskapsselskapets Skrifter I, Mat. nat. kl. Nr. 4, 1920; englische Übersetzung von § 1 in [110], S. 252—263.

[270] T. Skolem, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Mathematikerkongressen i Helsingfors den 4—7 Juli 1922, Den femte skand. mat. kongr., Redegörelse, S. 217—232, Akad. Bokhandeln, Helsinki, 1923; englische Übersetzung in [110], S. 290—301.

[271] T. Skolem, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich, Videnskapsselskapets Skrifter I, Mat. nat. kl. Nr. 6, 1923; englische Übersetzung in [110], S. 302—333.

[272] T. Skolem, Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, Skrifter utgitt av Det Norske Videnskaps-Akad. i Oslo, I, Mat. nat. kl., Nr. 4, 1929.

[273] T. Skolem, Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen, Fund. Mat. 23, S. 150—161 (1934).

[273 bis] T. Skolem, Selected Works in Logic, Universitetsforlaget, Oslo 1970.

[274] R. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. of Math. 92, S. 1—56 (1970).

[275] E. Specker, Zur Axiomatik der Mengenlehre (Fundierungs- und Auswahlaxiom), Zeitschr. für math. Logik 3, S. 173—210 (1957).

[276] C. Spector, Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics, Proc. Symp. Pure Math. 5, Amer. Math. Soc. Publ., S. 1—27 (1962).

[277] C. von Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847.

[278] E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, J. für die reine und angew. Math. 137, S. 167—309 (1910), Neu herausgegeben von R. Baer und H. Hasse, Berlin 1930; Nachdruck New York 1950.

[279] N. I. Stiazhkin, History of mathematical logic from Leibniz to Peano, (Übersetzung aus dem Russischen). M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1969.

[280] S. M. Stigler, The anonymous professor Gergonne, Hist. Math. 3, S. 71—74 (1976).

[281] M. H. Stone, Boolean algebras, and their applications to topology, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 20, S. 197—202 (1934).

[282] M. H. Stone, Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 21, S. 103—105 (1935).

[283] M. H. Stone, Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics, Čas. mat. fys. 67, S. 1—27 (1937).

[284] A. Tarski, Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques, Ann. Soc. pol. math. 7, S. 270—272 (1929).

[285] A. Tarski, O pejeciu prawdy w odniesieniu do sformalizowanych nauk dedukcyjnych (Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen), Ruch Filosz. 12, S. 210—311 (1930—31); deutsche Übersetzung unter dem Titel: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, mit einem Nachwort, Studia philosophica 1, S. 261—405 (1936); englische kommentierte Übersetzung in [288], S. 152—278, Abdruck in [8 bis].

[286] A. Tarski, Der Aussagenkalkül und die Topologie, Fund. Math. 31, S. 103—136 (1938); englische Übersetzung in [288], S. 421—454.

[287] A. Tarski, On the calculus of relations, J. Symb. Logic 6, S. 73—89 (1941).

[288] A. Tarski, Logic, Semantics, Metamathematics, University Press, Oxford 1956.

*[288][1] A. Tarski, Grundlegung der wissenschaftlichen Semantik, in: [8 bis], S. 350ff.

[289] Transactions of the Cambridge Philosophical Society.

[290] Tsao-Tchen-Tang, Algebraic postulates and a geometric interpretation of the Lewis calculus of strict implication, Bull. Amer. Math. Soc. 44, S. 737—744 (1938).

[291] A. M. Turing, On computable numbers, with an application to Entscheidungsproblem, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 42, S. 230—265 (1936—1937); Verbesserungen, 43, S. 544—546 (1937).

[292] A. M. Turing, Computability and definability, J. Symb. Logic 2, S. 153—163 (1937).

[293] N. A. Vasil'ev, Voobra žaémaá (néaristotéléva) logika (Imaginäre Logik (nichtaristotelisch)), Žurnal Ministérva Narodnogo Prosvéščeniá 40, S. 207—246 (1912).

[294] O. Veblen, A system of axioms for geometry, Trans. Amer. Math. Soc. 5, S. 343 bis 384 (1904).

[295] O. Veblen and A. Young, Projective Geometry, 2 Bde., New York 1910—1917.

[296] G. Veronese, Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unita rettilinea, Padua 1891; deutsche Übersetzung unter dem Titel: Grundzüge der Geometrie, Leipzig 1894.

[297] J. Venn, Symbolic Logic, Macmillan, London 1881.

[298] M. Wajsberg, Aksjomatyzacja trojwartosciowego rachunku zdán (Ein Axiomensystem des dreiwertigen Kalküls) (in polnisch mit einer deutschen Zusammenfassung), C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie 24, S. 126—148 (1931).

[299] H. Weyl, Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe, Math. nat. Blätter (Leipzig) 7, S. 93—95, 109—113 (1910).

[300] H. Weyl, Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis, Leipzig 1918; Neudruck 1932.

[301] H. Weyl, The ghost of modality, Philosophical essays in memory of Edmund Husserl, hrsg. M. Farber, Cambridge, Mass. 1940.

[302] A. N. Whitehead, A treatise on universal algebra, with applications, University Press, Cambridge 1898.

[303] A. N. Whitehead and B. Russell, Principia Mathematica, Bd. 1, 1910; Bd. 2, 1912; Bd. 3, 1913; Cambridge, England; 2. Auflage 1925—1927.

[304] H. Wiener, Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie, Jahresber. der D.M.V. 1, S. 45—48 (1891).

[305] H. Wiener, A simplification of the logic of relations, Proc. Cambridge Phil. Soc. 17, S. 387—390 (1914); = [110], S. 224—227.

[306] L. Wittgenstein, Logisch-philosophische Abhandlung, Ann. der Naturphilos. Leipzig 14, S. 185—262 (1921).

[307] A. P. Youschkevitch, Les mathématiques arabes, Vrin, Paris 1976 (Übersetzung aus dem Russischen).

*[307][1] A. P. Juschkewitsch, Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Übersetzung aus dem Russischen, Leipzig 1964, S. 280.

[308] H. Wessel, Logik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984.

[309] A. Yasuhara, Recursive Function Theory and Logic, Academic Press, New York-London 1971.

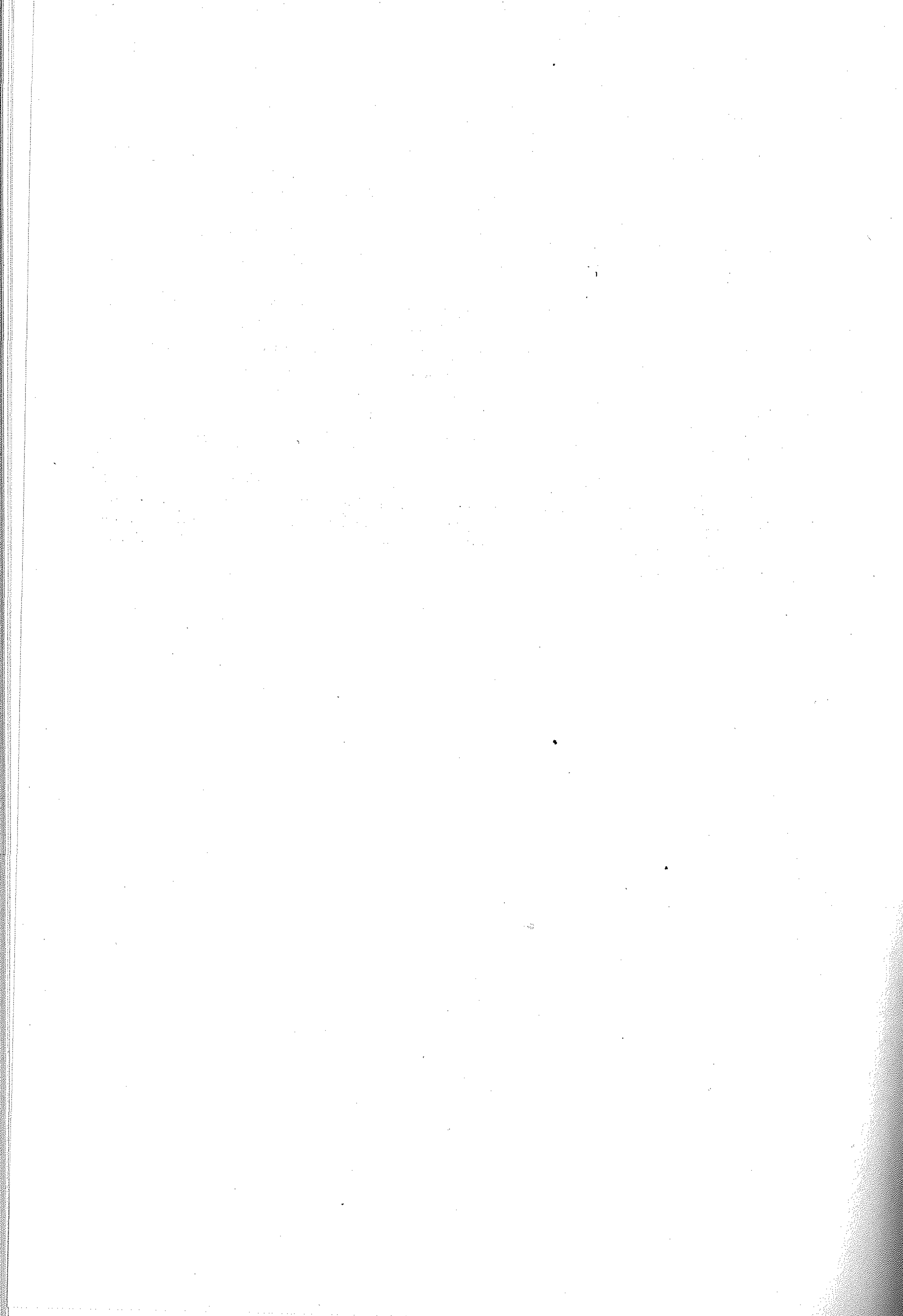
[310] E. Zermelo, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Ann. 59, S. 514—516 (1904); englische Übersetzung in [110], S. 139—141.

[311] E. Zermelo, Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, ebenda 65, S. 107—128 (1908); englische Übersetzung in [110], S. 183—198.

[312] E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, ebenda 65, S. 261—281 (1908); englische Übersetzung in [110], S. 199—215.

[313] E. Zermelo, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche, Fund. Math. 16, S. 29—47 (1930).

[G—H] H. Griffiths and P. Hilton, A comprehensive textbook of classical mathematics: A contemporary interpretation, Van Nostrand-Reinhold, London 1970. Nachdruck: Springer-Verlag, New York 1978. Deutsche Übersetzung: Klassische Mathematik in zeitgenössischer Darstellung, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1976—1978 (in 3 Bänden).



Biographischer Anhang

Abkürzungen:

B.B.M.	Biographien bedeutender Mathematiker (Hrsg. H. Wußing, W. Arnold), Volk und Wissen, Berlin / Aulis Verlag, Köln (*Zusatz bei der deutschen Ausgabe*)
D.S.B.	Dictionary of Scientific Biography, New York
E.U.	Encyclopaedia Universalis
N.B.G.	Nouvelle biographie générale
Pog.	J. C. Poggendorff, Biographisch-Literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften, Akademie-Verlag, Berlin

ABEL Niels Henrik (1802—1829). Geb. auf Finnö (norwegische Insel). Studierte an der Universität Oslo. Erhielt 1825 ein Stipendium der Regierung für eine Reise nach Berlin und Paris. Starb an Tuberkulose in Froland (Norwegen). B.B.M., D.S.B.

D'ALEMBERT Jean Baptiste le Rond (1717—1783). Geb. in Paris. Studierte Jura, Medizin und Mathematik am Collège des Quatre Nations. 1741 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt, ab 1772 ständiger Sekretär der französischen Akademie. In den fünfziger Jahren des 18. Jh. wurde er wissenschaftlicher Herausgeber der *Encyclopédie* (von Diderot). D.S.B.

ALEXANDER James Waddell (1888—1971). Geb. in Sea Bright (New Jersey). War von 1928 bis 1933 Professor an der Princeton University und ab 1933 am Institute for Advanced Study in Princeton tätig. Pog.

ALEXANDROFF Pavel Sergeevič (1896—1982). Geb. in Bogorodsk bei Moskau. Studium in Göttingen und Moskau. Wurde 1929 zum Professor ernannt. Seit 1929 korrespondierendes Mitglied, seit 1953 ordentliches Mitglied der sowjetischen Akademie der Wissenschaften. Ferner Mitglied zahlreicher ausländischer Akademien und Gesellschaften, darunter Akademie der Wissenschaften in Berlin (ab 1950), American Philosophical Society in Philadelphia und National Academy of Sciences in Washington (ab 1947), Göttinger Akademie der Wissenschaften (1929 bis 1938 und ab 1945). (*Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

AMPÈRE André-Marie (1775—1836). Geb. in Lyon, lehrte dort zunächst Mathematik, wurde 1802 Professor an der Zentralschule von Bourg-en-Bresse, 1803 Repetitor an der Ecole polytechnique, 1824 Professor für Experimentalphysik am Collège de France. Mitglied des Institut Impérial ab 1814. D.S.B.

ANTOINE Louis-Auguste (1888—1971). Geb. in Mirecourt (Vogesen). Ab 1909 in der Ecole normale supérieure, wurde 1912 als Hochschullehrer zugelassen und unterrichtete am Gymnasium in Dijon, bis er 1914 eingezogen wurde. Erblindete nach

einer Kopfverletzung. Nach dem Krieg erlernte er die Blindenschrift mit mathematischen Zeichen und promovierte 1921 an der Universität Strasbourg, wo er Vorlesungen hielt. Wurde danach Professor an der Faculté des sciences in Rennes (1923—1957). (A. Errera, *Bulletin de la société mathématique de Belgique* 1957.)

APPOLONIOS von Perga (2. Hälfte des 3. Jh. bis Anfang des 2. Jh. v. u. Z.). Soll in Perga, einer kleinen griechischen Siedlung in Kleinasien, geboren sein. Von seinem Leben ist wenig bekannt. Er lebte zuerst in Alexandria und ging dann nach Pergamon und Ephesus. B.B.M., D.S.B.

APPELL Paul Emile (1855—1930). Elsässer. Wurde an der Universität Nancy immatrikuliert. Erhielt 1872 die französische Staatsbürgerschaft. Studierte an der Ecole normale supérieure. Freund von Poincaré. Lehrte Mechanik an der Sorbonne, wurde 1892 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. D.S.B.

ARCHIMEDES (287?—212 v. u. Z.). Lebte in Syrakus, ging dann höchstwahrscheinlich nach Alexandria, wo er mit Euklids Nachfolgern zusammenarbeitete. Kehrte nach Syrakus zurück und leitete dort Arbeiten an den Hafenanlagen, an der Flotte und an militärischen Anlagen. Wurde bei der Plünderung der Stadt von den Römern erschlagen. B.B.M., D.S.B.

ARGAND Jean Robert (1768—1822). Geb. in Genf. Verbrachte sein Leben in Paris als Buchhändler. D.S.B.

ARTIN Emil (1898—1962). Geb. in Wien. Studium in Wien, Leipzig und Göttingen, wurde Professor an der Universität Hamburg. Lebte von 1937 bis 1958 in den USA und lehrte an der University of Notre Dame, der Indiana University und in Princeton. Danach kehrte er nach Hamburg zurück. D.S.B.

ARZELÀ Cesare (1847—1912). Geb. in S. Stefano di Magna (Italien). Studierte Mathematik und Physik an der Universität Pisa und unterrichtete in diesen Fächern von 1870 bis 1878 an den Gymnasien von Macerata, Siena, Savona, Como und Florenz. Professor an den Universitäten Palermo (1878—1880) und Bologna. Pog.

ASCOLI Guilio (1843—1896). Geb. in Triest (Italien). Wurde 1874 Professor der Mathematik am Technischen Institut zu Mailand, wirkte ab 1879 als Professor an der Ecole polytechnique. Pog.

BABBAGE Charles (1792—1871). Geb. in Teignmouth (England). Studierte am Trinity College in Cambridge, wurde dort 1827 zum Professor gewählt. Behielt seinen Lehrstuhl zwölf Jahre, ohne jemals Vorlesungen zu halten. War sonst sehr aktiv, gründete 1820 die Astronomical Society, 1831 die British Association for the Advancement of Science und 1834 die Statistical Society of London. Wurde 1816 Mitglied der Royal Society. D.S.B.

BACHELIER Louis (1870—1946). Geb. in Le Havre. Lehrte Mathematik in Dijon und Rennes, dann in Besançon, wo er bis zu seiner Pensionierung 1937 lebte. D.S.B.

BACHET de Méziriac, Claude Gaspar (1581—1638). Geb. in Bourg-en-Bresse in einer Adelsfamilie; von Jesuiten erzogen. Erhielt wahrscheinlich eine höhere Ausbildung in Padua und lehrte vermutlich an Jesuitenschulen in Como oder Mailand. Verbrachte mehrere Jahre in Rom und in Paris, wo er 1635 zum Mitglied der neugegründeten Académie française gewählt wurde. D.S.B.

BAIRE René Louis (1874—1932). Geb. in Paris. Schüler an der Ecole normale supérieure. Begann seine Laufbahn als Lehrer an den Gymnasien in Troyes, Bar-le-Duc und Nancy. Ab 1902 lehrte er an der Universität von Montpellier, ab 1905 an der von Dijon. Da er seit seiner Jugend krank war, mußte er ab 1914 auf jede Forschungs- und Lehrtätigkeit verzichten. Zog sich an den Genfer See zurück und starb in Chambéry. D.S.B.

BANACH Stefan (1892—1945). Geb. in Krakau (Polen). Studierte an der Technischen Hochschule in Lwow, wurde dort 1927 Professor. Korrespondierendes Mitglied der Polnischen Akademie der Wissenschaften ab 1924, Mitglied der Akademie der Wissenschaften der Ukrainischen SSR ab 1941. D.S.B.

BARROW Sir Isaac (1630—1677). Geb. in London. Erhielt Unterricht am Trinity College in Cambridge. Nach langen Reisen durch Europa wurde er anglikanischer

Geistlicher und hatte mehrere Lehrposten inne. Wurde 1663 Professor der Mathematik an der Universität Cambridge, trat fünf Jahre später zugunsten von Newton zurück. 1669 wurde er königlicher Kaplan in London, vier Jahre später kehrte er nach Cambridge als Rektor an das Trinity College zurück. Ab 1662 Mitglied der Royal Society. D.S.B.

BAYES Thomas (1702–1761). Geb. in London als Sohn eines Theologen. Erhielt Privatunterricht. Verbrachte sein Leben als anglikanischer Geistlicher an der Kirche zu Tunbridge Wells. 1742 zum Mitglied der Royal Society gewählt. D.S.B.

BELLAVITIS Giusto (1803–1880). Geb. in Bassano (Italien). Arbeitete von 1822 bis 1843 bei der Stadtverwaltung, beschäftigte sich in seiner Freizeit mit Mathematik. Wurde 1840 zum Mitglied des Istituto Veneto gewählt. Lehrte danach zuerst am Gymnasium in Vicenza, dann an der Universität Padua. D.S.B.

BELTRAMI Eugenio (1835–1900). Geb. in Cremona (Italien). Studierte an den Universitäten Pavia und Mailand, wurde Professor an den Universitäten Bologna (1862–1864, 1866–1873), Pisa (1864–1866), Rom (1873–1876, 1891–1899) und Pavia (1876–1891). Ab 1898 Präsident der Accademia dei Lincei. D.S.B.

BENDIXSON Ivar Otto (1861–1936). Geb. in Stockholm. Studierte an den Universitäten Stockholm und Uppsala (1879–1890), lehrte Mathematik am Polytechnikum von Stockholm. Nach seiner Promotion 1907 in Uppsala wurde er Professor an der Universität Stockholm. Pog.

BERNOULLI Daniel (1700–1782). Geb. in Groningen (Niederlande), wo sein Vater, Johann B., Professor war. Lebte ab 1705 in Basel, mit Ausnahme eines Aufenthaltes in Venedig (1723–1724) und eines von acht Jahren in Petersburg (1725 bis 1733), wo er an der Akademie der Wissenschaften arbeitete. Von 1733 bis 1776 war er Professor, zunächst für Botanik und Anatomie, dann für Physik an der Universität Basel. B.B.M., D.S.B.

BERNOULLI Jakob (I) (1654–1705). Geb. in Basel. Studierte in seiner Heimatstadt Philosophie, Theologie, Mathematik und Astronomie (die letzten beiden gegen den Willen seines Vaters). Nach Studienreisen nach Frankreich, den Niederlanden und England lehrte er ab 1683 an der Universität Basel, ab 1687 vorwiegend Mathematik. B.B.M., D.S.B.

BERNOULLI Johann (I) (1667–1748). Geb. in Basel, Bruder von Jakob (I). Begann mit dem Medizinstudium, studierte dann aber Mathematik zusammen mit seinem Bruder. Aufenthalt in Paris 1691–1692. Erhielt 1695 den Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Groningen (Niederlande). Wurde 1705 Nachfolger seines Bruders an der Universität Basel. B.B.M., D.S.B.

BERNŠTEJN Sergej Natanovič (1880–1968). Geb. in Odessa. Studierte in Paris, wo er Schüler von E. Picard war, und in Göttingen. Promovierte 1913 in Charkov. Wurde 1920 Professor an der Universität Charkov, dann ab 1933 an dem Polytechnischen Institut und an der Universität Leningrad, ab 1941 schließlich an der Moskauer Universität. Pog.

BESSEL Friedrich Wilhelm (1784–1846), Geb. in Minden (Westfalen). Begann schon 1799, als Kommis bei einem Bremer Kaufmann seinen Lebensunterhalt zu verdienen. Von der Seefahrt fasziniert, fing er mit dem Studium der Geometrie und vor allem der Astronomie an. Wurde 1806 Assistent in einer privaten Sternwarte und 1810 Direktor der neuen Sternwarte in Königsberg. Dort lehrte er Astronomie bis zu seinem Lebensende. Ab 1812 Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. D.S.B.

BETTI Enrico (1823–1892). Geb. in Pistoia (Italien). Studierte an der Universität Pisa und wurde dort Professor. Kämpfte im ersten italienischen Befreiungskrieg. Wurde 1862 Mitglied des Parlaments. D.S.B.

BEZOUT Etienne (1730–1783). Geb. in Nemours (Frankreich). Kam schon 1758 an die Académie des sciences. Wurde Lehrer und Examinator der zukünftigen Offiziere der Gardes du pavillon, der Marine und des Artilleriecorps. D.S.B.

BIANCHI Luigi (1856—1928). Geb. in Parma. Studierte bei Betti und Dini an der Universität Padua, dann an den Universitäten München und Göttingen. Wurde nach seiner Rückkehr nach Italien 1881 zum Professor an der Scuola normale superiore von Pisa ernannt, war später deren Rektor. Lehrte ab 1886 Geometrie an der Universität Pisa. War Mitglied zahlreicher italienischer und ausländischer Akademien. D.S.B.

BINET Jacques Philippe Marie (1786—1856). Geb. in Rennes. Wurde 1804 zur Ecole polytechnique zugelassen. Lehrte dort später Mechanik. Wurde 1830 abgesetzt, konnte aber den Lehrstuhl für Astronomie am Collège de France behalten, den er seit 1823 innehatte. Mitglied der Académie des sciences ab 1843, wurde 1856 ihr Präsident. N.B.G.

BIRKHOFF George David (1884—1944). Geb. in Michigan (USA). Nach Studien in Chicago und an der Harvard University lehrte er an der Universität von Wisconsin (1907—1909), an der von Princeton (1909—1912) und schließlich (ab 1912) an der Harvard University. Wurde 1925 Präsident der American Mathematical Society und 1937 der American Association for the Advancement of Science. D.S.B.

BLUMENTHAL Ludwig Otto (1876—1944). Geb. in Frankfurt am Main. Studierte bei Hilbert in Göttingen. Nach einem kurzen Aufenthalt in Paris begann er, in Göttingen Vorlesungen zu halten. Wurde 1905 Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Aachen. War Herausgeber der *Mathematischen Annalen*. Emigrierte nach Holland, wurde von dort deportiert und starb vermutlich im KZ Theresienstadt. Pog.

BÔCHER Maxime (1867—1918). Geb. in Boston (USA). Studierte an der Harvard University, dann in Göttingen, wo er Schüler von Felix Klein war. Kehrte 1891 an die Harvard University zurück und wurde dort 1904 Professor. D.S.B.

DU BOIS-REYMOND Paul David Gustav (1831—1889). Geb. in Berlin. Begann 1853 mit dem Medizinstudium an der Universität Zürich, studierte dann mathematische Physik an der Universität Königsberg, wo er 1859 promovierte. Unterrichtete als Oberlehrer in Berlin, lehrte dann an den Universitäten Berlin, Heidelberg (1865—1870), Freiburg, Tübingen (1874—1884) und schließlich an der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg. D.S.B.

BOLYAI János (Johann) (1802—1860). Geb. in Koloszvár (Ungarn), Sohn des Mathematikprofessors Farkas (Wolfgang) Bolyai, einem Studienfreund von Gauß. J. Bolyai wählte die Militärlaufbahn. Gab 1833 den Dienst (wegen Invalidität) auf und kehrte zunächst zu seinem Vater zurück. Ließ sich danach auf einem Gut in Domald nieder. D.S.B.

BOLZANO Bernard (1781—1848). Geb. in Prag. Studierte Theologie und Mathematik an der Prager Universität. Wurde 1804 Priester und 1805 auf den Lehrstuhl für Religionslehre berufen, der vom österreichischen Kaiser eingerichtet worden war. Wegen seiner nonkonformistischen Ideen wurde er 1819 seines Amtes enthoben, seine Werke kamen auf den Index. Seit 1815 Mitglied der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. B.B.M., D.S.B.

BONNET Pierre Ossian (1819—1892). Geb. in Montpellier. Schüler an der Ecole polytechnique und der Ecole des Ponts et Chaussées. Begann seine Laufbahn als Ingenieur und widmete sich, zunächst an der Ecole polytechnique, dann an der Ecole normale supérieure und an der Sorbonne, der Lehre. Wurde 1862 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt, war seit 1883 Mitglied des Bureau des Longitudes. D.S.B.

BOOLE George (1815—1864). Geb. in Lincoln (England). Autodidakt. Begann mit 16 Jahren zu unterrichten und gründete 1835 eine eigene Schule in Lincoln. Wurde 1849 Professor an dem neuen Queen's College in Cork (Irland). 1857 zum Mitglied der Royal Society gewählt.

BOREL Emile (1871—1956). Geb. in Saint-Affrique in Aveyron (Südfrankreich). Studierte an der Ecole normale supérieure, lehrte dann an der Universität Lille, an der Ecole normale supérieure, später (ab 1909) an der Sorbonne. Abgeordneter

von 1924 bis 1936; wurde 1925 Marineminister. Gründete das Centre National de la Recherche Scientifique und leistete einen Beitrag zur Gründung des Institut Henri Poincaré, dessen Direktor er von 1928 bis zu seinem Tode war. Ab 1921 Mitglied der Académie des sciences. D.S.B.

BOUQUET Jean-Claude (1819–1885). Geb. in Morteau (Doubs). Studierte an der Ecole normale supérieure, wurde Professor am Gymnasium von Marseilles, dann an der Faculté des sciences in Lyon. In Paris ab 1852 am Lycée Bonaparte, am Lycée Louis-le-Grand, an der Ecole normale supérieure, an der Ecole polytechnique und an der Sorbonne. 1875 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. D.S.B.

BOURBAKI Nicolas. Pseudonym, unter dem eine Gruppe französischer Mathematiker eine Reihe von Zeitschriftenartikeln und das bekannte mehrbändige Werk *Eléments de mathématique* veröffentlicht hat, das die Darstellungsweise der modernen Mathematik wesentlich mitbestimmte. (*Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

BRIANCHON Charles-Julien (1783–1864). Geb. in Sèvres. Schüler von Monge an der Ecole polytechnique (1804–1808). Wurde Leutnant der Artillerie in der napoleonischen Armee. 1818 zum Professor an der Ecole d'artillerie de la Garde Royale ernannt. D.S.B.

BRILL Alexander Wilhelm von (1842–1935). Geb. in Darmstadt. Studierte in Karlsruhe Architektur und an der Universität Gießen. War tätig 1867–1869 an der Universität Gießen, 1869–1875 an der Technischen Hochschule Darmstadt, 1875–1884 an der Technischen Hochschule München und 1884–1918 an der Universität Tübingen. D.S.B.

BRIOT Charles-Auguste (1817–1882). Geb. in St. Hippolyte. Entschied sich nach seinem Studium an der Ecole normale supérieure für die Lehrtätigkeit. War Professor am Gymnasium in Orléans und an der Universität Lyon, später in Paris am Lycée Bonaparte, am Lycée Saint-Louis und schließlich an der Sorbonne und an der Ecole normale supérieure. D.S.B.

BROUNCKER William Viscount (1620?–1684). Geb. in Westminster (England). Erwarb 1647 ein Doktorat der Physik an der Universität Oxford. Hatte mehrere öffentliche Ämter inne, darunter das des ersten Präsidenten der Royal Society. D.S.B.

BROUWER Luitzen Egbertus Jan (1881–1966). Geb. in Overschie. War während seiner ganzen Laufbahn an der Universität Amsterdam, wo er 1907 promovierte und von 1909 bis 1951 lehrte.

BURALI-FORTI Cesare (1861–1931). Geb. in Arezzo (Italien). Studierte an der Universität Pisa, lehrte an der Technischen Hochschule in Augusta (Sizilien), an der Militärakademie in Turin (1887–1931) und am Sommeiller-Polytechnikum in Turin. D.S.B.

BURNSIDE William (1852–1927). Geb. in London. Promovierte in Dublin und arbeitete als Professor an der Seefahrtsschule in Greenwich. Vizepräsident der Londoner Mathematical Society, ab 1893 Mitglied der Royal Society. Pog.

CANTOR Georg (1845–1918). Geb. in Petersburg als Sohn deutscher Eltern. Studierte zunächst in Zürich, dann in Berlin bei Weierstraß. Lehrte ab 1869 an der Universität Halle. Gründete 1890 die Deutsche Mathematiker-Vereinigung und wurde ihr erster Vorsitzender. Organisierte 1897 den ersten internationalen Mathematiker-Kongreß in Zürich. Seit 1884 litt er zeitweilig an tiefen Depressionen und starb in der psychiatrischen Klinik der Universität Halle. B.B.M., D.S.B.

CARDANO Geronimo (1501–1576). Geb. in Pavia. Studierte Medizin in Pavia und Padua. Lehrte ab 1534 Mathematik in einer Mailänder Schule, während er als Arzt praktizierte. Nahm 1543 den Lehrstuhl für Medizin an der Universität Pavia, dann 1562 den an der Universität Bologna an, wurde 1570 der Ketzerei beschuldigt, verhaftet und seines Postens enthoben. B.B.M., D.S.B.

CARNOT Lazare Nicolas Marguérite (1753–1823). Geb. in Burgund. Berufsoffizier, wurde zum Abgeordneten der Gesetzgebenden Versammlung und des National-

konvents gewählt. Ab 1793 Mitglied des Wohlfahrtsausschusses, wo er von 1793 bis 1795 für das Kriegswesen verantwortlich war. Der Staatsstreich von 1797 stürzte ihn, aber Napoleon rief ihn nach Frankreich zurück, um ihn mit dem Posten des Innenministers während der 100-Tage-Regierung zu betrauen. War Mitglied der provisorischen Regierung im Juni 1815, flüchtete nach Magdeburg, wo er die letzten Jahre seines Lebens verbrachte. D.S.B.

CARTAN Elie Joseph (1869—1951). Geb. in Dolomieu in den französischen Alpen. Erhielt ein staatliches Stipendium, das ihm den Besuch des Gymnasiums in Lyon und dann der Ecole normale supérieure ermöglichte. Lehrte an den Universitäten Montpellier, Lyon, Nancy und Paris. 1931 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. D.S.B.

CASTELNUOVO Guido (1865—1952). Geb. in Venedig. Studierte Mathematik in Padua. Nach einer Assistenzzeit an der Universität Turin wurde er 1891 an die Universität Rom berufen. War Präsident der Accademia dei Lincei von 1946 bis zu seinem Tode. D.S.B.

CAUCHY Augustin-Louis (1789—1857). Geb. in Sceaux bei Paris. Ging von der Ecole polytechnique zur Ecole des Ponts et Chaussées, beteiligte sich als Ingenieur an zahlreichen praktischen Arbeiten. Kehrte 1813 nach Paris zurück, lehrte an der Ecole polytechnique, an der Faculté des sciences und am Collège de France. Wurde 1816 zum Mitglied der Académie des sciences ernannt, aber nicht gewählt. Emigrierte nach der Julirevolution 1830 nach Turin, hielt sich dann in Prag auf, wo er Erzieher des Enkelsohnes von Karl X. war. Kehrte 1838 nach Frankreich zurück, nahm seine Arbeit an der Akademie wieder auf und erhielt 1848 wieder einen Lehrstuhl an der Sorbonne. B.B.M., D.S.B.

CAVALIERI Bonaventura (1598?—1647). Geb. in Mailand. Trat sehr früh in den Jesuitenorden ein. Kam in den Kreis um Galilei in Pisa. Lehrte ab 1629 Theologie in verschiedenen Klöstern, vor allem in Bologna, wo er gleichzeitig den Lehrstuhl für Mathematik an der Universität innehatte. D.S.B.

CAYLEY Arthur (1821—1895). Geb. in Richmond (England), Sohn einer englischen Kaufmannsfamilie aus Petersburg. Lebte in Rußland bis zu seinem achten Lebensjahr. Verbrachte die Jahre 1838—1849 am Trinity College in Cambridge, studierte Mathematik und die Rechte und wurde 1849 Rechtsanwalt. Erhielt 1863 den Lehrstuhl für reine Mathematik in Cambridge. D.S.B.

ČEBOTAREV Nikolaj Grigorevič (1894—1947). Geb. in Kamenec-Podol'skij (Ukraine). Studierte Mathematik an der Universität Kiev. Lehrte dann in Odessa (1921 bis 1927), später an der Universität Kazan (1928—1947). D.S.B.

ČEBYŠEV Pafnutij Lvovič (1821—1894). Geb. in Okatovo (Gouvernement Kaluga). Kam mit elf Jahren nach Moskau und studierte an der dortigen Universität. Erhielt dort 1847 eine Assistentenstelle und wirkte ab 1860 als Professor. Wurde 1882 emeritiert. Ab 1853 Mitglied der Petersburger Akademie der Wissenschaften. B.B.M., D.S.B.

ČECH Eduard (1893—1960). Geb. in Strachov (Böhmen). Studierte an der Universität Prag, promovierte dort 1920. Nach einem Jahr der Zusammenarbeit mit Fubini in Turin wurde er 1923 zum Professor für Mathematik an der Universität Brünn ernannt. Lehrte ab 1945 an der Universität Prag. Mitglied der Tschechoslowakischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

CHASLES Michel (1793—1880). Geb. in Epernon (Frankreich). Studierte ab 1812 an der Ecole polytechnique, wurde 1814 zur Verteidigung von Paris eingezogen und in das Ingenieurcorps berufen. Er verzichtete darauf, um sich seinen Studium zu widmen. Von 1841 bis 1851 lehrte er an der Ecole polytechnique. Für ihn wurde 1846 an der Sorbonne ein Lehrstuhl für höhere Geometrie gegründet. Ab 1851 Mitglied der Académie des sciences. D.S.B.

CHINČIN Aleksandr Jakovlevič (1894—1959). Geb. in Kondrovo (südwestlich von Moskau). Studierte an der Universität Moskau, lehrte ab 1918 an mehreren Instituten in Moskau und Ivanovo und ab 1927 an der Universität Moskau. D.S.B.

CHRISTOFFEL Elwin Bruno (1829—1900). Geb. in Monschau bei Aachen. Studierte an der Universität Berlin, promovierte dort 1856. Lehrte 1859—1862 an der Universität Berlin, 1862—1869 am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich, 1869 an der Gewerbeakademie in Berlin und 1872—1892 an der neugegründeten Universität Straßburg.

CLAIRAUT Alexis-Claude (1713—1765). Geb. in Paris als Sohn eines Mathematikprofessors. Vergrub sich schon in seiner Kindheit in mathematische Studien. Wurde mit 18 Jahren zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. Nahm mit Maupertuis 1736—1737 an einer Expedition nach Lappland teil, um einen Längengrad zu messen. D.S.B.

CLAVIUS Christopher (1537—1612). Geb. in Bamberg. Trat 1555 in Rom in den Jesuitenorden ein. Studierte an der Universität Coïmbra (Portugal), lehrte Mathematik zunächst am Collegium Romanum, dann an der Universität Rom. D.S.B.

CLEBSCH Rudolf Friedrich Alfred (1833—1872). Geb. in Königsberg, wo er auch studierte. Beendete seine Ausbildung in Berlin. Seine akademische Laufbahn begann 1858 an der Universität Berlin, setzte sich fort 1863 an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Er wirkte 1863—1868 an der Universität Gießen, ab 1868 an der Universität Göttingen. Gründete 1868 zusammen mit C. Neumann die *Mathematischen Annalen*. D.S.B.

CLIFFORD William Kingdon (1845—1879). Geb. in Exeter (England). Studierte am Trinity College in Cambridge, wirkte ab 1871 als Professor für angewandte Mathematik an der Universität London. Wurde 1874 zum Mitglied der Royal Society gewählt. Er starb auf Madeira an Tuberkulose. D.S.B.

CODAZZI Delfino (1824—1873). Geb. in Lodi (Italien). Lehrte zunächst an den Gymnasien von Lodi und von Pavia, war dann von 1865 bis zu seinem Tode Professor an der Universität Pavia. D.S.B.

CONDORCET Marie Jean Antoine Nicolas Caritat de (1743—1794). Geb. in Ribemont in einer alten Adelsfamilie, wurde von Jesuiten erzogen, lebte ab 1759 in Paris. Wurde 1769 zum Mitglied der Académie des sciences und 1776 zu deren ständigem Sekretär gewählt. Unter Turgot wurde er Finanzinspektor und Direktor der Seefahrt. Nahm aktiv an den Ereignissen der französischen Revolution teil (1792 Präsident der Nationalversammlung). Wurde am 27. März 1794 verhaftet und am folgenden Tag im Gefängnis von Bourg-la-Reine tot aufgefunden. D.S.B.

COTES Roger (1682—1716). Geb. in Burbage (England). Studierte am Trinity College in Cambridge. Wurde 1706 zum Professor für Astronomie und Naturphilosophie in Cambridge ernannt und baute dort ein Observatorium. Wurde 1711 Mitglied der Royal Society. D.S.B.

COURANT Richard (1888—1972). Geb. in Lublin (Polen). Studierte in Breslau, Zürich und bei Hilbert in Göttingen. Mathematikprofessor an der Universität Göttingen von 1912 bis 1934, emigrierte in die USA, wirkte dort an der New Yorker Universität. Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Pog.

COURNOT Antoine Augustin (1801—1877). Geb. in Gray (Franche Comté). Studierte an der Ecole normale supérieure, schrieb sich nach deren Schließung 1822 an der Sorbonne ein. Wurde, um seinen Lebensunterhalt zu verdienen, Erzieher in der Familie des Marschalls Gouvion-Saint-Cyr (1823—1833). Wirkte danach an den Universitäten Lyon (1834) und Grenoble (1835—1838). Erhielt schließlich den Posten eines Generalinspekteurs im Unterrichtsministerium. D.S.B.

COUSIN Pierre (1867—1933). Geb. in Paris. Schüler von Poincaré und Appell an der Universität Paris. War zunächst Professor am Gymnasium in Caen, dann Repetitor und Professor an der Faculté des sciences in Bordeaux. Pog.

CRAMER Gabriel (1704—1752). Geb. in Genf. Teilte sich im Alter von 18 Jahren mit G. L. Calandrini den Lehrstuhl für Mathematik an der Calvinistischen Akademie. 1734 wurde Calandrini Professor der Philosophie, und Cramer übernahm den Lehrstuhl für Mathematik. War 1750 Nachfolger von Calandrini, aber nur für ein Jahr. D.S.B.

CREMONA Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe (1830—1903). Geb. in Pavia. Kämpfte gegen die Österreicher und studierte nach der Niederlage 1848 Ingenieurwesen und Architektur (1849—1853). Konnte erst 1855 einen offiziellen Posten erhalten, als man ihm gestattete, in verschiedenen Gymnasien zu unterrichten. Wurde dann Professor an der Universität Bologna, am Polytechnikum in Mailand sowie am Polytechnikum und an der Universität in Rom. D.S.B.

CROFTON Morgan William (1826—1915). Geb. in Dublin. Studierte dort am Trinity College. Lehrte Mathematik an der Militärakademie von Woolwich, dann an der Universität Dublin (1870—1884), Ließ sich später in London nieder. Pog.

DARBOUX Jean-Gaston (1842—1917). Geb. in Nîmes. Unterrichtete, nach seinem Studium an der Ecole normale supérieure, von 1867 bis 1872 an Gymnasien, später an der Ecole normale supérieure und an der Sorbonne. Wurde 1884 zum Mitglied und 1900 zum ständigen Sekretär der Académie des sciences gewählt. D.S.B.

DAVENPORT Harold (1907—1969). Geb. in Huncoat. Studierte an der Universität Manchester, dann am Trinity College in Cambridge. Lehrte in Manchester (1937 bis 1941), in Bangor (1941—1945), am University College in London (1945—1958) und schließlich in Cambridge. (*Bull. London Math. Soc.*)

DEDEKIND Julius Wilhelm Richard (1831—1916). Geb. in Braunschweig. Studierte an der Universität Göttingen. Begann 1854/55 als Privatdozent in Göttingen, wo er enge Beziehungen zu Dirichlet und Riemann knüpfte. 1858 Berufung an das Eidgenössische Polytechnikum Zürich, ab 1862 Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig. D.S.B.

DEHN Max (1878—1952). Geb. in Hamburg. Promotion 1900 in Göttingen. War Professor in Frankfurt, bis ihn 1935 das Naziregime zur Emigration zwang. Lehrte in den USA an der Universität von Idaho, am Illinois Institute of Technology, am St. Johns College in Annapolis und ab 1945 am Black Mountain College in North Carolina. D.S.B.

DENJOY Arnaud (1884—1974). Geb. in Auch (Gers). Studierte an der Ecole normale supérieure, bestand 1909 in Paris das Doktorexamen. Lehrte an den Universitäten Montpellier (1909—1917), Utrecht (1917—1919) und Strasbourg. Setzte 1922 seine Tätigkeit an der Pariser Universität fort, wo er bis 1955 Titularprofessor war. Ab 1942 Mitglied der Académie des sciences.

DESARGUES Gérard (1591—1661). Geb. in Lyon. Lebte ab 1626 in Paris. Nahm als Ingenieur an der Belagerung von La Rochelle 1628 teil. Entwickelte zwischen 1630 und 1645 eine intensive wissenschaftliche Aktivität, wurde vermutlich technischer Berater und Ingenieur in Richelieus Umgebung. Begann 1645 eine neue Tätigkeit als Architekt in Paris und Lyon. D.S.B.

DESCARTES René du Perron (1596—1650). Geb. in La Haye bei Tours. Erwarb das Baccalaureat der Rechte an der Universität zu Poitiers, studierte Mathematik in Paris bei Mydorge und Mersenne. Trat 1617 der Armee des Prinzen von Oranien bei. Diente im Laufe von neun Jahren abwechselnd in verschiedenen Armeen. Führte dann in Paris ein flottes Leben. Emigrierte 1628 nach Holland und nahm 1649 eine Einladung der Königin Christine von Schweden an. Kurze Zeit nach seiner Ankunft in Schweden starb er an Lungenentzündung. B.B.M., D.S.B.

DICKSON Leonard Eugene (1874—1954). Geb. in Independence, Iowa (USA). Studierte an den Universitäten von Texas, Chicago, Leipzig und Paris. Lehrte an den Universitäten von Texas und Chicago. 1911—1916 Herausgeber der *Transactions of the American Mathematical Society*. Ab 1913 Mitglied der National Academy of Sciences. D.S.B.

DINI Ulisse (1845—1918). Geb. in Pisa. Studierte an den Universitäten Pisa und Paris. Lehrte ab 1866 an der Universität Pisa, deren Rektor er von 1888 bis 1890 war. D.S.B.

DIOPHANTOS von Alexandria (um 250 u. Z.). Über sein Leben ist kaum etwas bekannt. Er soll um die Mitte des 3. Jh. in Alexandria gelebt haben. B.B.M.

DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805—1859). Geb. in Düren bei Aachen. Studierte in Paris 1822—1826, wo er seinen Lebensunterhalt als Privatlehrer in der Familie des Generals Foy verdiente. Von 1826 bis 1828 lehrte er an der Universität Breslau, dann von 1829 bis 1855 an der Universität Berlin. Wurde 1855 Nachfolger von Gauß an der Universität Göttingen. 1831 zum Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften gewählt. D.S.B.

DOEBLIN Wolfgang (1915—1940). Geb. in Berlin, Sohn des Schriftstellers Alfred Döblin. Dieser verließ 1933 Hitler-Deutschland und erwarb für sich und seine Familie die französische Staatsbürgerschaft. Nach seiner Ankunft in Paris studierte W. D. Mathematik an der Sorbonne bei M. Fréchet. Verteidigte 1938 seine Dissertation, wurde aber 1939 einberufen und mußte seine Arbeit unterbrechen. Starb einige Tage vor dem Waffenstillstand, am 21. Juni 1940. (P. Lévy, *Revue d'Historie des sciences et de leurs applications*, 1955.)

DUPIN Pierre-Charles-François (1784—1873). Geb. in Varzy. Verließ 1803 die Ecole polytechnique als Marineingenieur, gründete 1813 ein Meeresmuseum in Toulon und wurde Professor am Conservatoire des Arts et Métiers. Nahm 1828—1870 am politischen Leben als Abgeordneter, als Marineminister und als Senator teil. Gehörte der Académie des sciences (ab 1818) und der Académie des sciences morales et politiques an.

DYCK Walther Franz Anton von (1856—1934). Geb. in München. Studierte Mathematik in München, Berlin und Leipzig. Wurde 1884 Professor an der Technischen Hochschule in München, 1900 deren Rektor. War einer der Gründer der *Enzyclopädie der mathematischen Wissenschaften* und Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

EISENSTEIN Ferdinand Gotthold Max (1823—1852). Geb. in Berlin. Wurde 1843 an der Berliner Universität immatrikuliert, lebte in ärmlichen Verhältnissen bis 1845, als ihm, auf Anregung Jacobis, von der Philosophischen Fakultät der Breslauer Universität die Ehrendoktorwürde verliehen wurde, die ihm erlaubte, in Berlin Vorlesungen zu halten. Durch seine Inhaftierung 1848 hatte seine Gesundheit gelitten; er starb im Herbst 1852 an Tuberkulose. War im März 1852 zum Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften gewählt worden. D.S.B.

ENRIQUES Federigo (1871—1946). Geb. in Livorno. Studierte in Pisa, promovierte dort 1891. Ging dann nach Rom und Turin, lehrte an der Universität Bologna bis 1923 und an der Universität Rom. Gründete dort ein nationales Institut für die Geschichte der Naturwissenschaften. D.S.B.

EUKLID von Alexandria (365?—300? v. u. Z.). Von ihm ist nur bekannt, daß er später als einige Schüler von Plato († 347 v. u. Z.) und vor Archimedes (* 287? v. u. Z.) gelebt und in Alexandria gelehrt hat. B.B.M., D.S.B.

EUDOXOS von Knidos (408?—355? v. u. Z.). Geb. in Knidos, Schüler des Arychtas von Tarent und des Mediziners Philiston. Besuchte Athen, wo er Platons Vorlesungen hörte. Verbrachte ein Jahr in Ägypten und gründete eine Schule in Kyzikos (in Kleinasien am Marmarameer). Lehrte nach seiner Rückkehr nach Knidos Theologie, Kosmologie und Meteorologie. D.S.B.

EULER Leonhard (1707—1783). Geb. in Basel. Promovierte dort 1723 auf dem Gebiet der Philosophie. Nahm 1726 eine Einladung an die Akademie in Petersburg an und siedelte 1727 über, um dort Professor der Physik und später auch der Mathematik zu werden. Erblindete 1738 auf dem rechten Auge. Verließ 1741 Petersburg und ging nach Berlin, um dort 25 Jahre lang die Klasse Mathematik an der Berliner Akademie zu leiten. Differenzen mit dem preußischen König Friedrich II. veranlaßten Euler, 1766 nach Petersburg zurückzukehren. Wenig später erblindete er vollständig. B.B.M., D.S.B.

FAGNANO del Toschi, Giulio Carlo (1682—1766). Geb. in Sinigaglia (Italien) in einer Adelsfamilie. Wurde 1723 zum Bürgermeister von Sinigaglia ernannt. Auf mathematischem Gebiet Autodidakt. D.S.B.

FELDBAU Jacques (1914—1945). Schüler von C. Ehresmann. Wurde von den Nazis deportiert und starb in einem Konzentrationslager.

FELLER William (1906—1970). Geb. in Zagreb. Studium an der Universität Zagreb, Promotion 1926 in Göttingen, Habilitation 1929 in Kiel. Emigrierte in die USA, wurde dort Professor an der Brown University in Providence (Rhode Island), an der Cornell University in Ithaca (New York) und ab 1950 in Princeton. Pog.

FERMAT Pierre de (1601—1665). Geb. in Beaumont als Sohn eines Lederhändlers, der vermögend genug war, um seinen Sohn an der Universität Toulouse die Rechte studieren zu lassen. Wurde 1631 in Orléans Bakkalaureus, erhielt im selben Jahr den Posten eines Rates am Obersten Gerichtshof in Toulouse. Wurde 1648 Mitglied der Chambre de l'édit in Castres. B.B.M., D.S.B.

FISCHER Ernst (1875—1959). Geb. in Wien, wo er auch studierte und seine wissenschaftliche Laufbahn begann. War dann Professor am Polytechnikum in Brünn (1910—1911), an der Universität Erlangen (1911—1920) und an der Universität Köln (1920—1938). Pog.

FONCENEX Daviet François de (1734—1799). Geb. in Thonon (Savoyen). Kommandant der Sardinischen Flotte, dann Brigadier der Infanterie und Gouverneur von Sassari (Sardinien). Mitglied der Turiner Akademie der Wissenschaften. Pog.

FOURIER Jean-Baptist Joseph de (1768—1830). Geb. in Auxerre, wurde mit neun Jahren Waise. Unterrichtete ab 1789 in seiner Vaterstadt. Wurde 1794 inhaftiert, nach der Hinrichtung Robespierres entlassen. Kehrte nach Paris zurück, um in die gerade gegründete und im gleichen Jahr wieder geschlossene Ecole normale einzutreten. Nach ihrer Wiedereröffnung im Jahre 1795 wurde er dort Assistent und nahm 1798 mit Monge an Napoleons Feldzug nach Ägypten teil. Nach dem Feldzug ernannte ihn Napoleon zum Präfekten des Departements Isère (in Grenoble). Nach der endgültigen Niederlage Napoleons wurde er durch Vermittlung eines Freundes Direktor des Bureau des Statistiques de la Seine. Wurde 1817 Mitglied der Académie des sciences, 1822 ihr ständiger Sekretär. D.S.B.

FRAENKEL Adolf Abraham (1891—1965). Geb. in München. Studierte an den Universitäten München, Marburg, Berlin und Breslau. Lehrte an den Universitäten Marburg (1916—1928) und Kiel (1928—1929) und von 1929 bis 1959 an der hebräischen Universität in Jerusalem. D.S.B.

FRÉCHET Maurice (1878—1973). Geb. in Maligny. Erhielt seine Ausbildung an der Ecole normale supérieure. Lehrtätigkeit an den Universitäten Poitiers (1910 bis 1919), Strasbourg (1920—1927) und Paris (1928—1940). Mitglied der Académie des sciences. E.U.

FREDHOLM (Erik) Ivar (1866—1927). Geb. in Stockholm. Studierte dort an der Technischen Hochschule, dann an der Universität Uppsala, wurde Schüler von Mittag-Leffler an der Universität Stockholm. Lehrte ab 1898 Mechanik und mathematische Physik an der Universität Stockholm. D.S.B.

FREGE Friedrich Ludwig Gottlob (1848—1925). Geb. in Wismar. Studierte an den Universitäten Jena und Göttingen, wo er 1871 auf dem Gebiet der Philosophie promovierte. Von 1879 bis 1917 Professor an der philosophischen Fakultät in Jena. D.S.B.

FRENET Jean-Frédéric (1816—1900). Geb. in Périgueux. Besuchte ab 1840 die Ecole normale supérieure, studierte dann an der Universität Toulouse und erhielt 1847 die Doktorwürde. Lehrtätigkeit an den Universitäten Toulouse und Lyon, wo er gleichzeitig Direktor des Observatoriums war. D.S.B.

FROBENIUS Georg Ferdinand (1849—1917). Geb. in Berlin. Begann sein Studium in Göttingen, beendete es 1870 in Berlin (Schüler von Kummer, Kronecker und Weierstraß). Übte seine akademische Tätigkeit in Berlin aus, mit Ausnahme der Jahre 1875—1892, als er Professor am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich war. Ab 1893 Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

FUBINI Guido (1879—1943). Geb. in Venedig. Schüler der Scuola normale superiore in Pisa. Lehrte an den Universitäten Catania, Genua und Turin. Mußte 1938

wegen der Faschisten zurücktreten und emigrierte 1939 in die USA, wo er an der New Yorker Universität bis zu seinem Tode lehrte.

FUCHS Immanuel Lazarus (1833—1902). Geb. in Posen. Promotion 1858 an der Universität Berlin. Unterrichtete dort an der Artillerie- und Ingenieurschule. Lehrte dann an den Universitäten Greifswald, Göttingen und Heidelberg. Kehrte 1882 nach Berlin zurück und wurde Mitglied der Akademie der Wissenschaften. Von 1892 bis 1902 Herausgeber des *Journals für die reine und angewandte Mathematik*. D.S.B.

FUETER Karl Rudolf (1880—1950). Geb. in Basel. Studium in Göttingen, Paris, Wien und London. Lehrtätigkeit in Marburg und Clausthal, Professor an der Universität Basel, der Technischen Hochschule Karlsruhe und an der Zürcher Universität. Gründer und Präsident der Schweizer Mathematischen Gesellschaft. D.S.B.

FURTWÄNGLER Philipp (1869—1940). Geb. in Elze bei Hannover. Studierte in Göttingen (1889—1894). Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Geodätischen Institut Potsdam (1899—1904) und Professor an der Akademie für Landwirtschaft in Bonn (1904—1906 und 1910—1912), an der Technischen Hochschule Aachen und zum Schluß an der Universität Wien. Pog.

GALOIS Evariste (1811—1832). Geb. in Bourg-la-Reine. Schüler am Collège Louis-le-Grand in Paris, bewarb sich an der Ecole polytechnique, scheiterte aber 1829 an der Aufnahmeprüfung. Wurde dann an der Ecole normale supérieure angenommen, aber schon 1830 wegen seiner republikanischen Ideen der Schule verwiesen. Betätigte sich politisch und wurde inhaftiert. Er starb an den Folgen eines Duells, dessen genaue Umstände nicht geklärt sind. B.B.M., D.S.B.

GAMBIER Bertrand (1879—1954). Geb. in Villers-Bocage (Somme). Unterrichtete an den Gymnasien von Bar-le-Duc (1907—1908) und Montpellier (1908—1909) und dann an der Universität Rennes (1909—1922). Wurde dort 1913 zum Professor ernannt. War dann von 1922 bis 1948 Professor für Differential- und Integralrechnung an der Universität Lille. Pog.

GAUSS Carl Friedrich (1777—1855). Geb. in Braunschweig in einer armen Familie. Erhielt 1792 ein Stipendium des Herzogs von Braunschweig, das ihm das Studium am Collegium Carolinum in Braunschweig und (1795—1798) an der Universität Göttingen erlaubte. Promotion 1799 an der Universität Helmstedt. Erhielt 1807 den Posten des Direktors der Göttinger Sternwarte, den er bis zu seinem Tode innehatte. Leitete von 1818 bis 1825 die trigonometrische Vermessung des Landes Hannover. B.B.M., D.S.B.

GEL'FOND Aleksandr Osipovič (1906—1968). Geb. in Petersburg. Studium an der Universität Moskau. Lehrte 1929—1930 Mathematik am Technischen Institut in Moskau, war von 1931 bis zu seinem Tode an der Moskauer Universität tätig. D.S.B.

GENTZEN Gerhard (1909—1945). Geb. in Greifswald. Promotion dort 1932. Arbeitete von 1934 bis 1943 mit Ausnahme von zwei Jahren Militärdienst als Assistent bei Hilbert. Nahm dann einen Posten an der Prager Universität an. Starb nach der Befreiung Prags im Gefängnis an Unterernährung. D.S.B.

GERGONNE Joseph Diaz (1771—1859). Geb. in Nancy. 1791 Kapitän der Nationalgarde, nahm aktiv an den Napoleonischen Kriegen teil. Erhielt 1795 einen Lehrstuhl für Mathematik an der Ecole centrale von Nîmes, 1816 den Lehrstuhl für Astronomie an der Universität Montpellier. Gründete 1810 die *Annales de mathématiques pures et appliquées*. D.S.B.

GERMAIN Sophie (1776—1831). Geb. in Paris. Bildete sich in Mathematik, indem sie sich Vorlesungsnachschriften aus der Ecole polytechnique besorgte (Frauen waren auch dort nicht zugelassen). Lagrange war ihr Betreuer. Unter dem Pseudonym Leblanc korrespondierte sie mit Gauß, der sie sehr schätzte. Sie erhielt 1816 den Großen Preis der Mathematischen Wissenschaften an der Académie des sciences. D.S.B.

GIORGINI Gaetano (1795—1874). Geb. in Montignoso (Italien). Verbrachte seine Jugend als Page am Hofe der Prinzessin von Lucca und begleitete sie nach Paris.

Begann dort mit dem Studium der Naturwissenschaften und wurde 1812 in die Ecole polytechnique aufgenommen. Nach seiner Rückkehr nach Italien begab er sich 1818 in den Dienst des Herzogs von Lucca und wurde Professor am Gymnasium, dann Professor für angewandte Mathematik an der Akademie der Künste in Florenz (1825). In den vierziger Jahren wurde er Botschafter an den Herzogtümern Parma und Modena und Außenminister. (G. Loria, *Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle università italiane*, 1893.)

GIRARD Albert (1595—1632). Geb. in Saint Mihiel (Lothringen). War zweifellos Mitglied der reformierten Kirche, mußte sich in den Niederlanden niederlassen. Studierte vermutlich an der Universität Leyden, wurde Ingenieur in der Armee von Friedrich Heinrich von Nassau, Prinz von Oranien. D.S.B.

GÖDEL Kurt (1906—1978). Geb. in Brünn. Privatdozent an der Universität Wien (1933—1938). Emigrierte in die USA und war ab 1938 Mitglied des Institute of Advanced Study in Princeton, ab 1953 dort Professor für Mathematik. (*Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

GÖPEL Adolph (1812—1847). Geb. in Rostock. Begleitete 1822—1827 seinen Onkel auf einer Studienreise durch Italien, nahm später (1829) sein Studium an der Berliner Universität auf. Unterrichtete in Berlin am Werderschen und am Königlichen Gymnasium, bevor er in der Königlichen Bibliothek in Berlin tätig war. (C. G. J. Jacobi, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1847).

GOLDBACH Christian (1690—1764). Geb. in Königsberg. Studierte dort Medizin und Mathematik, machte dann lange Reisen durch Europa. Wurde Professor für Mathematik und Historiker an der Petersburger Akademie, ab 1732 deren Sekretär und 1737 Administrator der Akademie. Nachdem er 1742 Staatsrat im Außenministerium wurde, gab er seine Beziehungen zur Akademie auf. D.S.B.

GORDAN Paul Albert (1837—1912). Geb. in Breslau. War Kommis in verschiedenen Banken, bevor er 1855 das Studium der Mathematik an den Universitäten Breslau, Königsberg und Berlin aufnahm. Wurde 1874 Professor in Erlangen, nachdem er in Göttingen mit Riemann und in Gießen mit Clebsch gearbeitet hatte. D.S.B.

GOURSAT Edouard Jean-Baptiste (1858—1936). Geb. in Lanzac. Studierte an der Ecole normale supérieure, promovierte 1881. An der Universität Toulouse zum Professor ernannt, kehrte er 1885 an die Ecole normale zurück. Wurde ab 1897 Professor für Analysis an der Universität Paris und lehrte gleichzeitig an der Ecole polytechnique (1896—1930) und an der Ecole normale supérieure von St.-Cloud (1900—1929). Wurde 1919 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. D.S.B.

GRAM Jórgen Pedersen (1850—1916). Geb. in Nastrup (Dänemark), Sohn eines Bauern. Studierte Mathematik an der Universität Kopenhagen, hielt dann Privatvorlesungen über Mathematik. War ab 1875 in dänischen Versicherungsgesellschaften tätig. Pog.

GRASSMANN Hermann (1809—1877). Geb. in Stettin. Studierte zuerst Theologie in Berlin, bevor er Mathematik in Berlin und ab 1842 in Stettin lehrte. Widmete sich gegen Ende seines Lebens der Linguistik und lernte Sanskrit. E.U.

GREEN George (1793—1841). Geb. in Nottingham (England). War von Beruf Bäcker, auf mathematischem Gebiet Autodidakt. Wurde 1833 zur Universität Cambridge zugelassen, promovierte 1837. Ab 1839 Mitglied des Caius College in Cambridge. E.U.

GUDERMANN Christoph (1798—1852). Geb. in Vienenburg bei Goslar. Studierte in Göttingen außer Theologie auch Mathematik. Wurde 1823 Professor für Mathematik zunächst an einer Sekundarschule in Cleve, dann ab 1832 bis zu seinem Tode an der Theologischen und Philosophischen Akademie in Münster. D.S.B.

HADAMARD Jacques (1865—1963). Geb. in Versailles. Studierte an der Ecole normale supérieure, lehrte am Lycée Buffon in Paris (1890—1893), an der Universität Bordeaux (1893—1897), an der Sorbonne (1897—1909), am Collège de France (1909—1937), an der Ecole polytechnique (1912—1937) und Ecole centrale des arts et manufactures (1920—1937). Ab 1912 Mitglied der Académie des sciences. D.S.B.

HAHN Hans (1879–1934). Geb. in Wien. Studierte an der dortigen Universität. Habilitation 1905. Nach einer Lehrtätigkeit an den Universitäten von Czernovitz (1906–1916) und Bonn (1916–1921) kehrte er an die Universität Wien zurück. Pog.

HALPHEN Georges-Henri (1844–1889). Geb. in Rouen. Studierte an der Ecole polytechnique. Nahm am Krieg 1870/71 teil und kehrte 1872 an die Ecole polytechnique zurück, arbeitete dort zunächst als Repetitor, dann als Examinator. Wurde 1886 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. D.S.B.

HAMILTON William Rowan (1805–1865). Geb. in Dublin (Irland). Wurde 1823 im Trinity College in Dublin immatrikuliert und 1827 (ohne Diplom) Königlicher Astronom der Sternwarte Dunsink. Ab 1832 Mitglied der Irischen Königlichen Akademie und 1837–1845 ihr Präsident. D.S.B.

HANKEL Hermann (1839–1873). Geb. in Halle. Studierte in Leipzig. Nach einem Jahr in Göttingen bei Riemann und einem weiteren Jahr in Berlin bei Weierstraß und Kronecker Habilation 1862 in Leipzig. Wurde Professor in Erlangen und Tübingen. D.S.B.

HARDY Godfrey Harold (1877–1947). Geb. in Cranleigh (England). Wurde 1896 ins Trinity College in Cambridge aufgenommen, studierte und lehrte dort bis 1919, wurden dann Professor in Oxford. Gastprofessor 1928–1929 in Princeton. Kehrte 1931 zurück, wurde Professor in Cambridge und behielt diesen Posten bis zu seiner Emeritierung 1942. D.S.B.

HARNACK Carl Gustav Axel (1851–1888). Geb. in Dorpat. Wurde 1877 Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Dresden. Pog.

HARTOGS Friedrich (1874–1943). Geb. in Brüssel. Studierte an der Technischen Hochschule Hannover, an der Technischen Hochschule und der Universität Berlin sowie an der Universität München, wo er 1903 habilitierte. Ab 1905 Lehrtätigkeit an der Universität München. Wurde 1935 entlassen, 1943 Freitod auf Grund der politischen Verhältnisse. Pog.

HASSE Helmut (1898–1979). Geb. in Kassel. Studium 1919–1929 an den Universitäten Kiel, Göttingen und Marburg. Professor an den Universitäten Halle (1925 bis 1930), Marburg (1930–1934), Göttingen (1934–1949), Berlin (1949–1950) und Hamburg (ab 1950). (*Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

HAUSDORFF Felix (1868–1942). Geb. in Breslau. Studierte Mathematik und Astronomie in Leipzig, Freiburg und Berlin. Lehrte an den Universitäten Leipzig (1896–1910), Bonn (1910–1913) und Greifswald. Kehrte 1921 nach Bonn zurück und arbeitete dort bis zu seiner Emeritierung 1935. Als ihm als Juden die Deportation drohte, beging er mit seiner Frau und seiner Schwägerin Selbstmord. D.S.B.

HEAVISIDE Oliver (1850–1925). Geb. in Camden Town bei London. Autodidakt. Widmete sich besonders Experimenten auf dem Gebiet der Elektrizität. Wurde von seinem Bruder finanziell unterstützt und erhielt wegen seines guten Rufes eine staatliche Pension. 1891 zum Mitglied der Royal Society gewählt. D.S.B.

HECKE Erich (1887–1947). Geb. in Buk (bei Posen). Studierte in Breslau, Berlin und Göttingen. Promovierte in Göttingen 1910 und wurde Assistent bei Hilbert und Klein. Nach Basel (1915–1918) und Göttingen ließ er sich schließlich 1919 in Hamburg nieder, um an der neugegründeten Universität zu lehren. D.S.B.

HEEGARD Poul (1871–1948). Geb. in Kopenhagen. Studierte an den Universitäten Kopenhagen, Paris und Göttingen. Promotion 1898 in Kopenhagen, wo er an der Seefahrtsschule Mathematik lehrte. War von 1910 bis 1918 Professor an der Universität Kopenhagen, von 1918 bis 1941 an der Universität Oslo. Pog.

HEILBRONN Hans Arnold (1908 –1975). Geb. in Berlin. Studierte an den Universitäten Berlin, Freiburg und Göttingen. Habilitation 1933, war ab 1930 Assistent bei Landau, mußte 1933 emigrieren; ging nach England. Dank englischer Mathematiker wurde er bis 1940 durch Stipendien und zeitweilige Anstellungen unterstützt, wurde dann aber – wie viele andere Emigranten – als deutscher Staatsangehöriger interniert (1940–1943). Gehörte danach von 1943 bis 1945 der engli-

schen Armee an. Nach dem Krieg erhielt er eine Dozentur in Bristol, wo er bis 1964 blieb. Danach wurde er Professor in Toronto. (*Bull. London Math. Soc.*)

HEINE Heinrich Eduard (1821—1881). Geb. in Berlin. Studierte an den Universitäten Berlin, Göttingen und Königsberg. Lehrte an der Universität Bonn, bevor er 1848 Professor an der Universität Halle wurde, wo er sich endgültig niederließ. D.S.B.

HELLINGER Ernst (1883—1950). Geb. in Striegau. Studierte an den Universitäten Heidelberg, Breslau und Göttingen. Dozent in Heidelberg und Marburg, ab 1914 Professor an der neugegründeten Universität Frankfurt. Wurde 1936 entlassen und emigrierte 1939, nach kurzer Haft im Konzentrationslager, in die USA. Bis 1949 lehrte er an der Northwestern University in Evanston (Illinois). D.S.B.

HELLY Eduard (1884—1943). Geb. in Wien. Begann 1902 sein Studium in Wien, das er 1907 mit der Promotion beendete. Ging ein Jahr später nach Göttingen und lehrte dann Mathematik an der Universität Wien bis 1938. Emigrierte im gleichen Jahr in die USA. Dort wurde er Professor am Illinois Institute of Technology.

HENSEL Kurt (1861—1941). Geb. in Königsberg. Studierte in Bonn und Berlin, wo er 1884 habilitierte. Lehrte zunächst in Berlin, dann ab 1901 an der Universität Marburg. Wurde 1901 Herausgeber des *Journals für die reine und angewandte Mathematik*. D.S.B.

HERBRAND Jacques (1908—1931). Geb. in Paris. Wurde 1925 in die Ecole normale supérieure aufgenommen, promovierte 1929. Erhielt nach einjährigem Militärdienst ein Stipendium in Deutschland. Während der Sommerferien 1931 stürzte er in den Alpen tödlich ab. D.S.B.

HERMITE Charles (1822—1901). Geb. in Dieuze (Lothringen). Wurde 1842 in die Ecole polytechnique aufgenommen, mußte aber im Jahr darauf wegen seines Klumpfußes die Anstalt verlassen. Er entschied sich dann für einen Lehrberuf und lehrte von 1848 bis 1876 an der Ecole polytechnique, von 1869 bis 1897 als Professor an der Faculté des sciences in Paris. Ab 1856 Mitglied der Académie des sciences. D.S.B.

HESSE Ludwig Otto (1811—1874). Geb. in Königsberg. Lebte dort bis 1855, erst als Student dann als Lehrer einer Handelsschule und ab 1845 als Professor an der Universität. War 1856—1868 Professor an der Universität Heidelberg und anschließend an der neugegründeten Technischen Hochschule in München. Ab 1868 Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

HEURAET Hendrik van (1633—1660). Geb. in Haarlem (Niederlande). Wurde als Student der Medizin 1653 an der Universität Leyden immatrikuliert und studierte Mathematik bei F. van Schooten. War 1658 zusammen mit J. Hudde an der protestantischen Akademie in Saumur und kehrte nach einer Reise durch die Bourgogne und die Schweiz nach Leyden zurück. D.S.B.

HILBERT David (1862—1943). Geb. in Königsberg. Studierte dort 1880—1884 an der Universität (mit Ausnahme des zweiten Semesters, das er in Heidelberg verbrachte). Nach einer Reise nach Leipzig und Paris wurde er 1886 Privatdozent an der Königsberger Universität. Wurde 1895 nach Göttingen berufen, wo er bis zu seiner Emeritierung 1930 als Professor tätig war. B.B.M., D.S.B.

HILL George William (1838—1914). Geb. in New York. Studierte in Rutgers und Cambridge, widmete sich dann ganz seinen Studien der Himmelsmechanik und hatte nur von 1898 bis 1901 eine Stelle als Lehrer der Astronomie an der Columbia University inne. D.S.B.

HOPF Heinz (1894—1971). Geb. in Breslau. Studierte ab 1920 nacheinander an den Universitäten Berlin, Heidelberg und Göttingen. Nach einem einjährigen Aufenthalt an der Universität Princeton übernahm er 1931 den Lehrstuhl von H. Weyl an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. D.S.B.

HUREWICZ Witold (1904—1956). Geb. in Lodz. Studium in Wien, promovierte dort 1926. Lehrte in Amsterdam bis 1936, ging dann in die USA, wo er nacheinander in Princeton, an der Universität von North Carolina und am Massachusetts Institute of Technology arbeitete. E.U.

HURWITZ Adolf (1859—1919). Geb. in Hildesheim. Studierte an den Universitäten München, Berlin und Leipzig. Habilitation 1882 an der Universität Göttingen. Lehrte dann an der Universität Königsberg und nahm 1892 einen Lehrstuhl am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich an, den er bis zu seinem Tode innehatte. D.S.B.

HUYGENS Christian (1629—1695). Geb. in den Haag. Studierte die Rechte und Mathematik bei F. van Schooten an der Universität Leyden (1645—1647) und dann die Rechte am neuen Collegium Arausiacum von Breda (1647—1649). Von 1650 bis 1666 widmete er sich dank einer Rente seines Vaters ganz dem Studium der Naturwissenschaften. Bei der Gründung der Pariser Académie des sciences wurde er besoldetes Mitglied. Als Colbert starb, kehrte er nach den Haag zurück. D.S.B.

IVORY James (1765—1842). Geb. in Dundee (Schottland). Studierte an den Universitäten St. Andrews und Edinburgh, lehrte dann Mathematik und Naturphilosophie in Dundee. War 1789—1804 Verwalter einer Flachsspinnerei und von 1804 bis zu seinem Rücktritt 1819 Professor der Mathematik am Königlichen Militärcollege in Great Marlow. Wurde 1815 zum Mitglied der Londoner Royal Society gewählt. D.S.B.

JACOBI Carl Gustav Jacob (1804—1851). Geb. in Potsdam, Sohn eines jüdischen Bankiers, konvertierte, nachdem er eine Habilitationsschrift an der Berliner Universität eingereicht hatte, zum Christentum, um habilitieren zu können. Wurde 1826 Dozent in Königsberg. Sein Gesundheitszustand gebot ihm, nach Italien zu reisen (1843). Nach seiner Rückkehr 1844 erhielt er einen Lehrstuhl in Berlin. Wurde Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. B.B.M., D.S.B.

JANISZEWSKI Zygmunt (1888—1920). Geb. in Warschau. Studierte in Zürich, München, Göttingen und Paris. Lehrte Mathematik an der Société des cours des sciences in Warschau (einer vom Zaren verbotenen Ergänzung der offiziellen Universität) und an der Universität Lemberg. Im ersten Weltkrieg kämpfte er für die Unabhängigkeit Polens. Danach nahm er einen Lehrstuhl an der neueröffneten polnischen Warschauer Universität an. Er gründete die Zeitschrift *Fundamenta Mathematicae*. D.S.B.

JEVONS William Stanley (1835—1882). Geb. in Liverpool. Begann seine Studien am College der Universität London, unterbrach sie aber, um seinen Lebensunterhalt als Geldprüfer in Australien zu verdienen. Nachdem er dort Professor der Philosophie geworden war, kehrte er nach England zurück, um seine Ausbildung zu vervollkommnen. Erhielt 1863 einen Lehrstuhl für Logik in Manchester und lehrte ab 1876 Ökonomie am College der Universität London. War Mitglied der Royal Society. D.S.B.

JORDAN Camille (1838—1922). Geb. in Lyon. Studierte an der Ecole polytechnique, übte seinen Beruf als Ingenieur bis 1885 aus. Von 1873 bis zu seiner Emeritierung 1912 lehrte er an der Ecole polytechnique und am Collège de France. Wurde 1881 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. D.S.B.

KELVIN Lord (William Thomson) (1824—1907). Geb. in Belfast (Irland). Studierte an der Schottischen Universität in Glasgow und an der Universität Cambridge, machte 1839 und 1845 Studienreisen nach Paris. Nach seiner Rückkehr nach Glasgow wurde er Professor für Naturphilosophie. Er behielt dieses Amt bis zu seinem Tode. Eine wichtige Rolle spielte er beim Legen eines Seekabels zwischen Irland und Amerika (1857—1865). D S.B.

KEPLER Johannes (1571—1630). Geb. in Weil-der-Stadt (Würtemberg). Studierte in Tübingen (lutherische Theologie) und lehrte Mathematik in Graz. Wurde als Protestant auf Grund der Gegenreformation aus Graz ausgewiesen und folgte einer Aufforderung Tycho Brahes nach Prag. Nach dessen Tode 1601 wurde er Astronom am Hofe Kaiser Rudolph II. Kaiser Matthias (1612—1619) ernannte ihn zum Mathematiker der Landschaft Österreich ob der Enns mit Residenz in Linz. Dieses Amt behielt Kepler auch unter Ferdinand II. Nach Ausweisung der Protestanten aus Linz 1625 trat er 1628 in Wallensteins Dienste und siedelte nach

Sagan über. Trotz seiner hohen öffentlichen Ämter war seine finanzielle Lage prekär, und er starb, erschöpft von den Strapazen und seinem Elend, in Regensburg. B.B.M., D.S.B.

KILLING Wilhelm Karl Joseph (1847—1923). Geb. in Burbach (im Westerwald). Studierte an den Universitäten Münster und Berlin. War Professor an den Gymnasien in Brilon (1878—1882) und Braunsberg (1882—1892) und an der Universität Münster (1892—1920). Pog.

KLEIN Felix (1849—1925). Geb. in Düsseldorf. Studierte in Bonn, Göttingen, Berlin und Paris. Lehrte an der Universität Erlangen (1872—1875), an der Technischen Hochschule München (1875—1880), an der Universität Leipzig (1880—1886) und schließlich in Göttingen (1886—1913). Ab 1872 Herausgeber der *Mathematischen Annalen*. Gründete 1895 die *Enzyclopädie der mathematischen Wissenschaften*. B.B.M., D.S.B.

KOCH Helge von (1870—1924). Geb. in Stockholm. Promovierte 1892 auf mathematischem Gebiet an der Universität Uppsala. Ab 1911 Professor an der Universität Stockholm. Pog.

KOEBE Paul (1882—1945). Studierte bei H. A. Schwarz an der Universität Berlin, promovierte dort 1905. Ab 1926 Professor der Mathematik und Direktor des Mathematischen Seminars der Universität Leipzig. Pog.

KÖNIGSBERGER Leo (1837—1921). Geb. in Posen. Studierte Physik und Mathematik an der Berliner Universität bei Weierstraß, promovierte 1860. Lehrte an den Universitäten Greifswald (1864—1869) und Heidelberg (1869—1875), an der Technischen Hochschule Dresden (1875—1877) und an der Universität Wien. Kehrte 1884 nach Heidelberg zurück. D.S.B.

KOWALEWSKA Sofia (Sonja) Vassilievna (1850—1891). Stammte aus russischen aristokratischen Kreisen, heiratete 1868, um an einer ausländischen Universität studieren zu können. Nach Mathematikstudien in Heidelberg hörte sie zwischen 1871 und 1874 Privatvorlesungen bei Weierstraß und promovierte „in absentia" an der Universität Göttingen. Konnte keine Arbeit finden, bis 1884 Mittag-Leffler für sie einen Lehrstuhl an der Stockholmer Universität erhielt. B.B.M., D.S.B.

KRONECKER Leopold (1823—1891). Geb. in Liegnitz. Studierte in Berlin, Bonn und Breslau, promovierte 1845 in Berlin. Von 1845 bis 1855 führte Kronecker ein Familienunternehmen, kehrte dann, finanziell unabhängig, nach Berlin zurück. Wurde 1861 zum Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften ernannt und konnte an der Universität Vorlesungen halten. Erhielt 1883 nach dem Tode Kummers den Lehrstuhl für Mathematik an der Berliner Universität. Gab ab 1880 das *Journal für die reine und angewandte Mathematik* heraus. B.B.M., D.S.B.

KRULL Wolfgang (1899—1970). Geb. in Baden-Baden. Promotion 1921 an der Universität Freiburg, lehrte dort von 1922 bis 1928. Wurde 1928 Professor an der Universität Erlangen und 1938 in Bonn. Pog.

KUMMER Ernst-Eduard (1810—1893). Geb. in Sorau. Studierte 1828—1831 an der Universität Halle, lehrte 1832—1842 am Gymnasium in Liegnitz, wo Kronecker sein Schüler war, und an der Universität Breslau. Wurde 1855 Nachfolger von Dirichlet in Berlin und gründete 1861 zusammen mit Weierstraß das erste deutsche Seminar der reinen Mathematik. Ab 1855 Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

LAGRANGE Joseph Louis (1736—1813). Geb. in Turin. Wurde dort 1755 Professor an der Königlichen Artillerieschule. Gründete mit Freunden eine wissenschaftliche Gesellschaft (die Turiner Akademie). Wurde 1766 als Nachfolger Eulers Direktor der Klasse Mathematik der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Ging 1787 nach Paris, wo er besoldetes Mitglied der Académie des sciences wurde. Gehörte der Kommission für Maße und Gewichte an und war Mitglied des Bureau des longitudes seit dessen Gründung im Jahre 1795. Lehrte Mathematik an der Ecole normale vom Jahre III an (d. i. im Revolutionskalender das Jahr 1794/5) und an der Ecole polytechnique von 1794 bis 1799. B.B.M., D.S.B.

LAGUERRE Edmond Nicolas (1834—1886). Geb. in Bar-le-Duc. Studium an der Ecole polytechnique in Paris. Offizier der Artillerie bis 1864. Kehrte nach Paris an die Ecole polytechnique zurück, um dort bis zu seinem Tode zu lehren. Nahm 1883 den Lehrstuhl für mathematische Physik am Collège de France an. D.S.B.

LAMBERT Johann Heinrich (1728—1777). Geb. in Mulhouse. Stammte aus ärmlichen Verhältnissen. Mußte im Alter von zwölf Jahren die Schule verlassen und wurde Autodidakt. War nach zahlreichen Tätigkeiten 1748—1758 Hauslehrer in einer adligen Familie in Coire (Schweiz). Während dieses Aufenthalts wurde er Mitglied der Société scientifique der Schweiz. Anfang 1760 begann er, die Bayerische Akademie der Wissenschaften ins Leben zu rufen, aber schon 1762 verließ er München, um sich in Berlin niederzulassen. Wurde 1765 zum Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften ernannt. D.S.B.

LAMÉ Gabriel (1795—1870). Geb. in Tours. Studierte an der Ecole polytechnique und an der Ecole des mines. Verbrachte dann zwölf Jahre in Petersburg als Lehrer und als Ingenieur. Erhielt nach seiner Rückkehr nach Paris den Lehrstuhl für Physik an der Ecole polytechnique (1832—1844), wurde Examinator (1844—1851), dann Professor an der Pariser Universität. Wegen seiner Taubheit trat er 1862 zurück. War Mitglied der Académie des sciences. D.S.B.

LANDAU Edmund (1877—1938). Geb. in Berlin. Studierte in seiner Heimatstadt. Promotion 1899. Ab 1909 Professor in Göttingen, bis er 1933 von dem nationalsozialistischen Regime gezwungen wurde, seinen Lehrstuhl abzugeben. War Mitglied zahlreicher Akademien. D.S.B.

LANDEN John (1719—1790). Geb. in Peakirk (England). War Markscheider und von 1762 bis 1788 Vermögensverwalter eines Earl Fitzwilliam. Beschäftigte sich in seiner Freizeit mit Mathematik. Wurde 1766 Mitglied der Royal Society. D.S.B.

LAPLACE Pierre Simon, Marquis de (1749—1827). Geb. in Beaumont-en-Auge, Sohn eines Landmannes. Widmete sich an der Militärakademie dieser Kleinstadt der Mathematik. Begann 1771 dort auch seine Lehrtätigkeit. Wurde 1783 Examinator beim Artilleriecorps, 1785 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. Während der Revolution beteiligte er sich an der Organisation der Ecole polytechnique und der Ecole normale und wurde Mitglied des Instituts seit dessen Gründung. Napoleon betraute ihn mit dem Posten des Innenministers, aber nur für sechs Wochen. B.B.M., E.U.

LAURENT Pierre Alphonse (1813—1854). Geb. in Paris. Studierte an der Ecole polytechnique in Paris und an der Ecole d'application in Metz. Nahm als Ingenieur an einer Expedition nach Algerien teil, leitete die hydraulischen Arbeiten bei der Erweiterung des Hafens von Le Havre und schloß sich in Paris dem Festungskomitee an. D.S.B.

LEBESGUE Henri Léon (1875—1941). Geb. in Beauvais. Studierte an der Ecole normale supérieure (1894—1897), lehrte dann am Gymnasium von Nancy, an den Universitäten von Rennes (1902—1906), von Poitiers (1906—1910) und an der Sorbonne. Wurde 1921 Professor am Collège de France und im folgenden Jahr Mitglied der Académie des sciences. D.S.B.

LEFSCHETZ Solomon (1884—1972). Geb. in Moskau. Studierte an der Ecole centrale in Paris. Emigrierte nach einem Unfall, bei dem er beide Hände verlor, in die USA, wo er seine Ausbildung an der Clark University vervollkommnete. Lehrte an der Universität von Kansas bis 1925, in Princeton bis 1953. E.U.

LEGENDRE Adrien-Marie (1752—1833). Geb. in Paris. Studium am Collège Mazarin, widmete sich danach der wissenschaftlichen Forschung. Lehrte Mathematik an der Ecole militaire in Paris (1775—1780). Wurde 1783 in die Académie des sciences gewählt. War 1794 als Vorsitzender der Commission d'instruction tätig, arbeitete von 1799 bis 1815 als Examinator an der Ecole polytechnique und löste 1813 Laplace im Bureau des longitudes ab. D.S.B.

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646—1716). Studierte an den Universitäten Leipzig und Jena die Rechte. Ab 1667 Hofrat am Obersten Gerichtshof des Kurfürsten-

tums Mainz. Reisen nach Paris und London. Nahm 1676 in Hannover den Posten eines Bibliothekars an, der ihm durch den Herzog von Braunschweig bewilligt worden war. Gründete 1700 mit Hilfe des Kurfürsten von Brandenburg die Brandenburgische Sozietät der Wissenschaften, die spätere Preußische Akademie der Wissenschaften. Wurde 1711 von Peter dem Großen zu seinem Justizrat ernannt. Ging dann für zwei Jahre nach Wien (1712—1714). Kehrte nach Hannover zurück, wo er in völliger Einsamkeit starb. B.B.M., D.S.B.

LE ROUX Jean-Marie (1863—1949). Geb in Prat. Studium an den Universitäten Rennes und Bordeaux. War Lehrer in Guingamp (1882—1889), Professor an den Gymnasien in Brest (1889—1896) und in Montpellier (1896—1898), bevor er den Lehrstuhl für angewandte Mathematik an der Universität Rennes erhielt. Pog.

LEVI Eugenio Elia (1883—1917). Geb. in Turin. Studium und Promotion (1904) an der Universität Pisa. Ab 1909 Professor der Mathematik an der Universität Genua. Gefallen im ersten Weltkrieg bei Subido. Pog.

LEVI-CIVITA Tullio (1873—1941). Geb. in Padua. Studium an der Universität Padua, wo er 1897 Professor wurde. Lehrte ab 1918 an der Universität Rom. Mußte 1938 wegen der Faschisten zurücktreten. D.S.B

LÉVY Paul (1886—1971). Geb. in Paris. Studium an der Ecole polytechnique und der Ecole nationale supérieure des mines. Promotion 1912. Lehrte an der Ecole polytechnique (1920—1959) und an der Ecole des mines (1914—1951). 1964 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. E.U.

LEXELL Anders Johan (1740—1784). Geb. in Abo (damals Schweden). Nach seinem Diplom an der Universität Abo lehrte er an der Seefahrtsschule in Uppsala. Folgte 1768 einer Einladung an die Petersburger Akademie, wurde dort 1771 Professor für Astronomie und 1783 Nachfolger von Euler auf dem Lehrstuhl für Mathematik. D.S.B.

LIE Marius Sophus (1842—1899). Geb. in Nordfjordeide (Norwegen). Studierte an der Universität Oslo (damals Christiania). Gab Unterricht, um seinen Lebensunterhalt zu verdienen. Verbrachte den Winter 1869/70 bei Klein in Berlin, den Sommer 1870 in Paris. 1872 wurde für ihn ein Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Christiania eingerichtet. Wurde 1886 Nachfolger von Klein in Leipzig, kehrte 1898 nach Christiania zurück. D.S.B.

LIEBMANN Karl Otto Heinrich (1874—1939). Geb. in Straßburg, Studierte an den Universitäten Leipzig, Jena und Göttingen. Lehrte Mathematik an der Universität Leipzig (1899—1910), an der Technischen Hochschule München (1910—1920) und an der Universität Heidelberg (1920—1935). Pog.

LINDEMANN Carl Louis Ferdinand (1852—1939). Geb. in Hannover. Studium in Göttingen, Erlangen und München. Promotion 1873 an der Universität Erlangen bei Klein. Lehrte an den Universitäten Würzburg (1877), Freiburg (1877—1883), Königsberg (1883—1893) und München. War Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

LIOUVILLE Joseph (1809—1882). Geb. in St. Omer. Stammt aus einer lothringischen Familie. Studium an der Ecole polytechnique und der Ecole des ponts et chaussées. Lehrte an der Ecole polytechnique (1831—1851), am Collège de France (1851 bis 1879) und an der Faculté des sciences in Paris (1857—1874). Ab 1839 Mitglied der Académie des sciences, ab 1840 Mitglied des Bureau des longitudes. Gründete 1836 das *Journal de mathématiques pures et appliquées*. D.S.B.

LIPSCHITZ Rudolf Otto Sigismund (1832—1903). Geb. bei Königsberg. Studium an der dortigen Universität, dann in Berlin als Schüler von Dirichlet. Promotion 1853 in Berlin. Lehrte dann an den Universitäten Berlin (1857—1862), Breslau (1862—1864) und Bonn. D.S.B.

LISTING Johann Benedikt (1808—1882). Schüler von Gauß in Göttingen. Ab 1847 Professor für Physik an der Universität Göttingen. Mitglied mehrerer wissenschaftlicher Gesellschaften. Pog.

LJAPUNOV Aleksandr Michajlovič (1857—1918). Geb. in Jaroslavl. Studierte bei Čebyšev an der Petersburger Akademie. Lehrte von 1885 bis 1901 an der Universität Charkov. Wurde zum Mitglied der Petersburger Akademie gewählt, wo er sich ganz seinen Forschungen widmete. Nach einem einjährigen Aufenthalt in Odessa nahm er sich nach dem Tode seiner Frau das Leben. D.S.B.

LOBAČEVSKIJ Nikolaj Ivanovič (1792—1856). Geb. in Nishni-Novgorod. Studierte 1807—1812 an der Universität Kasan, wo er später lehrte und sein ganzes Leben zubrachte. In seiner Zeit als dortiger Rektor (ab 1827 bis zu seiner Emeritierung 1846) gründete er ein Observatorium. B.B.M., D.S.B.

LÖWENHEIM Leopold (1878—1948). Geb. in Krefeld. Studierte an der Universität Berlin (1896—1900), unterrichtete dann am Gymnasium in Berlin-Lichtenberg (1903—1922). Pog.

LUKASIEWICZ Jan (1878—1956). Studierte in Lemberg, Promotion 1902, Auslandsreisen nach Berlin und Leuven, Habilitation 1906 in Lemberg. Ab 1915 Vorlesungen an der Warschauer Universität. Begründer der berühmten „Warschauer Schule" der mathematischen Logik. Ehrendoktor der Universität Münster (kurz vor Ausbruch des zweiten Weltkriegs) wegen seiner Verdienste um die Durchsetzung der mathematischen Logik im deutschsprachigen Raum. Unmittelbar vor dem Warschauer Aufstand fand er im Juli 1944 Notunterkunft (durch H. Scholz) in Münster. Ab 1946 Professor für mathematische Logik an der Royal Irish Academy in Dublin. (*Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

LÜROTH Jakob (1844—1940). Geb. in Mannheim. Studierte an den Universitäten Heidelberg, Berlin und Gießen. Vorlesungen an der Universität Heidelberg (1867 bis 1869), der Technischen Hochschule Karlsruhe (1869—1870), der Technischen Hochschule München (1880—1883) und an der Universität Freiburg (1883—1910). D.S.B.

LUZIN Nikolaj Nikolaevič (1883—1950). Geb. in Tomsk. 1901 Immatrikulation an der Moskauer Universität. Nach einem Aufenthalt in Paris (Winter und Frühjahr 1906) kehrte er nach Moskau zurück und machte 1910 sein Diplom. Wurde unmittelbar darauf zum Hilfsprofessor ernannt, dann nach Göttingen und Paris gesandt, um seine Studien zu vervollkommnen. Begann 1914, in Moskau Vorlesungen zu halten; viele seiner Schüler wurden berühmte Mathematiker. War Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. D.S.B.

MACAULAY Francis Sowerby (1862—1937). Geb. in Witney (England). Diplom am Saint John College in Cambridge. Lehrte mit großem Erfolg in Kingswood und an der Saint Paul School in London (1885—1911). Wurde 1928 zum Mitglied der Royal Society gewählt. D.S.B.

MACLAURIN Colin (1698—1746). Geb. in Kilmodan (Schottland). Studierte an der Universität Glasgow schon seit seinem elften Lebensjahr. Begann 1717 seine Laufbahn als Professor der Mathematik am Marischal College in Aberdeen und wurde 1725 auf Empfehlung Newtons an die Universität Edinburgh berufen. Ab 1719 Mitglied der Londoner Royal Society. D.S.B.

MAINARDI Gaspare (1800—1879). Geb. in Abbiategrasso (Italien). Studierte an den Universitäten Mailand und Pavia, wurde 1822 Assistent, später Professor der Mathematik in Pavia. Lehrte gleichzeitig am Collegium Ghislieri und am Seminar. Pog.

MARKOV Andreij Andrevič (1856—1922). Geb. in Rjasan. Studierte (1874—1878) und lehrte (1878—1905) an der Universität Petersburg. Wurde 1896 zum Mitglied der Petersburger Akademie gewählt. Nahm zu Beginn des 20. Jh. an der liberalen russischen Bewegung teil. D.S.B.

MATHIEU Emile Léonard (1835—1890). Geb. in Metz. Lernte den ganzen Stoff der Ecole polytechnique innerhalb von 18 Monaten. Promovierte 1859, erhielt aber erst 1869 eine Anstellung, als er zum Professor in Besançon ernannt wurde. Lehrte ab 1874 in Nancy. D.S.B.

MÉRAY Hugues Charles Robert (1835–1911). Geb. in Chalon-sur-Saône. Schüler der Ecole normale supérieure, lehrte 1857–1859 am Gymnasium von Saint-Quentin, zog sich dann für sieben Jahre in ein kleines Dorf bei Chalon-sur-Saône zurück. Lehrte 1866 an der Universität Lyon und wurde 1867 Professor in Dijon. D.S.B.

MEUSNIER de la Place, Jean-Baptiste Marie Charles (1754–1793). Geb. in Tours. Verließ 1775 die Militärakademie von Mézières als Zweiter Leutnant des Pioniercorps und arbeitete von 1779 bis 1788 als Militäringenieur im Hafen von Cherbourg. War Berufsoffizier. Nahm 1793 in der Custineschen Armee an der Verteidigung von Kassel teil, wobei er tödlich verwundet wurde. D.S.B.

MINDING Ernst Ferdinand Adolf (1806–1885). Geb. in Kalisz (Polen). Studierte Philologie, Philosophie und Physik an den Universitäten Halle und Berlin. Auf mathematischem Gebiet Autodidakt. Lehrte Mathematik an den Universitäten Berlin (1831–1843) und Dorpat (1843–1883). D.S.B.

MINKOWSKI Hermann (1864–1908). Geb. in Alexota (Rußland). Kam mit acht Jahren nach Königsberg. Studierte an der dortigen Universität, mit Ausnahme von drei Semestern in Berlin. Lehrte an den Universitäten Bonn (1885–1894) und Königsberg (1894–1896) und am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich (1896 bis 1902). Für ihn wurde in Göttingen ein Lehrstuhl eingerichtet. D.S.B.

MISES Richard Edler von (1883–1953). Geb. in Lemberg. Studium und Promotion (1907) an der Technischen Hochschule Wien. Lehrte in Berlin, an verschiedenen anderen Universitäten Europas und in der Türkei. Ging 1939 in die USA und wurde 1944 Professor für Aerodynamik und Angewandte Mathematik an der Harvard University. 1921–1933 Herausgeber der *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (ZAMM). D.S.B.

MÖBIUS August Ferdinand (1790–1868). Geb. in Schulpforta (bei Naumburg). Studierte Mathematik und Astronomie an den Universitäten Leipzig, Göttingen und Halle. Wurde 1815 Professor für Astronomie in Leipzig, leitete dort den Bau des Observatoriums und wurde dessen Direktor. B.B.M., D.S.B.

MOIVRE Abraham de (1667–1754). Geb. in Vitry-le-François. Emigrierte 1685 nach Widerrufung des Edikts von Nantes mit seiner Familie nach England. Seine mathematische Ausbildung hatte er in Frankreich in Saumur und Paris erhalten. Hielt in London mathematische Privatvorlesungen, um seinen Lebensunterhalt zu verdienen. Ab 1697 Mitglied der Royal Society. D.S.B.

MOLIEN Theodor (1861–1941). Geb. in Riga. Studium in Dorpat und Leipzig. Lehrte an der Universität Dorpat (1885–1901), Promotion dort 1892. War ab 1901 Professor für Mathematik an der Universität Tomsk (Sibirien). Pog.

MONGE Gaspard (1746–1818). Geb. in Beaune, Sohn eines Kaufmanns. Konnte 1765 als Techniker in die Königliche Militärschule in Mézières eintreten. Lehrte dort von 1766 bis 1784 Mathematik. Wurde 1780 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt und 1783 zum Examinator der Marinekadetten ernannt. Von der Revolution begeistert, wurde er Marineminister (1792–1793) und war Mitglied des Comité de salut public. Gründete die Ecole polytechnique und organisierte für Napoleon den ägyptischen Feldzug. Die Restauration nahm ihm alle Titel und Ämter. B.B.M., D.S.B.

MONTEL Paul Antoine Aristide (1876–1975). Geb. in Nizza. Studium und Promotion (1907) an der Ecole normale supérieure in Paris. Lehrte an der Ecole polytechnique und an der Faculté des sciences in Paris (1911–1946). Wirkte gleichzeitig als Professor an der Ecole nationale supérieure des Beaux-Arts, Direktor der Ecole pratique des hautes études, Präsident des Palais de la Découverte und war ab 1937 Mitglied der Académie des sciences.

MOORE Eliakim Hastings (1862–1932). Geb. in Marietta, Ohio (USA). Studium und Promotion (1885) an der Yale University. Nach einjährigem Aufenthalt in Göttingen und Berlin begann er seine Tätigkeit in den USA an der North Western University und der Yale University. Leitete ab 1892 das Mathematische Institut der neugegründeten Universität in Chicago. D.S.B.

MORDELL Louis Joel (1888–1972). Geb. in Philadelphia, Pennsylvania (USA). Wurde in Cambridge (England) am Saint John College ausgebildet. Lehrte am Birbeck College in London und war von 1923 bis 1953 Professor an der Universität Manchester. Vorsitzender der Londoner Mathematical Society 1943–1945. Pog.

MORGAN Augustus de (1806–1871). Geb. in Madura (Indien). Kam in frühester Kindheit nach England. Studium am Trinity College in Cambridge, hatte dann den Lehrstuhl für Mathematik an dem neugegründeten College der Londoner Universität bis 1866 inne. War Gründer und erster Vorsitzender der Londoner Mathematical Society. D.S.B.

NEPER (NAPIER) John (1550–1617). Geb. auf Merchiston Castle (bei Edinburgh), schottischer Edelmann. Beschäftigte sich mit Politik und studierte in seiner Freizeit Mathematik und Naturwissenschaften. E.U.

NETTO Eugen (1846–1919). Geb. in Halle. Wurde an der Berliner Universität immatrikuliert, schloß dort sein Studium 1870 mit dem Diplom ab. Lehrte an einem Berliner Gymnasium und an den Universitäten Straßburg und Berlin, bevor er 1888 zum Professor an die Universität Gießen berufen wurde. D.S.B.

NEUMANN Carl Gottfried (1832–1925). Geb. in Königsberg. Lehrte nach dem Studium an der dortigen Universität Mathematik an den Universitäten Halle (1858–1863), Basel (1863–1865), Tübingen (1865–1868) und Leipzig (1868 bis 1911). War Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften und Herausgeber der *Mathematischen Annalen*. D.S.B.

NEUMANN John von (1903–1957). Geb. in Budapest. Erhielt seine mathematische Ausbildung durch Privatunterricht. Lehrte in Berlin (1927–1929), Hamburg (1929–1930) und Princeton (1930–1933). Wurde dann Professor am neugegründeten Institute for Advanced Study. War an zahlreichen wissenschaftlichen Projekten beteiligt, die kriegswichtig waren, z.B. am Bau der Atombombe. Wurde 1954 Mitglied der Atomenergiekommission. B.B.M., D.S.B.

NEWTON Isaac (1642–1727). Geb. in Woolsthorpe (England) nach dem Tode seines Vaters. Studierte am Trinity College in Cambridge und wurde dort 1669 Professor als Nachfolger von I. Barrow. Verließ 1696 Cambridge, um Königlicher Münzmeister in London zu werden. War Mitglied des Vorstands der Royal Society ab 1699, ihr Präsident von 1703 bis zu seinem Tode. D.S.B.

NOETHER Amalie Emmy (1882–1935). Geb. in Erlangen, Tochter von Max Noether. Sie studierte Mathematik an den Universitäten Erlangen und Göttingen als „freie" Hörerin, da Frauen nicht immatrikuliert wurden. 1904 wurde ihr jedoch die Immatrikulation gestattet, und sie konnte 1907 promovieren. Nur nach großen Interventionen konnte sie 1919 habilitieren. Sie lehrte in Göttingen, ohne jedoch eine offizielle Anstellung gehabt zu haben. 1933 durch die Faschisten zum Rücktritt gezwungen. Sie emigrierte in die USA und arbeitete in Princeton. B.B.M., D.S.B.

NOETHER Max (1844–1921). Geb. in Mannheim, Vater von Emmy Noether. Studierte hauptsächlich in Heidelberg. Promotion dort 1868. Lehrte in Heidelberg bis 1875, war dann Professor in Erlangen. D.S.B.

OHM Martin (1792–1872). Geb. in Erlangen. Begann seine akademische Laufbahn 1811 an der Universität Erlangen. Unterrichtete am Gymnasium in Thorn (1817–1821), war danach Lektor, dann Professor für Mathematik an der Universität Berlin. Lehrte gleichzeitig an der Bauschule (1824–1831), an der Artillerie- und Ingenieurschule (1833–1852) und an der allgemeinen Kriegsschule (ab 1826). Pog.

OSGOOD William Fogg (1864–1943). Geb. in Boston (USA). Studierte an der Harvard University (1882–1887), verbrachte die Jahre 1887 bis 1889 in Göttingen bei Klein und die Jahre 1889–1890 in Erlangen. Promotion dort 1890. Kehrte in die USA zurück, wo er an der Harvard University eine Professur erhielt. Nach seiner Emeritierung 1933 lehrte er zwei Jahre an der Universität Peking. D.S.B.

PADOA Alessandro (1868–1937). Geb. in Venedig. Diplom an der Universität Turin. Lehrte an Sekundarschulen in Pinerolo, Rom und Cagliari, ab 1909 am Technischen Institut in Genua. Gehörte zur Peanoschen Schule. D.S.B.

PAINLEVÉ Paul (1863—1933). Geb. in Paris. Studierte an der Ecole normale supérieure und wurde, nachdem er in Göttingen gearbeitet hatte, 1887 Professor an der Universität Lille. Lehrte in Paris insbesondere an der Faculté des sciences, an der Ecole polytechnique und an der Ecole supérieure d'aéronautique. Wurde 1900 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. Nahm später am politischen Leben teil, war Minister in verschiedenen Kabinetten. D.S.B.

PALEY Raymond Edward Alan Christopher (1907—1933). Geb. in Weymouth (England). Schüler von Hardy und Littlewood. Ab 1930 Mitglied des Trinity College in Cambridge. Erhielt 1932 ein Stipendium für Studien am Massachusetts Institute of Technology und an der Harvard University. Wurde in der Nähe von Banff (Kanada) von einer Lawine getötet. Pog.

PAPPOS (4. Jh.). Geb. vermutlich um 300 in Alexandria. War der letzte bedeutende Mathematiker der alexandrinischen Schule. E.U.

PASCAL Blaise (1623—1662). Geb. in Clermont-Ferrand. Ging mit seinem Vater Etienne 1631 nach Paris, nahm ab 1635 an den Sitzungen der Pariser Akademie um Mersenne teil. Folgte 1640 seinem Vater nach Rouen, wo die ganze Familie zu dem strengen Christentum des Klosters Port-Royal übertrat. Kehrte 1647 krank nach Paris zurück. Es begann die sogenannte „weltliche" Periode, die reich an wissenschaftlicher Aktivität war, gefolgt von einer zweiten „Bekehrung". Ab 1854 verschrieb er sich einem kämpferischen christlichen Leben und unterstützte die Jansenisten in ihrem Kampf gegen die Jesuiten. Ab 1658 war er sehr krank. B.B.M., D.S.B.

PASCH Moritz (1843—1930). Geb in Breslau. Studierte zuerst dort, dann in Berlin. Wurde von Weierstraß und Kronecker beeinflußt. Seine ganze akademische Laufbahn spielte sich 1870—1911 in Gießen ab. D.S.B.

PEACOCK George (1791—1858). Geb. in Denton (England). Verbrachte 30 Jahre seines Lebens am Trinity College in Cambridge, zuerst als Erzieher, dann als Professor (1809—1839). Spielte eine Rolle bei der Reform des Mathematikunterrichts in Cambridge. Wurde 1822 zum Priester geweiht und 1839 zum Dekan von Ely ernannt. Ab 1818 Mitglied der Royal Society. D.S.B.

PEANO Giuseppe (1858—1932). Geb. in Spinetta (Italien). Kam mit 12 oder 13 Jahren nach Turin. Dort studierte er und begann seine akademische Laufbahn. Wurde 1890 Professor für Analysis an der Universität Turin und lehrte gleichzeitig an der Militärakademie von Turin. Mitglied der Turiner Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

PEIRCE Benjamin (1809—1880). Geb. in Salem, Massachusetts (USA). Studierte an der Harvard University. Wurde 1831 Repetitor, später Professor für Mathematik, Naturphilosophie und Astronomie. Von 1867 bis 1874 Direktor der United States Coast Survey (Küstenüberwachung), arbeitete in zahlreichen wissenschaftlichen Kommissionen, ferner Mitglied der National Academy of Sciences. D.S.B.

PEIRCE Charles Sanders (1839—1914). Geb. in Cambridge, Massachusetts (USA), Sohn von Benjamin Peirce. Studierte an der Harvard University. Arbeitete von 1859 bis 1891 als Physiker und Mathematiker bei der United State Coast Survey (Küstenüberwachung). Lehrte von 1879 bis 1884 Logik an der Johns Hopkins University in Baltimore. Ab 1877 Mitglied der National Academy of Sciences. D.S.B.

PETROVSKIJ Ivan Georgevič (1901—1973). Geb. in Sevsk (Rußland). Diplom 1917 am dortigen Polytechnikum. Arbeitete in verschiedenen Institutionen, bis er 1922 an die Moskauer Universität kam. War langjähriger Rektor der Moskauer Universität. Ab 1946 Mitglied der Akademie der Wissenschaften der UdSSR. D.S.B.

PFAFF Johann Friedrich (1765—1825). Geb. in Stuttgart. Studierte dort an der „Hohen Karlsschule", einer quasimilitärischen Ausbildungsstätte. Machte dann Reisen nach Göttingen, Berlin und Wien, um seine Kenntnisse zu vervollständigen. Wurde 1788 Professor für Mathematik an der Universität Helmstedt (Doktorvater von Gauß), blieb dort bis zu ihrer Schließung im Jahre 1810. Wurde danach Professor in Halle und übernahm 1812 die Leitung des Observatoriums. D.S.B.

PHRAGMÉN Lars Edvard (1863—1937). Geb. in Örebro (Schweden). Studierte an der Universität Uppsala. Lehrte Analysis an der Universität (1890—1892) und am Polytechnikum (1892—1904) von Stockholm. Von 1903 bis 1909 arbeitete er in Versicherungen. Erhielt 1907 eine Honorardozentur an der Universität Uppsala, 1929 eine an der Universität Oslo. Pog.

PICARD Charles Emile (1856—1941). Geb. in Paris. Studium an der Ecole normale supérieure und dort Promotion schon 1877. Lehrte an der Universität Toulouse, an der Sorbonne und an der Ecole normale. Ab 1889 Mitglied der Académie des sciences und ab 1917 deren ständiger Sekretär. Wurde Präsident des Bureau des Longitudes. 1924 in die Académie française gewählt. D.S.B.

PIERI Mario (1860—1913). Geb. in Lucca (Italien). Begann sein Studium an der Universität Bologna und beendete es an der Scuola normale superiore von Pisa. Lehrte an der Militärakademie und an der Universität von Turin, bis er 1900 an die Universität Catania (Sizilien) berufen wurde. Ab 1908 Professor in Parma. D.S.B.

PINCHERLE Salvatore (1853—1936). Geb. in Triest (damals Österreich). Studium bei Betti und Dini an der Universität Pisa und bei Weierstraß in Berlin, ehe er Professor in Palermo wurde. Im gleichen Jahr erhielt er einen Lehrstuhl an der Universität Bologna. Gründete 1822 die Italienische Mathematiker-Vereinigung, deren Präsident er wurde. Gehörte der Accademia Nazionale dei Lincei an. D.S.B.

PLANCHEREL Michel (1885—1967). Geb. in Bussy (Schweiz). Studium an den Universitäten Fribourg (Schweiz), Göttingen und Paris. Lehrte Mathematik an den Universitäten Genf (1910—1911) und Fribourg (1911—1920) und an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. Pog.

PLÜCKER Julius (1801—1868). Geb. in Elberfeld. Studierte an den Universitäten Bonn, Heidelberg, Berlin und Paris. Lehrte an den Universitäten Bonn (1828—1833) und Berlin (1833—1834) und wurde Professor an den Universitäten Halle (1834 bis 1836) und Bonn (1836—1868). D.S.B.

POINCARÉ Jules Henri (1854—1912). Geb. in Nancy. Studierte ab 1873 an der Ecole polytechnique, dann an der Ecole des Mines, um Bergwerksingenieur zu werden. Übte diesen Beruf ernsthaft aus, während er an seiner Dissertation (auf mathematischem Gebiet bei Darboux) arbeitete. Lehrte an den Universitäten Caen (1879—1881) und Paris (1881—1912). Wurde 1887 Mitglied der Académie des sciences und 1908 Mitglied der Académie française. D.S.B.

POINSOT Louis (1777—1859). Geb. in Paris. Studium an der Ecole polytechnique und an der Ecole des ponts et chaussées. Unterrichtete am Lycée Bonaparte in Paris (1804—1809), wurde dann zum Generalinspekteur der Kaiserlichen Universität und zum Assistenzprofessor an der Ecole polytechnique ernannt. War Examinator für Aufnahmeprüfungen von 1816 bis 1826. Wurde 1840 in den Conseil royal de l'instruction publique und 1843 in das Bureau des longitudes aufgenommen. Mitglied der Académie des sciences ab 1813. D.S.B.

POISSON Siméon Denis (1781—1840). Geb. in Sceaux. Gab Studium der Medizin auf, um ab 1798 an der Ecole polytechnique in Paris (bei Lagrange und Laplace) Mathematik zu studieren und vier Jahre später dort auch zu lehren. Wurde 1808 zum Astronomen im Bureau des longitudes und 1809 zum Professor an der neugegründeten Faculté des sciences in Paris ernannt. E.U.

VAN DER POL Balthasar (1889—1959). Geb. in Utrecht. Begann sein Studium in Utrecht, setzte es in London und Cambridge fort. Arbeitete in Cambridge bei J. J. Thompson. War von 1919 bis 1922 in einem physikalischen Laboratorium in Haarlem tätig, dann von 1922 bis 1925 in einem Forschungslabor der Firma Philips in Eindhoven. Wurde Direktor der Rundfunkanstalt. Pog.

PONCELET Jean Victor (1788—1867). Geb. in Metz. Studierte dort am Polytechnikum und an der Militärakademie. Schlug die militärische Laufbahn ein und nahm am Feldzug gegen Rußland teil, wo er in Gefangenschaft geriet (1812—1814). Wurde nach seiner Heimkehr zum Kapitän des Pioniercorps in Metz ernannt und

hielt Vorlesungen über „auf Maschinen angewandte Mechanik". Wurde 1834 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt und sowohl Professor an der Pariser Universität als auch Kommandant der Ecole polytechnique. Mitglied der Nationalversammlung ab 1848. Verweigerte dem zweiten Kaiserreich seine Dienste und mußte zurücktreten. D.S.B.

PRYM Friedrich Emil (1841—1915). Geb. in Düren (bei Aachen). Studium an den Universitäten Berlin, Heidelberg und Göttingen. Promotion 1863 in Berlin. Professor der Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich (1865—1869) und an der Universität Würzburg (1869—1909). Pog.

PUISEUX Victor (1820—1883). Geb. in Argenteuil. Studium an der Ecole normale supérieure. Lehrte am Collège royal in Rennes (1841—1844), an der Universität Besançon (1844—1849) und an der Ecole normale. War Cauchys Nachfolger auf dem Lehrstuhl für mathematische Astronomie am Collège de France (1857—1882). Mitglied des Bureau des calculs des Pariser Observatoriums (1855—1859) und des Bureau des longitudes (1868—1872). Wurde 1871 zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. D.S.B.

RADON Johann (1887—1956). Geb. in Tetschen (Böhmen). Studium an der Universität Wien. Lehrte Mathematik an der Universität Brünn, an der Technischen Hochschule und an der Universität Wien. Professor an der Universität Hamburg (1919), in Greifswald (1922), in Erlangen (1925) und in Breslau (1928). Kehrte 1945 endgültig nach Wien zurück und wurde 1947 zum Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften gewählt. D.S.B.

RAMANUJAN Srinivasa (1887—1920). Geb. in Indien. Konnte nach Beendigung der Schule nicht studieren und wurde Autodidakt; blieb ohne Universitätsstudium, bis G. H. Hardy ihn 1914 nach England kommen ließ. Arbeitete bei Hardy am Trinity College in Cambridge. Ernsthaft erkrankt, mußte er 1919 nach Madras (Indien) zurückkehren. D.S.B.

REIDEMEISTER Kurt Werner Friedrich (1893—1971). Geb. in Braunschweig. Studium an den Universitäten Freiburg, München und Göttingen. Lehrte an den Universitäten Hamburg (1920—1923), Wien (1923—1925) und Königsberg. Wurde 1933 auf Grund seiner Opposition gegen das nationalsozialistische Regime von der Universität Königsberg ausgeschlossen. War dann Professor in Marburg, wo er bis zu seiner Berufung 1955 nach Göttingen blieb. D.S.B.

RÉNYI Alfred (1921—1970). Geb. in Budapest. Studierte an den Universitäten Budapest und Moskau. Erhielt 1949 einen Lehrstuhl an der Universität Budapest, wurde im gleichen Jahr zum korrespondierenden Mitglied der Ungarischen Akademie der Wissenschaften gewählt. Übernahm 1950 die Leitung des mathematischen Forschungsinstituts der Akademie, die er bis zu seinem Tode innehatte. Ab 1956 ordentliches Mitglied der Akademie. Ferner Mitglied zahlreicher internationaler wissenschaftlicher Gesellschaften. Vizepräsident des Internationalen Statistischen Instituts (1965—1969). (*Zusatz bei der deutschen Ausgabe*).

RIBAUCOUR Albert (1845—1893). Geb. in Lille. Studierte ab 1865 an der Ecole normale supérieure und ab 1867 an der Ecole des ponts et chaussées. Begann 1870 eine brillante Laufbahn als Ingenieur, die er in Algerien fortsetzte, wo er bis zu seinem Tode in Philippeville arbeitete. D.S.B.

RICCATI Jacobo Francesco (1676—1754). Geb. in Venedig, entstammte dem venezianischen Adel. Studierte die Rechte an der Universität Padua, interessierte sich für Mathematik. Schlug glänzende Posten wie den des Präsidenten der Petersburger Akademie aus, um sich ganz seinen Studien zu widmen. Diente dem Senat von Venedig oft als Experte beim Bau von Dämmen und Kanälen. D.S.B.

RICCI-CURBASTRO Gregorio (1853—1925). Geb. in Lugo (Italien). Studierte Philosophie und Mathematik an den Universitäten Rom (1869) und Bologna (1872) sowie an der Scuola normale superiore von Pisa. Begab sich nach seiner Promotion 1875 nach München, wo er F. Klein traf. In Pisa 1879 Assistent bei Dini. Wurde

1880 zum Professor für Mathematik und Physik an der Universität Padua ernannt, wo er 45 Jahre wirkte. D.S.B.

RICHARD Jules-Antoine (1862–1956). Geb. in Blet in Cher (Frankreich). Promotion 1901 an der Faculté des sciences in Paris. Unterrichtete an Gymnasien in der Provinz, darunter in Tours, Dijon und Chateauroux. D.S.B.

RICHELOT Friedrich Julius (1808–1875). Geb. in Königsberg. Studierte und lehrte nur dort. Wurde 1854 in die Bayerische Akademie der Wissenschaften aufgenommen. Pog.

RIEMANN Georg Friedrich Bernhard (1826–1866). Geb. in Breselenz bei Dannenberg. Studium in Göttingen und Berlin, Promotion 1851 und Habilitation 1853 in Göttingen. Lehrte dort auch und wurde 1859 Nachfolger von Dirichlet auf dem Lehrstuhl für Mathematik. 1862 an Tuberkulose erkrankt, starb während seiner dritten Italienreise. B.B.M., D.S.B.

RIESZ Friedrich (1880–1956). Geb. in Györ (Ungarn). Studierte am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich, in Budapest, Göttingen und Paris. Wurde 1911 an die Universität von Koloszvar berufen. Als diese Universität 1920 nach Szeged übersiedelte, gründete er dort das János-Bolyai-Institut und die Zeitschrift *Acta scientarium mathematicarum*. Kehrte 1946 an die Universität Budapest zurück. D.S.B.

ROBERVAL Giles Personne de (1602–1675). Geb. in Roberval bei Senlis. Kam 1628 nach Paris, wurde in den wissenschaftlichen Kreis um Mersenne eingeführt. Gewann 1634 den Wettbewerb um Ramus' Lehrstuhl am Collège royal, den er sein ganzes Leben behielt. Wurde 1655 Nachfolger von Gassendi auf dem Lehrstuhl für Mathematik. War Mitglied der Académie des sciences seit ihrer Gründung im Jahre 1666. D.S.B.

ROCH Gustav (1839–1866). Geb. in Dresden. Studierte in Leipzig bis 1860, dann bei Riemann in Göttingen. Nach seiner Promotion 1863 wurde er Professor an der Universität Halle. Starb in Venedig. Pog.

RODRIGUES Olinde (1794–1851). Ökonom, Schüler und designierter Nachfolger des utopischen Sozialisten C. H. Saint-Simon. Publizierte die gesammelten Werke des Saint-Simonisten „Père" Enfantin.

ROSANES Jakob (1842–1922). Geb. in Brody (damals Österreich-Ungarn). Studierte an den Universitäten Berlin und Breslau. Promotion in Breslau, lehrte dort von 1865 bis 1911. D.S.B.

ROSENHAIN Johann Georg (1816–1887). Geb. in Königsberg. Studierte dort und lehrte danach in Breslau. Seine Beteiligung an den revolutionären Ereignissen 1848 zwang ihn, Breslau zu verlassen. Wurde 1851 Professor an der Universität Wien. Kehrte 1857 nach Königsberg zurück. D.S.B.

RUFFINI Paolo (1765–1822). Geb. in Valentano (Italien). Studierte Medizin und Mathematik an der Universität Modena. Wurde nach dem Diplom 1788 sofort Professor. Nach Besetzung Modenas 1796 durch die napoleonische Armee verweigerte er (1798) den Eid auf die Republik und verlor alle öffentlichen Ämter, praktizierte aber dennoch als Arzt. Hatte nach Napoleons Sturz die Lehrstühle für angewandte Mathematik und praktische Medizin bis zu seinem Tode inne. D.S.B.

RUNGE Carl David Tolmé (1856–1927). Geb. in Bremen. Wurde 1876 an der Universität München immatrikuliert, ging dann mit M. Planck zu K. Weierstraß nach Berlin. Arbeitete mit Weierstraß, bis man ihn 1886 als Professor an die Technische Hochschule Hannover berief. Wurde 1904 an der Universität Göttingen der erste Professor für angewandte Mathematik in Deutschland. D.S.B.

RUSSELL Bertrand Arthur William (1872–1970). Geb. in Trelleck (England). Wurde 1890 am Trinity College in Cambridge immatrikuliert und lernte dort A. N. Whitehead kennen. Lehrte dort Logik und Philosophie der Mathematik. Wurde während des ersten Weltkriegs wegen Veröffentlichung einer pazifistischen Streitschrift aus dem College ausgeschlossen und 1918 sogar verhaftet. Blieb nach seiner Reintegration 1925 in Cambridge, bis er starb. Ab 1908 Mitglied der Royal Society, 1950 Nobelpreis für Literatur. D.S.B.

SACCHERI (Giovanni) Girolamo (1667—1733). Geb. in San Remo (Italien). Trat 1685 in den Jesuitenorden ein und studierte Philosophie und Theologie in der Jesuitenschule von Brera. Lehrte ab 1694 Philosophie, zunächst in Turin, dann in Paris. War ab 1699 an der Universität Pavia tätig und hatte dort den Lehrstuhl für Mathematik bis zu seinem Tode inne. D.S.B.

SALMON George (1819—1904). Geb. in Cork (Irland). Studierte Mathematik am Trinity College in Dublin. Trat, nachdem er 1841 zum Mitglied des Kollegiums gewählt wurde, in den Orden der Kirche Irlands ein. Blieb 25 Jahre als Erzieher und Professor am College, gab 1860 die Mathematik zugunsten der Theologie auf, zu deren Professor er 1866 ernannt wurde. D.S.B.

SCHAUDER Pawel Juliusz (1899—1943). Lehrte Mathematik an der Universität Lwow. Wurde von den Nazis im Konzentrationslager ermordert. Pog.

SCHERING Ernst Christian Julius (1833—1897). Geb. in Sandbergen. Wurde 1852 an der Iniversität Göttingen immatrikuliert. War dort Professor für Mathematik und Astronomie sowie Direktor des von Gauß gegründeten Observatoriums für Erdmagnetismus. Pog.

SCHLÄFLI Ludwig (1814—1895). Geb. in Grasswil (Schweiz). Unterrichtete Mathematik in einer Schule in Thun. Arbeitete sich in die höhere Mathematik ein, als Steiner, der 1843 mit Jacobi, Dirichlet und Borchardt nach Rom reiste, ihn als Übersetzer wählte. Wurde täglich von Dirichlet unterrichtet. Lehrte ab 1848 Mathematik an der Universität Bern. D.S.B.

SCHMIDT Erhard (1876—1959). Geb. in Dorpat. Studierte dort, in Berlin und in Göttingen, wo er 1905 promovierte. Nach kurzen Aufenthalten in Bonn, Zürich, Erlangen und Breslau wurde er 1917 an die Universität Berlin berufen. Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften. War einer der Gründer der *Mathematischen Nachrichten* (1948). D.S.B.

SCHOENFLIES Arthur Moritz (1853—1928). Geb. in Landsberg a. d. Warthe. Studierte mit Kummer an der Universität Berlin (1870—1875). Lehrte 1884—1899 an der Universität Göttingen und wurde Professor an der Universität Königsberg (1899—1911), in Frankfurt (1911—1914) und an der dortigen Universität (1914 bis 1922). D.S.B.

SCHOTTKY Friedrich Hermann (1851—1935). Geb. in Breslau. Studierte an der dortigen Universität Mathematik und Physik und beendete sein Studium in Berlin bei Weierstraß und Helmholtz. 1882 als Professor an das Eidgenössische Polytechnikum Zürich berufen, 1892 an die Universität Marburg und 1902 an die von Berlin. Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

SCHRÖDER Friedrich Wilhelm Karl Ernst (1841—1902). Geb. in Mannheim. Studierte an den Universitäten Heidelberg und Königsberg. Nahm nach Lehrtätigkeit am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich (1865—1874), in Karlsruhe, Pforzheim und Baden 1874 einen Posten an der Technischen Hochschule Darmstadt und 1876 an der von Karlsruhe an, deren Rektor er 1890 wurde. D.S.B.

SCHUR Friedrich Heinrich (1856—1932). Geb. in Maciejervo (bei Posen). Studierte in Breslau und Berlin, wo er 1879 promovierte. Lehrte an der Universität Leipzig (1881—1888), wurde Professor an der Universität Dorpat (1888—1892), an den Technischen Hochschulen Aachen (1892—1897) und Karlsruhe (1897—1909) sowie den Universitäten Straßburg (1909—1918) und Breslau (1919—1924). Pog.

SCHUR Issai (1875—1941). Geb. in Mogiljow (im früheren Rußland). Studierte an der Universität Berlin, lehrte an der Universität Bonn (1911—1916) und dann an der Universität Berlin, bis er 1935 wegen der Naziherrschaft seinen Lehrstuhl aufgeben mußte. Emigrierte 1939 nach Palästina. E.U.

SCHWARZ Hermann Amandus (1843—1921). Geb. in Hermsdorf (Schlesien). Studierte Chemie und Mathematik in Berlin. Wurde 1867 zum Professor in Halle ernannt. Ab 1869 Professor am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich, ab 1875 in Göttingen. 1892 Nachfolger von Weierstraß an der Universität Berlin. Mitglied der Bayerischen und der Preußischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

SEIDEL Philipp Ludwig von (1821—1896). Geb. in Zweibrücken. Studierte in Berlin (bei Dirichlet), in Königsberg (bei Jacobi) und in München. Promotion 1846 in München, wo sich auch seine ganze wissenschaftliche Tätigkeit abspielte. Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

SERRET Joseph Alfred (1819—1885). Geb. in Paris. Studierte an der Ecole polytechnique, verbrachte dort einen Teil seiner wissenschaftlichen Laufbahn. Wurde 1861 als Professor für Himmelsmechanik ans Collège de France und 1863 als Professor für Infinitesimalrechnung an die Sorbonne berufen. Emeritierung 1871. Mitglied der Académie des sciences und des Bureau des longitudes. D.S.B.

SEVERI Francesco (1879—1961). Geb. in Arezzo (Italien). Studium an der Universität von Turin, Promotion dort 1900. War Assistent von Enriques in Bologna (1902) und von Bertini in Pisa (1903), später Professor in Rom, wo er 1939 das Istituto Nazionale di Alta Matematica gründete. D.S.B.

SIERPIŃSKI Wacław (1882—1969). Geb. in Warschau. Studierte an der Universität Warschau. Lehrte an der Universität Lemberg bis 1914, nach dem zweiten Weltkrieg in Warschau. Gründete um 1920 mit Janiszewski und Mazurkiewicz eine polnische Mathematikerschule, die sich mit Grundlagen der Mathematik und Mengentheorie befaßte, und war einer der Gründer der *Fundamenta mathematicae*. Vizepräsident der Polnischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

SKOLEM Albert Thoralf (1887—1963). Geb. in Sandsvaer (Norwegen). Studium an der Universität Kristiania (Oslo). Nach einer Studienreise in den Sudan vervollkommnete er seine mathematische Bildung in Göttingen, kehrte dann nach Kristiania zurück, um dort zu lehren (1916—1930 und 1938—1950). War von 1930 bis 1938 im Christian-Michelsen-Institut in Bergen tätig. D.S.B.

SMITH Henry John Stanley (1826—1883). Geb. in Dublin. Lebte ab 1840 in Oxford, studierte dort am Balliol College. Wurde 1860 Professor der Geometrie und leitete ab 1874 das Museum der Universität.Wurde 1861 Mitglied der Royal Society und 1877 Präsident des meteorologischen Dienstes von London. D.S.B.

STAUDT Karl Georg Christian von (1798—1867). Geb. in Rothenburg ob der Tauber. Schüler von Gauß in Göttingen, studierte danach in Erlangen und München. Wurde nach einer Lehrtätigkeit in Würzburg und Nürnberg 1835 zum Professor für Mathematik an die Universität Erlangen berufen. D.S.B.

STEENROD Norman Earl (1910—1971). Geb. in Dayton, Ohio (USA). Studierte an der Universität von Michigan, der Harvard und der Princeton University. Nach seiner Tätigkeit an den Universitäten von Princeton (1936—1939), Chicago (1939 bis 1942) und Michigan (1942—1947) wurde er Professor der Mathematik in Princeton. Mitglied der National Academy of Sciences. (*World Who's Who in Science*)

STEINER Jakob (1796—1863). Geb. in Utzensdorf (Schweiz), Sohn eines Bauern. Erhielt als Kind keine Schulbildung, kam dann an die Schule von Pestalozzi in Yverdon (Schweiz) und studierte danach an den Universitäten Heidelberg und Berlin. Verdiente seinen Lebensunterhalt als Privatlehrer. Wurde 1834 zum Professor an der Universität Berlin ernannt. Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften. D.S.B.

STEINITZ Ernst (1871—1928). Geb. in Laurahütte (Schlesien). Studierte an der Universität Breslau, mit Ausnahme eines Jahres in Berlin. Nachdem er an den Technischen Hochschulen Berlin und Breslau gelehrt hatte, wurde er 1920 als Professor an die Universität Kiel berufen. D.S.B.

STICKELBERGER Ludwig (1850—1936). Geb. in Buch bei Schaffhausen. Studierte an den Universitäten Heidelberg und Berlin. Promotion 1874 in Berlin. Lehrte Mathematik am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich (1874—1879) und an der Universität Freiburg. Pog.

STIELTJES Thomas Jan (1856—1894). Geb. in Zvolle (Holland). Studium an der Technischen Hochschule Delft. Nach einer Tätigkeit am Observatorium von Leiden (1877—1883) nahm er einen Lehrstuhl für Mathematik an der Universität Groningen an. Wurde 1885 zum Mitglied der Königlichen Akademie der Wissen-

schaften in Amsterdam gewählt. Lebte, nachdem er Groningen verließ, in Paris. Wurde nach seiner Habilitation 1886 an die Universität Toulouse berufen. D.S.B.

STIFEL Michael (1487–1567). Geb. in Eßlingen. Als Mönch und Anhänger Luthers wurde er mehrmals verfolgt und flüchtete 1522 zu Luther nach Wittenberg, der ihm mehrere Pfarrstellen verschaffte. Stifel errechnete den 18. Oktober 1533 als Datum für den Weltuntergang. Mußte, da dieses Ereignis nicht eintraf, noch einmal die Pfarrstelle wechseln und erhielt die von Holzdorf (zwischen Halle und Leipzig gelegen), wo er bis 1547 ungestört arbeitete. Der Schmalkaldische Krieg zwang ihn dann zur Flucht nach Preußen. Er lehrte Theologie und Mathematik an der Universität Königsberg (1551–1554), erhielt 1559 eine Berufung nach Jena. B.B.M., D.S.B.

STIRLING James (1692–1770). Geb. in Garden (Schottland). Studierte am Balliol College in Oxford, von dem er relegiert wurde, weil er sich weigerte, sich einzuordnen. Erhielt einen Posten in Venedig (1715–1725), ließ sich nach seiner Rückkehr in London nieder. Wurde 1727 zum Mitglied der Royal Society gewählt. Nahm 1735 den Posten eines Administrators bei der Schottischen Bergwerksgesellschaft in Leadhills an. D.S.B.

STOKES Sir George Gabriel (1819–1903). Geb. in Skreen (Irland). Studierte am Pembroke College in Cambridge. Wurde 1849 Professor für Mathematik an der Universität Cambridge. 1851 zum Mitglied der Royal Society gewählt, war deren Sekretär (1854–1885), dann ihr Präsident (1885–1890). D.S.B.

STOLZ Otto (1842–1905). Geb. in Hall (Österreich). Studierte Mathematik an den Universitäten Innsbruck und Wien. Wurde in Wien Professor, erhielt 1869 ein Stipendium für Studien in Berlin und Göttingen. Ab 1872 Professor an der Universität Innsbruck. D.S.B.

STUDY Eduard (1862–1930). Geb. in Coburg. Studierte an den Universitäten Jena, Straßburg, Leipzig und München. Lehrte danach an den Universitäten Leipzig (1885–1888) und Marburg (1888–1893) und an der Johns Hopkins University in Baltimore (USA), dann an den Universitäten Göttingen (1894–1897), Greifswald (1897–1904) und Bonn. D.S.B.

STURM Charles François (1803–1855). Geb. in Genf. Studierte dort, ging dann nach Paris als Privatlehrer zur Familie Broglie. Ließ sich dort 1825 endgültig nieder und lehrte an der Ecole polytechnique und ab 1840 an der Faculté des sciences in Paris. Mitglied der Académie des sciences ab 1836. E.U.

SUSLIN (SOUSLIN), Michail Jakovlevič (1894–1918). Geb. im Gouvernement Saratov. Schüler von Luzin in Moskau.

SYLOW Peter Ludvig Mejdell (1832–1918). Geb. in Christiania (Norwegen). Studierte an der dortigen Universität. Erhielt 1861 ein Stipendium und konnte Göttingen und Paris besuchen. Lehrte ab 1862 an der Universität Christiania, wo 1898 ein Lehrstuhl für ihn gegründet wurde. D.S.B.

SYLVESTER James Joseph (1814–1897). Geb. in London. Wurde Professor für Naturphilosophie am College der dortigen Universität (1838–1841). Nach vierjährigem Aufenthalt in den USA Tätigkeit in einer Londoner Versicherungsgesellschaft. Wurde nach dem Studium der Rechte (1846–1848) als Anwalt zugelassen. War später Professor für Mathematik an der Militärschule in Woolwich (1855 bis 1870), an der Johns Hopkins University in Baltimore (1876–1883) und an der Universität Oxford. Ab 1839 Mitglied der Royal Society. Gründete das *American Journal of Mathematics*. D.S.B.

TAKAGI Teiji (1875–1960). Geb. im Bezirk Gifu (Japan). Diplom 1897 an der Universität Tokio. Verbrachte drei Jahre in Deutschland, hörte Vorlesungen bei Frobenius in Berlin und Hilbert in Göttingen. Wurde 1900 an die Universität Tokio berufen. 1936 emeritiert. (*J. Math. Soc. Japan* 1960)

TAYLOR Brook (1685–1731). Geb. in Edmonton (England). Studierte Mathematik am Saint John College in Cambridge. Wurde 1712 zum Mitglied der Royal Society gewählt, war von 1714 bis 1718 ihr Sekretär. D.S.B.

THUE Axel (1863—1922). Geb. in Tönsberg (Norwegen). Studierte an den Universitäten Kristiania und Leipzig. Wurde Professor für angewandte Mathematik in *Kristiania (1903—1922).* D.S.B.

TIETZE Heinrich Franz Friedrich (1880—1964). Geb. in Schleinz (Österreich). Studium an den Universitäten Wien, München und Göttingen. Promotion 1904 in Wien, dort Beginn seiner wissenschaftlichen Laufbahn. Wurde Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Brünn (1910—1919) und an den Universitäten Erlangen (1919—1925) und München. Pog.

TOEPLITZ Otto (1881—1940). Geb. in Breslau. Studierte an der dortigen Universität. Ging dann nach Göttingen, wo er bis zu seiner Berufung an die Universität Kiel (1913) wirkte. Nahm 1928 einen Lehrstuhl in Bonn an. Wurde 1933 durch die Faschisten aus der Universität ausgeschlossen. Wanderte nach der Kristallnacht 1938 nach Jerusalem aus, wo er an der Hebräischen Universität tätig war. D.S.B.

TORRICELLI Evangelista (1608—1647). Geb. in Faenza (Italien). Studierte an der dortigen Jesuitenschule Mathematik und Philosophie. Wurde nach Rom geschickt, um die Vorlesungen von B. Castelli, einem ehemaligen Schüler von Galilei, zu hören. Wurde Galileis Sekretär und Gehilfe (1642) während der letzten drei Lebensmonate des Astronomen, war danach sein Nachfolger als Professor der Mathematik an der Akademie von Florenz. D.S.B.

TSCHIRNHAUS(EN) Ehrenfried Walter Graf von (1651—1708). Geb. in Kieslingswalde. Studierte an der Universität Leiden (1668—1675). Besuchte 1675 London und Paris. Begleitete den Grafen Nimpsch von Schlesien auf einer Reise nach Südfrankreich und Italien (1676—1679). Ließ sich danach auf dem Gut nieder, das er von seinem Vater geerbt hatte, und setzte seine mathematischen Studien fort. Wurde 1682 Mitglied der Pariser Académie des sciences. D.S.B.

TURING Alan Mathison (1912—1954). Geb. in London. Studierte am King's College in Cambridge. Setzte seine Forschungen in Princeton (1936—1938) und Cambridge (1938—1940) fort. Arbeitete von 1945 bis 1948 am National Physical Laboratory, lehrte ab 1948 Mathematik an der Universität Manchester. War Mitglied der Royal Society. D.S.B.

URYSOHN Paul (1898—1924). Geb. in Odessa. Studierte Mathematik an der Moskauer Universität und lehrte dort ab 1921. Ertrank während seiner Ferien in Batz (Frankreich). D.S.B.

DE LA VALLÉE-POUSSIN Charles Jean (1866—1962). Geb. in Louvin (Belgien). Studierte an der dortigen Universität und wurde sofort Professor. Lehrte dazwischen 1914—1918 an der Sorbonne und am Collège de France. Wurde 1945 auswärtiges Mitglied der Académie des sciences. (*World Who's Who in Science*)

VANDERMONDE Alexandre Théophile (1735—1796). Geb. in Paris. Ab 1771 Mitglied der Académie des sciences. Glühender Revolutionär, Freund von Monge. Gehörte der Commune (dem Gemeinderat von Paris und dem Klub der Jakobiner an. Wurde 1782 Direktor des Conservatoire des Arts et Métiers, 1792 Chef des Bureau de l'habillement des armées. D.S.B.

VEBLEN Oswald (1880—1960). Geb. in Decorah, Iowa (USA), Sohn eines Professors für Physik an der Universität Iowa. Studierte an der dortigen Universität, an der Harvard University und in Chicago. Lehrte dann an der Princeton University (1905—1932) und am Institute for Advanced Study (1932—1950). D.S.B.

VERONESE Giuseppe (1854—1917). Geb. in Chioggia (Italien). Studierte am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich, an der Universität Rom, wo er 1876 Assistent wurde, und in Leipzig (1880—1881). Zum Professor an die Universität Padua berufen. Mitglied der Accademia Nazionale dei Lincei und anderer italienischer Akademien. D.S.B.

VIÈTE (VIETA) François (1540—1603). Geb. in Fontenay-le-Comte. Studierte die Rechte an der Universität Poitiers. Trat 1564 in die Dienste der Antoinette d'Aubeterre als Erzieher. Lebte von 1570 bis 1573 in Paris, als Charles IX. ihn zum Rechtsberater des Parlaments der Bretagne in Rennes ernannte. Wurde 1580

Leiter der Eingabenabteilung beim Pariser Parlament und privater Berater des Königs. Von 1584 bis 1589 vom Hofe verbannt; wurde durch Henri III. rehabilitiert und zum Rechtsberater des Parlaments in Tours ernannt. Während des Krieges gegen Spanien dechiffrierte er für Henri IV. abgefangene verschlüsselte Nachrichten. Wurde 1602 verabschiedet. B.B.M., D.S.B.

VILLAT Henri René Pierre (1879–1972). Geb. in Paris. Studierte an der Ecole normale supérieure. Lehrte an den Universitäten Caen (1906–1911) und Montpellier (1911–1919). Wurde Professor für rationale Mechanik in Strasbourg (1919–1927) und schließlich Professor für Mechanik deformierbarer Medien an der Sorbonne. Pog.

VINOGRADOV Ivan Matveevič (1891–1983). Geb. in Miloljub. Studierte an der Petersburger Universität bis 1914. Arbeitete an der Universität Perm (1918–1920) sowie an der Technischen Hochschule und der Universität Leningrad (1920–1934). Wirkte ab 1932 als Direktor des Mathematischen Instituts der sowjetischen Akademie der Wissenschaften. Hatte zahlreiche Ehrenämter inne und war Mitglied in- und ausländischer Akademien und Gesellschaften, so z.B. der Amsterdamer Mathematischen Gesellschaft (1938), der Londoner Mathematischen Gesellschaft (1939) und der Royal Society (1942), der Pariser Académie des sciences (1946), der American Philosophical Society of Philadelphia (1942), der Niederländischen Akademie der Wissenschaften (1947), der Indischen Mathematischen Gesellschaft (1947), der Akademie der Künste und Wissenschaften in Boston (1947), der Akademie der Wissenschaften in Berlin (1950), der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (1950), der Accademia dei Lincei in Rom (1958). (*Zusatz bei der deutschen Ausgabe.*)

VOLTERRA Vito (1860–1940). Geb. in Ancona (Italien). Verbrachte einen großen Teil seiner Jugend in Florenz. Wurde unmittelbar, noch vor seiner Immatrikulation, zum Assistenten an der Universität Florenz ernannt. Studierte ab 1880 Mathematik und Physik in Pisa. Hielt in diesen Fächern Vorlesungen an den Universitäten Pisa (1883–1892), Turin (1892–1900) und Rom (1900–1931). Kämpfte ab 1922 gegen das Erstarken des Faschismus in Italien, wurde 1931 von der Universität ausgeschlossen. War Präsident der Accademia Nazionale dei Lincei. D.S.B.

WALLIS John (1616–1703). Geb. in Ashford (England). Wurde 1632 in das Emmanuel College in Cambridge aufgenommen, 1640 zum Priester geweiht. Verdiente sich seinen Lebensunterhalt als privater Anstaltsgeistlicher in London, wurde 1644 Mitglied des Queen's College in Cambridge. Von 1649 bis zu seinem Tode Professor der Geometrie in Oxford, 1657–1658 Custos archivarum derselben Universität. 1663 einer der Gründer der Royal Society. D.S.B.

WARING Edward (1736?–1798). Geb. bei Shrewsbury (England). Studierte am Magdalen College in Cambridge. Wurde 1760 Professor für Mathematik in Cambridge, 1763 Mitglied der Royal Society. D.S.B.

WEBER Heinrich (1842–1913). Geb. in Heidelberg. Studium an der dortigen Universität, mit Ausnahme eines Jahres in Leipzig. Danach Dozent in Königsberg (1873–1883), dann Professor an der Universität Heidelberg, am Eidgenössischen Polytechnikum Zürich, wieder an der Universität Königsberg, der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg sowie an den Universitäten Marburg, Göttingen und Straßburg. Mitbegründer der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und Herausgeber der *Mathematischen Annalen*. D.S.B.

WEDDERBURN Joseph Henry Maclagan (1882–1948). Geb. in Forfar (Schottland). Diplom an der Universität Edinburgh. Besuchte 1904 Leipzig, Berlin und Chicago. Lehrte an der Universität Edinburgh (1905–1909), dann bis zu seiner Emeritierung 1945 an der Universität in Princeton. Von 1912 bis 1928 Herausgeber der *Annals of Mathematics*. D.S.B.

WEIERSTRASS Karl Theodor Wilhelm (1815–1897). Geb. in Ostenfelde (Westfalen). Wurde 1834 an der Universität Bonn als Student der Rechte immatrikuliert,

verließ aber nach vier Jahren die Universität ohne Examen. Studierte dann Mathematik an der Akademie Münster, legte dort 1841 das Examen als Lehrer ab und unterrichtete dann an verschiedenen Gymnasien. Ihm wurde 1854 die Ehrendoktorwürde der Universität Königsberg verliehen. 1856 zum Professor am Gewerbeinstitut Berlin ernannt, nebenamtlich Professor an der Berliner Universität, wo er 1864 einen Lehrstuhl erhielt. Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften ab 1856. B.B.M., D.S.B.

WEINGARTEN Julius (1836–1910). Geb. in Berlin. Studierte Mathematik und Physik an der dortigen Universität. Unterrichtete an verschiedenen Berliner Schulen (1858–1864), lehrte dann an der Bauschule, danach an der neuen Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg. Aus gesundheitlichen Gründen ließ er sich 1902 in Freiburg nieder und lehrte dort bis 1908 als Honorarprofessor. D.S.B.

WESSEL Caspar (1745–1818). Geb. in Vestby (Norwegen). Studierte ein Jahr an der Universität Kopenhagen (1763), begann dann als Landmesser und Kartograph in Dänemark zu arbeiten. Wurde 1798 Direktor des Landvermessungsdienstes. D.S.B.

WEYL Hermann (1885–1955). Geb. in Elmshorn (bei Hamburg). Studierte an der Universität Göttingen, mit Ausnahme eines Jahres in München. Lehrte in Göttingen bis zu seiner Berufung 1913 an die Universität Zürich. Nahm 1930 Hilberts Lehrstuhl in Göttingen an. Verließ 1933 das faschistische Deutschland und ging an das Institute for Advanced Study in Princeton. D.S.B.

WHITEHEAD Alfred North (1861–1947). Geb. in Ramsgate (England). Verbrachte die Jahre 1880–1910 am Trinity College in Cambridge, zuerst als Student, dann als "Lecturer". Ließ sich 1910 in London nieder, wo er diverse Tätigkeiten am College der Universität ausübte und Professor am Imperial College of Science and Technology war. Wurde 1924 Professor für Philosophie an der Havard University, zog sich 1937 zurück. Mitglied der Royal Society und der British Academy. D.S.B.

WHITEHEAD John Henry Constantine (1904–1960). Geb. in Indien, Sohn des Bischofs von Madras und Neffe von Alfred North Whitehead. Kam mit zwei Jahren nach England, wurde in Eton erzogen. Studierte am Balliol College in Oxford. Arbeitete zunächst an der Universität in Princeton (1929–1932), lehrte dann (1932–1960) an der Universität Oxford, außer in den Kriegsjahren 1941–1945, als er bei der Admiralität und beim Foreign Office tätig war. Ab 1944 Mitglied der Royal Society, Präsident der Londoner Mathematical Society von 1953–1955. D.S.B.

WIENER Norbert (1894–1964). Geb. in Columbia, Missouri (USA). Studierte zunächst Zoologie an der Harvard University, dann Philosophie an der Cornell University. Während einer Europareise lernte er in Cambridge Russell kennen. Lehrte nach seiner Rückkehr in die USA Philosophie und Mathematik (1915–1919), bis er Professor im Department of Mathematics im Massachusetts Institute of Technology wurde. Dort blieb er bis zu seiner Emeritierung. D.S.B.

WREN Christopher (1632–1723). Geb. in East Knoyle (England). Studierte im Wadham College in Oxford (1649–1654), wurde Professor der Astronomie im Gresham College (1657–1661), dann an der Universität Oxford (1661–1673). Als Architekt rekonstruierte er nach dem großen Brand von London etwa fünfzig Kirchen, darunter die Saint-Paul-Kathedrale (1675–1710). War 1669–1718 Arbeitsminister unter Charles II. Spielte bei der Gründung der Royal Society 1662 eine herausragende Rolle. D.S.B.

WRONSKI (eigentlich HOENE-WRONSKI) Josef-Marie (1776?–1853). Geb. in Posen. Nahm 1791–1794 als Artillerieoffizier am Kampf um die Unabhängigkeit Polens teil, wurde in der Schlacht von Maciejowice gefangengenommen. Nach seiner Befreiung 1798 ging er zunächst nach Deutschland und studierte dort die Rechte, Philosophie und Mathematik. Ließ sich endgültig in Frankreich nieder, um sich seinen wissenschaftlichen Forschungen zu widmen. Pog.

ZAREMBA Stanisław (1863–1942). Geb. in Romonova (Rußland). Studierte in Petersburg (1882–1887) und Paris (1887–1891), dort 1889 Promotion. Unterrichtete Mathematik an französischen Gymnasien, bis er 1900 als Professor an die Universität Krakov berufen wurde. Pog.

ZERMELO Ernst Friedrich Ferdinand (1871–1953). Geb. in Berlin. Studium der Mathematik, Physik und Philosophie in Berlin, Halle und Freiburg, Promotion 1894 in Berlin. Lehrte in Göttingen (1899–1910) und Zürich (1910–1916). Mußte aus Gesundheitsgründen seine Tätigkeit aufgeben und ließ sich im Schwarzwald nieder. Wurde 1926 zum Honorarprofessor an der Universität Freiburg ernannt. Verließ, weil er das Hitlerregime ablehnte, 1935 die Universität. Nahm 1946 seine Tätigkeit wieder auf. D.S.B.

ZOLOTAREV Igor Ivanovič (1847–1878). Geb. in Petersburg. Studierte dort an der Physikalisch-Mathematischen Fakultät. Wurde 1868 Hilfsprofessor, 1876 Professor für Mathematik. Starb an einer Blutvergiftung. D.S.B.

Namenregister

Es wurden nur Autoren- und Herausgebernamen aufgenommen, Übersetzernamen nicht. Kursive Zahlen beziehen sich auf Literaturverzeichnisse. Bei russischen Namen sind – entsprechend den deutsch- oder anderssprachigen Originalarbeiten und Übersetzungen – mehrere Transkriptionen angegeben.

Sachregister[1)]

[1)] Dieses Sachregister umfaßt den „Index terminologique" des französischen Originals. Es soll bei Verweisen auf andere Abschnitte und beim Nachlesen bzw. Nachschlagen eine Hilfe sein. (*Anmerkung bei der deutschen Ausgabe*).